

*Facultad
de
Ciencias*

**ESTRUCTURAS GEOMÉTRICAS
DE LAS ESFERAS**
(Geometric structures on spheres)

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autora: Ángela Matute de Imaña

Director: Fernando Etayo Gordejuela

Junio-2025

Agradecimientos

Quisiera expresar mi agradecimiento a todas las personas que, de una forma u otra, han contribuido a que este Trabajo Fin de Grado haya sido posible.

En primer lugar, me gustaría agradecer al director de este trabajo, Fernando Etayo Gordeljuela, por su implicación, paciencia y apoyo en todo momento para la realización del mismo. Agradecerle también el ir más allá en su labor como docente y no solamente enseñarme matemáticas, sino demostrarme la belleza que hay detrás de ellas. Así como por las innumerables conversaciones que comenzaban en teoremas y derivaban en literatura, historia y cultura.

A los profesores del grado, por su gran disponibilidad, esfuerzo y excelente trato que nos han brindado siempre.

A mi familia. A mis padres, por ser un apoyo constante, no solamente a lo largo de la carrera, sino durante toda mi vida. Por confiar en mí como nadie y animarme a perseguir mis sueños. Por ser la red que hace que saltar no suponga tanto vértigo. Y a mi hermana, por ser un soplo de aire fresco en medio del caos del estudio. Por apoyarme y seguirme la corriente cuando le hablo de matemáticas.

Y por último, gracias a las personas que la vida me ha ido poniendo en el camino: A mis amigas de siempre, por seguir acompañándome y apoyándome incondicionalmente. A la gente que he conocido gracias a las matemáticas, por los momentos compartidos estos cuatro años, porque las risas han superado siempre a todo lo demás. En especial, a las personas con las que he convivido, porque habéis hecho que una ciudad nueva se convierta en una a la que llamar casa. Y a aquellas que viven muy, muy lejos, pero siempre se han sentido muy cerca, gracias por acompañarme en todo momento y enseñarme a mirar la vida de forma especial.

Resumen:

El objetivo de este trabajo es estudiar principalmente tres tipos de estructuras sobre las esferas: las paralelizaciones, las casi-complejas y las casi-contacto. Se construyen ejemplos concretos, como una estructura compleja en la esfera \mathbb{S}^2 y una estructura casi-compleja en \mathbb{S}^6 . También se incluye una demostración del Teorema de Kirchhoff, que relaciona las esferas paralelizables con las que admiten estructuras casi-complejas. Además, se prueba que todas las esferas de dimensión impar admiten estructuras casi-contacto. Estas tres estructuras motivan la introducción de otras relacionadas, como las casi-hermíticas, simplécticas y de contacto.

Palabras clave: Esferas, estructuras geométricas, paralelizables, estructuras casi-complejas, estructuras casi-contacto, Teorema de Kirchhoff.

Abstract:

The aim of this work is to study three main types of structures on spheres: parallelizations, almost-complex structures and almost-contact structures. Concrete examples are constructed, such as a complex structure on the sphere \mathbb{S}^2 and an almost-complex structure on \mathbb{S}^6 . A proof of Kirchhoff's Theorem is also included, establishing a connection between parallelizable spheres and those that admit almost-complex structures. Moreover, it is shown that all odd-dimensional spheres admit almost-contact structures. These three structures motivate the introduction of other related ones, such as almost-hermitian, symplectic and contact structures.

Key words: Spheres, geometric structures, parallelizable, almost-complex structures, almost-contact structures, Kirchhoff's Theorem.

Índice

Introducción	1
Notación	3
1. Álgebras reales	4
1.1 De los reales a los octoniones	4
1.2 Productos vectoriales	7
1.3 Álgebras reales	9
1.4 Construcción de Cayley-Dickson	12
2. Variedades paralelizables	16
3. Estructuras de tipo complejo en una variedad	18
3.1 Estructura compleja y casi-compleja	18
3.1.1 Estructura compleja en la esfera \mathbb{S}^2	20
3.1.2 Estructura casi-compleja en la esfera \mathbb{S}^6	23
3.2 Estructura casi-hermítica y estructuras de tipo simpléctico	25
4. Teorema de Kirchhoff	30
5. Estructuras casi-contacto y estructuras contacto	34
5.1 Estructuras casi-contacto	34
5.2 Estructuras contacto	41
6. Productos de esferas	43
6.1 Estructura paralelizable	44
6.2 Estructura casi-compleja	44
6.3 Estructura casi-contacto	46
7. Síntesis final	50
A. Anexo	I
A.1 Álgebra Lineal y Geometría Afín	I
A.2 Variedades Diferenciables	I
A.2.1 Definiciones básicas	I
A.2.2 Aplicaciones diferenciables	II
A.2.3 Topología de las variedades diferenciables	II
A.2.4 Campos vectoriales	III
A.2.5 Espacio tangente	IV
A.2.6 Fibrado tangente	V
A.2.7 Aplicación tangente o diferencial	V
A.2.8 Variedades orientables	V
A.2.9 Formas diferenciales	VI
A.2.10 Teorema de inmersión de Whitney	VI
A.2.11 Distribuciones	VII
A.2.12 Campos tensoriales	VII
A.2.13 Álgebra de Grassmann	VII

Referencias

Introducción

Me gustaría comenzar este trabajo citando a la matemática Sofya Kovalevskaya:

It seems to me that the poet has only to perceive that which others do not perceive, to look deeper than others look. And the mathematician must do the same thing.

Cita que refleja, en parte, la finalidad de este trabajo: de entrada, podría parecer que no puede haber algo más simple que una esfera. Sin embargo, las páginas que siguen están dedicadas casi por completo a explorar la riqueza y variedad de estructuras que se pueden construir sobre ellas.

Cuando alguien escucha la palabra *esfera*, lo primero en lo que piensa es en una bola o una pelota, de ahí la sencillez del objeto. Si es alguien matemático, ya empezaría a preguntarse otro tipo de propiedades como la dimensión, la curvatura o sus propiedades topológicas. Y lo cierto es, que aunque las definiciones de las esferas prácticamente coincidan y se generalicen de la siguiente manera:

$$\mathbb{S}^n = \{x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

(donde estamos hablando de la esfera de dimensión n , de radio 1, centrada en el origen), las propiedades que presentan dependen, en gran medida, de su dimensión. Algo que puede resultar muy sorprendente pues, aparentemente, uno podría pensar que “son todas iguales”.

El objetivo de este trabajo es estudiar tres estructuras principales sobre las esferas: las paralelizaciones, las casi-complejas y las casi-contacto. Aunque no serán las únicas que se mencionen, pues también introduciremos brevemente las casi-hermíticas, las de tipo simpléctico y las de contacto. Todas las estructuras previamente mencionadas guardan una estrecha relación con la dimensión de las variedades que las admiten, luego no se podrán definir de forma general en todas las esferas. En particular, sólo serán paralelizables las esferas de dimensiones uno, tres y siete, mientras que únicamente las esferas de dimensiones dos y seis admitirán una estructura casi-compleja. Sin embargo, todas las esferas de dimensión impar son variedades casi-contacto. Ya únicamente con estos ejemplos, podemos ver el gran desequilibrio que hay en el número de esferas que admiten unas estructuras u otras.

Y no es solamente llamativa esta variedad de comportamientos, sino también las relaciones que hay entre las distintas nociones. Como ejemplo tenemos el Teorema de Kirchoff, que relaciona las paralelizaciones con las estructuras casi-complejas, afirmando que si una esfera es casi-compleja, entonces la esfera de una dimensión superior es paralelizable. De hecho, fue el estudio realizado de este teorema en el artículo [12], la semilla inicial que dio origen a todo el trabajo.

Las propiedades geométricas de las esferas están estrechamente relacionadas con las propiedades algebraicas de los espacios euclídeos. Y es en este punto donde daremos comienzo al contenido del trabajo:

En el capítulo 1, hablaremos sobre las álgebras reales: los números reales, los complejos, los cuaterniones y los octoniones. Introduciremos estos conjuntos, así como las operaciones que se definen sobre ellos para dotarlos de estructura de álgebra. También dedicaremos una sección al producto vectorial, que únicamente se puede definir en los espacios euclídeos de dimensiones tres y siete, algo que será crucial para dotar de estructuras casi-complejas a las esferas

de dimensiones dos y seis. En las dos últimas secciones del capítulo, daremos las nociones necesarias para comprender bien las propiedades de las álgebras de división normadas que, junto con la construcción de Cayley-Dickson, nos permitirán probar que los octoniones son un álgebra alternativa.

En el capítulo 2, definiremos lo que es una variedad paralelizable, esto es, una variedad que admite una base global de campos vectoriales, y demostraremos algunas de sus propiedades. En particular, mencionaremos que las esferas de dimensión par no pueden ser paralelizables, pues no admiten un campo sin ceros, mientras que todas las esferas de dimensión impar admiten uno.

En el capítulo 3, pasaremos a hablar de las estructuras de tipo complejo en una variedad. Comenzaremos definiendo la noción de estructura compleja y casi-compleja. Las variedades complejas son las que admiten un atlas holomorfo sobre \mathbb{C}^n , mientras que el concepto de casi-compleja es un debilitamiento de dicha condición. De modo muy geométrico y a partir del producto vectorial de \mathbb{R}^3 , construiremos una estructura casi-compleja sobre la esfera de dimensión dos, que además será compleja. La misma idea, pero con el producto vectorial de \mathbb{R}^7 , servirá para construir una estructura casi-compleja sobre la esfera \mathbb{S}^6 . Sin embargo, en este último caso, no se tratará de una estructura compleja, lo que dará pie a comentar el problema de Hopf: *¿Es la esfera \mathbb{S}^6 una variedad compleja?* Problema que se formuló en 1947 y que a día de hoy, todavía sigue abierto. Cerraremos el capítulo hablando sobre las estructuras casi-hermíticas, que combinan una estructura casi-compleja con una métrica riemanniana en la variedad, y de las de tipo simpléctico, concluyendo que únicamente la esfera de dimensión dos admite esta última estructura.

El capítulo 4, se dedicará exclusivamente a la demostración del Teorema de Kirchhoff, el cual relaciona las esferas paralelizables con las casi-complejas: si una esfera admite una estructura casi-compleja, entonces la esfera de una dimensión superior es paralelizable.

En el capítulo 5, se introducirán las estructuras contacto y casi-contacto, que son propias de todas las esferas de dimensión impar. Se construirá con detalle la estructura casi-contacto de la esfera de dimensión tres y se generalizará dicha construcción a todas las esferas de dimensión impar.

Dedicaremos el capítulo 6 a utilizar los conocimientos que se han ido desarrollando en el trabajo para decidir qué estructuras de las tres principales que se han descrito (paralelizaciones, casi-complejas y casi-contacto) admiten determinados productos de esferas.

Por último, en el capítulo 7, haremos un breve recopilatorio de todas las estructuras que se han ido mencionando durante todo el trabajo, así como las analogías entre ellas.

A lo largo del trabajo, se asume cierta familiaridad con nociones de Geometría Diferencial. No obstante, al final del todo se incluye el Anexo A, donde se dedican unas páginas a presentar definiciones básicas y algunos resultados que forman parte del contenido del Grado en Matemáticas, pero que pueden ser de utilidad. Estos resultados se referenciarán a lo largo del trabajo, de modo que el lector pueda consultarlos si lo considera necesario.

La originalidad de este trabajo radica principalmente en la recopilación de las distintas estructuras que se mencionan, así como la organización del mismo, hilando unas estructuras con

otras. No obstante, también se han añadido algunas aportaciones propias, como la realización de las demostraciones de las secciones 1.3 y 1.4 o pequeñas correcciones y modificaciones en la demostración del Teorema de Kirchhoff. Asimismo, la construcción de la estructura casi-contacto en el ejemplo 5.4, junto con la demostración del teorema 5.5, los ejemplos del capítulo 6 y el teorema 6.6 también son propios. Por último, también lo son todas las ilustraciones que aparecen en el trabajo, que han sido realizadas mediante el paquete tikz de LaTeX o con GeoGebra.

Notación

Antes de comenzar, vamos a establecer la notación utilizada a lo largo del texto para distinguir ciertas nociones con precisión.

En primer lugar, las definiciones de espacio vectorial (Definición A.1) y espacio afín (Definición A.2) juegan un papel importante a la hora de diferenciar algunas nociones como la de espacio tangente a una variedad, por lo que emplearemos distintas notaciones para referirnos a ellos.

Notación 0.1 *Para evitar ambigüedades, a partir de ahora, cuando hablemos de un espacio vectorial, escribiremos sobre la letra que lo denota, una flecha. Del mismo modo, también escribiremos una flecha sobre los elementos de dicho espacio.*

Por ejemplo, sea p un punto de \mathbb{R}^n , lo podemos ver como un punto del espacio afín, en ese caso escribiremos simplemente p , o como un elemento del espacio vectorial. En este último caso en realidad nos estamos refiriendo al elemento $\vec{0}_p$ que, para abreviar, escribiremos como \vec{p} .

Como acabamos de mencionar, dada M una variedad diferenciable (Definición A.5), la noción de espacio tangente en un punto a una variedad (Definición A.21) aparecerá en numerosas ocasiones a lo largo del trabajo. Dicha noción tiene una estructura de espacio vectorial, al definirse sobre una variedad abstracta. Sin embargo, cabe destacar que, cuando estamos en \mathbb{R}^n , podemos hablar también del **espacio afín tangente**, generado por las derivadas de las curvas contenidas en una variedad diferenciable M y que pasan por p , un punto de M . El espacio afín tangente en p es el espacio afín que pasa por dicho punto y tiene como dirección el espacio vectorial tangente. Ambos espacios son distintos y, por tanto, se emplearán distintas notaciones para referirse a cada uno de ellos.

Notación 0.2 *Por ejemplo, si estamos hablando del espacio vectorial tangente a la esfera de dimensión n , centrada en el origen, de radio uno, \mathbb{S}^n , en un punto $y \in \mathbb{S}^n$, utilizaremos la notación $\vec{T}_y\mathbb{S}^n$, y para denotar un vector de dicho espacio, escribiremos \vec{v} . Por otro lado, escribiremos simplemente $T_y\mathbb{S}^n$ para denotar el espacio afín tangente.*

Normalmente, en variedades abstractas solamente se trabaja con el espacio vectorial tangente y, por ello, se omite la flecha. Sin embargo, como en nuestro caso estaremos hablando de subvariedades de \mathbb{R}^n y haremos, en ocasiones, alusión al espacio afín tangente, se emplea esta notación para diferenciarlos y saber en todo momento a cuál nos referimos.

1 Álgebras reales

Desde el punto de vista del análisis matemático, los espacios \mathbb{R}^n comparten muchas propiedades. Sin embargo, al considerar ciertas estructuras algebraicas adicionales, aparecen diferencias significativas. Este hecho contribuye a que las esferas \mathbb{S}^n presenten propiedades tan diferentes entre sí. Por ello, antes de estudiar las estructuras definidas sobre las esferas, es fundamental comprender las de los espacios euclídeos.

Las esferas pueden ser vistas como hipersuperficies de espacios euclídeos de una dimensión mayor, esto es, la esfera \mathbb{S}^n es una hipersuperficie de \mathbb{R}^{n+1} . En consecuencia, las estructuras algebraicas de los espacios euclídeos determinan propiedades geométricas sobre las esferas. Por este motivo, comenzaremos estudiando algunos conceptos sobre las álgebras reales.

Un álgebra es un espacio vectorial real dotado de una aplicación bilineal interna, como veremos con detalle en la sección tercera. Como todo espacio vectorial real de dimensión finita es isomorfo a un espacio \mathbb{R}^n , directamente vamos a estudiar estructuras de álgebra en estos espacios. En particular, en la primera sección, vamos a hablar sobre los espacios de dimensiones 1, 2, 4 y 8 ya que, como veremos más adelante, serán las únicas álgebras de división normada, dando pie a describir los números reales (\mathbb{R}), los números complejos (\mathbb{C}), los cuaterniones (\mathbb{H}) y los octoniones (\mathbb{O}).

Continuaremos el capítulo con una segunda sección estudiando los productos vectoriales en \mathbb{R}^3 y \mathbb{R}^7 , que dotan a estos espacios también de estructura de álgebra, y que están muy relacionados con los cuaterniones y octoniones.

En la tercera sección hablaremos de las álgebras reales desde un punto de vista más abstracto, que nos permitirá definir algunos conceptos y demostrar propiedades generales de las álgebras que más adelante nos serán de utilidad.

Asimismo, para terminar con el capítulo, presentaremos la construcción de Cayley-Dickson, que nos permitirá demostrar ciertas propiedades de dichas álgebras, como el hecho de que los octoniones no sean asociativos, algo que será muy relevante para las estructuras que se definan sobre la esfera \mathbb{S}^6 .

A lo largo de este capítulo, se seguirá principalmente la referencia [2].

1.1 De los reales a los octoniones

Como ya hemos mencionado, comenzaremos hablando de los espacios euclídeos de dimensiones 1, 2, 4 y 8, las únicas álgebras de división normada.

En primer lugar, tenemos los números reales \mathbb{R} que forman un álgebra con su estructura de espacio vectorial sobre sí mismo de dimensión uno y su producto habitual. A continuación, tenemos los números complejos \mathbb{C} , cuyo conjunto se puede definir de la siguiente manera:

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$$

donde $i^2 = -1$. Claramente, dicho conjunto es isomorfo, como espacio vectorial real, a \mathbb{R}^2 , pues cada número complejo $a + bi$ se puede ver como el par de números reales (a, b) .

En todas las estructuras de las que vamos a hablar, hay una suma (la que dota al conjunto de estructura de espacio vectorial) y un producto interno. En el caso de \mathbb{C} , la suma se realiza componente a componente (si vemos los números complejos como elementos de \mathbb{R}^2) y el producto se define de la siguiente manera: sean $z = a + bi, w = c + di \in \mathbb{C}$,

$$zw = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

En la misma línea, se puede definir el conjunto de los cuaterniones de la siguiente forma:

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

donde $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ y se cumplen las relaciones que aparecen en la Tabla 1.

Estos números fueron descubiertos por el matemático irlandés William Rowan Hamilton (de ahí que se escriba \mathbb{H}) en 1843. Tras muchos meses intentando generalizar la relación entre los números complejos y el plano a un espacio de dimensión 3, Hamilton se dio cuenta de que en realidad necesitaba recurrir a la dimensión 4, surgiendo así los cuaterniones. Cuenta la leyenda que en el momento de su descubrimiento y en un acto de vandalismo matemático, grabó las siguientes ecuaciones sobre el puente de Brougham (Dublín, Irlanda):

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

De hecho, los cuaterniones surgieron antes que la noción de espacio vectorial y la teoría del álgebra lineal, utilizándose para estudiar los movimientos en el espacio tridimensional antes de hacerlo con matrices. Esto hizo que una vez aparecieran estas nociones más modernas, perdieran popularidad. Sin embargo, en los últimos años la ha ido recuperando, al ser muy relevantes en ámbitos de computación, como en diseño geométrico asistido por ordenador.

De nuevo, este conjunto es claramente isomorfo a \mathbb{R}^4 , pues cada cuaternión de la forma $a + bi + cj + dk$ se puede ver como el elemento (a, b, c, d) de \mathbb{R}^4 .

La suma se define componente a componente y el producto viene dado por la siguiente tabla, que muestra el resultado de multiplicar un elemento de una fila por uno de una columna:

	i	j	k
i	-1	k	$-j$
j	$-k$	-1	i
k	j	$-i$	-1

Tabla 1: Producto de cuaterniones

Tal y como se muestra en la tabla, los cuaterniones no cumplen la propiedad conmutativa para el producto. Sin embargo, sí que siguen conservando todavía la propiedad asociativa. Así, los cuaterniones tienen estructura de álgebra de división, concepto que definiremos más adelante.

Por último, hablaremos de los octoniones \mathbb{O} , también conocidos como números de Cayley. Tras descubrir los cuaterniones, Hamilton compartió las ideas con su amigo John T. Graves, quien trató de hacer algo similar pero en dimensión ocho. Y, durante un tiempo, fue desarrollando sus ideas sobre los octoniones a través de cartas con Hamilton. Sin embargo, de forma paralela, Arthur Cayley, impresionado por el descubrimiento de los cuaterniones, también dio con la idea sobre los octoniones, incluyendo una breve descripción sobre ellos en uno de sus artículos. Graves trató de reclamar su prioridad en el descubrimiento, pero ya era demasiado tarde: los octoniones fueron bautizados como números de Cayley. Estos números,

sin embargo, no tuvieron tanta repercusión como los cuaterniones, pues no se les encontraba una aplicación directa a la geometría o la física.

Los octoniones se pueden escribir como el siguiente conjunto:

$$\mathbb{O} = \left\{ a_0 + \sum_{i=1}^7 a_i e_i : a_j \in \mathbb{R} \forall j \in \{0, \dots, 7\} \right\}$$

donde para cada $i \in \{1, \dots, 7\}$ se tiene que $e_i^2 = -1$ y las relaciones de la Tabla 2. En este caso, el isomorfismo se da con el espacio \mathbb{R}^8 , ya que cada octonión de la forma $a_0 + a_1 e_1 + \dots + a_7 e_7$ se puede ver como el elemento (a_0, a_1, \dots, a_7) de \mathbb{R}^8 . Al igual que en los casos anteriores, la suma se define componente a componente, mientras que el producto viene dado por la siguiente tabla, que muestra el resultado de multiplicar un elemento de la fila i -ésima por uno de la columna j -ésima:

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	-1	e_4	e_7	$-e_2$	e_6	$-e_5$	$-e_3$
e_2	$-e_4$	-1	e_5	e_1	$-e_3$	e_7	$-e_6$
e_3	$-e_7$	$-e_5$	-1	e_6	e_2	$-e_4$	e_1
e_4	e_2	$-e_1$	$-e_6$	-1	e_7	e_3	$-e_5$
e_5	$-e_6$	e_3	$-e_2$	$-e_7$	-1	e_1	e_4
e_6	e_5	$-e_7$	e_4	$-e_3$	$-e_1$	-1	e_2
e_7	e_3	e_6	$-e_1$	e_5	$-e_4$	$-e_2$	-1

Tabla 2: Producto de octoniones

De nuevo, la tabla nos permite ver perfectamente que el producto de octoniones no es conmutativo. Pero, además, en este caso, tampoco es asociativo. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} (e_7 e_2) e_5 &= e_6 e_5 = -e_1 \\ e_7 (e_2 e_5) &= e_7 (-e_3) = e_1 \end{aligned}$$

Observación 1.1 Para recordar el producto de los octoniones, se puede utilizar el plano de Fano como regla mnemotécnica. El plano de Fano es una representación del plano proyectivo de dimensión 2 sobre el espacio vectorial $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. A continuación, mostramos una representación del plano de Fano, al que hemos añadido unas flechas para indicar el sentido en el que se debe hacer el producto. Si se invierte el sentido, entonces cambia el signo del resultado.

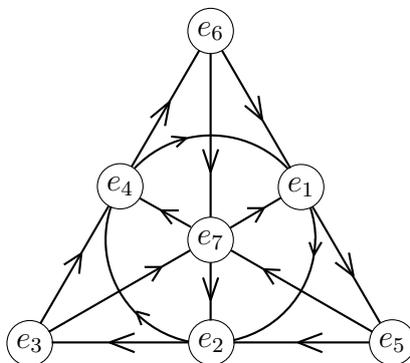


Figura 1: Plano de Fano. Representación del espacio proyectivo $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}^2$.

De forma análoga, también se podría dar una regla mnemotécnica para el producto de los cuaterniones, utilizando en su lugar la recta proyectiva sobre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Al igual que antes, añadimos unas flechas para indicar el sentido en el que se debe hacer el producto. Si se realiza en sentido contrario, entonces cambia el signo del resultado.

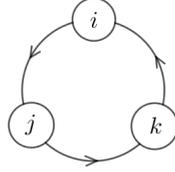


Figura 2: Representación del producto de los cuaterniones mediante la recta proyectiva $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}^1$.

1.2 Productos vectoriales

A continuación, vamos a hablar de un producto con muchas propiedades que nos interesan pero que, como señalaremos, no se puede definir en todos los \mathbb{R}^n : el producto vectorial.

Definición 1.2 *A una aplicación $\times : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ bilineal y anticonmutativa que cumple que dados $(\vec{v}, \vec{w}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ entonces $\vec{v} \times \vec{w}$ es perpendicular (respecto del producto escalar standard de \mathbb{R}^n) a \vec{v} y \vec{w} , se le denomina **producto vectorial**.*

De hecho, como muestra el artículo [16], esta aplicación solo se puede definir para $n = 3$ y $n = 7$. En parte, esto se debe a que el producto vectorial tiene relación con el producto en los cuaterniones en el caso de \mathbb{R}^3 y con el producto de los octoniones en el caso de \mathbb{R}^7 .

Definición 1.3 *Sea \mathbb{R}^3 dotado del producto escalar standard y sean $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$. Se llama **producto vectorial en \mathbb{R}^3** a*

$$\vec{v} \times \vec{w} = (v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1) \quad (1)$$

Observación 1.4 *Existe una regla mnemotécnica para acordarse de la expresión (1):*

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = (v_2w_3 - v_3w_2)\vec{e}_1 + (v_3w_1 - v_1w_3)\vec{e}_2 + (v_1w_2 - v_2w_1)\vec{e}_3$$

donde $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ es la base canónica de \mathbb{R}^3 .

Veamos que a partir del producto que hemos definido, se obtienen una serie de propiedades, que vamos a enunciar y probar porque emplearemos posteriormente, por ejemplo, al definir la estructura casi-compleja de la esfera \mathbb{S}^2 :

Propiedades 1.5 *Sean $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$, el producto vectorial cumple las siguientes propiedades:*

- i) $\vec{v} \times \vec{w}$ es ortogonal a \vec{v} y \vec{w} .
- ii) Si $\vec{v} \times \vec{w} \neq 0$, entonces $\{\vec{v}, \vec{w}, \vec{v} \times \vec{w}\}$ es una base positivamente orientada.
- iii) $\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$

$$iv) (\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) \times \vec{u} = \lambda(\vec{v} \times \vec{u}) + \mu(\vec{w} \times \vec{u}) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Demostración. Sean $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$, demostramos cada apartado de forma individual.

$i)$ Basta calcular el producto escalar:

$$\begin{aligned} (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{v} &= (v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1) \cdot (v_1, v_2, v_3) = \\ &= v_1v_2w_3 - v_1v_3w_2 + v_2v_3w_1 - v_2v_1w_3 + v_3v_1w_2 - v_3v_2w_1 = 0 \end{aligned}$$

Análogamente, se tiene que $(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{w} = 0$.

$ii)$ Consideramos la matriz de sus vectores:

$$\begin{pmatrix} v_1 & w_1 & (v_2w_3 - v_3w_2) \\ v_2 & w_2 & (v_3w_1 - v_1w_3) \\ v_3 & w_3 & (v_1w_2 - v_2w_1) \end{pmatrix}$$

Desarrollando por la última columna, tenemos que el determinante de dicha matriz es $\|\vec{v} \times \vec{w}\|^2 > 0$. Luego, los vectores son linealmente independientes y, por tanto, el conjunto $\{\vec{v}, \vec{w}, \vec{v} \times \vec{w}\}$ se trata de una base. De hecho, esta matriz es la matriz de cambio de base de la base canónica de \mathbb{R}^3 a $\{\vec{v}, \vec{w}, \vec{v} \times \vec{w}\}$. Como su determinante es positivo, se trata de una base positivamente orientada.

$iii)$ Basta desarrollar los dos miembros:

$$\begin{aligned} \vec{v} \times \vec{w} &= (v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1) \\ \vec{w} \times \vec{v} &= (w_2v_3 - w_3v_2, w_3v_1 - w_1v_3, w_1v_2 - w_2v_1) \end{aligned}$$

Claramente, $\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$.

$iv)$ Sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, desarrollando:

$$\begin{aligned} (\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) \times \vec{u} &= (\lambda v_1 + \mu w_1, \lambda v_2 + \mu w_2, \lambda v_3 + \mu w_3) \times (u_1, u_2, u_3) = \\ &= (\lambda v_2 u_3 + \mu w_2 u_3 - \lambda v_3 u_2 - \mu w_3 u_2, \lambda v_3 u_1 + \mu w_3 u_1 - \lambda v_1 u_3 - \mu w_1 u_3, \\ &\quad \lambda v_1 u_2 + \mu w_1 u_2 - \lambda v_2 u_1 - \mu w_2 u_1) = \\ &= \lambda(v_2 u_3 - v_3 u_2, v_3 u_1 - v_1 u_3, v_1 u_2 - v_2 u_1) + \\ &\quad + \mu(w_2 u_3 - w_3 u_2, w_3 u_1 - w_1 u_3, w_1 u_2 - w_2 u_1) = \\ &= \lambda(\vec{v} \times \vec{u}) + \mu(\vec{w} \times \vec{u}) \end{aligned}$$

□

Observación 1.6 *De hecho, las propiedades $i)$, $iii)$ y $iv)$ prueban que la aplicación que hemos definido cumple la Definición 1.3, pues es bilineal, anticonmutativa y el producto es ortogonal a cada uno de los vectores implicados.*

Como ya hemos mencionado brevemente con anterioridad, el producto vectorial en \mathbb{R}^3 está relacionado con el producto de los cuaterniones imaginarios, los cuales son el siguiente conjunto $\text{Im } \mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \in \mathbb{H} : a = 0\}$. Si identificamos los cuaterniones $i = (1, 0, 0)$, $j = (0, 1, 0)$, $k = (0, 0, 1)$, resulta que el producto de dos cuaterniones, coincide

con su producto vectorial (viéndolos como vectores de \mathbb{R}^3 con el isomorfismo correspondiente), salvo en el caso $i \times i, j \times j$ y $k \times k$, que en el producto de los cuaterniones es -1 pero como producto vectorial es 0.

Por otro lado, podemos hacer algo similar para construir un producto vectorial sobre \mathbb{R}^7 . Al igual que en el caso de los cuaterniones, para cada $i \in \{1, \dots, 7\}$ podemos identificar $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0) \in \mathbb{R}^7$ donde el 1 está en la posición i -ésima del vector. De esta forma, el producto vectorial en \mathbb{R}^7 coincide con el de los octoniones imaginarios, salvo en el caso del producto de un vector e_i consigo mismo, que en los octoniones es -1 y en el producto vectorial es 0. Podemos escribir la relación entre los productos de la siguiente manera:

$$e_i e_j = -\delta_{ij} + e_i \times e_j \quad \forall i, j \in \{1, \dots, 7\}$$

donde la parte izquierda de la igualdad es el producto de los octoniones y $e_i \times e_j$ denota el producto vectorial. La misma fórmula es válida para relacionar el producto vectorial en \mathbb{R}^3 con el de los cuaterniones.

1.3 Álgebras reales

En realidad, \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{H} y \mathbb{O} , son lo que se conoce como álgebras de división normada. Vamos a definir a continuación esta noción de manera abstracta y a demostrar algunas de las propiedades que se pueden deducir a partir de ella.

Definición 1.7 *Un álgebra (real) \mathcal{A} es un \mathbb{R} -espacio vectorial de dimensión finita con una operación interna (distinta de la suma) $m : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ bilineal. Esto es, dados $a, a_1, a_2, b, b_1, b_2 \in \mathcal{A}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,*

$$\begin{aligned} m(\alpha a_1 + \beta a_2, b) &= \alpha m(a_1, b) + \beta m(a_2, b) \\ m(a, \alpha b_1 + \beta b_2) &= \alpha m(a, b_1) + \beta m(a, b_2) \end{aligned}$$

A esta aplicación la llamaremos **multiplicación**. Para abreviar, dados $(a, b) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$, escribiremos $ab := m(a, b)$.

Notación 1.8 *En realidad, también se puede definir la noción de álgebra compleja, sin embargo, como todo lo que vamos a trabajar es sobre los reales, omitiremos repetir todo el rato álgebra real. También, por sencillez de notación y porque no ofrece dudas, no denotaremos a los elementos de un álgebra como \vec{a} sino simplemente como a .*

Según cómo sea esta nueva operación, se definen distintos tipos de álgebras. Vamos a ver algunos ejemplos:

Definición 1.9 *Sea \mathcal{A} un \mathbb{R} -espacio vectorial, se dice que \mathcal{A} es un álgebra de Lie si la multiplicación que se define es anticonmutativa y satisface la identidad de Jacobi.*

Ejemplo 1.10 *Algunos ejemplos de álgebras de Lie serían: \mathbb{R}^3 con el producto vectorial, las matrices invertibles cuadradas de tamaño $n \times n$ con coeficientes en \mathbb{R} (que denotamos $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$) con el conmutador de matrices $[A, B] = AB - BA$ y los campos vectoriales sobre una variedad con el corchete de Lie. Además, como $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ se puede identificar con \mathbb{R}^{n^2} , estos espacios también tienen estructura de álgebra de Lie.*

Definición 1.11 Decimos que \mathcal{A} es un **álgebra de división** si dados $a, b \in \mathcal{A}$ con $ab = 0$, entonces se cumple que $a = 0$ o $b = 0$.

Ejemplo 1.12 Las cuatro álgebras \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{H} y \mathbb{O} con los productos que hemos definido anteriormente son álgebras de división.

Sin embargo, los espacios \mathbb{R}^3 y \mathbb{R}^7 con el producto vectorial son un ejemplo de álgebras reales que no son álgebras de división, pues un elemento por sí mismo es cero aunque dicho elemento no sea nulo.

En lo que respecta a este trabajo, vamos a profundizar un poco más en las álgebras de división: cuáles son y cómo se relacionan entre sí.

En primer lugar, veamos otra caracterización de las álgebras de división:

Proposición 1.13 Un álgebra \mathcal{A} es de división si y solo si las multiplicaciones a izquierda y derecha por un elemento no nulo son invertibles.

Demostración. Probemos ambas implicaciones:

\Rightarrow Sea $a \in \mathcal{A}$ un elemento no nulo, definimos la multiplicación por la izquierda como la aplicación lineal $L_a : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ dada por $L_a(b) = ab$. Análogamente, se define la multiplicación por la derecha $R_a : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ donde $R_a(b) = ba$. Veamos que es cierto que L_a es invertible, es decir, que es biyectiva:

Inyectiva: Sean $b_1, b_2 \in \mathcal{A}$ tales que $L_a(b_1) = L_a(b_2)$, esto es, $ab_1 = ab_2$. Luego, $ab_1 - ab_2 = 0$. Sacando factor común, $a(b_1 - b_2) = 0$. Por hipótesis, \mathcal{A} es un álgebra de división y como hemos tomado a no nulo, entonces $b_1 - b_2 = 0$, es decir, $b_1 = b_2$ como queríamos ver.

Sobreyectiva: Como L_a es una aplicación lineal e inyectiva entre dos espacios de la misma dimensión, entonces es sobreyectiva.

Luego, la multiplicación por la izquierda es una aplicación invertible y, análogamente, se tiene que la multiplicación por la derecha también lo es.

\Leftarrow Sean $a, b \in \mathcal{A}$ tales que $ab = 0$. Supongamos que $a \neq 0$. Consideramos la multiplicación por la izquierda L_a . Como esta aplicación es biyectiva y lineal y se tiene que $L_a(b) = 0$, entonces, $b = 0$, como queríamos ver.

□

Definición 1.14 Un **álgebra de división normada** es un álgebra \mathcal{A} que es un espacio vectorial normado que cumple que dados $a, b \in \mathcal{A}$, $\|ab\| = \|a\| \cdot \|b\|$.

Observación 1.15 En la definición anterior no exigimos que \mathcal{A} sea un álgebra de división porque la condición sobre la norma ya lo implica. Supongamos por reducción al absurdo que se tienen $a, b \in \mathcal{A}$ no nulos tales que $ab = 0$. Entonces, por las propiedades de las normas, $\|ab\| = 0$ pero $\|a\| \neq 0$ y $\|b\| \neq 0$, luego $\|a\| \cdot \|b\| \neq 0$, que contradice la propiedad de la Definición 1.14.

Definición 1.16 Un álgebra \mathcal{A} se dice que es **alternativa** si y solo si para todos $a, b \in \mathcal{A}$ se tiene que

$$(aa)b = a(ab) \quad (ab)a = a(ba) \quad (ba)a = b(aa) \quad (2)$$

Observación 1.17 *En realidad, originalmente se dio otra definición de álgebra alternativa, pero Emil Artin probó la caracterización que acabamos de describir, que nos permite definirla de manera más sencilla.*

Por otro lado, relacionado con la propiedad asociativa de las álgebras, definimos la siguiente aplicación que mide la falta de asociatividad en ellas.

Definición 1.18 *Sea \mathcal{A} un álgebra, se define la aplicación $[\cdot, \cdot, \cdot] : \mathcal{A}^3 \rightarrow \mathcal{A}$ dada por*

$$[a, b, c] = (ab)c - a(bc)$$

para todos $a, b, c \in \mathcal{A}$. A esta aplicación se le denomina **asociador**.

Observación 1.19 *Notemos que, dados $a_1, a_2, b, c \in \mathcal{A}$, entonces se cumple que $[a_1 + a_2, b, c] = [a_1, b, c] + [a_2, b, c]$:*

$$\begin{aligned} [a_1 + a_2, b, c] &= ((a_1 + a_2)b)c - (a_1 + a_2)(bc) = (a_1b + a_2b)c - a_1(bc) - a_2(bc) = \\ &= (a_1b)c + (a_2b)c - a_1(bc) - a_2(bc) = [a_1, b, c] + [a_2, b, c] \end{aligned}$$

Y análogamente para los casos $[b, a_1 + a_2, c]$ y $[b, c, a_1 + a_2]$.

Si escribimos las propiedades que nos caracterizan las álgebras alternativas (2) en términos del asociador, un álgebra es alternativa si y solo si para todos $a, b \in \mathcal{A}$ se tiene:

$$[a, a, b] = 0 \tag{3}$$

$$[a, b, a] = 0 \tag{4}$$

$$[b, a, a] = 0 \tag{5}$$

Y esto nos permite demostrar la siguiente

Proposición 1.20 *Si \mathcal{A} es un álgebra alternativa, entonces se cumple que $[a, b, c] = -[b, a, c]$ para $a, b, c \in \mathcal{A}$ cualesquiera.*

Demostración. Sean $a, b, c \in \mathcal{A}$, veamos que $[a, b, c] = -[b, a, c]$.

$$[a, b, c] = -[b, a, c] \Leftrightarrow [a, b, c] + [b, a, c] = 0$$

Como \mathcal{A} es alternativa, $[b, b, c] = [a, a, c] = 0$. Luego,

$$\begin{aligned} [a, b, c] + [b, a, c] = 0 &\Leftrightarrow [a, b, c] + [b, b, c] + [a, a, c] + [b, a, c] = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow [a + b, b, c] + [a + b, a, c] = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow [a + b, a + b, c] = 0. \end{aligned}$$

Y esta última equivalencia es cierta porque \mathcal{A} es alternativa. □

Observación 1.21 *Es más, este hecho nos permite comprobar que de las propiedades (3) y (5) se puede deducir la segunda de ellas: Gracias a la propiedad (3), acabamos de probar que $[a, b, a] = -[b, a, a]$, y esto, a su vez es 0 por la propiedad (5).*

En 1898, Hurwitz demostró que las únicas álgebras de división normadas son los números reales \mathbb{R} , los complejos \mathbb{C} , los cuaterniones \mathbb{H} y los octoniones \mathbb{O} . Y no fue hasta 1930 que Zorn demostró que, de hecho, son las únicas álgebras de división alternativas.

Por otro lado, en 1958, fue probado por Kervaire y Bott-Milnor de forma independiente que todas las álgebras de división tienen dimensión 1, 2, 4 o 8.

1.4 Construcción de Cayley-Dickson

Como hemos dicho, las únicas álgebras de división normadas son \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{H} y \mathbb{O} . De hecho, hay una relación entre ellas y la construcción de Cayley-Dickson explica cómo están incluidas unas en otras, ya que construye cada una a partir de la anterior. Además, esta construcción nos permite ver cómo cada nueva álgebra va perdiendo propiedades.

Definición 1.22 Sea \mathcal{A} un álgebra equipada con la conjugación, esto es, una aplicación lineal $*$: $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ con $a^{**} = a$ y $(ab)^* = b^*a^*$ para todos $a, b \in \mathcal{A}$. En este caso, decimos que \mathcal{A} es una ***-álgebra**.

Si se cumple que $a = a^*$ para todo $a \in \mathcal{A}$, decimos que es una ***-álgebra real**.

Definición 1.23 Decimos que \mathcal{A} una *-álgebra es **nicely normada**¹ si $a + a^* \in \mathbb{R}$ y $aa^* = a^*a > 0$ para todo $a \in \mathcal{A}$ con $a \neq 0$.

Si \mathcal{A} es nicely normada, definimos una norma en \mathcal{A} como $\|a\|^2 = aa^*$ para todo $a \in \mathcal{A}$.

Se puede deducir fácilmente que si un álgebra \mathcal{A} es nicely normada y alternativa, entonces es un álgebra de división normada. Sean $a, b \in \mathcal{A}$, entonces

$$\|ab\|^2 = (ab)(ab)^* = (ab)(b^*a^*) = a(bb^*)a^* = a\|b\|^2a^* = \|a\|^2\|b\|^2$$

Donde, en la tercera igualdad se usa que \mathcal{A} es alternativa.

Partiendo de una *-álgebra \mathcal{A} cualquiera, la construcción de Cayley-Dickson construye una nueva *-álgebra \mathcal{A}' . Los elementos de esta nueva álgebra son de la forma $(a, b) \in \mathcal{A}^2$, la suma se realiza componente a componente y el producto por escalares también. Por otro lado, se define una nueva conjugación:

$$(a, b)^* = (a^*, -b) \tag{6}$$

Y una nueva multiplicación:

$$(a, b)(c, d) = (ac - db^*, a^*d + cb) \tag{7}$$

El definir las nuevas *-álgebras de esta manera, nos proporciona un método para obtener otra *-álgebra a partir de una anterior. Sin embargo, cada vez que construimos una nueva *-álgebra, se pierden propiedades, como muestra la siguiente

Proposición 1.24 Sea \mathcal{A} una *-álgebra y \mathcal{A}' una nueva *-álgebra obtenida mediante la construcción de Cayley-Dickson, se cumple:

- i) \mathcal{A} es nicely normada, si y solo si, \mathcal{A}' es nicely normada.
- ii) \mathcal{A} es real, si y solo si, \mathcal{A}' es conmutativa.
- iii) \mathcal{A} es conmutativa y asociativa, si y solo si, \mathcal{A}' es asociativa.
- iv) \mathcal{A} es asociativa y nicely normada, si y solo si, \mathcal{A}' es alternativa y nicely normada.

Demostración. Vamos a probar únicamente las implicaciones de izquierda a derecha porque son las que verdaderamente nos interesan para este trabajo y las que utilizaremos más adelante, pero ambas implicaciones son ciertas.

¹Empleamos el término *nicely* en inglés, ya que no tiene una traducción que se use habitualmente en castellano.

$i)$ Supongamos que \mathcal{A} es *nicely* normada y veamos que \mathcal{A}' también lo es.

Sea $(a, b) \in \mathcal{A}'$ con a y b no nulos,

$$(a, b) + (a, b)^* = (a, b) + (a^*, -b) = (a + a^*, b - b) = (a + a^*, 0)$$

Como \mathcal{A} es *nicely* normada, $a + a^* \in \mathbb{R}$ y se concluye.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} (a, b)(a, b)^* &= (a, b)(a^*, -b) = (aa^* + bb^*, a^*(-b) + a^*b) = (\|a\|^2 + \|b\|^2, 0) \\ (a, b)^*(a, b) &= (a^*, -b)(a, b) = (a^*a + bb^*, a^{**}b + a(-b)) = (\|a\|^2 + \|b\|^2, 0) \end{aligned}$$

Como a y b son no nulos, $\|a\|^2 + \|b\|^2 > 0$.

Luego, \mathcal{A}' es *nicely* normada como queríamos ver.

$ii)$ Supongamos que \mathcal{A} es real (y, por tanto, conmutativa), y veamos que \mathcal{A}' es conmutativa.

Sean $(a, b), (c, d) \in \mathcal{A}'$,

$$(a, b)(c, d) = (ac - db^*, a^*d + cb) = (ac - db, ad + cb) = (ca - bd, da + bc) = (c, d)(a, b)$$

Donde utilizamos que \mathcal{A} es real, luego el conjugado de un elemento es él mismo, y se cumple la propiedad conmutativa.

Por tanto, \mathcal{A}' es conmutativa.

$iii)$ Supongamos que \mathcal{A} es conmutativa y asociativa. Veamos que \mathcal{A}' es asociativa.

Sean $(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathcal{A}'$,

$$\begin{aligned} ((a, b)(c, d))(e, f) &= (ac - db^*, a^*d + cb)(e, f) = \\ &= ((ac - db^*)e - f(a^*d + cb)^*, (ac - db^*)^*f + e(a^*d + cb)) = \\ &= (ace - db^*e - fd^*a - fb^*c^*, c^*a^*f - bd^*f + ea^*d + ecb) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a, b)((c, d)(e, f)) &= (a, b)(ce - fd^*, c^*f + ed) = \\ &= (a(ce - fd^*) - (c^*f + ed)b^*, a^*(c^*f + ed) + (ce - fd^*)b) = \\ &= (ace - afd^* - c^*fb^* - ed^*b, a^*c^*f + a^*ed + ceb - fd^*b) \end{aligned}$$

Donde se ha usado que \mathcal{A} es asociativa y como también es conmutativa, ambas expresiones coinciden y se concluye el resultado.

$iv)$ Supongamos que \mathcal{A} es asociativa y *nicely* normada. Veamos que \mathcal{A}' es alternativa y *nicely* normada. Como consecuencia del apartado $i)$ de esta misma proposición, ya sabemos que \mathcal{A}' es *nicely* normada. Falta ver que es alternativa. Por la Observación 1.21, basta ver que se cumplen la primera (3) y la última propiedad (5).

Sean $(a, b), (c, d) \in \mathcal{A}'$.

Primera propiedad:

$$\begin{aligned} ((a, b)(a, b))(c, d) &= (a^2 - bb^*, a^*b + ab)(c, d) = \\ &= (a^2 - \|b\|^2, a^*b + ab)(c, d) = \\ &= (a^2c - \|b\|^2c - d(a^*b + ab)^*, (a^2 - \|b\|^2)^*d + c(a^*b + ab)) = \\ &= (a^2c - \|b\|^2c - db^*a - db^*a^*, (a^2)^*d - \|b\|^2d + ca^*b + cab) = \\ &= (a^2c - \|b\|^2c - db^*(a + a^*), (a^2)^*d - \|b\|^2d + c(a^* + a)b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(a, b)((a, b)(c, d)) &= (a, b)(ac - db^*, a^*d + cb) = \\
&= (a(ac - db^*) - (a^*d + cb)b^*, a^*(a^*d + cb) + (ac - db^*)b) = \\
&= (a^2c - adb^* - a^*db^* - c||b||^2, (a^*)^2d + a^*cb + acb - d||b||^2) = \\
&= (a^2c - (a + a^*)db^* - c||b||^2, (a^2)^*d + (a^* + a)cb - d||b||^2)
\end{aligned}$$

Donde hemos usado que \mathcal{A} es asociativa. Como también es *nicely* normada, $a + a^*$ y $a^* + a$ son escalares, luego conmutan con los elementos de \mathcal{A} , al igual que $||b||^2$, lo que nos permite concluir que ambas expresiones son iguales.

Segunda propiedad:

$$\begin{aligned}
((c, d)(a, b))(a, b) &= (ca - bd^*, c^*b + ad)(a, b) = \\
&= ((ca - bd^*)a - b(c^*b + ad)^*, (ca - bd^*)^*b + a(c^*b + ad)) = \\
&= (ca^2 - bd^*a - bb^*c - bd^*a^*, a^*c^*b - db^*b + ac^*b + a^2d) = \\
&= (ca^2 - bd^*(a + a^*) - ||b||^2c, (a^* + a)c^*b - d||b||^2 + a^2d)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(c, d)((a, b)(a, b)) &= (c, d)(a^2 - ||b||^2, a^*b + ab) = \\
&= (c(a^2 - ||b||^2) - (a^*b + ab)d^*, c^*(a^*b + ab) + (a^2 - ||b||^2)d) = \\
&= (ca^2 - c||b||^2 - a^*bd^* - abd^*, c^*a^*b + c^*ab + a^2d - ||b||^2d) = \\
&= (ca^2 - c||b||^2 - (a^* + a)bd^*, c^*(a^* + a)b + a^2d - ||b||^2d)
\end{aligned}$$

De nuevo, hemos usado que \mathcal{A} es asociativa. Al igual que antes, como también es *nicely* normada, $a + a^*$ y $a^* + a$ son escalares, luego conmutan con los elementos de \mathcal{A} , al igual que $||b||^2$, lo que nos permite concluir que ambas expresiones son iguales.

Por tanto, \mathcal{A}' es alternativa y *nicely* normada como queríamos ver. □

La construcción de Cayley-Dickson ilustra muy bien cómo cada álgebra de división se puede ver como pares de elementos del álgebra a partir de la cual ha sido construida. Partimos de \mathbb{R} , que es la primera álgebra de división normada. A partir de ella, obtenemos los números complejos, que pueden ser vistos como pares de números reales:

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\} \cong \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$$

A continuación, los cuaterniones pueden ser vistos como pares de números complejos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{H} &= \{a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R}\} = \{(a + bi) + (c + di)j : a + bi, c + di \in \mathbb{C}\} \cong \\
&\cong \{(a + bi, c + di) : a + bi, c + di \in \mathbb{C}\} = \mathbb{C}^2
\end{aligned}$$

Por último, los octoniones se pueden ver como pares de cuaterniones:

$$\begin{aligned}
\mathbb{O} &= \left\{ a_0 + \sum_{i=1}^7 a_i e_i : a_j \in \mathbb{R} \forall j \in \{0, \dots, 7\} \right\} = \\
&= \{(a_0 + a_1 e_1 + a_3 e_3 + a_7 e_7) + e_6(a_6 + a_5 e_1 + a_4 e_3 + a_2 e_7) : a_j \in \mathbb{R} \forall j \in \{0, \dots, 7\}\} \cong \\
&\cong \{(a_0 + a_1 e_1 + a_3 e_3 + a_7 e_7, a_6 + a_5 e_1 + a_4 e_3 + a_2 e_7) : a_j \in \mathbb{R} \forall j \in \{0, \dots, 7\}\} = \mathbb{H}^2
\end{aligned}$$

La siguiente pregunta que surge de manera natural es si podríamos duplicar los octoniones para así obtener un álgebra de división de dimensión 16. El problema es, que como bien hemos demostrado en la Proposición 1.24, cada vez que duplicamos un álgebra perdemos propiedades.

Partimos de \mathbb{R} que es un álgebra real, conmutativa, asociativa y *nicely* normada. Al duplicarla, obtenemos los números complejos \mathbb{C} , que deja de ser real y pasa a ser únicamente conmutativa, asociativa y *nicely* normada. El siguiente álgebra son los cuaterniones \mathbb{H} , que pierden la propiedad conmutativa, aunque siguen conservando la asociatividad y el ser *nicely* normada. Por último, llegamos a los octoniones \mathbb{O} que ya no son asociativos y, en su lugar, son un álgebra alternativa y *nicely* normada. Finalmente, si tratamos de duplicar los octoniones, perdemos la propiedad de que sea un álgebra de división.

2 Variedades paralelizables

La primera estructura que introduciremos en este trabajo será la de paralelización. Diremos que una variedad es paralelizable si admite una base global de campos. Las esferas de dimensión par no podrán serlo, pues ni siquiera admiten un campo vectorial sin ceros. De hecho, solo hay tres esferas que lo son: \mathbb{S}^1 , \mathbb{S}^3 y \mathbb{S}^7 . En este capítulo, veremos algunas propiedades de las variedades paralelizables y mencionaremos el caso particular de las esferas. Para ello, utilizaremos principalmente como referencias [6] y los capítulos 10 y 15 de [10].

Definición 2.1 Una variedad diferenciable M se dice que es **paralelizable** si admite una base global de campos. Esto es, si admite una base $\{X_1, \dots, X_n\}$ con $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{X}(M)$ de modo que para cada $p \in M$, $\{(X_1)_p, \dots, (X_n)_p\}$ es una base de $\overrightarrow{T_p M}$.

Ejemplo 2.2 La circunferencia \mathbb{S}^1 es paralelizable, pues basta tomar el vector tangente a la circunferencia en un punto. Esto es, sean (x, y) las coordenadas globales de \mathbb{R}^2 , definiendo el campo $X = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$, se tiene que $\{X\}$ es una base global de campos sobre la circunferencia \mathbb{S}^1 .

El fibrado tangente TM (Definición A.24) a una variedad es, en general, localmente trivial. Esto es, que para todo punto p de M , existe un abierto U de M , entorno del punto, de modo que $\pi^{-1}(U)$ es difeomorfo a $U \times \mathbb{R}^n$ (donde $\pi : TM \rightarrow M$ es la proyección natural). Sin embargo, no tiene por qué existir un difeomorfismo global.

Proposición 2.3 Una variedad es paralelizable si y solo si tiene fibrado tangente trivial.

Demostración. Lo hacemos por doble implicación.

\Rightarrow Supongamos que la variedad es paralelizable, es decir, que existe una base global de campos vectoriales. Podemos definir un difeomorfismo entre TM y $M \times \mathbb{R}^n$ asociando a cada vector $\vec{v} \in \overrightarrow{T_p M}$ el par $(p, \vec{w}) \in M \times \mathbb{R}^n$, donde p es el punto en el que \vec{v} es tangente y \vec{w} es el vector de \mathbb{R}^n que tiene las mismas coordenadas que \vec{v} respecto de la base de campos en el punto p . Para ver de forma rigurosa que esta aplicación es, en efecto, un difeomorfismo, habría que dotar al fibrado tangente de estructura de variedad diferenciable mediante un atlas y componer con las respectivas cartas para ver que se trata de un difeomorfismo en \mathbb{R}^{2n} (Definición A.8). Lo omitiremos en esta demostración.

\Leftarrow Supongamos ahora que el fibrado tangente es trivial, es decir, que existe un difeomorfismo global $\alpha : TM \rightarrow M \times \mathbb{R}^n$. Tomamos $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ una base de \mathbb{R}^n y p un punto de M . Como α es un difeomorfismo, tendríamos que para cada $p \in M$, $\{\alpha^{-1}(p, \vec{v}_i)\}_{i=1}^n$ es una base de $\overrightarrow{T_p M}$. Por tanto, M es paralelizable. □

Podemos construir variedades paralelizables a partir de otras que sí que lo son, pues el producto de variedades paralelizables lo es, como demostramos a continuación.

Proposición 2.4 El producto de dos variedades paralelizables es paralelizable.

Demostración. Sean M y N dos variedades paralelizables de dimensiones m y n respectivamente. Queremos ver que $M \times N$ es paralelizable.

Por un lado, como M es paralelizable, existe $\{X_1, \dots, X_m\} \subset \mathfrak{X}(M)$ una base global de campos vectoriales tales que $\{(X_1)_p, \dots, (X_m)_p\}$ es base de $\overrightarrow{T_p M}$ para cada $p \in M$. Por otro lado, como N es paralelizable, existe $\{Y_1, \dots, Y_n\} \subset \mathfrak{X}(N)$ una base global de campos vectoriales tales que $\{(Y_1)_q, \dots, (Y_n)_q\}$ es base de $\overrightarrow{T_q N}$ para cada $q \in N$.

Sabemos que para cada $p \in M$ y $q \in N$, se tiene que $\overrightarrow{T_{(p,q)}(M \times N)} \cong \overrightarrow{T_p M} \oplus \overrightarrow{T_q N}$ (Proposición A.23), por tanto, el conjunto

$$\{\overline{X}_1, \dots, \overline{X}_m, \overline{Y}_1, \dots, \overline{Y}_n\}$$

define una paralelización global en $M \times N$, donde

$$\begin{aligned} (\overline{X}_i)_{(p,q)} &= (X_i)_p + 0_q \in \overrightarrow{T_p M} \oplus \overrightarrow{T_q N} \quad \forall i \in \{1, \dots, m\} \\ (\overline{Y}_j)_{(p,q)} &= 0_p + (Y_j)_q \in \overrightarrow{T_p M} \oplus \overrightarrow{T_q N} \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} \end{aligned}$$

□

Observación 2.5 *Las variedades paralelizables son orientables (Definición A.26) porque una paralelización determina una orientación en cada espacio tangente de modo que sean compatibles. Esta orientación basta escogerla ordenando los campos que forman una base de dicho espacio (esta base existe de manera global porque la variedad es paralelizable).*

Claramente, el hecho de que una variedad sea orientable, no implica que vaya a ser paralelizable. Esto sucede, por ejemplo, con la esfera de dimensión dos. Se trata de una superficie orientable y, sin embargo, no puede ser paralelizable, pues por el célebre teorema de la bola peluda (hairy ball theorem) sabemos que ningún campo vectorial no nulo puede existir sobre la esfera \mathbb{S}^2 .

De hecho, ninguna esfera de dimensión par admite un campo vectorial sin ceros, como consecuencia del teorema de Poincaré-Hopf. Este teorema afirma que en variedades diferenciables compactas, la característica de Euler coincide con la suma de los índices de los ceros aislados de un campo vectorial. Así, todas las esferas de dimensión par tienen característica dos, luego no pueden admitir un campo global sin ceros. Sin embargo, en las esferas de dimensión impar, la característica de Euler es cero, luego esto no supondría ninguna contradicción. De hecho, todas ellas admiten un campo vectorial sin ceros:

Teorema 2.6 *Toda esfera de dimensión impar admite un campo sin ceros.*

Demostración. Sea \mathbb{S}^{2n+1} una esfera de dimensión impar en el espacio euclídeo \mathbb{R}^{2n+2} de coordenadas globales (x^1, \dots, x^{2n+2}) . En cada punto, definimos el campo vectorial

$$X = \frac{\partial}{\partial x^1}(x^2) + \frac{\partial}{\partial x^2}(-x^1) + \frac{\partial}{\partial x^3}(x^4) + \frac{\partial}{\partial x^4}(-x^3) + \dots + \frac{\partial}{\partial x^{2n+1}}(x^{2n+2}) + \frac{\partial}{\partial x^{2n+2}}(-x^{2n+1})$$

Como en cada punto, el vector normal a la esfera tiene coordenadas (x^1, \dots, x^{2n+2}) , el campo que hemos definido es ortogonal (considerando el producto escalar standard) a dicho vector, luego $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^{2n+1})$. Además, el único punto en el que se anula el campo X es en el $(0, \dots, 0)$, pero este punto no está en la esfera, luego, en efecto, se trata de un campo vectorial sin ceros.

□

No obstante, no todas las esferas de dimensión impar son paralelizables. De hecho, solamente son tres. En 1958, Adams demostró que las únicas esferas paralelizables eran \mathbb{S}^1 , \mathbb{S}^3 y \mathbb{S}^7 .

3 Estructuras de tipo complejo en una variedad

En este capítulo, en primer lugar vamos a definir lo que se conoce como estructuras complejas y casi-complejas sobre una variedad. En la primera sección, hablaremos de dichas estructuras y veremos cómo se relacionan entre sí mediante el teorema de Newlander-Nirenberg. En particular, estudiaremos en profundidad las estructuras que admiten las esferas de dimensiones dos y seis, y mencionaremos el conocido problema de Hopf.

Para finalizar, en una segunda sección, nos introduciremos brevemente en las estructuras casi-hermíticas, que combinan una estructura casi-compleja con una métrica riemanniana en la variedad, y en las estructuras de tipo simpléctico. Asimismo, veremos qué esferas admiten tales estructuras.

3.1 Estructura compleja y casi-compleja

Hasta ahora, cuando hemos hablado de variedad diferenciable, nos hemos referido a una variedad diferenciable real, esto es, que las cartas que determinan el atlas toman valores sobre \mathbb{R}^n y el cambio de cartas es un difeomorfismo. Si extendemos esta noción y, en su lugar, las cartas toman valores sobre el cuerpo de los complejos \mathbb{C}^n y exigimos que los cambios de cartas sean biholomorfismos, se obtiene la noción de *variedad compleja* o *variedad holomorfa*.

A una variedad diferenciable real, se le puede dotar de una estructura compleja para obtener una variedad compleja. Para ello, tenemos que definir varios conceptos que se pueden encontrar en el capítulo 3 de [18] y en el capítulo 4 de [8].

Definición 3.1 Sea \vec{V} un \mathbb{R} -espacio vectorial. Un endomorfismo lineal J de \vec{V} (esto es, una aplicación lineal $J : \vec{V} \rightarrow \vec{V}$) y de forma que satisface $J^2 = -Id_{\vec{V}}$, donde $Id_{\vec{V}}$ denota la aplicación identidad en \vec{V} , se denomina **estructura compleja** en \vec{V} .

Esta noción nos permite dotar a un espacio vectorial real la estructura de espacio vectorial complejo.

Observación 3.2 Sea \vec{V} un espacio vectorial dotado de una estructura compleja J , podemos definir el producto de elementos de \mathbb{C} y elementos de \vec{V} de la siguiente manera:

$$\lambda \vec{v} = (a + bi)\vec{v} = a\vec{v} + bJ\vec{v} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall \vec{v} \in \vec{V}$$

De esta forma, podemos considerar \vec{V} un espacio vectorial sobre \mathbb{C} . Claramente, la dimensión real de V tendrá que ser par, y así, la dimensión compleja de \vec{V} será la mitad.

Recíprocamente, si partimos de un espacio vectorial complejo \vec{V} de dimensión n y consideramos J el endomorfismo lineal definido por $J\vec{v} = i\vec{v} \quad \forall \vec{v} \in \vec{V}$, entonces la dimensión de \vec{V} será $2n$, viéndolo como espacio vectorial sobre los números reales, y J será una estructura compleja sobre \vec{V} . Esto es, si $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ es una base de \vec{V} como espacio vectorial sobre \mathbb{C} , entonces el conjunto $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n, J\vec{v}_1, \dots, J\vec{v}_n\}$ forma una base de \vec{V} como espacio vectorial sobre \mathbb{R} .

Notemos que hemos definido las estructuras complejas sobre espacios vectoriales, así que es natural extenderlo al espacio tangente de una variedad, lo que nos lleva a la definición de estructura casi-compleja:

Definición 3.3 Sea M una variedad diferenciable. Un campo tensorial J (Definición A.34) sobre M se llama **estructura casi-compleja** sobre M si, para cada punto $p \in M$, J es un endomorfismo del espacio tangente $\overrightarrow{T_p M}$ tal que $J^2 = -Id$, donde Id denota la aplicación identidad en el espacio tangente correspondiente. Una variedad diferenciable M dotada de una estructura casi-compleja se llama **variedad casi-compleja**.

Observación 3.4 Por la Observación 3.2 antes realizada, se deduce que toda variedad casi-compleja es de dimensión par.

Observación 3.5 También se puede deducir que toda variedad casi-compleja es orientable, tal y como se indica en el capítulo 3 (Proposición 3.2) de [18].

Observación 3.6 Toda variedad compleja es casi-compleja, pues la estructura compleja induce de forma natural una estructura casi-compleja sobre la variedad.

Ejemplo 3.7 Podemos dotar a los espacios complejos \mathbb{C}^n de una estructura de variedad casi-compleja. Sean (z^1, \dots, z^n) las coordenadas globales en \mathbb{C}^n , para cada $k = 1, \dots, n$, podemos escribir $z^k = x^k + iy^k$, con $x, y \in \mathbb{R}^n$. Tenemos un isomorfismo entre \mathbb{C}^n y \mathbb{R}^{2n} y, por tanto, también entre sus espacios tangentes. Sea $p \in \mathbb{R}^{2n}$, una base de $\overrightarrow{T_p \mathbb{R}^{2n}}$ es

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n} \right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial y^1} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial y^n} \right)_p \right\}$$

Definimos ahora el endomorfismo $J : \overrightarrow{T_p \mathbb{R}^{2n}} \rightarrow \overrightarrow{T_p \mathbb{R}^{2n}}$. Para ello, basta dar la imagen de una base del espacio tangente, esto es:

$$J \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right) = \frac{\partial}{\partial y^k} \quad J \left(\frac{\partial}{\partial y^k} \right) = -\frac{\partial}{\partial x^k} \quad \forall k = 1, \dots, n$$

Claramente se tiene que $J^2 = -Id$ y así tenemos una estructura casi-compleja sobre \mathbb{C}^n .

Por otro lado, al igual que ocurre con las variedades paralelizables, al producto de variedades casi-complejas también se le puede dotar una estructura casi-compleja.

Proposición 3.8 El producto de dos variedades casi-complejas es una variedad casi-compleja.

Demostración. Sean (M, J_1) y (N, J_2) dos variedades casi-complejas de dimensiones m y n respectivamente. Si M y N son variedades diferenciables, entonces $M \times N$ también es una variedad diferenciable. Sean $p \in M$ y $q \in N$, entonces, recordemos que

$$\overrightarrow{T_{(p,q)}(M \times N)} \cong \overrightarrow{T_p M} \oplus \overrightarrow{T_q N}$$

Vamos a definir ahora una estructura casi-compleja en $M \times N$. Por un lado, tenemos que $J_1 : \overrightarrow{T_p M} \rightarrow \overrightarrow{T_p M}$ y $J_2 : \overrightarrow{T_q N} \rightarrow \overrightarrow{T_q N}$ son estructuras casi-complejas sobre M y N respectivamente. Definimos

$$J = J_1 + J_2 : \begin{array}{ccc} \overrightarrow{T_{(p,q)}(M \times N)} & \longrightarrow & \overrightarrow{T_{(p,q)}(M \times N)} \\ \vec{v} + \vec{w} & \longmapsto & J_1(\vec{v}) + J_2(\vec{w}) \end{array}$$

donde $\vec{v} \in \overrightarrow{T_p M}$ y $\vec{w} \in \overrightarrow{T_q N}$. La aplicación J está bien definida porque dados $\vec{v} \in \overrightarrow{T_p M}$ y $\vec{w} \in \overrightarrow{T_q N}$, entonces, por un lado, $J_1(\vec{v})$ está bien definida y pertenece a $\overrightarrow{T_p M}$, y por otro lado,

$J_2(\vec{w})$ está bien definida y pertenece a $\overrightarrow{T_q N}$. Por tanto, $J_1(\vec{v}) + J_2(\vec{w}) \in \overrightarrow{T_{(p,q)}(M \times N)}$.

Claramente J es un endomorfismo, puesto que J_1 y J_2 lo son. Veamos que se cumple que $J^2 = -Id$. En efecto, sean $\vec{v} \in \overrightarrow{T_p M}$ y $\vec{w} \in \overrightarrow{T_q N}$

$$J^2(\vec{v} + \vec{w}) = J(J_1(\vec{v}) + J_2(\vec{w})) = J_1(J_1(\vec{v})) + J_2(J_2(\vec{w})) = -\vec{v} - \vec{w}$$

Luego, $J^2 = -Id$ como queríamos ver. □

En el Ejemplo 3.7, hemos visto que todo espacio vectorial complejo admite una estructura casi-compleja. De hecho, en general, toda variedad compleja es, a su vez, una variedad casi-compleja. No obstante, el recíproco no es cierto. A mediados del siglo XX, Newlander y Nirenberg probaron un teorema que relaciona ambos conceptos, pero antes de enunciarlo tenemos que definir lo que se conoce como tensor de Nijenhuis.

Definición 3.9 Sea M una variedad diferenciable y F un campo tensorial de tipo $(1,1)$. Se llama **tensor de Nijenhuis** al campo tensorial de tipo $(1,2)$ dado por:

$$N_F(X, Y) = [FX, FY] - F[FX, Y] - F[X, FY] + F^2[X, Y]$$

Aplicando dicha definición considerando el caso particular de una estructura casi-compleja J , obtenemos la siguiente definición:

Definición 3.10 Sea M una variedad casi-compleja dotada de una estructura casi-compleja J . Se llama **tensor torsión** de J al tensor de Nijenhuis sobre J . Es decir,

$$N_J(X, Y) = [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] - [X, Y]$$

Observación 3.11 El tensor de Nijenhuis es anticonmutativo. Esto se deriva principalmente de que el corchete de Lie es anticonmutativo, luego:

$$\begin{aligned} N_J(X, Y) &= [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] - [X, Y] = \\ &= -[JY, JX] + J[Y, JX] + J[JY, X] + [Y, X] = \\ &= -N_J(Y, X) \end{aligned}$$

Teorema 3.12 (Newlander-Nirenberg) Sea M una variedad casi-compleja, con una estructura casi-compleja J . Entonces, J es una estructura compleja si y solo si J no tiene torsión, es decir, $N_J \equiv 0$.

La demostración de este teorema es compleja, así que la omitiremos en este trabajo, pero se puede encontrar en [14].

3.1.1 Estructura compleja en la esfera \mathbb{S}^2

A continuación, vamos a construir una estructura casi-compleja sobre la esfera \mathbb{S}^2 (esfera de dimensión dos, de radio uno, centrada en el origen).

Se tiene que $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, luego podemos considerar el producto vectorial de \mathbb{R}^3 restringido a la esfera. Sea $p \in \mathbb{S}^2$ y el vector normal \vec{N}_p a la esfera en ese punto. Definimos:

$$J_p : \overrightarrow{T_p\mathbb{S}^2} \longrightarrow \overrightarrow{T_p\mathbb{S}^2}$$

$$X_p \longmapsto X_p \times \vec{N}_p$$

Veamos que J_p está bien definida, es decir, hay que ver que dado $X_p \in \overrightarrow{T_p\mathbb{S}^2}$, entonces $X_p \times \vec{N}_p \in \overrightarrow{T_p\mathbb{S}^2}$. Para ello, basta ver que $X_p \times \vec{N}_p$ es ortogonal a \vec{N}_p con el producto escalar standard de \mathbb{R}^3 . En efecto, lo es por la propiedad *i*) descrita en Propiedades 1.5 del producto vectorial.

Del mismo modo, por la propiedad *iv*) del mismo resultado, podemos asegurar que J_p es un endomorfismo lineal, y como \vec{N}_p varía de forma diferenciable, entonces J es un campo tensorial de tipo $(1, 1)$.

Por último, falta ver que $J_p^2 = -Id$, donde Id denota la aplicación identidad. Por la propiedad *ii*) de las propiedades del producto vectorial en \mathbb{R}^3 (1.5), sabemos que el conjunto $\{X_p, \vec{N}_p, J_p X_p\}$ forma una base positivamente orientada. Tenemos el siguiente diagrama:

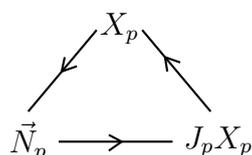


Figura 3: Diagrama del producto vectorial de la base $\{X_p, \vec{N}_p, J_p X_p\}$.

Cuando multiplicamos dos elementos en el sentido que indican las flechas (sentido antihorario) el resultado es el tercer elemento. Si lo hacemos en el orden inverso, entonces obtenemos el tercer elemento cambiado de signo.

Por ello, si calculamos $J_p(J_p X_p) = J_p X_p \times \vec{N}_p = -X_p$, como queríamos probar.

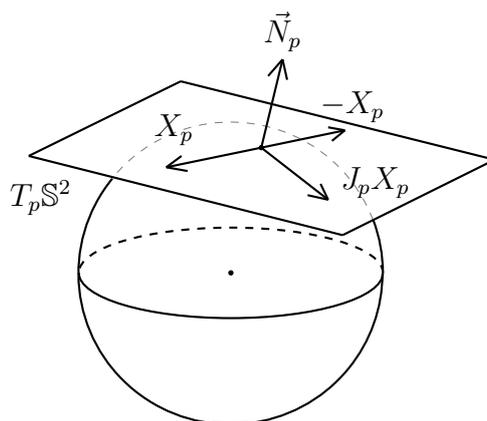


Figura 4: Visualización geométrica de J_p actuando sobre un campo del plano tangente a la esfera \mathbb{S}^2 .

Por tanto, hemos visto que J es una estructura casi-compleja en \mathbb{S}^2 . De hecho, vamos a ver

que J define una estructura compleja sobre la esfera. Por el Teorema de Newlander-Nirenberg (3.12), basta ver que el tensor de Nijenhuis se anula.

Resulta que para cada $p \in \mathbb{S}^2$ y para cada campo vectorial no nulo $X_p \in \overrightarrow{T_p\mathbb{S}^2}$, se tiene que $\{X_p, J_p X_p\}$ es una base del plano tangente $\overrightarrow{T_p\mathbb{S}^2}$, ya que ambos son perpendiculares al vector normal \vec{N}_p y son linealmente independientes entre sí. Por tanto, para ver que el tensor de Nijenhuis se anula en dos elementos cualesquiera del plano tangente, basta ver que lo hace en los elementos de la base. Como además hemos visto en la Observación 3.11 que N_J es anticonmutativo, tenemos directamente que $N_J(X, X) = N_J(JX, JX) = 0$. Por tanto, basta ver que $N_J(X, JX) = 0$. En efecto,

$$\begin{aligned} N_J(X, JX) &= [JX, J^2X] - J[JX, JX] - J[X, J^2X] - [X, JX] = \\ &= [JX, -X] - J[JX, JX] - J[X, -X] - [X, JX] \end{aligned}$$

Como el corchete de Lie es anticonmutativo, tenemos que $[JX, JX] = 0$ y que $[X, -X] = 0$. Además, $[JX, -X] = -[JX, X] = [X, JX]$, luego $N_J(X, JX) = 0$. Por tanto, efectivamente, la esfera \mathbb{S}^2 admite una estructura de variedad compleja, es decir, hemos probado el siguiente

Teorema 3.13 *La esfera \mathbb{S}^2 es una variedad compleja.*

De hecho, ya sabíamos que la esfera \mathbb{S}^2 se trataba de una variedad compleja, pues esta se puede ver como la recta proyectiva compleja. Y, por su parte, todos los espacios proyectivos complejos son variedades holomorfas, en los que un atlas complejo se obtiene realizando el atlas afín de $n + 1$ cartas obtenidas deshomogeneizando las coordenadas.

Observación 3.14 *En general, toda superficie orientable inmersa en \mathbb{R}^3 (en particular, las superficies compactas sin borde, ya que toda superficie compacta sin borde inmersa en \mathbb{R}^3 sin autointersecciones es orientable²), admite una determinación diferenciable del vector normal en todos sus puntos. Luego, como hemos hecho en el caso de la esfera, se puede definir un sentido de giro y una estructura casi-compleja, dada por $J(X) = X \times \vec{N}$ donde \vec{N} es el vector normal a la superficie y X un campo vectorial no nulo de la misma. Razonando igual que antes, como el tensor de Nijenhuis se anula en todos los puntos, la estructura casi-compleja J es, a su vez, una estructura compleja.*

La clave para haber construido la estructura casi-compleja sobre la esfera \mathbb{S}^2 ha sido utilizar el producto vectorial de \mathbb{R}^3 . Como hemos visto antes, también existe un producto vectorial en \mathbb{R}^7 , luego podemos definir una estructura casi-compleja sobre la esfera \mathbb{S}^6 (ya que es una hipersuperficie de \mathbb{R}^7) de forma totalmente análoga a lo hecho con la esfera \mathbb{S}^2 .

Nuevamente, podemos afirmar que toda hipersuperficie orientable H de \mathbb{R}^7 admite una estructura casi-compleja inducida por el producto vectorial de \mathbb{R}^7 . Basta considerar $p \in H$ un punto de la hipersuperficie, el vector normal \vec{N}_p en dicho punto (que está definido de manera diferenciable por ser orientable) y definir el endomorfismo

$$\begin{aligned} J_p : \overrightarrow{T_p H} &\longrightarrow \overrightarrow{T_p H} \\ X_p &\longmapsto X_p \times \vec{N}_p \end{aligned}$$

donde, en esta ocasión, \times es el producto vectorial en \mathbb{R}^7 .

²Porque el teorema de separación de Jordan Brouwer garantiza que el complementario tiene dos componentes, una acotada y la otra no, lo que permite elegir una de ellas y definir el vector normal de modo continuo apuntando, en todo punto, a la componente elegida.

3.1.2 Estructura casi-compleja en la esfera \mathbb{S}^6

Como acabamos de mencionar, toda hipersuperficie orientable de \mathbb{R}^7 admite una estructura casi-compleja. No obstante, ahora no podemos deducir que toda estructura casi-compleja vaya a ser compleja ya que, en general, el tensor de Nijenhuis no se va a anular.

Es el caso particular de la esfera de dimensión seis, centrada en el origen y de radio uno, \mathbb{S}^6 . Como es una hipersuperficie orientable de \mathbb{R}^7 , admite una estructura casi-compleja. Sin embargo, esta estructura que ya hemos definido anteriormente, no dota a la esfera de dimensión seis de una estructura compleja. Para verlo, haciendo uso del Teorema de Newlander-Nirenberg (3.12), basta ver que el tensor de Nijenhuis no es idénticamente nulo. Para ello, seguiremos también el artículo [12].

Como mencionamos en el capítulo 1, existe un isomorfismo entre \mathbb{R}^7 y los octoniones imaginarios, así como una relación entre el producto vectorial de \mathbb{R}^7 y el de los octoniones. Utilizaremos este hecho para demostrar que la esfera \mathbb{S}^6 con la estructura casi-compleja que hemos definido, no es una variedad compleja. Veamos que el tensor de Nijenhuis puede ser expresado en términos del asociador de los octoniones. En primer lugar, veamos que en \mathbb{R}^n se tiene la siguiente igualdad:

$$[X, Y] = DY(X) - DX(Y)$$

para cualesquiera campos vectoriales $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ y donde DX y DY denota la diferencial (Teorema A.25) de X e Y respectivamente.

Consideramos el espacio euclídeo \mathbb{R}^n de coordenadas globales (x^1, \dots, x^n) . En coordenadas locales, podemos escribir

$$X = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i} X^i \quad Y = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x^j} Y^j$$

Por un lado, desarrollamos el corchete de Lie. Sea $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned} [X, Y](f) &= X(Y(f)) - Y(X(f)) = X\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j} Y^j\right) - Y\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} X^i\right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j} Y^j\right) X^i - \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} X^i\right) Y^j = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial f}{\partial x^j} Y^j\right) X^i - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} X^i\right) Y^j = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} Y^j + \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\right) X^i - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} X^i + \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial X^i}{\partial x^j}\right) Y^j = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} X^i - \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial X^i}{\partial x^j} Y^j = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} X^i - \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial X^i}{\partial x^j} Y^j\right)(f) \end{aligned}$$

Por otro lado, desarrollamos $DY(X)$ y $DX(Y)$.

$$DY(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial Y^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial Y^1}{\partial x^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial Y^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial Y^n}{\partial x^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial Y^1}{\partial x^i} X^i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial Y^n}{\partial x^i} X^i \end{pmatrix}$$

$$DX(Y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial X^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial X^1}{\partial x^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial X^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial X^n}{\partial x^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y^1 \\ \vdots \\ Y^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial X^1}{\partial x^i} Y^i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial X^n}{\partial x^i} Y^i \end{pmatrix}$$

En coordenadas locales,

$$DY(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} X^i \quad DX(Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial X^i}{\partial x^j} Y^j$$

Luego, en efecto, $[X, Y] = DY(X) - DX(Y)$.

Notemos que en la demostración es clave que la matriz de la diferencial se corresponda con la de la matriz jacobiana, y esto ocurre si la variedad está inmersa en un espacio euclídeo. En nuestro caso, estamos considerando la esfera \mathbb{S}^6 , que es una hipersuperficie de \mathbb{R}^7 . Por tanto, dados $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^6)$, los podemos ver como campos vectoriales de \mathbb{R}^7 donde

$$X : \quad \mathbb{R}^7 \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}^7 \\ p = (p_1, \dots, p_7) \quad \longmapsto \quad X(p) = (X^1(p), \dots, X^n(p))$$

Y, del mismo modo, $DX = (X_p)_* : \overrightarrow{T_p \mathbb{R}^7} \rightarrow \overrightarrow{T_p \mathbb{R}^7}$.

Por tanto, la fórmula que acabmos de demostrar es válida en nuestro caso. Luego, podemos escribir el tensor de Nijenhuis de la siguiente manera:

$$N_J(X, Y) = D(JY)(JX) - D(JX)(JY) - DY(X) + DX(Y) + \\ - J(D(JY)(X) - DX(JY)) - J(DY(JX) - D(JX)(Y))$$

Tal y como afirma el artículo que estamos siguiendo [12], diferenciando, obtenemos las siguientes expresiones:

$$D(JY)(JX) = J(DY(JX)) + Y \cdot JX \\ J(D(JY)(X)) = -DY(X) + J(Y \cdot X)$$

Donde, el producto \cdot denota, en este caso, al producto de los octoniones. Entonces, podemos escribir,

$$N_J(X, Y) = J(DY(JX)) + Y \cdot JX - J(DX(JY)) - X \cdot JY + \\ - DY(X) + DX(Y) + DY(X) - J(Y \cdot X) + \\ J(DX(JY)) - J(DY(JX)) - DX(Y) + J(X \cdot Y) = \\ = Y \cdot JX - X \cdot JY - J(Y \cdot X) + J(X \cdot Y)$$

Sea $a \in \mathbb{S}^6$ y $\vec{b}, \vec{c} \in \overrightarrow{T_a \mathbb{S}^6}$. Por definición, $J_a Y_a = Y_a \cdot \vec{a}$, luego

$$\begin{aligned} N_a(\vec{b}, \vec{c}) &= \vec{c} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{a}) - \vec{b} \cdot (\vec{c} \cdot \vec{a}) - (\vec{c} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{a} + (\vec{b} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{a} = \\ &= -[\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}] + [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = 2[\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] \end{aligned}$$

En la última igualdad, hemos utilizado que los octoniones son un álgebra alternativa y que, por tanto, el asociador es alternado, como ya vimos en el capítulo 1. Si tomamos $e_7 \in \mathbb{S}^6$ y $\vec{e}_2, \vec{e}_5 \in \overrightarrow{T_{e_7} \mathbb{S}^6}$, entonces

$$N_{e_7}(\vec{e}_2, \vec{e}_5) = 2[\vec{e}_2, \vec{e}_5, \vec{e}_7] = -2\vec{e}_1 \neq 0$$

Donde \vec{e}_i denotan los vectores canónicos.

Por tanto, la estructura casi-compleja que hemos definido sobre la esfera \mathbb{S}^6 no la dota de una estructura compleja. No obstante, eso no implica que la esfera no sea una variedad compleja.

En 1947, Heinz Hopf se preguntó si toda variedad diferenciable admitiría una estructura compleja, después de que Hassler Whitney demostrara que sí que admiten una estructura real-analítica. Fue el mismo Hopf el que respondió a su propia pregunta de forma negativa, demostrando que había infinitas variedades orientables de dimensión par que no admitían una tal estructura. Entre ellas, se encontraban las esferas de dimensiones cuatro y ocho.

Sin embargo, a pesar de sus avances, Hopf reconoció que no había sido capaz de determinar si las esferas \mathbb{S}^{2m} con $m \neq 1, 2, 4$ admitían una estructura compleja o no.

A día de hoy, se sabe que las únicas esferas que admiten una estructura casi-compleja son las esferas de dimensiones dos y seis (lo demostraron Borel y Serre en 1951), luego son las únicas que podrían admitir una estructura compleja. Ya hemos visto que, por su parte, la esfera de dimensión dos es compleja. No obstante, es la pregunta acerca de si la esfera de dimensión seis admite una estructura compleja o no, la que sigue abierta a día de hoy y a la que se conoce como *Problema de Hopf*. Se puede encontrar más información sobre su historia en [1].

3.2 Estructura casi-hermítica y estructuras de tipo simpléctico

A lo largo de este capítulo, hemos hablado de las estructuras casi-complejas de una variedad. En particular, de las de las esferas de dimensiones dos y seis. Comenzaremos esta sección definiendo las variedades casi-hermíticas, que tienen una métrica riemanniana adaptada a la estructura casi-compleja. Después, veremos las de tipo simpléctico. Las introduciremos brevemente y veremos algunas relaciones entre ellas. Además, siguiendo el hilo del trabajo, veremos qué esferas admiten dichas estructuras. Para esta sección, hemos seguido los capítulos 1 y 4 de [3] y el capítulo 3 de [18].

Para poder definir las, vamos a tener que dotar de una métrica a la variedad. Por ello, vamos a recordar primero qué es una métrica riemanniana.

Definición 3.15 *Sea M una variedad diferenciable. Se dice que g es una **métrica riemanniana** en M si g es un campo tensorial de tipo $(0,2)$ (Definición A.34) simétrico y definido positivo. En tal caso, se dice que (M, g) es una **variedad riemanniana**.*

De hecho, es posible definir una métrica riemanniana en toda variedad que sea T_2 (Definición A.12) y cumpla el segundo axioma de numerabilidad (Definición A.10).

Teorema 3.16 *Toda variedad (T_2 y II.A.N) admite una métrica riemanniana.*

Demostración. Por el Teorema de inmersión de Whitney (Teorema A.31), sabemos que toda variedad M de dimensión n que sea T_2 y II.A.N, admite un embedding regular en \mathbb{R}^{2n} . Por otro lado, todo espacio euclídeo tiene una métrica riemanniana g standard. Luego, en particular, basta definir la métrica riemanniana en M como la restricción de la métrica standard de \mathbb{R}^{2n} a M .

□

Por tanto, a partir de ahora, además de considerar cualquier estructura sobre una variedad (como una estructura compleja o casi-compleja), se puede considerar una estructura adicional que viene dada por una métrica riemanniana.

Definición 3.17 *Sea M una variedad casi-compleja con una estructura casi-compleja J . Una métrica riemanniana g se dice **métrica hermítica** si se cumple*

$$g(JX, JY) = g(X, Y) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

*A una variedad casi-compleja con una métrica hermítica se le denomina **variedad casi-hermítica**.*

*Si la variedad tiene una estructura compleja y una métrica hermítica, se llama **variedad hermítica**.*

Ejemplo 3.18 *Los espacios euclídeos de dimensión par \mathbb{R}^{2n} , con la métrica standard g son variedades hermíticas.*

Estos espacios son isomorfos a los espacios complejos \mathbb{C}^n , luego son variedades complejas. La matriz que define su estructura compleja es la siguiente

$$J = \begin{pmatrix} 0 & Id_n \\ -Id_n & 0 \end{pmatrix}$$

Notemos que $J^t J = Id_{2n}$, donde J^t denota la matriz traspuesta de J . Por otro lado, la métrica standard en \mathbb{R}^{2n} viene dada por la matriz identidad $g = Id_{2n}$. Dados $X, Y \in \mathbb{R}^{2n}$, expresamos matricialmente las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} g(JX, JY) &= (JX)^t g(JY) = X^t J^t g JY = X^t J^t JY = X^t Y \\ g(X, Y) &= X^t g Y = X^t Y \end{aligned}$$

Luego, la métrica es hermítica y, por tanto, (\mathbb{R}^{2n}, J, g) se trata de una variedad hermítica.

Ejemplo 3.19 *La esfera de dimensión dos, \mathbb{S}^2 , con la estructura compleja que ya hemos definido anteriormente J y g la métrica standard, es una variedad hermítica.*

Consideramos la estructura casi-compleja J definida en 3.1.1, que ya hemos visto que se trata de una estructura compleja. Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^2)$, recordamos que $JX = X \times \vec{N}$, luego X, Y, JX, JY están sobre el mismo plano. Comprobamos que el ángulo que definen X e Y es el mismo que el que definen JX y JY . Por las propiedades del producto vectorial, X y JX son ortogonales e Y y JY también. Tenemos el siguiente esquema:

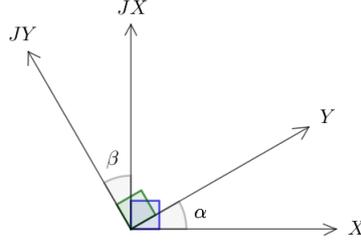


Figura 5: Representación de los campos vectoriales X, Y, JX, JY sobre el mismo plano.

Tal y como hemos denotado en el dibujo, llamamos α al ángulo que forman X e Y y β al que definen JX y JY . Por un lado, tenemos que el ángulo que forman X y JY es $\alpha + \pi/2$ y, por otro lado, que también es $\pi/2 + \beta$. Luego, igualando ambas expresiones, concluimos que $\alpha = \beta$.

Además, la estructura casi-compleja J preserva la norma euclídea.

$$\|JX\| = \|X \times \vec{N}\| = \|X\| \|\vec{N}\| \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \|X\|$$

Por tanto, dado que g es la métrica standard, se cumple que

$$g(JX, JY) = \|JX\| \|JY\| \cos(\beta) = \|X\| \|Y\| \cos(\alpha) = g(X, Y)$$

Luego, en efecto, la métrica es hermítica y al ser (\mathbb{S}^2, J) una variedad compleja, concluimos que (\mathbb{S}^2, J, g) es una variedad hermítica.

De una forma similar, se podría probar que (\mathbb{S}^6, J, g) , donde J es la estructura casi-compleja definida en 3.1.2 y g la métrica standard, es una variedad casi-hermítica. En este caso, no sería hermítica porque J define una estructura casi-compleja que no es compleja, a diferencia del caso de la esfera de dimensión dos.

Observación 3.20 A la esfera de dimensión n

$$\mathbb{S}^n = \{(x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x^1)^2 + \dots + (x^{n+1})^2 = 1\}$$

dotada de la métrica standard se le denomina **round sphere**.

En el teorema precedente, hemos visto que siempre podemos definir una métrica riemanniana sobre una variedad. Nos podemos preguntar también en qué casos podríamos definir una que sea hermítica. La respuesta es que siempre que tengamos una estructura casi-compleja vamos a poder hacerlo.

Teorema 3.21 Toda variedad casi-compleja admite una estructura casi-hermítica.

Demostración. Sea (M, J) una variedad casi-compleja, hemos de probar que existe g una métrica riemanniana de forma que $g(JX, JY) = g(X, Y)$ para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Por el Teorema 3.16, sabemos que existe G una métrica riemanniana. Definimos g de la siguiente manera:

$$g(X, Y) = G(JX, JY) + G(X, Y)$$

Claramente g es también una métrica riemanniana, por serlo G . Veamos que g es hermítica.

$$\begin{aligned} g(JX, JY) &= G(J^2X, J^2Y) + G(JX, JY) = G(-X, -Y) + G(JX, JY) = \\ &= G(X, Y) + G(JX, JY) = g(X, Y) \end{aligned}$$

Luego, (M, J, g) es una estructura casi-hermítica sobre M . □

Por último, vamos a introducir las estructuras de tipo simpléctico, que al igual que en los casos anteriores, son propias de las variedades de dimensión par.

Definición 3.22 Sea M^{2n} una variedad diferenciable de dimensión par, se llama **variedad casi-simpléctica** si tiene definida globalmente una 2-forma ω tal que, en cada punto de la variedad se tiene que

$$\omega \wedge \cdots \wedge \omega \neq 0$$

Si además se cumple que $d\omega = 0$, entonces se dice que es una **variedad simpléctica**.

Teorema 3.23 Toda variedad casi-hermítica admite una estructura casi-simpléctica.

Demostración. Sea (M, J, g) una variedad casi-hermítica, donde M es una variedad de dimensión par, J una estructura casi-compleja y g una métrica hermítica. Definimos:

$$\omega(X, Y) = g(JX, Y) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

Comprobemos que se trata de una 2-forma. Claramente se trata de un campo tensorial de tipo $(0, 2)$, veamos que es antisimétrica.

$$\omega(Y, X) = g(JY, X) = g(J^2Y, JX) = g(-Y, JX) = -g(Y, JX) = -g(JX, Y) = -\omega(X, Y)$$

Donde hemos utilizado que $J^2 = -Id$ por ser J una estructura casi-compleja, que g es hermítica y que g es simétrica por ser una métrica riemanniana.

Falta ver que $\omega \wedge \cdots \wedge \omega \neq 0$, lo que es equivalente a ver que es una 2-forma no degenerada. Esto es, que si $\omega(X, Y) = 0$ para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$, entonces $X = 0$. Supongamos que $\omega(X, Y) = 0$ para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$, entonces $g(JX, Y) = 0$ para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$. Como g es no degenerada, entonces $JX = 0$. Pero J es un endomorfismo tal que $J^2 = -Id$, luego $X = 0$ como queríamos ver. □

Observación 3.24 Las estructuras casi-compleja, casi-hermítica y casi-simpléctica están relacionadas entre sí mediante los elementos J , g y ω .

Partimos de la definición de la 2-forma ω . Para todos X, Y campos vectoriales en M , se tiene que $\omega(X, Y) = g(JX, Y)$. Haciendo un abuso de notación, ahora vamos a considerar J , g y ω las matrices que definen dichas aplicaciones.

$$X^t \omega Y = (JX)^t g Y = X^t J^t g Y$$

Luego, $\omega = J^t g$.

De esta forma, cada elemento se puede expresar en términos de los otros dos:

$$J = (g^{-1})^t \omega^t \quad g = (J^t)^{-1} \omega \quad \omega = J^t g$$

Observación 3.25 *Las variedades casi-simplécticas tienen las mismas obstrucciones topológicas que las casi-complejas: ser orientables y de dimensión par.*

Las únicas esferas que admiten una estructura casi-compleja son las de dimensiones dos y seis. Sin embargo, el número de esferas que admiten una estructura simpléctica es aún más reducido, pues solo la de dimensión dos es una variedad simpléctica.

Teorema 3.26 *La única esfera simpléctica es la de dimensión dos.*

Demostración. Veamos, en primer lugar, que la esfera de dimensión dos, \mathbb{S}^2 , admite una estructura simpléctica.

Ya sabemos que \mathbb{S}^2 es casi-compleja, luego por el Teorema 3.21, admite también una estructura casi-hermítica. Por tanto, como bien hemos demostrado en el Teorema 3.23, podemos afirmar que la esfera \mathbb{S}^2 es casi-simpléctica. Es decir, existe una 2-forma $\omega \in \Lambda^2\mathbb{S}^2$ tal que $\omega \neq 0$ en todo punto. Para que sea una estructura simpléctica, hay que comprobar que $d\omega = 0$. Pero $d\omega \in \Lambda^3\mathbb{S}^2$ es una 3-forma sobre una variedad de dimensión dos y, por tanto, $d\omega = 0$.

Ya hemos mencionado que las variedades simplécticas tienen dimensión par, luego veamos que ninguna otra esfera de dimensión par puede admitir una estructura simpléctica. Supongamos que \mathbb{S}^{2n} con $n > 1$ es una esfera de dimensión par que admite una estructura simpléctica. Entonces, existe una 2-forma $\omega \in \Lambda^2\mathbb{S}^{2n}$ tal que

$$\omega \wedge \cdots \wedge \omega \neq 0$$

En particular, se tiene que $\omega \neq 0$. Luego, ω generaría una clase no nula en el segundo grupo de cohomología de la esfera, $H^2(\mathbb{S}^{2n})$. Sin embargo, esto supone una contradicción, puesto que el k -ésimo grupo de cohomología de las esferas es (consultar Teorema 17.21 de [10])

$$H^k(\mathbb{S}^{2n}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = 0, 2n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Nótese que es en este punto donde influye que la dimensión de la esfera sea estrictamente mayor que dos. Por todo ello, ninguna otra esfera es simpléctica.

□

Observación 3.27 *Se llama **variedad Kähleriana** a una variedad de dimensión par que cuenta con una estructura compleja J , una métrica hermítica g y una 2-forma ω tal que $d\omega = 0$. Notemos que toda variedad Kähleriana es simpléctica. En particular, como acabamos de demostrar que la esfera de dimensión seis no es simpléctica, tampoco es Kähleriana. Sin embargo, la esfera \mathbb{S}^2 sí que es Kähleriana.*

Relacionado con este teorema, se encuentra un resultado de Claude LeBrun [9] acerca de la *round sphere* que afirma que ninguna esfera, salvo el caso de la esfera de dimensión dos, admite una estructura ortogonal. Esto es, que no admite una estructura compleja compatible con la métrica standard. A parte de la esfera de dimensión dos, la única que podría cumplirlo es la de dimensión seis, ya que no hay más con estructura casi-compleja. Sin embargo, LeBrun demuestra que esta última tampoco lo cumple.

4 Teorema de Kirchhoff

Este capítulo, tal y como su nombre indica, está dedicado a demostrar el Teorema de Kirchhoff, el cual establece una bonita relación entre las esferas paralelizables y aquellas que admiten una estructura casi-compleja.

Fue en 1947 cuando Kirchhoff publicó este resultado, en el que afirma que si una esfera es casi-compleja, entonces la esfera de una dimensión superior es paralelizable. A partir de ese momento, surgieron otros resultados que terminaron haciendo caer en el olvido dicho teorema: en 1951, Armand Borel y Jean-Pierre Serre probaron que \mathbb{S}^2 y \mathbb{S}^6 son las únicas esferas que admiten una estructura casi-compleja y, por su parte, en 1958, J. F. Adams demostró que únicamente las esferas \mathbb{S}^1 , \mathbb{S}^3 y \mathbb{S}^7 son paralelizables.

De hecho, combinando dos de los resultados que acabamos de mencionar, se deduce fácilmente el tercero. Sin embargo, es el de Kirchhoff el único que establece una relación entre las estructuras casi-complejas y paralelizables de las esferas. La demostración del teorema consiste en construir una paralelización explícita de la esfera en cuestión a partir de la estructura casi-compleja de la esfera de una dimensión menor. Para realizar la demostración, hemos seguido esencialmente los recientes artículos [15] y [12].

Teorema 4.1 (Teorema de Kirchhoff) *Si la esfera \mathbb{S}^n admite una estructura casi-compleja, entonces la esfera \mathbb{S}^{n+1} es paralelizable.*

Demostración. Sean $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ y $\mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$ las esferas de radio uno, centradas en el origen y de dimensión n y $n+1$ respectivamente. Para demostrar que \mathbb{S}^{n+1} es paralelizable, hay que ver que existe una base global de campos vectoriales en dicha esfera. Esto es, que existen $X_1, \dots, X_{n+1} \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^{n+1})$ campos vectoriales tales que, para cada $x \in \mathbb{S}^{n+1}$ se tiene que $\{(X_1)_x, \dots, (X_{n+1})_x\}$ es una base del espacio tangente $\overrightarrow{T_x \mathbb{S}^{n+1}}$.

Consideramos la inclusión de los espacios euclídeos $\mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$, donde cada punto (p_1, \dots, p_{n+1}) de \mathbb{R}^{n+1} se corresponde con el punto $(p_1, \dots, p_{n+1}, 0)$ de \mathbb{R}^{n+2} . Sea J una estructura casi-compleja en \mathbb{S}^n . Consideramos $\vec{e} := \vec{e}_{n+2} \in \mathbb{R}^{n+2}$ donde $\vec{e}_{n+2} = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+2}$, perpendicular a \mathbb{R}^{n+1} con el producto euclídeo.

Dividimos la demostración en varios pasos:

1. Veamos, en primer lugar, que en cada punto $y \in \mathbb{S}^n$, la estructura casi-compleja $J_y : \overrightarrow{T_y \mathbb{S}^n} \rightarrow \overrightarrow{T_y \mathbb{S}^n}$ se puede extender a una aplicación lineal $\tilde{J}_y : \overrightarrow{T_y \mathbb{R}^{n+2}} \rightarrow \overrightarrow{T_y \mathbb{R}^{n+2}}$ tal que $\tilde{J}_y^2 = -I$, donde I denota la matriz identidad.

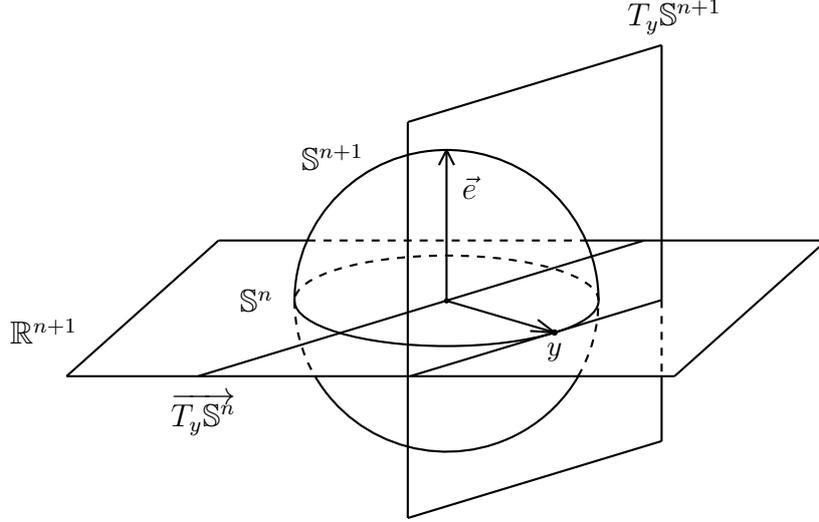


Figura 6: Representación de las esferas \mathbb{S}^n y \mathbb{S}^{n+1} , el vector \vec{e} , el punto y , el espacio vectorial tangente a la esfera \mathbb{S}^n y el espacio afín tangente a la esfera \mathbb{S}^{n+1} .

Como tenemos que $\overrightarrow{T_y \mathbb{R}^{n+2}} \cong \mathbb{R}^{n+2}$, escribiremos $\tilde{J}_y : \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$. Definimos dicha aplicación de la siguiente manera:

$$\tilde{J}_y(\vec{e}) = \vec{y} \quad \tilde{J}_y(\vec{y}) = -\vec{e} \quad \tilde{J}_y(\vec{v}) = J_y(\vec{v}) \quad \forall \vec{v} \in \overrightarrow{T_y \mathbb{S}^n}$$

Como $J^2 = -I$ por ser J una estructura casi-compleja, se deduce inmediatamente que $\tilde{J}_y^2 = -I$. Y, por tanto, \tilde{J}_y es una estructura casi-compleja sobre \mathbb{R}^{n+2} .

2. Ahora, sea $\vec{x} \in \mathbb{R}^{n+2}$ un vector no nulo, entonces se puede escribir de forma única como $\vec{x} = \alpha \vec{e} + \beta \vec{y}$, donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \geq 0$ e $y \in \mathbb{S}^n$.

Definimos una aplicación lineal $\tilde{\sigma}_x : \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ de la siguiente manera:

$$\tilde{\sigma}_x := \alpha I + \beta \tilde{J}_y$$

Veamos a continuación que la aplicación $\tilde{\sigma}_x$ es un automorfismo de \mathbb{R}^{n+2} .

Comprobamos que se tiene

$$\tilde{\sigma}_x^{-1} = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} (\alpha I - \beta \tilde{J}_y)$$

La aplicación está bien definida porque $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ al ser \vec{x} no nulo.

En efecto,

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_x^{-1} \tilde{\sigma}_x &= \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} (\alpha I - \beta \tilde{J}_y) (\alpha I + \beta \tilde{J}_y) = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} (\alpha^2 I^2 + \alpha \beta \tilde{J}_y - \alpha \beta \tilde{J}_y - \beta^2 \tilde{J}_y^2) \\ &= \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} (\alpha^2 + \beta^2) I = I \end{aligned}$$

De forma análoga, se tiene directamente que $\tilde{\sigma}_x \tilde{\sigma}_x^{-1} = I$. Luego, la aplicación es biyectiva y, por tanto, se trata de un automorfismo del espacio vectorial \mathbb{R}^{n+2} .

3. Para cada $x \in \mathbb{S}^{n+1}$, denotamos la restricción de $\tilde{\sigma}_x$ a \mathbb{R}^{n+1} como $\sigma_x := \tilde{\sigma}_x|_{\mathbb{R}^{n+1}}$.

Veamos que cuando $x \in \mathbb{S}^{n+1}$, entonces $\sigma_x : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \overrightarrow{T_x \mathbb{S}^{n+1}}$ es un isomorfismo.

Notemos primero que se tiene que $\mathbb{R}^{n+1} = \langle \vec{y} \rangle \oplus \overrightarrow{T_y \mathbb{S}^n}$ donde $\langle \vec{y} \rangle$ denota el subespacio generado por \vec{y} . De hecho, los espacios $\langle \vec{y} \rangle$ y $\overrightarrow{T_y \mathbb{S}^n}$ son ortogonales entre sí.

Veamos que, dado $x \in \mathbb{S}^{n+1}$, se tiene que $\sigma_x(\vec{y})$ es ortogonal a x .

Por un lado,

$$\tilde{\sigma}_x(\vec{y}) = (\alpha I + \beta \tilde{J}_y)(\vec{y}) = \alpha \vec{y} + \beta \tilde{J}_y(\vec{y}) = \alpha \vec{y} + \beta(-\vec{e})$$

Como la aplicación σ_x no es más que la restricción de $\tilde{\sigma}_x$, claramente $\sigma_x(\vec{y}) = \tilde{\sigma}_x(\vec{y})$. Calculando el producto escalar entre $\sigma_x(\vec{y})$ y \vec{x} ,

$$\sigma_x(\vec{y}) \cdot \vec{x} = (\alpha \vec{y} - \beta \vec{e}) \cdot (\alpha \vec{e} + \beta \vec{y}) = \alpha^2(\vec{y} \cdot \vec{e}) + \alpha\beta(\vec{y} \cdot \vec{y}) - \alpha\beta(\vec{e} \cdot \vec{e}) - \beta^2(\vec{e} \cdot \vec{y})$$

Donde \cdot denota el producto escalar standard en \mathbb{R}^{n+2} . Como $\vec{y} \perp \vec{e}$, entonces $\vec{y} \cdot \vec{e} = \vec{e} \cdot \vec{y} = 0$. Por otro lado, $\vec{y} \cdot \vec{y} = \vec{e} \cdot \vec{e} = 1$. Sustituyendo en la expresión anterior, obtenemos

$$\sigma_x(\vec{y}) \cdot \vec{x} = \alpha\beta - \beta\alpha = 0$$

Veamos ahora que, dado $\vec{v} \in \overrightarrow{T_y \mathbb{S}^n}$, se tiene que $\sigma_x(\vec{v})$ es ortogonal a \vec{x} . Por un lado,

$$\tilde{\sigma}_x(\vec{v}) = (\alpha I + \beta \tilde{J}_y)(\vec{v}) = \alpha \vec{v} + \beta \tilde{J}_y(\vec{v}) = \alpha \vec{v} + \beta J_y(\vec{v})$$

Al igual que en el caso anterior, claramente $\sigma_x(\vec{v}) = \tilde{\sigma}_x(\vec{v})$. Calculamos el producto escalar entre $\sigma_x(\vec{v})$ y \vec{x} ,

$$\begin{aligned} \sigma_x(\vec{v}) \cdot \vec{x} &= (\alpha \vec{v} + \beta J_y(\vec{v})) \cdot (\alpha \vec{e} + \beta \vec{y}) = \\ &= \alpha^2(\vec{v} \cdot \vec{e}) + \alpha\beta(\vec{v} \cdot \vec{y}) + \alpha\beta(J_y(\vec{v}) \cdot \vec{e}) + \beta^2(J_y(\vec{v}) \cdot \vec{y}) \end{aligned}$$

Comprobamos que todos los productos escalares de la expresión anterior se anulan: En primer lugar, como $\vec{v} \in \mathbb{R}^{n+1}$ y \vec{e} es ortogonal a \mathbb{R}^{n+1} , $\vec{v} \cdot \vec{e} = 0$. Por otro lado, como $\overrightarrow{T_y \mathbb{S}^n}$ es ortogonal a $\langle \vec{y} \rangle$, se tiene que $\vec{v} \cdot \vec{y} = 0$. Asimismo, como $J_y(\vec{v}) \in \overrightarrow{T_y \mathbb{S}^n} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, entonces $J_y(\vec{v}) \cdot \vec{e} = 0$. Por último, $J_y(\vec{v}) \in \overrightarrow{T_y \mathbb{S}^n}$ y $\overrightarrow{T_y \mathbb{S}^n} \perp \langle \vec{y} \rangle$, luego $J_y(\vec{v}) \cdot \vec{y} = 0$. Por tanto, se tiene que $\sigma_x(\vec{v}) \cdot \vec{x} = 0$.

Todo punto de $\mathbb{R}^{n+1} = \langle \vec{y} \rangle \oplus \overrightarrow{T_y \mathbb{S}^n}$ se puede escribir de la forma $\vec{z} = \lambda \vec{y} + \vec{v}$ con $\vec{v} \in \overrightarrow{T_y \mathbb{S}^n}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Como σ_x es una aplicación lineal, $\sigma_x(\vec{z}) = \lambda \sigma_x(\vec{y}) + \sigma_x(\vec{v})$ que, como acabamos de demostrar, es ortogonal a \vec{x} para un $x \in \mathbb{S}^{n+1}$. Por tanto, deducimos que $\sigma_x(\mathbb{R}^{n+1}) \subseteq \overrightarrow{T_x(\mathbb{S}^{n+1})}$.

En el segundo paso, hemos probado que $\tilde{\sigma}_x$ es un automorfismo, luego resulta que $\tilde{\sigma}_x|_{\mathbb{R}^{n+1}} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow (\tilde{\sigma}_x|_{\mathbb{R}^{n+1}})(\mathbb{R}^{n+1}) \subseteq \overrightarrow{T_x(\mathbb{S}^{n+1})}$ es un isomorfismo. Como se tiene que $(\tilde{\sigma}_x|_{\mathbb{R}^{n+1}})(\mathbb{R}^{n+1}) \subseteq \overrightarrow{T_x(\mathbb{S}^{n+1})}$ y

$$\dim \overrightarrow{T_x(\mathbb{S}^{n+1})} = n + 1 = \dim \mathbb{R}^{n+1} = \dim \text{Im}(\sigma_x)$$

concluimos que $(\tilde{\sigma}_x|_{\mathbb{R}^{n+1}})(\mathbb{R}^{n+1}) = \overrightarrow{T_x(\mathbb{S}^{n+1})}$, luego $\sigma_x : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \overrightarrow{T_x \mathbb{S}^{n+1}}$ es un isomorfismo, como queríamos probar.

4. Por tanto, para cada $x \in \mathbb{S}^{n+1}$, se considera el conjunto de campos vectoriales

$$\{X_i(x) := \sigma_x(\vec{e}_i)\}_{i=1, \dots, n+1}$$

donde $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n+1}\}$ es la base canónica de \mathbb{R}^{n+1} , que definen la paralelización que buscamos.

Si queremos obtener una expresión explícita de estos campos, podemos hacerlo de la siguiente manera:

Sea $x = (x_1, \dots, x_{n+2}) \in \mathbb{S}^{n+1}$, podemos escribir

$$\vec{x} = \alpha \vec{e} + \beta \vec{y} = x_{n+2} \vec{e}_{n+2} + \beta((\vec{y} \cdot \vec{e}_1) \vec{e}_1 + (\vec{y} \cdot \vec{e}_2) \vec{e}_2 + \dots + (\vec{y} \cdot \vec{e}_{n+1}) \vec{e}_{n+1})$$

donde se tiene que $\beta(\vec{y} \cdot \vec{e}_i) = x_i$ para cada $i \in \{1, \dots, n+1\}$.

Notemos que $\vec{e}_i = (\vec{e}_i \cdot \vec{y}) \vec{y} + \vec{e}_i - (\vec{e}_i \cdot \vec{y}) \vec{y}$ donde $(\vec{e}_i \cdot \vec{y}) \vec{y} \in \langle \vec{y} \rangle$ y $\vec{e}_i - (\vec{e}_i \cdot \vec{y}) \vec{y} \in \overline{T_y \mathbb{S}^n}$. Por tanto, sustituyendo en la expresión de σ_x ,

$$\begin{aligned} X_i(x) &= \sigma_x(\vec{e}_i) = (x_{n+2} I + \beta \tilde{J}_y)(\vec{e}_i) = \\ &= x_{n+2} \vec{e}_i + \beta \tilde{J}_y((\vec{e}_i \cdot \vec{y}) \vec{y} + \vec{e}_i - (\vec{e}_i \cdot \vec{y}) \vec{y}) = \\ &= x_{n+2} \vec{e}_i + \beta (\vec{e}_i \cdot \vec{y}) \tilde{J}_y(\vec{y}) + \beta \tilde{J}_y(\vec{e}_i - (\vec{e}_i \cdot \vec{y}) \vec{y}) = \\ &= x_{n+2} \vec{e}_i - x_i \vec{e} + \beta J_y(\vec{e}_i - (\vec{e}_i \cdot \vec{y}) \vec{y}) \end{aligned}$$

La expresión explícita de los campos nos permite asegurar que son campos vectoriales diferenciables porque J_y es diferenciable, al ser una estructura casi-compleja. Además, los campos vectoriales son linealmente independientes por definición, ya que $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n+1}\}$ es una base y σ_x es un isomorfismo.

Por tanto, hemos encontrado una base global de campos vectoriales diferenciables en la esfera \mathbb{S}^{n+1} , luego podemos concluir que es paralelizable, como queríamos ver.

□

5 Estructuras casi-contacto y estructuras contacto

En este capítulo se presentarán las estructuras casi-contacto, que podrían considerarse las análogas a las estructuras casi-complejas pero en dimensión impar. En particular, nos centraremos en el ejemplo que nos concierne: las esferas. Asimismo, introduciremos también las estructuras contacto.

5.1 Estructuras casi-contacto

Previamente, se han introducido las estructuras casi-complejas, y a una variedad dotada de una tal estructura se le conoce como variedad casi-compleja. Hemos visto que estas variedades tienen que tener dimensión par, lo que nos hace preguntarnos si existirá alguna especie de análogo para estas estructuras pero en dimensión impar. La respuesta es que sí, y esto da lugar a la noción de estructura casi-contacto. Para esta sección, se ha seguido principalmente el artículo [13] y el capítulo 5 del libro [18].

Definición 5.1 *Sea M una variedad diferenciable de dimensión impar $2n+1$. Una **estructura casi-contacto** en M es una terna $\Sigma = (\varphi, \xi, \eta)$ donde φ es un campo tensorial de tipo $(1, 1)$ en M , ξ es un campo vectorial sin ceros de M y η es una 1-forma diferencial, que cumplen:*

- i) $\varphi(\xi) = 0$
- ii) $\eta \circ \varphi = 0$
- iii) $\eta(\xi) = 1$
- iv) $\varphi \circ \varphi(X) = -X + \eta(X)\xi$ con $X \in \mathfrak{X}(M)$

Una variedad diferenciable dotada de una tal estructura se dice **variedad casi-contacto**.

Observación 5.2 *Si (φ, ξ, η) es una estructura casi-contacto sobre una variedad M y consideramos ξ el campo vectorial sin ceros y una distribución $\mathcal{D} = \ker \eta$ transversa al campo, de la propiedad iv) se deduce que el tensor φ restringido a \mathcal{D} , es decir $\varphi|_{\mathcal{D}}$, es una estructura casi-compleja.*

Como $2n + 1$ es la dimensión de M y, por tanto, también la dimensión de $\overrightarrow{T_p M}$ en cada $p \in M$, y dado que η no es idénticamente nula entonces, en cada punto, se tiene que

$$\dim \mathcal{D}_p = \dim \overrightarrow{T_p M} - \text{rang } \eta_p = 2n + 1 - 1 = 2n$$

Como $\varphi|_{\mathcal{D}}^2 = -Id|_{\mathcal{D}}$ y se tiene que $\xi \in \ker \varphi$ y $\xi \in \ker \varphi^2$, resulta que el rango de φ es $2n$.

Podemos preguntarnos, a su vez, por la unicidad de las estructuras casi-contacto sobre una variedad M . Resulta que si tenemos dos ternas que forman dichas estructuras en las que el campo tensorial φ coincide, si algún otro de sus elementos coincide, entonces el tercero también lo hace, como se demuestra en la siguiente proposición.

Proposición 5.3 *Sea M una variedad casi-contacto:*

- i) Sean (φ, ξ, η) y (φ, ξ', η) dos estructuras casi-contacto sobre M , entonces $\xi = \xi'$.
- ii) Sean (φ, ξ, η) y (φ, ξ, η') dos estructuras casi-contacto sobre M , entonces $\eta = \eta'$.

Demostración. Demostramos cada apartado por separado:

\square Como (φ, ξ, η) y (φ, ξ', η) son dos estructuras casi-contacto, se cumple:

$$\begin{aligned}\eta(\xi) &= 1 = \eta(\xi') \\ -X + \eta(X)\xi &= \varphi \circ \varphi(X) = -X + \eta(X)\xi' \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M)\end{aligned}$$

En particular, si tomamos $X = \xi$ y sustituimos en la última propiedad, tenemos que:

$$-\xi + \eta(\xi)\xi = -\xi + \eta(\xi)\xi'$$

De donde se deduce inmediatamente que $\xi = \xi'$.

\square $ii)$ En este caso, otra vez por la última propiedad tenemos que se cumple que dado X un campo vectorial de M , entonces $-X + \eta(X)\xi = -X + \eta'(X)\xi$, es decir, $\eta(X)\xi = \eta'(X)\xi$, luego $(\eta(X) - \eta'(X))\xi = 0$. Como ξ es un campo vectorial no nulo, entonces se tiene que $\eta(X) = \eta'(X)$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. \square

Ejemplo 5.4 *Vamos a construir una estructura casi-contacto sobre la esfera \mathbb{S}^3 (donde \mathbb{S}^3 denota la esfera de dimensión tres, centrada en el origen y de radio uno).*

Sea \mathbb{R}^4 con coordenadas globales (x, y, z, t) . Notemos, en primer lugar, que \mathbb{S}^3 está contenida en \mathbb{R}^4 que es isomorfo a \mathbb{C}^2 y que, por tanto, tiene una estructura compleja J asociada. Sea $p \in \mathbb{R}^4$, consideramos por tanto, $J_p : \overrightarrow{T_p\mathbb{R}^4} \rightarrow \overrightarrow{T_p\mathbb{R}^4}$ la aplicación lineal definida por la siguiente matriz:

$$J_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por otro lado, si $p = (p^1, p^2, p^3, p^4) \in \mathbb{S}^3$, consideramos $\vec{N}_p = (p^1, p^2, p^3, p^4)$ el vector normal a la esfera \mathbb{S}^3 en el punto p . Calculando la imagen de \vec{N}_p por J_p , obtenemos que $J_p(\vec{N}_p) = (-p^4, -p^3, p^2, p^1)$. Se comprueba de manera directa que $J_p(\vec{N}_p) \cdot \vec{N}_p = 0$, donde \cdot denota el producto escalar standard de \mathbb{R}^4 . Por tanto, $J_p(\vec{N}_p) \in \overrightarrow{T_p\mathbb{S}^3}$.

Sabemos que $\overrightarrow{T_p\mathbb{R}^4}$ tiene como base al conjunto

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_p \right\}$$

Luego, podemos escribir

$$J(\vec{N}) = -t \frac{\partial}{\partial x} - z \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial z} + x \frac{\partial}{\partial t} \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^3)$$

De este modo, tomamos $\xi = J(\vec{N})$ que resulta ser un campo vectorial sin ceros sobre la esfera \mathbb{S}^3 .

Definimos ahora sobre $\mathfrak{X}(\mathbb{S}^3)$, la distribución \mathcal{D} ortogonal al campo ξ . Sean,

$$\begin{aligned}X &= y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} + t \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial t} \\ Y &= z \frac{\partial}{\partial x} - t \frac{\partial}{\partial y} - x \frac{\partial}{\partial z} + y \frac{\partial}{\partial t}\end{aligned}$$

Veamos que X e Y son campos vectoriales sobre la esfera \mathbb{S}^3 . Para ello, basta ver que $X \cdot \vec{N} = 0$ y $Y \cdot \vec{N} = 0$. En efecto,

$$\begin{aligned} X \cdot \vec{N} &= yx - xy + tz - zt = 0 \\ Y \cdot \vec{N} &= zx - ty - xz + yt = 0 \end{aligned}$$

Veamos ahora que los campos X e Y son ortogonales al campo vectorial ξ . Esto es, que $X \cdot \xi = 0$ y $Y \cdot \xi = 0$. Se comprueba de forma directa que

$$\begin{aligned} X \cdot \xi &= -yt - x(-z) + ty - zx = 0 \\ Y \cdot \xi &= z(-t) - t(-z) - xy + yx = 0 \end{aligned}$$

Además, $X \cdot Y = yz + xt - xt - zy = 0$, luego los campos X e Y son ortogonales entre sí y, por tanto, son linealmente independientes. Por todo ello, tenemos que $\{X, Y\}$ es una base de la distribución \mathcal{D} .

Buscamos ahora una 1-forma $\eta|_{\mathfrak{X}(\mathbb{S}^3)}$ de manera que $\ker \eta|_{\mathfrak{X}(\mathbb{S}^3)} = \mathcal{D}$. Definimos

$$\eta = -tdx - zdy + ydz + xdt$$

Luego, claramente, $\ker \eta|_{\mathfrak{X}(\mathbb{S}^3)} \subset \mathcal{D}$.

Veamos que $X, Y \in \ker \eta|_{\mathfrak{X}(\mathbb{S}^3)}$.

$$\begin{aligned} \eta(X) &= -ty - z(-x) + yt + x(-z) = 0 \\ \eta(Y) &= -tz - z(-t) + y(-x) + xy = 0 \end{aligned}$$

Luego, tenemos que $\ker \eta|_{\mathfrak{X}(\mathbb{S}^3)} = \mathcal{D}$.

Por otro lado, tenemos que para cada $p \in \mathbb{S}^3$, $\overrightarrow{T_p\mathbb{S}^3} = \vec{D}_p \oplus \langle \xi_p \rangle$ donde además los espacios \vec{D}_p y $\langle \xi_p \rangle$ son ortogonales entre sí. Definimos el tensor φ de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccc} \varphi_p : \overrightarrow{T_p\mathbb{S}^3} & \longrightarrow & \overrightarrow{T_p\mathbb{S}^3} \\ \xi_p & \longmapsto & 0 \\ Z_p \in \vec{D}_p & \longmapsto & J_p Z_p \end{array}$$

Veamos que la aplicación está bien definida: Todo elemento de $\overrightarrow{T_p\mathbb{S}^3}$ se puede escribir como suma de un elemento de $\langle \xi_p \rangle$ y un elemento de \vec{D}_p , luego basta dar la imagen de ξ_p y de un elemento Z_p de \vec{D}_p para definir la aplicación.

- Por un lado, $\varphi_p(\xi_p) = 0 \in \overrightarrow{T_p\mathbb{S}^3}$.
- Por otro lado, $Z_p \in \vec{D}_p \subset \overrightarrow{T_p\mathbb{S}^3}$, luego $J_p Z_p$ está bien definido. Falta ver que $\varphi_p(Z_p) = J_p Z_p \in \overrightarrow{T_p\mathbb{S}^3}$. Calculamos primero las imágenes de X e Y por J :

$$\begin{aligned} J(X) &= z \frac{\partial}{\partial x} - t \frac{\partial}{\partial y} - x \frac{\partial}{\partial z} + y \frac{\partial}{\partial t} = Y \\ J(Y) &= -y \frac{\partial}{\partial x} + t \frac{\partial}{\partial y} - z \frac{\partial}{\partial z} + x \frac{\partial}{\partial t} = -X \end{aligned}$$

Como $Z_p \in \vec{D}_p$ y $\{X_p, Y_p\}$ es una base de \vec{D}_p , podemos escribir $Z_p = \alpha X_p + \beta Y_p$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Luego,

$$J_p Z_p = J_p(\alpha X_p + \beta Y_p) = \alpha J_p X_p + \beta J_p Y_p = \alpha Y_p - \beta X_p$$

Ahora, basta ver que $J_p Z_p \cdot \vec{N}_p = 0$. En efecto,

$$J_p Z_p \cdot \vec{N}_p = (\alpha Y_p - \beta X_p) \cdot \vec{N}_p = \alpha Y_p \cdot \vec{N}_p - \beta X_p \cdot \vec{N}_p = 0 - 0 = 0$$

Ya hemos definido la terna (φ, ξ, η) de una estructura casi-contacto. Veamos que cumplen las cuatro propiedades de la definición:

i) $\varphi(\xi) = 0$

Se cumple directamente por cómo hemos definido la aplicación φ .

ii) $\eta \circ \varphi = 0$

Por un lado, $\eta \circ \varphi(\xi) = \eta(0) = 0$.

Por otro lado, dado $p \in \mathbb{S}^3$, sea $Z_p \in \vec{D}_p$, $\eta_p \circ \varphi_p(Z_p) = \eta_p(J_p Z_p) = \eta_p(\alpha Y_p - \beta X_p) = 0$ porque $\alpha Y_p - \beta X_p \in \vec{D}_p = \ker \eta_p$.

iii) $\eta(\xi) = 1$

$\eta_p(\xi_p) = (-p^4)^2 + (-p^3)^2 + (p^2)^2 + (p^1)^2 = 1$ porque $p = (p^1, p^2, p^3, p^4) \in \mathbb{S}^3$.

iv) $\varphi \circ \varphi(X) = -X + \eta(X)\xi$ con $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^3)$

Sea $W_p \in \overline{T_p \mathbb{S}^3}$. Entonces, W_p se puede escribir como $W_p = \widetilde{W}_p + \gamma \xi_p$ con $\widetilde{W}_p \in \vec{D}_p$ y $\gamma \in \mathbb{R}$. A su vez, como $\{X_p, Y_p\}$ es base de \vec{D}_p , existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $\widetilde{W}_p = \alpha X_p + \beta Y_p$. Calculamos $\varphi \circ \varphi(W_p)$:

$$\begin{aligned} \varphi_p \circ \varphi_p(W_p) &= \varphi_p \circ \varphi_p(\alpha X_p + \beta Y_p + \gamma \xi_p) = \varphi_p(\alpha \varphi_p(X_p) + \beta \varphi_p(Y_p) + \gamma \varphi_p(\xi_p)) = \\ &= \varphi_p(\alpha J_p X_p + \beta J_p Y_p) = \varphi_p(\alpha Y_p - \beta X_p) = \alpha \varphi_p(Y_p) - \beta \varphi_p(X_p) = \\ &= \alpha J_p Y_p - \beta J_p X_p = -\alpha X_p - \beta Y_p \end{aligned}$$

Por otro lado, desarrollamos la expresión $-W_p + \eta_p(W_p)\xi_p$:

$$\begin{aligned} -W_p + \eta_p(W_p)\xi_p &= -\alpha X_p - \beta Y_p - \gamma \xi_p + \eta_p(\widetilde{W}_p + \gamma \xi_p)\xi_p = \\ &= -\alpha X_p - \beta Y_p - \gamma \xi_p + \eta_p(\widetilde{W}_p)\xi_p + \gamma \eta_p(\xi_p)\xi_p \end{aligned}$$

Como $\widetilde{W}_p \in \vec{D}_p = \ker \eta_p$, se tiene que $\eta_p(\widetilde{W}_p) = 0$ y por la propiedad *iii*), $\eta_p(\xi_p) = 1$. Luego, la expresión anterior se reduce a:

$$-W_p + \eta_p(W_p)\xi_p = -\alpha X_p - \beta Y_p - \gamma \xi_p + \gamma \xi_p = -\alpha X_p - \beta Y_p$$

Por todo ello, $\varphi_p \circ \varphi_p(W_p) = -W_p + \eta_p(W_p)\xi_p$ como queríamos ver.

Esta misma construcción que hemos hecho para la esfera de dimensión tres, se puede generalizar a cualquier esfera de dimensión impar, obteniendo el siguiente teorema.

Teorema 5.5 *Las esferas de dimensión impar admiten una estructura casi-contacto.*

Demostración. Sea \mathbb{S}^{2n+1} la esfera de dimensión $2n + 1$ centrada en el origen y de radio uno. Veamos que podemos definir una terna (φ, ξ, η) de forma que cumpla las propiedades mencionadas en la Definición 5.1.

Consideramos \mathbb{R}^{2n+2} con coordenadas globales (x^1, \dots, x^{2n+2}) . Notemos que la esfera \mathbb{S}^{2n+1} está contenida en \mathbb{R}^{2n+2} , que a su vez es isomorfo a \mathbb{C}^{n+1} . Luego, \mathbb{R}^{2n+2} tiene una estructura compleja J , que viene dada por la matriz:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I_{n+1} \\ I_{n+1} & 0 \end{pmatrix}$$

Donde I_{n+1} denota la matriz identidad de dimensión $n + 1$.

Sea $p \in \mathbb{S}^{2n+1}$, consideramos $\vec{N}_p = (p^1, \dots, p^{2n+2})$ el vector normal a la esfera \mathbb{S}^{2n+1} en el punto p . Notemos que $J_p(\vec{N}_p)$ es perpendicular a \vec{N}_p , luego $J_p(\vec{N}_p) \in \overrightarrow{T_p\mathbb{S}^{2n+1}}$. Tomamos $\xi = J(\vec{N})$, que se trata de un campo vectorial sin ceros. Recordemos que el conjunto de las derivadas parciales forman una base del plano tangente, luego podemos escribir:

$$\xi = \frac{\partial}{\partial x^1}(-x^{2n+2}) + \dots + \frac{\partial}{\partial x^{n+1}}(-x^{n+2}) + \frac{\partial}{\partial x^{n+2}}x^{n+1} + \dots + \frac{\partial}{\partial x^{2n+2}}x^1$$

Por otro lado, definimos la 1-forma η en \mathbb{S}^{2n+1} de la siguiente manera:

$$\eta = -x^{2n+2}dx^1 + \dots - x^{n+2}dx^{n+1} + x^{n+1}dx^{n+2} + \dots + x^1dx^{2n+2}$$

Y consideramos la distribución $\mathcal{D} = \ker \eta|_{\mathbb{S}^{2n+1}}$, que es una distribución de dimensión $2n$ y es ortogonal al campo vectorial ξ . Para definir φ lo hacemos de forma análoga al caso de dimensión 3. El plano tangente en el punto p , $\overrightarrow{T_p\mathbb{S}^{2n+1}}$, se puede descomponer como suma directa de \vec{D}_p y el subespacio generado por el campo vectorial ξ_p . Por ello, basta dar la imagen de un elemento de \vec{D}_p y de ξ_p para tener la aplicación definida:

$$\begin{array}{ccc} \varphi_p : \overrightarrow{T_p\mathbb{S}^{2n+1}} & \longrightarrow & \overrightarrow{T_p\mathbb{S}^{2n+1}} \\ \xi_p & \longmapsto & 0 \\ Z_p \in \vec{D}_p & \longmapsto & J_p Z_p \end{array}$$

Veamos que la aplicación está bien definida.

- Por un lado, $\varphi_p(\xi_p) = 0 \in \overrightarrow{T_p\mathbb{S}^{2n+1}}$.
- Por otro lado, $Z_p \in \vec{D}_p \subset \overrightarrow{T_p\mathbb{S}^{2n+1}}$, luego $J_p Z_p$ está bien definido. Falta ver que $\varphi_p(Z_p) = J_p Z_p \in \overrightarrow{T_p\mathbb{S}^{2n+1}}$.

Escribimos $Z_p = (Z_p^1, \dots, Z_p^{2n+2})$ su expresión en coordenadas en la base de $\overrightarrow{T_p\mathbb{S}^{2n+1}}$.

Como $Z_p \in \vec{D}_p \subset \overrightarrow{T_p\mathbb{S}^{2n+1}}$ entonces $Z_p \cdot \vec{N}_p = 0$. Esto es,

$$Z_p \cdot \vec{N}_p = Z_p^1 p^1 + \dots + Z_p^{2n+2} p^{2n+2} = 0 \quad (8)$$

Por otro lado, como $Z_p \in \vec{D}_p$, entonces Z_p es ortogonal a ξ_p . Luego,

$$Z_p \cdot \xi_p = -Z_p^1 p^{2n+2} - \dots - Z_p^{n+1} p^{n+2} + Z_p^{n+2} p^{n+1} + \dots + Z_p^{2n+2} p^1 = 0 \quad (9)$$

Ahora, escribimos $J_p Z_p = (-Z_p^{2n+2}, \dots, -Z_p^{n+2}, Z_p^{n+1}, \dots, Z_p^1)$ su expresión en coordenadas. Veamos que $J_p Z_p \cdot \vec{N}_p = 0$. En efecto, multiplicando la expresión (9) por -1 , concluimos que

$$J_p Z_p \cdot \vec{N}_p = -Z_p^{2n+2} p^1 - \dots - Z_p^{n+2} p^{n+1} + Z_p^{n+1} p^{n+2} + \dots + Z_p^1 p^{2n+2} = 0$$

Por tanto, $\varphi_p(Z_p) = J_p Z_p \in \overrightarrow{T_p\mathbb{S}^{2n+1}}$ como queríamos ver.

Ya hemos definido la terna (φ, ξ, η) que nos determina la estructura casi-contacto. Veamos que cumplen las cuatro propiedades enunciadas en la definición:

i) $\varphi(\xi) = 0$

Se cumple directamente por la definición de φ .

ii) $\eta \circ \varphi = 0$

Por un lado, $\eta \circ \varphi(\xi) = \eta(0) = 0$.

Por otro lado, sea $Z_p \in \vec{D}_p$. Veamos primero que $J_p Z_p \in \vec{D}_p$. En efecto, por la expresión (8), se cumple que

$$\eta_p(J_p Z_p) = (-p^{2n+2})(-Z_p^{2n+2}) + \dots + (-p^{n+2})(-Z_p^{n+2}) + p^{n+1}Z_p^{n+1} + \dots + p^1 Z_p^1 = 0$$

Por tanto, $\eta_p \circ \varphi_p(Z_p) = \eta_p(J_p Z_p) = 0$.

iii) $\eta(\xi) = 1$

$\eta_p(\xi_p) = (-p^{2n+2})^2 + \dots + (-p^{n+2})^2 + (p^{n+1})^2 + \dots + (p^1)^2 = 1$ porque $p \in \mathbb{S}^{2n+1}$.

iv) $\varphi \circ \varphi(X) = -X + \eta(X)\xi$ con $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^{2n+1})$

Sea $W_p \in \overrightarrow{T_p \mathbb{S}^{2n+1}}$. Entonces, W_p se puede escribir como $W_p = \widetilde{W}_p + \gamma \xi_p$ con $\widetilde{W}_p \in \vec{D}_p$ y $\gamma \in \mathbb{R}$. Por tanto,

$$\varphi_p \circ \varphi_p(W_p) = \varphi_p \circ \varphi_p(\widetilde{W}_p + \gamma \xi_p) = \varphi_p(\varphi_p(\widetilde{W}_p) + \gamma \varphi_p(\xi_p)) = \varphi_p(J_p \widetilde{W}_p) = J_p^2 \widetilde{W}_p = -\widetilde{W}_p$$

Por otro lado, desarrollamos la expresión $-W_p + \eta_p(W_p)\xi_p$:

$$-W_p + \eta_p(W_p)\xi_p = -\widetilde{W}_p - \gamma \xi_p + \eta_p(\widetilde{W}_p + \gamma \xi_p)\xi_p = -\widetilde{W}_p - \gamma \xi_p + \eta_p(\widetilde{W}_p)\xi_p + \gamma \eta_p(\xi_p)\xi_p$$

Como $\widetilde{W}_p \in \vec{D}_p = \ker \eta_p$, entonces $\eta_p(\widetilde{W}_p) = 0$ y por la propiedad *iii*) que acabamos de demostrar, $\eta_p(\xi_p) = 1$. Luego, la expresión anterior se reduce a:

$$-\widetilde{W}_p - \gamma \xi_p + \gamma \xi_p = -\widetilde{W}_p$$

Por todo ello, $\varphi_p \circ \varphi_p(W_p) = -W_p + \eta_p(W_p)\xi_p$ como queríamos ver.

□

Observación 5.6 *Notemos que al producto de variedades casi-contacto no se le puede dotar de una estructura casi-contacto, pues para poder hacerlo, la variedad tiene que tener dimensión impar, pero el producto de dos variedades de dimensión impar tiene dimensión par. Luego, el producto de variedades casi-contacto no es una variedad casi-contacto.*

No obstante, hemos dicho que las estructuras casi-contacto podrían considerarse un análogo a las estructuras casi-complejas pero en dimensión impar. Es por esto, que nos podríamos preguntar si al producto de dos variedades casi-contacto, que tiene dimensión par, se le puede dotar de una estructura casi-compleja inducida por las estructuras casi-contacto de cada una de ellas. La respuesta es que sí, pero lo veremos con más detalle en el siguiente capítulo.

Observación 5.7 *En general, una estructura casi-contacto sobre una variedad no es única. Por ejemplo, podemos considerar la esfera de dimensión cinco, \mathbb{S}^5 . Por un lado, tenemos la estructura casi-contacto que hemos construido en la demostración del Teorema 5.5.*

Para construir otra estructura casi-contacto, podemos definir la esfera \mathbb{S}^5 como la intersección entre la esfera de dimensión seis centrada en el origen, $\mathbb{S}^6 \subset \mathbb{R}^7$, y el hiperplano $\{x^7 = 0\}$. A su vez, ya hemos definido con anterioridad una estructura casi-compleja J sobre la esfera \mathbb{S}^6 . La nueva estructura se construye de forma análoga a lo hecho en el teorema, pero utilizando, en su lugar, la estructura casi-compleja de la esfera \mathbb{S}^6 para definir los elementos necesarios.

Se puede probar que, en efecto, ambas estructuras son diferentes, como se afirma en el ejemplo 4.5.3 de [3]. La principal diferencia radica en que la primera de ellas es, además, una estructura contacto (las cuales las introduciremos en la siguiente sección), mientras que la segunda no lo es.

A continuación, vamos a introducir brevemente las estructuras casi-contacto métricas. Al igual que ocurría con las casi-complejas, se trata de una estructura casi-contacto con una métrica riemanniana.

Vamos a enunciar un resultado que es clave para entender bien lo que explicaremos en la siguiente sección: la estructura contacto.

Proposición 5.8 *Toda variedad casi-contacto M de estructura (φ, ξ, η) admite una métrica riemanniana g tal que*

$$\begin{aligned} i) \quad & \eta(X) = g(X, \xi) \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M) \\ ii) \quad & g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M) \end{aligned}$$

A esta métrica g la denominaremos **métrica riemanniana asociada a la estructura casi-contacto** dada.

Demostración. Probaremos cada uno de los apartados por separado.

i) Sea M una variedad diferenciable T_2 y *II.A.N.*, como bien hemos demostrado en el Teorema 3.16 sabemos que M admite una métrica riemanniana f . Definimos, en primer lugar, una métrica riemanniana auxiliar h de la siguiente manera:

$$h(X, Y) = f(X - \eta(X)\xi, Y - \eta(Y)\xi) + \eta(X)\eta(Y) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

Se trata de una métrica riemanniana por ser un campo tensorial de tipo $(0, 2)$ (f lo es por hipótesis y η es una 1-forma, luego es lineal), es simétrica por serlo f y es definida positiva ya que

$$h(X, X) = f(X + \eta(X)\xi, X + \eta(X)\xi) + (\eta(X))^2 \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M)$$

Al ser f definida positiva, h también lo es. Luego, en efecto, h es una métrica riemanniana. Notemos, además, que se tiene

$$h(X, \xi) = f(X - \eta(X)\xi, \xi - \eta(\xi)\xi) + \eta(X)\eta(\xi) = f(X - \eta(X)\xi, 0) + \eta(X) = \eta(X)$$

Ahora, definimos la métrica g que nos interesa, de la siguiente manera:

$$g(X, Y) = \frac{1}{2}(h(X, Y) + h(\varphi X, \varphi Y) + \eta(X)\eta(Y)) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

Análogamente a lo que hemos con h se puede demostrar que g es una métrica riemanniana. Veamos ahora que se cumple que $\eta(X) = g(X, \xi)$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

$$g(X, \xi) = \frac{1}{2}(h(X, \xi) + h(\varphi X, \varphi \xi) + \eta(X)\eta(\xi)) = \frac{1}{2}(\eta(X) + h(\varphi X, 0) + \eta(X)) = \eta(X)$$

ii) A partir de la métrica g que hemos definido en el apartado anterior, desarrollamos la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
g(\varphi X, \varphi Y) &= \frac{1}{2}(h(\varphi X, \varphi Y) + h(\varphi^2 X, \varphi^2 Y) + \eta(\varphi X)\eta(\varphi Y)) = \\
&= \frac{1}{2}(h(\varphi X, \varphi Y) + h(-X + \eta(X)\xi, -Y + \eta(Y)\xi)) = \\
&= \frac{1}{2}(h(\varphi X, \varphi Y) + h(X, Y) - h(X, \eta(Y)\xi) - h(\eta(X)\xi, Y) + h(\eta(X)\xi, \eta(Y)\xi)) = \\
&= \frac{1}{2}(h(\varphi X, \varphi Y) + h(X, Y) - \eta(Y)h(X, \xi) - \eta(X)h(\xi, Y) + \eta(X)\eta(Y)h(\xi, \xi)) = \\
&= \frac{1}{2}(h(\varphi X, \varphi Y) + h(X, Y) - \eta(Y)\eta(X) - \eta(X)\eta(Y) + \eta(X)\eta(Y)) = \\
&= g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)
\end{aligned}$$

Donde hemos utilizado las propiedades de las estructuras casi-contacto.

□

Definición 5.9 Sea M una variedad diferenciable dotada de una estructura (φ, ξ, η, g) , donde g es una métrica riemanniana asociada a la estructura casi-contacto (φ, ξ, η) , entonces se dice que M tiene una **estructura casi-contacto métrica** (φ, ξ, η, g) y se llama **variedad casi-contacto métrica**.

5.2 Estructuras contacto

En el caso de variedades de dimensión par, habíamos definido dos estructuras: las de tipo complejo y las de tipo casi-complejo. Ya hemos visto que en el caso de variedades de dimensión impar, podemos considerar las estructuras casi-contacto, pero de hecho, podemos definir también lo que se conoce como estructura contacto y, al igual que en el caso complejo, toda estructura contacto será casi-contacto. De hecho, al igual que habíamos establecido una analogía entre las estructuras casi-complejas y las casi-contacto, las estructuras contacto serán el análogo de las estructuras simplécticas. Para esta sección, seguiremos principalmente el capítulo 3 de [3] y el capítulo 5 de [18].

Definición 5.10 Una variedad diferenciable M de dimensión $2n+1$, se dice que tiene una **estructura contacto** si lleva asociada una 1-forma η , globalmente definida en M , de forma que

$$\eta \wedge d\eta \wedge \overset{n}{\cdots} \wedge d\eta \neq 0$$

A η se le llama **forma contacto** de M y a (M, η) **variedad contacto**.

Observación 5.11 Es en la propia definición de variedad contacto donde se ve la analogía con las estructuras simplécticas. En este caso se pide que la 1-forma cumpla

$$\eta \wedge d\eta \wedge \overset{n}{\cdots} \wedge d\eta \neq 0$$

Y en el caso de la estructura simpléctica, la 2-forma tenía que cumplir que

$$\omega \wedge \overset{n}{\cdots} \wedge \omega \neq 0$$

Al igual que sucedía con las variedades complejas y casi-complejas, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 5.12 *Sea M una variedad diferenciable de dimensión $2n+1$ con una estructura contacto η . Entonces, existe una estructura casi-contacto métrica (φ, ξ, η, g) tal que*

$$g(X, \varphi Y) = d\eta(X, Y)$$

Demostración. Como η es una forma contacto, se cumple que $\eta \wedge d\eta \wedge \dots \wedge d\eta \neq 0$. De esta condición se sigue que $d\eta$ tiene rango $2n$ (sobre el álgebra de Grassmann (Definición A.36)). Por tanto, para cada punto $p \in M$ se tiene que $\{X \in \overrightarrow{T_p M} : d\eta(X, Y) = 0 \ \forall Y \in \overrightarrow{T_p M}\}$ donde $\eta \neq 0$ es un subespacio de dimensión 1. Sea ξ_p un elemento de dicho subespacio tal que $\eta(\xi_p) = 1$, tenemos un campo vectorial sin ceros tal que

$$d\eta(\xi, X) = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M), \quad \eta(\xi) = 1$$

Definimos ahora el campo tensorial de tipo $(1, 1)$. Por la demostración de la Proposición 5.8, sabemos que existe una métrica riemanniana h tal que $\eta(X) = h(X, \xi)$. Por otro lado, definimos el complemento ortogonal de ξ de la siguiente manera:

$$\xi^\perp = \{X \in \mathfrak{X}(M) : h(X, \xi) = 0\} = \ker \eta$$

Luego, $d\eta$ es una forma simpléctica sobre el complemento ortogonal de ξ y, por tanto existe una métrica g' y un endomorfismo φ en el complemento ortogonal de ξ tal que $g'(X, \varphi Y) = d\eta(X, Y)$ y $\varphi^2 = -Id$. Extendiendo g' a una métrica g , definiéndola como h en la dirección ξ y extendiendo φ de modo que $\varphi(\xi) = 0$, entonces tenemos la estructura casi-contacto (φ, ξ, η, g) .

□

Observación 5.13 *En la demostración se utiliza un teorema que afirma que dada una variedad simpléctica (M^{2n}, ω) , existe una métrica riemanniana g y una estructura casi-compleja J tal que*

$$g(X, JY) = \omega(X, Y)$$

No realizamos la demostración, pero se puede consultar el Teorema 4.3 de [3].

Se puede demostrar que toda hipersuperficie M^{2n+1} de un espacio euclídeo de dimensión par \mathbb{R}^{2n+2} cuyo espacio afín tangente $T_p M^{2n+1}$ no interseca al cero para ningún punto p de la variedad, entonces admite una estructura contacto.

Sería el caso, por ejemplo, de las esferas de dimensión impar: todas ellas admiten una estructura contacto. Además, como hemos visto en el Teorema 5.12, toda estructura contacto es casi-contacto, luego volvemos a concluir que todas las esferas de dimensión impar son variedades casi-contacto, como bien hemos demostrado en la sección anterior.

Observación 5.14 *En el capítulo 4 hemos mencionado las variedades Kählerianas. Su análogo en variedades de dimensión impar serían las que se conocen como **variedades Sasakianas**. Sea M una variedad diferenciable, una estructura casi-contacto (φ, ξ, η) sobre M se dice **normal** si la estructura casi-compleja inducida por $M \times \mathbb{R}$ es compleja. Una variedad se dice Sasakiana si admite una estructura casi-contacto normal, η es contacto y existe g una métrica compatible. En particular, todas las esferas de dimensión impar son Sasakianas, lo que establece otra diferencia esencial con las de dimensión par, entre las que sólo la de dimensión dos es Kähleriana.*

6 Productos de esferas

A lo largo del trabajo, hemos definido principalmente tres tipos de estructuras sobre las esferas: las paralelizaciones, las casi-complejas y las casi-contacto. Asimismo, también hemos visto algunos resultados que relacionan estas estructuras entre sí. Una vez familiarizados con ellas, podríamos preguntarnos qué sucede al hacer el producto cartesiano de un determinado número de esferas: qué estructuras se preservan y cuáles cambian. En el capítulo que se presenta a continuación, vamos a ver qué estructuras admiten los productos de esferas. Nos centraremos, sobre todo, en el caso particular del producto de dos esferas.

Antes de empezar a estudiar estas estructuras de las que hablamos, vamos a demostrar un lema que puede resultar sorprendente. Por el Teorema de inmersión de Whitney (Teorema A.31), sabemos que, en general, toda variedad diferenciable de dimensión n admite un embedding regular en \mathbb{R}^{2n} . Sin embargo, en el caso del producto de esferas podemos conseguir una dimensión mucho más pequeña.

Lema 6.1 *El producto de esferas $\prod_{i=1}^k \mathbb{S}^{n_i}$ admite un embedding regular en $\mathbb{R}^{1+n_1+\dots+n_k}$, donde para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, $\mathbb{S}^{n_i} \subset \mathbb{R}^{n_i+1}$ denota a la esfera de dimensión n_i .*

Demostración. Veamos, en primer lugar, que $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^n$ se puede sumergir en \mathbb{R}^{n+1} para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Consideramos la siguiente aplicación,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \\ (t, p) &\longmapsto e^t p \end{aligned}$$

que sitúa sobre cada punto de la esfera, la semirrecta vectorial definida por el punto. Dicha aplicación se trata de un difeomorfismo y, por tanto, obtenemos un embedding regular de $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^n$ en \mathbb{R}^{n+1} .

Para demostrar propiamente el lema, razonamos por inducción sobre el número de esferas. Para $k = 2$, es decir, el producto de dos esferas, tenemos la siguiente cadena:

$$\mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^q \subset \mathbb{R}^{p+1} \times \mathbb{R}^{q+1} = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^q \xrightarrow{f} \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{q+1} = \mathbb{R}^{p+q+1}$$

donde $p, q \in \mathbb{N}$ y f denota el difeomorfismo antes definido. Por tanto, el lema se cumple para el producto de dos esferas. Supongamos que el resultado es cierto para el producto de k esferas y veamos que también lo es para el producto de $k + 1$.

Procedemos de forma análoga al caso base y consideramos la siguiente cadena:

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{k+1} \mathbb{S}^{n_i} &= \left(\prod_{i=1}^k \mathbb{S}^{n_i} \right) \times \mathbb{S}^{n_{k+1}} \subset \mathbb{R}^{1+n_1+\dots+n_k} \times \mathbb{R}^{n_{k+1}+1} = \mathbb{R}^{n_1+\dots+n_k} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n_{k+1}+1} \\ &\xrightarrow{f} \mathbb{R}^{n_1+\dots+n_k} \times \mathbb{R}^{1+n_{k+1}} = \mathbb{R}^{1+n_1+\dots+n_k+n_{k+1}} \end{aligned}$$

Y obtenemos lo que queríamos probar. □

6.1 Estructura paralelizable

Comenzamos hablando brevemente sobre las estructuras paralelizables en los productos de esferas.

Como bien hemos demostrado en la Proposición 2.4, el producto de dos variedades paralelizables es paralelizable. Sabemos que las esferas \mathbb{S}^1 , \mathbb{S}^3 y \mathbb{S}^7 son paralelizables, luego sus productos también lo son:

$$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \quad \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3 \quad \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^7 \quad \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 \quad \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^7 \quad \mathbb{S}^7 \times \mathbb{S}^7$$

Al igual que productos numerables de ellas:

$$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \quad \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^7$$

Notemos que con esta observación también hemos justificado que el toro es una variedad paralelizable, puesto que $\mathbb{T} \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

A pesar de que las únicas esferas paralelizables son \mathbb{S}^1 , \mathbb{S}^3 y \mathbb{S}^7 , resulta que muchos productos de esferas sí que son paralelizables, basta con que una de ellas tenga dimensión impar, tal y como afirma Kervaire en [7].

Teorema 6.2 (Kervaire) *El producto de esferas $\prod_{i=1}^k \mathbb{S}^{n_i}$, $k \geq 2$, es paralelizable si y solo si al menos uno de los n_i es impar.*

La demostración de este teorema no es constructiva y ejemplos explícitos de paralelizaciones en productos de esferas se pueden encontrar en [11], es por esto que no le vamos a dedicar más líneas a esta sección en este trabajo, y nos centraremos más en las estructuras casi-complejas y casi-contacto.

6.2 Estructura casi-compleja

En esta sección vamos a ver en qué ocasiones al producto de dos esferas se le puede dotar de una estructura casi-compleja. Notemos que para ello, la dimensión de la variedad tiene que ser par, luego consideraremos o bien productos de esferas de dimensión impar o bien productos de esferas de dimensión par.

En primer lugar, vimos en la Proposición 3.8 que el producto de dos variedades casi-complejas es una variedad casi-compleja. Por otro lado, sabemos que las únicas esferas que admiten una estructura casi-compleja son las de dimensión 2 y 6, luego los productos de esferas

$$\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 \quad \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^6 \quad \mathbb{S}^6 \times \mathbb{S}^6$$

son variedades casi-complejas.

Por otro lado, podemos considerar las esferas de dimensión 2 y 4. Como bien hemos visto en el Lema 6.1, el producto de estas dos esferas admite un embedding regular en \mathbb{R}^7 . Asimismo, ya hemos comentado al final de la sección 3.1.1 que toda hipersuperficie orientable de \mathbb{R}^7 admite una estructura casi-compleja, inducida por el producto vectorial de \mathbb{R}^7 . Por tanto, podemos concluir que el producto $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^4$ es una variedad casi-compleja.

Por último, en el capítulo precedente hemos terminado preguntándonos por el producto de las variedades casi-contacto. En particular, hemos visto que las esferas de dimensión impar admiten una estructura casi-contacto y el siguiente teorema nos afirma que a su producto se le puede dotar de una estructura casi-compleja.

Teorema 6.3 *Al producto de dos esferas de dimensión impar se le puede dotar de una estructura de variedad casi-compleja.*

Demostración. Sean \mathbb{S}^{2n+1} y \mathbb{S}^{2m+1} las esferas de dimensiones $2n+1$ y $2m+1$ respectivamente, de radios uno y centradas en el origen. Como son esferas de dimensión impar, por el Teorema 5.5, ambas admiten una estructura casi-contacto. Sean las ternas (φ, ξ, η) y $(\bar{\varphi}, \bar{\xi}, \bar{\eta})$ las estructuras casi-contacto de las esferas \mathbb{S}^{2n+1} y \mathbb{S}^{2m+1} respectivamente. Sean $p \in \mathbb{S}^{2n+1}$ y $q \in \mathbb{S}^{2m+1}$, introducimos una estructura casi-compleja J de la siguiente manera:

$$J_{(p,q)} : \begin{array}{ccc} \overrightarrow{T_p \mathbb{S}^{2n+1}} \oplus \overrightarrow{T_q \mathbb{S}^{2m+1}} & \longrightarrow & \overrightarrow{T_p \mathbb{S}^{2n+1}} \oplus \overrightarrow{T_q \mathbb{S}^{2m+1}} \\ (X_p, \bar{X}_q) & \longmapsto & (\varphi_p(X_p) - \bar{\eta}_q(\bar{X}_q)\xi_p, \bar{\varphi}_q(\bar{X}_q) + \eta_p(X_p)\bar{\xi}_q) \end{array}$$

$J_{(p,q)}$ está bien definida porque, para la primera componente, se tiene que $\varphi_p(X_p) \in \overrightarrow{T_p \mathbb{S}^{2n+1}}$ y que $-\bar{\eta}_q(\bar{X}_q) \in \mathbb{R}$ y $\xi_p \in \overrightarrow{T_p \mathbb{S}^{2n+1}}$, luego $\varphi_p(X_p) - \bar{\eta}_q(\bar{X}_q)\xi_p \in \overrightarrow{T_p \mathbb{S}^{2n+1}}$. Análogamente se comprueba que la segunda componente también está en $\overrightarrow{T_q \mathbb{S}^{2m+1}}$.

Por otro lado, J es claramente un campo tensorial pues φ lo es.

Veamos ahora que, efectivamente, $J^2 = -Id$. Sean $X_p \in \overrightarrow{T_p \mathbb{S}^{2n+1}}$ y $\bar{X}_q \in \overrightarrow{T_q \mathbb{S}^{2m+1}}$:

$$\begin{aligned} J_{(p,q)} \circ J_{(p,q)}(X_p, \bar{X}_q) &= J(\varphi_p(X_p) - \bar{\eta}_q(\bar{X}_q)\xi_p, \bar{\varphi}_q(\bar{X}_q) + \eta_p(X_p)\bar{\xi}_q) = \\ &= (\varphi_p(\varphi_p(X_p) - \bar{\eta}_q(\bar{X}_q)\xi_p) - \bar{\eta}_q(\bar{\varphi}_q(\bar{X}_q) + \eta_p(X_p)\bar{\xi}_q)\xi_p, \\ &\quad \bar{\varphi}_q(\bar{\varphi}_q(\bar{X}_q) + \eta_p(X_p)\bar{\xi}_q) + \eta_p(\varphi_p(X_p) - \bar{\eta}_q(\bar{X}_q)\xi_p)\bar{\xi}_q) = \\ &= (-X_p + \eta_p(X_p)\xi_p - \eta_p(\bar{X}_q)\varphi_p(\xi_p) + (-\bar{\eta}_q(\bar{\varphi}_q(\bar{X}_q)) - \eta_p(X_p)\bar{\eta}_q(\bar{\xi}_q))\xi_p, \\ &\quad -\bar{X}_q + \bar{\eta}_q(\bar{X}_q)\bar{\xi}_q + \eta_p(X_p)\bar{\varphi}_q(\bar{\xi}_q) + (\eta_p(\varphi_p(X_p)) - \bar{\eta}_q(\bar{X}_q)\eta_p(\xi_p))\bar{\xi}_q) = \\ &= (-X_p + \eta_p(X_p)\xi_p - \eta_p(X_p)\xi_p, -\bar{X}_q + \bar{\eta}_q(\bar{X}_q)\bar{\xi}_q - \bar{\eta}_q(\bar{X}_q)\bar{\xi}_q) = \\ &= (-X_p, -\bar{X}_q) = -(X_p, \bar{X}_q) \end{aligned}$$

Por lo tanto, J es una estructura casi-compleja para el producto de las esferas. □

Ejemplo 6.4 *Este resultado, nos permite afirmar que al toro $\mathbb{T} \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ se le puede dotar de una estructura casi-compleja, pues esta superficie es el producto de dos esferas de dimensión uno.*

Observación 6.5 *Notemos que en ningún momento hemos utilizado que las variedades casi-contacto sean específicamente esferas. Por tanto, generalizando el resultado, se tiene que dadas dos variedades M y \bar{M} casi-contacto, entonces el producto $M \times \bar{M}$ tiene una estructura casi-compleja inducida por las estructuras casi-contacto de M y \bar{M} .*

Por tanto, concluimos que en general, el producto de dos esferas de dimensión impar es una variedad casi-compleja. En cuanto a los productos de esferas de dimensión par, hemos visto que los productos $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$, $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^6$, $\mathbb{S}^6 \times \mathbb{S}^6$ y $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^4$ sí que admiten una estructura casi-compleja, pero podrían existir más. Sin embargo, un teorema demostrado, en 1990, por Datta y Subramanian afirma que son los únicos productos de esferas de dimensión par que admiten una estructura casi-compleja. Una idea de la demostración se puede encontrar en [5].

A partir de los resultados mencionados en esta sección, podemos también deducir qué estructuras se pueden dotar a determinados productos de más de dos esferas. Veamos algunos ejemplos:

- i) Como hemos mencionado anteriormente, el toro es una variedad casi-compleja, luego el producto de dos toros $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$, esto es, el producto de cuatro esferas de dimensión uno $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ también es una variedad casi-compleja.
- ii) El producto de esferas cuya suma de dimensiones sea 6. Como demostramos en el Lema 6.1, este producto se puede ver como una hipersuperficie de \mathbb{R}^7 , luego se le puede dotar de una estructura casi-compleja, al igual que hemos hecho con el producto de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^4$. Algunos ejemplos de ello podrían ser:

$$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^4 \quad \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3 \quad \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 \quad \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^3$$

- iii) Además, como el producto de dos variedades casi-complejas es casi-compleja, cualquier producto de los anteriores multiplicado entre sí o por un producto de esferas de dimensiones 2 y 6 también nos dan una variedad casi-compleja. Por ejemplo:

$$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^6 \quad \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 \quad \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^4 \times \mathbb{S}^5 \times \mathbb{S}^6 \times \mathbb{S}^7$$

- iv) Un producto de un número par de esferas de dimensiones impares será una variedad casi-compleja, puesto que agrupándolas de dos en dos tendremos variedades casi-complejas y el producto de variedades casi-complejas es una variedad casi-compleja. Por ejemplo:

$$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^5 \times \mathbb{S}^7 \quad \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$$

6.3 Estructura casi-contacto

A continuación, vamos a ver bajo qué condiciones podemos asegurar que al producto de esferas se le pueda dotar de una estructura casi-contacto.

Recordemos que para poder dotar a una variedad una estructura casi-contacto, esta tiene que ser de dimensión impar, luego como bien hemos comentado anteriormente, el producto de variedades casi-contacto no es una variedad casi-contacto. Así, si consideramos el producto de dos esferas, una de ellas tiene que ser de dimensión par y la otra de dimensión impar.

Resulta que si tenemos una esfera de dimensión par que admite una estructura casi-compleja y otra esfera de dimensión impar y que, por tanto, admite una estructura casi-contacto, al producto de ambas se le puede dotar de una estructura casi-contacto.

Teorema 6.6 Sean \mathbb{S}^{2n} una esfera de dimensión par que admite una estructura casi-compleja (es decir, $n=1$ o $n=3$) y \mathbb{S}^{2m+1} una esfera de dimensión impar, entonces el producto de ambas $\mathbb{S}^{2n} \times \mathbb{S}^{2m+1}$ es una variedad casi-contacto.

Demostración. Por un lado, consideramos \mathbb{S}^{2n} una esfera de dimensión par que admite una estructura casi-compleja. Es decir, podemos definir un endomorfismo lineal J de su espacio tangente tal que para cada $p \in \mathbb{S}^{2n}$, $J_p : \overrightarrow{T_p \mathbb{S}^{2n}} \rightarrow \overrightarrow{T_p \mathbb{S}^{2n}}$ cumple $J_p^2 = -Id$.

Por otro lado, consideramos \mathbb{S}^{2m+1} una esfera de dimensión impar. Por lo visto en el Teorema 5.5, esta esfera admite una estructura casi-contacto. Es decir, tiene asociada una terna (φ', ξ', η') donde φ' es un campo tensorial de tipo $(1, 1)$, ξ' es un campo vectorial sin ceros y η' es una 1-forma, que cumplen:

$$\begin{array}{ll} i) \varphi'(\xi') = 0 & ii) \eta' \circ \varphi' = 0 \\ iii) \eta'(\xi') = 1 & iv) \varphi' \circ \varphi'(X) = -X + \eta'(X)\xi' \text{ con } X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^{2m+1}) \end{array}$$

Buscamos ahora para el producto de las dos esferas una terna (φ, ξ, η) que satisfaga estas mismas propiedades. Definamos cada elemento:

- ξ un campo vectorial sin ceros:

Para cada $(p, q) \in \mathbb{S}^{2n} \times \mathbb{S}^{2m+1}$, sabemos que

$$\overrightarrow{T_{(p,q)}(\mathbb{S}^{2n} \times \mathbb{S}^{2m+1})} \cong \overrightarrow{T_p \mathbb{S}^{2n}} \oplus \overrightarrow{T_q \mathbb{S}^{2m+1}}$$

Definimos el campo vectorial ξ de la siguiente manera:

$$\xi_{(p,q)} = 0 + \xi'_q \in \overrightarrow{T_p \mathbb{S}^{2n}} \oplus \overrightarrow{T_q \mathbb{S}^{2m+1}}$$

Es un campo vectorial sin ceros porque ξ' lo es.

- η 1-forma:

Análogamente, podemos tomar $\eta = 0 + \eta'$, es decir,

$$\begin{array}{ccc} \eta_{(p,q)} : \overrightarrow{T_p \mathbb{S}^{2n}} \oplus \overrightarrow{T_q \mathbb{S}^{2m+1}} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (X_p, Y_q) & \longmapsto & \eta'_q(Y_q) \end{array}$$

- φ campo tensorial de tipo $(1, 1)$:

Para cada $(p, q) \in \mathbb{S}^{2n} \times \mathbb{S}^{2m+1}$ definimos la siguiente aplicación:

$$\begin{array}{ccc} \varphi_{(p,q)} : \overrightarrow{T_p \mathbb{S}^{2n}} \oplus \overrightarrow{T_q \mathbb{S}^{2m+1}} & \longrightarrow & \overrightarrow{T_p \mathbb{S}^{2n}} \oplus \overrightarrow{T_q \mathbb{S}^{2m+1}} \\ X_p + Y_q & \longmapsto & J_p X_p + \varphi'_q(Y_q) \end{array}$$

Por las definiciones de J y φ' , sabemos que $J_p X_p \in \overrightarrow{T_p \mathbb{S}^{2n}}$ y $\varphi'_q(Y_q) \in \overrightarrow{T_q \mathbb{S}^{2m+1}}$, luego la aplicación está bien definida.

Una vez hemos definido los tres elementos de la terna, veamos que satisfacen las propiedades que tiene que tener una estructura casi-contacto:

$$i) \varphi(\xi) = 0$$

Sean $(p, q) \in \mathbb{S}^{2n} \times \mathbb{S}^{2m+1}$,

$$\varphi_{(p,q)}(\xi_{(p,q)}) = \varphi_{(p,q)}(0 + \xi'_q) = J_p(0) + \varphi'_q(\xi'_q) = 0 + 0 = 0$$

ii) $\eta \circ \varphi = 0$

Sean $(p, q) \in \mathbb{S}^{2n} \times \mathbb{S}^{2m+1}$, $X_p + Y_q \in \overrightarrow{T_p \mathbb{S}^{2n}} \oplus \overrightarrow{T_q \mathbb{S}^{2m+1}}$

$$\eta_{(p,q)} \circ \varphi_{(p,q)}(X_p + Y_q) = \eta_{(p,q)}(J_p X_p + \varphi'_q(Y_q)) = \eta'_q(\varphi'_q(Y_q)) = 0$$

iii) $\eta(\xi) = 1$

Sean $(p, q) \in \mathbb{S}^{2n} \times \mathbb{S}^{2m+1}$,

$$\eta_{(p,q)}(\xi_{(p,q)}) = \eta_{(p,q)}(0 + \xi'_q) = \eta'_q(\xi'_q) = 1$$

iv) $\varphi \circ \varphi(Z) = -Z + \eta(Z)\xi$ con $Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^{2n} \times \mathbb{S}^{2m+1})$

Sean $(p, q) \in \mathbb{S}^{2n} \times \mathbb{S}^{2m+1}$, $X_p + Y_q \in \overrightarrow{T_p \mathbb{S}^{2n}} \oplus \overrightarrow{T_q \mathbb{S}^{2m+1}}$

$$\begin{aligned} \varphi_{(p,q)} \circ \varphi_{(p,q)}(X_p + Y_q) &= \varphi_{(p,q)}(J_p X_p + \varphi'_q(Y_q)) = J_p(J_p(X_p)) + \varphi'_q(\varphi'_q(Y_q)) = \\ &= J_p^2(X_p) + \varphi'_q(\varphi'_q(Y_q)) = -X_p - Y_q + \eta'_q(Y_q)\xi'_q = \\ &= -(X_p + Y_q) + \eta_{(p,q)}(X_p + Y_q)(0 + \xi'_q) = \\ &= -(X_p + Y_q) + \eta_{(p,q)}(X_p + Y_q)\xi_{(p,q)} \end{aligned}$$

Por tanto, la terna (φ, ξ, η) define una estructura casi-contacto sobre el producto de las esferas $\mathbb{S}^{2n} \times \mathbb{S}^{2m+1}$, como queríamos ver. □

Luego, este resultado nos permite concluir que, por ejemplo, los siguientes productos de dos esferas admiten una estructura casi-contacto:

$$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2 \qquad \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^6$$

Observación 6.7 *Para realizar la demostración del teorema anterior, solo hemos utilizado la estructura casi-compleja de una de las esferas y la estructura casi-contacto de la otra, pero no el hecho de que las variedades sean esferas. Por ello, podemos extender este mismo resultado y concluimos que dada M una variedad casi-compleja y \overline{M} una variedad casi-contacto, su producto $M \times \overline{M}$ es una variedad casi-contacto.*

En vista de esta observación y de los resultados obtenidos en la sección anterior, los siguientes productos de esferas admiten una estructura casi-contacto:

$$\mathbb{T} \times \mathbb{S}^1 \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \qquad \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^5 \qquad \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^5 \times \mathbb{S}^7 \times \mathbb{S}^9$$

De hecho, es cierto un resultado más fuerte, que se sigue de generalizar el Teorema 5.5.

Teorema 6.8 *Toda hipersuperficie orientable de \mathbb{R}^{2n} admite una estructura casi-contacto.*

Demostración. Sea S una hipersuperficie orientable de \mathbb{R}^{2n} . Como S es orientable, el vector normal \vec{N} está definido globalmente en toda la variedad. Por otro lado, sabemos que el espacio \mathbb{R}^{2n} es isomorfo a \mathbb{C}^n y por el Ejemplo 3.7, tiene asociada una estructura casi-compleja J . Luego, resulta que $J\vec{N}$ es perpendicular (con el producto escalar standard) al vector normal \vec{N} y, por tanto, es tangente a la variedad. Vamos a definir ahora los tres elementos necesarios para determinar una estructura casi-contacto:

- Podemos tomar $\xi = J\vec{N}$, que se trata de un campo vectorial de S sin ceros.
- Podemos definir una distribución ortogonal \mathcal{D} al campo vectorial ξ , de forma que sea el núcleo de la 1-forma que buscamos. Por ejemplo, tomando $\eta(X) = X \cdot \xi$, para todo $X \in \mathfrak{X}(S)$ donde \cdot denota el producto escalar standard, se cumple que $\mathcal{D} = \ker \eta$ es una distribución ortogonal a ξ .
- Definimos el campo tensorial φ al igual que lo hicimos en el Teorema 5.5.

Análogamente a lo que hicimos en la demostración del Teorema 5.5 se comprueba que satisfacen las propiedades y que, en efecto, estos tres elementos definen una estructura casi-contacto.

□

Corolario 6.9 *Todo producto de esferas en el que la suma de las dimensiones de las esferas sea un número impar admite una estructura casi-contacto.*

Demostración. Como las esferas son variedades orientables, el producto de esferas es una variedad orientable. Si suponemos que la variedad obtenida al hacer el producto tiene dimensión impar, por el Lema 6.1, dicho producto se puede ver como una hipersuperficie de \mathbb{R}^k donde k es la dimensión del producto de las esferas más uno. Luego, se trata de una hipersuperficie de un espacio euclídeo de dimensión par. Como consecuencia del teorema, dicho producto admite una estructura casi-contacto.

□

Como consecuencia de este corolario, deducimos que siempre que tengamos el producto de una esfera de dimensión par y otra de dimensión impar, la variedad resultante va a admitir una estructura casi-contacto. Por ejemplo:

$$\mathbb{S}^4 \times \mathbb{S}^3 \quad \mathbb{S}^8 \times \mathbb{S}^1 \quad \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^3$$

Del mismo modo, podemos asegurar que si tenemos un número impar de esferas de dimensión impar, su producto será una variedad casi-contacto. Como por ejemplo, los siguientes productos de esferas:

$$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \quad \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^7$$

7 Síntesis final

A lo largo del trabajo, constantemente se han ido mencionando las analogías entre las estructuras que hemos definido en variedades de dimensión par y las que hemos definido en las de dimensión impar. A continuación, se presenta una tabla que recoge casi todas las estructuras que hemos mencionado, así como algunos ejemplos. Las estructuras que se sitúan sobre la misma línea, son las que se consideran análogas.

Dimensión par	Dimensión impar
Estructura casi-compleja <hr/> Esferas \mathbb{S}^2 y \mathbb{S}^6	Estructura casi-contacto <hr/> Todas las esferas \mathbb{S}^{2n+1}
Estructura casi-hermítica <hr/> Esferas \mathbb{S}^2 y \mathbb{S}^6	Estructura casi-contacto métrica <hr/> Todas las esferas \mathbb{S}^{2n+1}
Estructura casi-simpléctica y simpléctica <hr/> Casi-simpléctica: Esferas \mathbb{S}^2 y \mathbb{S}^6 Simpléctica: Esfera \mathbb{S}^2	Estructura contacto <hr/> Todas las esferas \mathbb{S}^{2n+1}
Estructura Kähleriana <hr/> Esfera \mathbb{S}^2	Estructura Sasakiana <hr/> Todas las esferas \mathbb{S}^{2n+1}

Tabla 3: Analogías entre estructuras definidas en variedades de dimensión par y de dimensión impar.

A pesar de que toda estructura que hemos mencionado sobre las variedades de dimensión par tiene su análoga en las de dimensión impar, en la tabla se puede apreciar un claro desequilibrio entre los ejemplos. Mientras que todas las esferas de dimensión impar admiten las estructuras que hemos definido para este tipo de variedades, en el caso de dimensión par, solamente las esferas de dimensiones dos y seis aparecen. E incluso, en algunos de los ejemplos, es la esfera de dimensión dos la única que admite dicha estructura.

Por otra parte, recordemos que también hemos mencionado las estructuras complejas, propias de algunas variedades de dimensión par. Entre los ejemplos, hemos visto que \mathbb{S}^2 es compleja y, sin embargo, no se sabe si \mathbb{S}^6 lo es o no, lo que se conoce como *Problema de Hopf*.

Por último, además de las estructuras mencionadas en la tabla, también hemos hablado de las variedades paralelizables. Gracias al teorema de Adams, sabemos que las únicas esferas que son paralelizables son \mathbb{S}^1 , \mathbb{S}^3 y \mathbb{S}^7 . Además, hemos visto una bonita relación, proporcionada por el Teorema de Kirchhoff, entre las esferas casi-complejas y las paralelizables.

A Anexo

Con el objetivo de que este trabajo sea lo más completo y autocontenido posible, en este anexo se presentan algunas nociones y teoremas fundamentales que forman parte de las asignaturas del plan de estudios del Grado en Matemáticas. Estos resultados pueden servir como referencia para el lector en caso de ser necesarios para una mejor comprensión del texto.

A.1 Álgebra Lineal y Geometría Afín

En primer lugar, recordamos las definiciones básicas de espacio vectorial y espacio afín, que se pueden encontrar en cualquier referencia básica de Álgebra Lineal y Geometría Afín.

Definición A.1 Sean $(V, +)$ un grupo conmutativo, $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un cuerpo y $\cdot : \mathbb{K} \times V \rightarrow V$ una aplicación. Para abreviar, a la imagen de $\cdot(k, v)$ lo denotamos simplemente por $k \cdot v$. Decimos que la terna (V, \mathbb{K}, \cdot) es un **espacio vectorial** si se cumple:

- i) Para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ y todos $v, w \in V$ se tiene que $\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$.
- ii) Para todos $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ y todo $v \in V$ se tiene que $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$.
- iii) Si $1_{\mathbb{K}}$ es el elemento neutro para el producto en $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$, entonces para todo $v \in V$ se tiene que $1_{\mathbb{K}} \cdot v = v$.
- iv) Para todos $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ y todo $v \in V$ se tiene que $(\lambda \cdot \mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$.

A los elementos de V se les denomina **vectores**.

Definición A.2 Sean \mathcal{A} un conjunto no vacío, V un \mathbb{K} -espacio vectorial y $\psi : \mathcal{A} \times V \rightarrow \mathcal{A}$ una aplicación. Diremos que (\mathcal{A}, V, ψ) es un **espacio afín**, si la aplicación ψ satisface las siguientes propiedades:

- i) Para todo $P \in \mathcal{A}$, la aplicación $\psi_P : V \rightarrow \mathcal{A}$ definida por $\psi_P(v) := \psi(P, v)$ es biyectiva.
- ii) Para todo $P \in \mathcal{A}$ y para todos $v, w \in V$ se tiene que $\psi(\psi(P, v), w) = \psi(P, v + w)$.

A los elementos de \mathcal{A} se les denomina **puntos**.

A.2 Variedades Diferenciables

A continuación, definiremos algunos conceptos básicos y enunciaremos varios resultados de teoría de variedades diferenciables, que se pueden encontrar en [4] y [6].

A.2.1 Definiciones básicas

Definición A.3 Sea M un conjunto.

- (a) Una aplicación $x : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$ inyectiva y con imagen un subespacio abierto de \mathbb{R}^n se llama **carta**. A la imagen de cada elemento de M , $x(m) = (x^1(m), \dots, x^n(m)) \in \mathbb{R}^n$ se llama el conjunto de **coordenadas** de m (respecto de la carta dada). A U se le llama **dominio** de la carta.
- (b) Se llama **atlas** sobre M a una colección \mathcal{A} de cartas sobre \mathbb{R}^n cuyos dominios recubran todo M .

- (c) Se llama **atlas** C^∞ a un atlas \mathcal{A} tal que cuales quiera cartas $x, y \in \mathcal{A}$ son compatibles. Esto es, que si sus dominios U y V tienen intersección no vacía, resulta que $x(U \cap V)$ e $y(U \cap V)$ son abiertos de \mathbb{R}^n y la composición $y^{-1} \circ x : x(U \cap V) \rightarrow y(U \cap V)$ es un difeomorfismo C^∞ . La composición $y^{-1} \circ x$ se denomina **cambio de coordenadas**.
- (d) Se dice que dos atlas $C^\infty \mathcal{A}$ y \mathcal{A}' son **equivalentes** si $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ es también un atlas C^∞ sobre M .
- (e) Se dice que un atlas $C^\infty \mathcal{A}$ es un **atlas maximal** si no puede incluirse en ningún otro.

Proposición A.4 Todo atlas C^∞ está contenido en un único atlas maximal.

Definición A.5 Una **variedad diferenciable** es un conjunto M dotado de un atlas maximal. Se llama **dimensión** de la variedad M a la dimensión n del espacio euclídeo donde toman valores las cartas \mathbb{R}^n .

Observación A.6 Como consecuencia de la Proposición A.4, observamos que para determinar una estructura de variedad diferenciable sobre un conjunto M es suficiente con dar un atlas C^∞ , pues al estar contenido en un único atlas maximal, la estructura diferenciable de la variedad queda unívocamente definida.

Teorema A.7 Sean M y N dos variedades diferenciables de dimensiones m y n respectivamente, entonces el producto $M \times N$ es una variedad diferenciable de dimensión $m + n$.

A.2.2 Aplicaciones diferenciables

Definición A.8 Sean M y M' dos variedades diferenciables y $f : M \rightarrow M'$ una aplicación.

- i) Se dice que f es una **aplicación diferenciable** en $p \in M$ si para toda carta $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ cuyo dominio contenga al punto p y toda carta $x' : U' \rightarrow \mathbb{R}^m$ cuyo dominio contenga al punto $f(p)$, resulta que $x' \circ f \circ x^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es diferenciable en $x(p)$.
- ii) Se dice que f es **aplicación diferenciable** en M si lo es en todo punto $p \in M$.
- iii) Se dice que f es un **difeomorfismo** si es una aplicación diferenciable, biyectiva y de inversa también diferenciable.

A.2.3 Topología de las variedades diferenciables

Vamos a enunciar algunas nociones topológicas de las variedades diferenciables.

Definición A.9 Un **entorno** E de p es un conjunto tal que existe un abierto W con $p \in W \subset E$.

Una **base de entornos** de p es una familia de entornos $\{E_i\}$, que contienen a p y tales que para todo abierto V que contenga a p existe algún abierto de la base que verifica $p \in E_i \subset V$.

Definición A.10 Un espacio topológico (M, \mathcal{T}) verifica

- i) el **primer axioma de numerabilidad** (I.A.N.) si cada punto admite una base numerable de entornos.
- ii) el **segundo axioma de numerabilidad** (II.A.N.) si la topología admite una base numerable.

Proposición A.11 Sea M una variedad diferenciable. Entonces:

- i) M verifica el primer axioma de numerabilidad.
- ii) si M admite un atlas numerable, entonces M verifica el segundo axioma de numerabilidad.

Definición A.12 Sea (M, \mathcal{T}) un espacio topológico. Se dice que verifica

- i) el axioma T_0 si para cualesquiera puntos distintos $p, q \in M$, existen un abierto U en M o un abierto V en M que verifican: $p \in U, q \notin U$; $q \in V, p \notin V$.
- ii) el axioma T_1 si para cualesquiera puntos distintos $p, q \in M$ existen un abierto U en M y un abierto V en M que verifican las condiciones: $p \in U, q \notin U$ y $q \in V, p \notin V$.
- iii) el axioma T_2 o de **Hausdorff** si para cualesquiera puntos distintos $p, q \in M$ existen un abierto U en M y un abierto V en M que verifican: $p \in U, q \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

A.2.4 Campos vectoriales

Se presentan algunas nociones y resultados acerca de campos vectoriales.

Notación A.13 Denotaremos por

$$\mathfrak{F}(M) = \{f : M \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es una función } C^\infty\}$$

el conjunto de funciones de M .

Observación A.14 El conjunto $\mathfrak{F}(M)$ tiene estructura de anillo definiendo la suma y el producto de dos funciones $f, g \in \mathfrak{F}(M)$ como:

$$(f + g)(p) = f(p) + g(p) \quad p \in M \quad (fg)(p) = f(p)g(p) \quad p \in M$$

Definición A.15 Sean M una variedad diferenciable y $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una carta. Se llama **derivada parcial** $\partial/\partial x^i$ al operador:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} : \mathfrak{F}(U) \longrightarrow \mathfrak{F}(U)$$

definido por

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)(f)(p) = \left(\frac{\partial(f \circ x^{-1})}{\partial t^i}\right)_{x(p)}$$

siendo (t^1, \dots, t^n) las coordenadas en \mathbb{R}^n .

Definición A.16 Sea M una variedad diferenciable. Un **campo vectorial** X sobre M es una aplicación $X : \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$ que verifica las siguientes propiedades:

- i) Es \mathbb{R} -lineal: $X(\alpha f + \beta g) = \alpha X(f) + \beta X(g)$ para cualesquiera $f, g \in \mathfrak{F}(M), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- ii) Verifica la Ley de Leibniz: $X(fg) = X(f)g + fX(g)$ para cualesquiera $f, g \in \mathfrak{F}(M)$.

El conjunto de campos vectoriales se denota por $\mathfrak{X}(M)$.

Observación A.17 El conjunto de campos vectoriales $\mathfrak{X}(M)$ sobre una variedad M es un módulo sobre el anillo de funciones de la variedad $\mathfrak{F}(M)$.

Observación A.18 Sea $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una carta de M , en coordenadas locales, se puede definir el conjunto de campos vectoriales como:

$$\mathfrak{X}(U) = \left\{ X = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i} X^i \mid X^i \in \mathfrak{F}(U) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \right\}$$

A.2.5 Espacio tangente

Al igual que en superficies de \mathbb{R}^3 existe la noción que conocemos de plano tangente a un punto de la superficie, podemos considerar una estructura equivalente en las variedades diferenciables, en las se puede definir el espacio tangente.

Definición A.19 Decimos que dos curvas $\gamma, \eta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ son **equivalentes** en $p \in M$ si $\gamma(0) = p = \eta(0)$ y $\gamma'(0) = \eta'(0)$. Cada clase de equivalencia se llama **vector tangente** en $p \in M$.

Observación A.20 Dada una carta $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $p \in U$, las derivadas parciales son derivadas de curvas:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p = \gamma'(0)$$

donde $\gamma = x^{-1} \circ \beta$, siendo $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow x(U)$ dada por $\beta(t) = (q^1, \dots, q^i + t, \dots, q^n)$ siendo $x(p) = q$.

Definición A.21 Sea M una variedad diferenciable, $p \in M$ un punto de la variedad, se puede definir $\overrightarrow{T_p M}$ el **espacio vectorial tangente** en p , como el espacio vectorial generado por las derivadas parciales en p

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n} \right)_p \right\}$$

Notemos entonces que $\dim \overrightarrow{T_p M} = \dim M$.

Observación A.22 Los espacios tangentes en dos puntos distintos p y q de la variedad M son disjuntos puesto que $\overrightarrow{T_p M}$ es el conjunto de clases de equivalencia de curvas en M que llevan el 0 en p , mientras que $\overrightarrow{T_q M}$ es el de clases de equivalencia de curvas que llevan el 0 en q .

Como bien hemos mencionado con anterioridad, el producto de variedades diferenciables es una variedad diferenciable. En particular nos podemos preguntar por el espacio tangente de dicho producto.

Proposición A.23 Sean M y N dos variedades diferenciables de dimensiones m y n respectivamente, consideramos la variedad producto $M \times N$ de dimensión $m + n$. Entonces, el espacio tangente de dicho espacio es isomorfo a la suma directa de los espacios tangentes en cada una de ellas. Esto es, sean $p \in M, q \in N$,

$$\overrightarrow{T_{(p,q)}(M \times N)} \cong \overrightarrow{T_p M} \oplus \overrightarrow{T_q N}$$

Demostración. La demostración es muy sencilla usando las propiedades de los espacios vectoriales reales de dimensión finita. Por un lado, $\overrightarrow{T_{(p,q)}(M \times N)}$ es un espacio vectorial de dimensión $m + n$ y, por otro lado, $\overrightarrow{T_p M} \oplus \overrightarrow{T_q N}$ es también un espacio vectorial de dimensión $m + n$. Como espacios vectoriales de la misma dimensión (finita) son isomorfos entre sí, se tiene el resultado que queremos.

□

A.2.6 Fibrado tangente

Ligado a la noción de espacio tangente, se encuentra la del fibrado tangente a una variedad.

Definición A.24 *El conjunto $TM = \bigcup_{p \in M} \overrightarrow{T_p M}$ de vectores tangentes a una variedad diferenciable se denomina **fibrado tangente** de la variedad.*

El fibrado tangente también tiene estructura de variedad diferenciable y su dimensión es el doble de la de M . De modo natural, se establece la proyección $\pi : TM \rightarrow M$, que a cada vector tangente le hace corresponder el punto en que es tangente. Así, una **sección** σ del fibrado tangente es una aplicación $\sigma : M \rightarrow TM$ tal que $\pi \circ \sigma = id_M$, que a cada punto p de M le hace corresponder un vector de $\overrightarrow{T_p M}$. Por lo que un campo vectorial sobre una variedad no es más que una sección diferenciable del fibrado tangente de la variedad.

A.2.7 Aplicación tangente o diferencial

La **aplicación tangente** o **diferencial** de una aplicación $\varphi : M \rightarrow N$ entre variedades se puede expresar de la siguiente forma en coordenadas locales:

Teorema A.25 *Si $\varphi : M \rightarrow N$ es una aplicación diferenciable, $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una carta de M e $y : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una carta de N , tal que $p \in U$ y $\varphi(p) \in V$, entonces*

$$(\varphi_*)_p : \overrightarrow{T_p M} \rightarrow \overrightarrow{T_{\varphi(p)} N}$$

está dada por

$$(\varphi_*)_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i}$$

Así, la matriz de $(\varphi_*)_p$ respecto de las bases inducidas por las cartas es la matriz jacobiana:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial \varphi^1}{\partial x^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial \varphi^n}{\partial x^m} \end{pmatrix}$$

A.2.8 Variedades orientables

Se puede establecer una relación de equivalencia en el conjunto de bases de un espacio vectorial, de modo que dos bases son equivalentes si la matriz del cambio de base tiene determinante positivo. Cada clase de equivalencia se llama **orientación** en el espacio vectorial.

Definición A.26 *Se dice que una variedad M es **orientable** si en cada punto $p \in M$, está definida una orientación en el espacio tangente $\overrightarrow{T_p M}$ de forma que para todo $p \in M$ existe un entorno U del punto p y existen campos $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{X}(U)$ tales que $\{(X_1)_q, \dots, (X_n)_q\}$ es una base de $\overrightarrow{T_q M}$ para todo $q \in U$ de modo que la orientación que definen es la misma que ya tenía q .*

A.2.9 Formas diferenciales

Una noción relacionada con la de campo vectorial es la de forma diferencial. Al igual que los campos vectoriales se pueden escribir como suma de las derivadas parciales, las formas diferenciales se escribirán como suma de diferenciales, el operador dual de la derivada parcial.

Definición A.27 Sean M una variedad diferenciable y $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una carta. Designemos las funciones coordenadas por x^i , esto es, sea $p \in M$, $x(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p))$. Se llama **diferencial** dx^i al operador dual de $\frac{\partial}{\partial x^i}$, esto es,

$$dx^i : \mathfrak{X}(U) \rightarrow \mathfrak{F}(U)$$

definido por,

$$dx^i \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \delta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Una vez definido el diferencial, ya podemos dar la definición de una 1-forma diferencial.

Definición A.28 En las condiciones de la definición anterior, se llama **1-forma diferencial** en el dominio de carta U al operador,

$$\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx^i$$

siendo $\omega_i \in \mathfrak{F}(U)$. Se denotará por $\Lambda(U)$ al conjunto de 1-formas en U .

Observación A.29 Se tiene que:

(i) Cada $\omega \in \Lambda(U)$ es una aplicación $\mathfrak{F}(U)$ -lineal, esto es:

$$\begin{aligned} \omega(X + Y) &= \omega(X) + \omega(Y) & X, Y \in \mathfrak{X}(U) \\ \omega(fX) &= f\omega(X) & X \in \mathfrak{X}(U), f \in \mathfrak{F}(U) \end{aligned}$$

(ii) El conjunto $\Lambda(U)$ de 1-formas en U es un módulo sobre el anillo de funciones, definiendo

$$\begin{aligned} (\omega + \eta)(X) &= \omega(X) + \eta(X) & \omega, \eta \in \Lambda(U), X \in \mathfrak{X}(U) \\ (f\omega)(X) &= f\omega(X) & \omega, \eta \in \Lambda(U), X \in \mathfrak{X}(U), f \in \mathfrak{F}(U) \end{aligned}$$

A.2.10 Teorema de inmersión de Whitney

A continuación, enunciaremos el teorema de inmersión de Whitney, pero para ello, definiremos antes algunas nociones.

Definición A.30 Sean M y N dos variedades diferenciables y $f : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable. Se dice que:

- i) f es una **inmersión** si la aplicación tangente $f_* : \overrightarrow{T_p M} \rightarrow \overrightarrow{T_{f(p)} N}$ es inyectiva, para todo $p \in M$.
- ii) f es una **submersión** si la aplicación tangente $f_* : \overrightarrow{T_p M} \rightarrow \overrightarrow{T_{f(p)} N}$ es suprayectiva, para todo $p \in M$.

- iii) f es un **embedding** si es una inmersión inyectiva.
- iv) M es una **subvariedad** de N si $M \subset N$ y la inyección natural $f : M \rightarrow N$ es una inmersión.
- v) M es una **subvariedad regular** de N si es una subvariedad y la topología de M coincide con la restricción de la de N .
- vi) f es un **embedding regular** si es un embedding y $f(M)$ es una subvariedad regular de N .

Ahora, ya estamos en condiciones de enunciar el siguiente teorema:

Teorema A.31 (Whitney) Toda variedad diferenciable (Hausdorff y que verifique el II.A.N.) de dimensión n admite un embedding regular en \mathbb{R}^{2n} .

A.2.11 Distribuciones

Definición A.32 Sea M una variedad diferenciable de dimensión n . Se llama **distribución** C^∞ de dimensión k (siendo $k \leq n$) a una familia

$$\mathcal{D} = \{\vec{D}_p \subset \overrightarrow{T_p M} : \vec{D}_p \text{ subespacio vectorial de dim } \vec{D}_p = k\}_{p \in M}$$

de modo que, para cada punto $p \in M$, existan un entorno U de p y una familia de campos $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(U)$ que sean base de $\vec{D}_q \forall q \in U$.

Observación A.33 Sea $\omega \in \Lambda(M)$ una forma diferencial. Si resulta que si $\omega_p : \overrightarrow{T_p M} \rightarrow \mathbb{R}$ no es el homomorfismo nulo, entonces $\ker \omega_p$ es un hiperplano vectorial en $\overrightarrow{T_p M}$. De esta forma, tenemos que la familia $\mathcal{D} = \{\ker \omega_p\}_{p \in M}$ es una distribución de hiperplanos.

A.2.12 Campos tensoriales

Definición A.34 Sea M una variedad diferenciable. Se llama

- i) **Campo tensorial de tipo** $(0, 0)$ a toda función de $\mathfrak{F}(M)$.
- ii) **Campo tensorial de tipo** $(0, s)$ a toda aplicación $\mathfrak{F}(M)$ -lineal

$$T_s^0 : \mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{F}(M)$$

- iii) **Campo tensorial de tipo** $(1, s)$ a toda aplicación $\mathfrak{F}(M)$ -lineal

$$T_s^1 : \mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

A.2.13 Álgebra de Grassmann

Vamos a explicar de forma breve y resumida lo que se conoce como álgebra de Grassmann para dar una posible intuición al lector de lo que es. Para profundizar sobre el tema se puede consultar el capítulo 2 de [17].

Sea V un espacio vectorial real y consideramos $V \otimes V$ el producto tensorial por sí mismo. Se define el ideal I generado por los elementos de la forma $v \otimes v \in V \otimes V$. Llamamos $\Lambda^2(V) = (V \otimes V)/I$ al cociente. Se define el **producto exterior** al producto inducido por \otimes en el espacio cociente y lo denotamos por \wedge . Así $v \wedge v = 0$.

Teorema A.35 (Propiedades del producto exterior) Sea V un espacio vectorial de dimensión n . Entonces:

i) Si $\alpha \in \Lambda^k(V)$, $\beta \in \Lambda^l(V)$ entonces $\alpha \wedge \beta \in \Lambda^{k+l}(V)$.

ii) $\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl} \beta \wedge \alpha$.

iii) El producto es asociativo: $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$.

iv) Si $\{\vec{e}_i, 1 \leq i \leq n\}$ es una base de V , entonces

$$\{\vec{e}_{i_1} \wedge \dots \wedge \vec{e}_{i_k} : 1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n\}$$

es una base de $\Lambda^k(V)$. Por tanto,

$$\dim \Lambda^k(V) = \binom{n}{k}$$

En particular, si $k > n$, el espacio $\Lambda^k(V) = \{\vec{0}\}$ y si $k = n$ entonces $\dim \Lambda^n(V) = 1$.

iii) Llamaremos $\Lambda(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Lambda^k(V)$.

Definición A.36 Se llama **álgebra exterior o de Grassmann** de V a $\Lambda(V)$ con su estructura de álgebra, esto es de espacio vectorial real con operación interna dada por el producto exterior.

Referencias

- [1] I. Agricola, G. Bazzoni, O. Goertsches, P. Konstantis, S. Rollenske, On the history of the Hopf problem, *Differential Geom. Appl.* **57**, 2018, 1-9.
- [2] J.C. Baez, The octonions. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **39**, 2002, no. 2, pp.145-205. arXiv: math/0105155.
- [3] D.E. Blair, *Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds*, 2nd ed., Progress in Math., **203**, Birkhäuser, Boston, 2002.
- [4] F. Brickell, R.S. Clark, *Differentiable Manifolds. An introduction*. Van Nostrand, London, 1970.
- [5] B. Datta and S. Subramanian, Nonexistence of almost complex structures on products of even-dimensional spheres, *Topology Appl.* **36**, 1990, 39–42.
- [6] F. Etayo, *Variedades Diferenciables. Apuntes de la Asignatura. Curso 2024-25*. Unpublished manuscript. Facultad de Ciencias, Universidad de Cantabria, 2024.
- [7] M. Kervaire, Courbure intégrale généralisée et homotopie. *Math. Ann.*, 131, 1956, 219–252.
- [8] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry. Volume 2*. Wiley Classics Library, John Wiley and Sons, 1969.
- [9] C. LeBrun, Orthogonal Complex Structures on S^6 , *Proc. Amer. Math. Soc.* **101**, 1987, n. 1, 136-138.
- [10] J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*. 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol.218, Springer, 2013.
- [11] P.R. López, Sobre la fibración de Hopf y la paralelización de esferas, TFG, Universidad de Cantabria, 2020. Disponible en: <http://hdl.handle.net/10902/20495>
- [12] E. Loubeau, L. Rodríguez Díaz, H. Sá Earp, Parallelisms on the 7-sphere. *Matemática Contemporânea*, **60**, 2024, pp. 137–162. DOI: 10.21711/231766362024/rmc607.
- [13] A. Morimoto, On normal almost contact structures, *J. Math. Soc. Japan* **15**, 1963, no. 4, 420-436.
- [14] A. Newlander, L. Nirenberg, Complex analytic coordinates in almost complex manifolds, *Ann. of Math.* **65**, 1957, 391-404.
- [15] L. O. Rodríguez Díaz, A note on Kirchhoff's theorem for almost complex spheres I, preprint, IMPA, Rio de Janeiro. arXiv:1804.05794.
- [16] Z. K. Silagadze, Multi-dimensional vector product, *J. Phys. A: Math. Gen.* **35** (2002), 4949.
- [17] F.W. Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*. Graduate Texts in Mathematics, 94, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [18] K. Yano, M. Kon, *Structures on Manifolds*. Ser. Pure Math., 3 World Scientific Publishing Co., Singapore, 1984.