

**Universidad de Cantabria**

**Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación**



**TESIS DOCTORAL**

**Curvas y Superficies Bisectrices y Diagrama  
de Voronoi de una familia finita de  
semirrectas paralelas en  $\mathbb{R}^3$**

**Presentada por**

**Adamou Ibrahim**

**Dirigida por**

**Mario Fioravanti y Laureano Gonzalez -Vega.**

**Santander, Septiembre de 2013**



*Cette thèse est dédiée à Maman, Papa,  
sans lesquels je n'aurais jamais vu le jour,  
ma femme et mes trois enfants :  
A. Hakim, Kaoussar et Mouslim*



# Remerciements

Il sont nombreux, les gens qui ont contribué, de près ou de loin, à la réalisation de cette thèse et que je tiens à remercier.

- Tout d’abord, je réitère toute ma gratitude à mes directeurs de thèse Pr. Laureano Gonzalez-Vega et Pr. Mario Fioravanti pour leur confiance, leur patience et le soutien qu’ils m’ont apporté durant toutes ces années. Malgré leur emploi du temps surchargé, ils n’ont jamais cessé de me prêter une oreille attentive. Je tiens à remercier tout spécialement Pr Mario Fioravanti pour l’attention très particulière qu’il m’a accordée durant tout mon séjour à Santander, et son aide précieuse dans l’apprentissage de la langue espagnole. Qu’il reçoive l’expression de toute ma reconnaissance.
- Je tiens à remercier mon second hôte Bernard Mourrain, qui a accepté mes visites dans son laboratoire au cours de ma thèse. La fructueuse collaboration avec son équipe GALAAD dans le cadre du projet **SAGA**, a renforcé ma motivation dans l’apprentissage de la programmation en C++.
- Je tiens à remercier Mr. Rafael Losada, expert et formateur à Instituto GeoGebra de Cantabria, pour l’étroite collaboration dans une partie de mon travail.
- Je remercie toute la communauté universitaire de Cantabrie et en particulier tous les membres du MATESCO (Département de Mathématiques, Statistiques et Informatique) pour l’accueil, l’hospitalité et l’ensemble des moyens qu’ils m’ont offerts ce qui m’a permis de réaliser cette thèse dans des meilleures conditions.
- Je tiens à exprimer tout particulièrement ma gratitude au Pr. Tomas Recio de l’université de Cantabrie pour son aide efficace à la solution des nombreux problèmes administratifs et budgétaires qui se sont posés.
- Toute ma gratitude va également au Pr Marie Françoise Roy de l’université Rennes 1, qui m’a apporté constamment une l’aide inestimable depuis mon DEA. Son action, à travers les réseaux et projets RAGAAG, SARIMA, CIMPA, etc, pour la promotion de mathématiques en Afrique en général et au Niger en particulier est remarquable.
- J’exprime aussi ma gratitude à Ousmane Moussa Tessa, Maître de conférence à l’université Abdou Moumouni de Niamey, pour son aide et ses conseils depuis le début et jusqu’à la rédaction de cette thèse.
- Un grand merci à l’Ambassade d’Espagne au Niger, le visa qu’ils m’ont accordé m’a permis de profiter d’un long séjour en Espagne pour travailler sur ma thèse.
- Je tiens à remercier :
  - Charles Boubel, Maître de conférence à l’université de Strasbourg, mon directeur de DEA, pour avoir m’initié à la recherche.

- Pr. Maria José González López de l’université de Cantabrie, avec laquelle j’ai fait mes premiers pas en GeoGebra à travers le projet de coopération UNICAN-UAM<sup>1</sup>.
- Je tiens à remercier les rapporteurs de cette thèse pour leurs commentaires utiles. Je salue également les membres du jury, pour avoir accepté d’y participer et d’entreprendre le voyage à Santander, afin d’assister à la soutenance.
- Mes remerciements s’adressent également aux doctorants de MATESCO, plus particulièrement à mes collègues de bureau : Gema Rosa Quintaña , Giovanna Coral Suárez et Lidia Patiño Otero, notamment pour toute aide qu’elles m’ont apportée en tant qu’interprète, au début de mon séjour en Espagne.
- Mes remerciements vont également à tous mes Professeurs, amis enseignants chercheurs et doctorants de l’université Abdou Moumouni de Niamey et de l’université de Maradi, pour toute l’aide qu’ils m’ont apportée dans la réalisation de cette thèse.
- Enfin, je remercie très sincèrement toute ma grande famille qui a su comprendre et partager les sacrifices qu’impliquent cet important projet. Qu’elle reçoive l’expression de ma reconnaissance.

---

1. entre la Universidad de Cantabria et l’Université Abdou Moumouni de Niamey, à travers l’IREM

# Avant-propos

Cette thèse est le résultat des études menées par l'auteur depuis juin 2010 au Département de Mathématiques, Statistiques et Informatique de l'Université de Cantabrie en Espagne, sous la supervision de Pr. Laureano Gonzalez-Vega et de Pr. Mario Fioravanti.

Ce travail s'inscrit dans le cadre du Work Package **WP3** : Algebraic Geometry for CAD Applications, du projet **SAGA**. Dans un premier temps, nous proposons, d'une part, des nouvelles approches pour une description exacte des courbes et des surfaces médiatrices de petit degré, en utilisant une combinaison des outils de l'algèbre linéaire avec ceux de la résolution des systèmes d'équations algébriques par élimination. Ces approches permettent, ainsi, de faire un pas vers la promotion de la CAO/CGAO et de la géométrie algorithmique. Nous proposons, d'autre part, une nouvelle approche expérimentale à travers un logiciel de mathématique dynamique pour une caractérisation très simple des médiatrices planes.

Dans un deuxième temps, nous proposons un nouveau algorithme pour la description d'une approximation du diagramme de Voronoï topologiquement bien certifiée. Ce nouvel algorithme utilise des algorithmes de subdivision spatiale et des récents résultats de la CGAO, notamment pour le calcul de la topologie des courbes et surfaces. On rappelle que le diagramme de Voronoï est l'une des structures de données les plus fondamentales de la géométrie algorithmique qui possède un champ d'applications très vaste.

Le texte a été conçu avec une partie introductive suivie d'un chapitre préliminaire qui rassemble toutes les notions de base indispensables pour une bonne compréhension de l'ensemble des chapitres. Toutefois, le lecteur peut parcourir les autres chapitres individuellement et indépendamment.

La rédaction de cette thèse a été financée par le septième programme-cadre de la communauté européenne [FP7/2007-2013], Marie Curie Initial Training Network SAGA (ShApes, Geometry and Algebra), grant agreement no [PITN-GA-2008-214584], et par le projet de recherche espagnol "**ALGORITMOS Y APLICACIONES EN GEOMETRIA REAL Y TROPICAL**", MTM2011-25816-C02-02, financé par le Ministère Espagnol de l'Économie et de la Compétitivité, et par les fonds **FEDER**.



# Résumé

## Courbes et Surfaces Médiatrices, et Diagramme de Voronoï d'une famille finie de demi-droites parallèles dans $\mathbb{R}^3$

### Résumé

Cette thèse est composée de trois parties principales : les calculs des courbes médiatrices de deux courbes ou d'un point et d'une courbe dans le plan, des surfaces médiatrices de deux surfaces dans  $\mathbb{R}^3$ , et du diagramme de Voronoï d'une famille finie de demi-droites parallèles de même orientation. Ces trois sujets sont étroitement liés et trouvent des applications dans le domaine de la CAO/CGAO et de la géométrie algorithmique. Dans ces trois sujets, nous allons présenter des méthodes algorithmiques pour obtenir une certaine représentation de l'objet qui nous intéresse : la courbe médiatrice, la surface médiatrice ou le diagramme de Voronoï.

En utilisant la règle de Cramer généralisée et certaines méthodes d'élimination algébrique, nous présentons une nouvelle approche pour déterminer une paramétrisation algébrique exacte (rationnelle ou non rationnelle) de la courbe médiatrice de deux courbes planes rationnelles. L'approche est, ensuite, généralisée pour déterminer une paramétrisation algébrique exacte (rationnelle ou non rationnelle) de la surface médiatrice de deux surfaces rationnelles de petit degré. La méthode est appliquée pour obtenir les paramétrisations de la médiatrice de deux courbes planes rationnelles, dans lesquelles une des courbes est un cercle ou une droite. D'autre part, nous montrons, aussi, comment il est facile d'obtenir les paramétrisations de la médiatrice de paires de surfaces suivantes : plan-quadrique, plan-tore, cylindre circulaire-quadrique non développable, cylindre circulaire-tore, cylindre-cylindre, cylindre-cône et cône-cône. Les paramétrisations obtenues sont rationnelles dans la plupart des cas. Dans le reste des cas, les paramétrisations contiennent des racines carrées qui est bien adapté pour déterminer une bonne approximation de la médiatrice.

Nous présentons aussi une approche différente traitant du problème de la courbe médiatrice plane. Cette nouvelle méthode utilise la couleur dynamique en GeoGebra pour les caractérisations géométrique et numérique de la courbe médiatrice de deux objets géométriques dans le plan (deux courbes, ou une courbe et un point). Même si elle ne fournit pas de représentation algébrique, la méthode peut conduire au calcul d'une représentation approximative de la courbe médiatrice.

Le diagramme de Voronoï (VD) est une structure de données fondamentale de la géométrie algorithmique avec des applications très variées dans des domaines théoriques et pratiques. Nous considérons le VD d'un ensemble fini de demi-droites parallèles de même orientation restreint à un domaine compact  $\mathcal{D}_0 \subset \mathbb{R}^3$  pour la distance euclidienne. Ce nouveau type de VD peut être utilisé pour apporter des réponses efficaces à certains problèmes dans l'industrie de forage, tels que l'hydraulique ou la mine. Nous présentons un algorithme approximatif efficace pour le calcul de ce VD, en utilisant le processus de subdivision produisant un maillage qui représente la topologie de VD dans  $\mathcal{D}_0$ .

### Mots-clefs

Médiatrices, courbes et surfaces rationnelles, Diagramme de Voronoï, Maillage.

---

## Curvas y Superficies Bisectrices, y Diagrama de Voronoi de una familia finita de semirrectas paralelas en $\mathbb{R}^3$

### Resumen

Este trabajo consta de tres partes principales : el calculo de las bisectrices de dos curvas o de un punto y una curva en el plano, de la superficie bisectriz de dos superficies en  $\mathbb{R}^3$ , y del diagrama de Voronoi de una familia finita de semirrectas paralelas y con la misma orientación en  $\mathbb{R}^3$ . Estos temas están estrechamente relacionados y tienen aplicaciones en CAD/CAGD y en Geometría Computacional.

Se presenta un nuevo método para determinar, utilizando la regla de Cramer generalizada y métodos de eliminación algebraica, una parametrización algebraica exacta (racional o no racional) de la curva bisectriz de dos curvas planas racionales dadas. Este método se generaliza para determinar una parametrización algebraica exacta de la superficie bisectriz de dos superficies racionales de grado bajo. El método se aplica, en particular, para obtener parametrizaciones de la bisectriz de dos curvas planas racionales, cuando una de ellas es una circunferencia o una recta. Por otro lado, se muestra cómo obtener fácilmente una parametrización de la bisectriz de los siguientes pares de superficies : plano y cuádrica, plano y toro, cilindro circular y cuádrica no desarrollable, cilindro circular y toro, dos cilindros, cilindro y cono, y dos conos. Estas parametrizaciones son racionales en la mayoría de los casos. En los casos restantes, la parametrización contiene una raíz cuadrada, que resulta adecuada para determinar una buena aproximación de la bisectriz.

Además, se presenta un enfoque diferente para el problema de la curva bisectriz plana. Este nuevo método utiliza color dinámico en GeoGebra para el cálculo de una caracterización geométrica y numérica de la bisectriz de dos objetos geométricos en el plano (dos curvas, o una curva y un punto). Aunque no proporciona una representación algebraica, el método permite el cálculo de una representación aproximada de la curva bisectriz.

El diagrama de Voronoi (DV) es una estructura de datos fundamental en geometría computacional con diversas aplicaciones en distintas áreas teóricas y prácticas. Se estudia el DV de un conjunto de semirrectas paralelas y con la misma orientación, restringido a un dominio compacto  $\mathcal{D}_0 \subset \mathbb{R}^3$ , con respecto a la distancia euclidiana. Este nuevo tipo de DV se puede utilizar para proporcionar una solución eficiente a algunos problemas relacionados con la perforación, en industrias tales como la hidráulica o la minería. Se presenta un algoritmo eficiente para calcular una aproximación de un DV de esa clase, utilizando un proceso de subdivisión, que produce una malla que representa correctamente la topología del DV.

## Parabras clave

Bisectrices, Curvas y superficies racionales, Diagrama de Voronoi, Mallado.

---

# Curve and Surface Bisectors, and Voronoi Diagram of a family of parallel half-lines in $\mathbb{R}^3$

## Abstract

This thesis has three main parts: computation of the bisectors of two curves or a point and a curve in the plane, of the bisector of two surfaces in  $\mathbb{R}^3$ , and of the Voronoi diagram of a finite family of parallel half lines in  $\mathbb{R}^3$ , with the same orientation. These subjects are closely related, and have applications in CAD/CAGD and Computational Geometry. In each of the three parts, we present algorithmic methods for computing certain representations of the geometric object of interest: the bisector curve, the bisector surface, or the Voronoi diagram.

We present a new approach to determine, using the generalized Cramer's rule and algebraic elimination steps, an exact algebraic parameterization (rational or non rational) of the bisector curve of two given planar rational curves. The approach is, then, generalized to determine an exact algebraic parameterization of the bisector surface of two low degree rational surfaces. In particular, we apply the method to obtain parametrizations of the bisector of two rational plane curves, when one

of them is a circle or a straight line. On the other hand, we show how to easily obtain parametrizations of the bisector of the following pairs of surfaces: plane-quadric, plane-torus, circular cylinder-non developable quadric, circular cylinder-torus, cylinder-cylinder, cylinder-cone and cone-cone. These parametrizations are rational in most cases. In the remaining cases the parametrization involves one square root which is well-suited to determine a good approximation of the bisector.

In addition, a different approach for the bisector curve problem will be presented. This new method uses dynamic color in GeoGebra for the computation of a geometric and numerical characterization of the bisector of two planar geometric objects (two curves, or a curve and a point). Even if it does not provide an algebraic representation, the method could lead to the computation of an approximate representation of the bisector curve.

The Voronoi diagram (VD) is a fundamental data structure in computational geometry with various applications in theoretical and practical areas. We consider the VD of a set of parallel half-lines, with the same orientation, constrained to a compact domain  $\mathcal{D}_0 \subset \mathbb{R}^3$ , with respect to the Euclidean distance. This new kind of VD can be used to provide an efficient solution to some problems in the drilling industry, such as hydraulic or mining. We present an efficient approximate algorithm for computing such VD, using a box subdivision process, which produces a mesh representing the topology of the VD in  $\mathcal{D}_0$ .

## Keywords

Bisectors, Rational Curves and Surfaces, Voronoi Diagram, Meshing.

# Table des matières

<b>Avant-propos</b>	<b>7</b>
<b>Table des figures</b>	<b>15</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>21</b>
<b>Introduction</b>	<b>23</b>
0.1 Contexte . . . . .	24
0.2 Objectifs de la thèse . . . . .	24
0.3 Structure de la thèse . . . . .	40
<b>1 Notions préliminaires</b>	<b>45</b>
1.1 Notations relatives aux vecteurs et matrices . . . . .	45
1.2 Notions relatives aux polynômes . . . . .	47
1.3 Notions relatives aux courbes et surfaces . . . . .	49
1.4 Notions relatives aux diagramme de Voronoï, enveloppe inférieure et diagramme de minimisation d'une famille de fonctions continues . . . . .	76
1.5 La règle de Cramer généralisée . . . . .	80
1.6 GeoGebra . . . . .	84
1.7 Subdivision spatiale, Structures de données et Algorithme de Par- cours de graphe . . . . .	89
<b>2 La Médiatrice d'un point et d'une courbe et la Médiatrice de deux   courbe, dans le plan</b>	<b>95</b>
2.1 La représentation algébrique de la médiatrice d'un point et d'une courbe rationnelle, et de deux courbes rationnelles du plan . . . . .	97
2.2 La paramétrisation de la médiatrice d'un cercle ou droite et d'une courbe rationnelle . . . . .	113
2.3 Les caractérisations géométrique et numérique de la médiatrice par la méthode de couleur dynamique en GeoGebra . . . . .	132
<b>3 La médiatrice de deux surfaces de petit degré</b>	<b>153</b>
3.1 Définitions et équations de la médiatrice algébrique . . . . .	155
3.2 Une approche générale pour le calcul d'une paramétrisation de la surface médiatrice . . . . .	157
3.3 La paramétrisation de la médiatrice algébrique d'un plan et d'une surface quadrique ou d'un tore . . . . .	167

3.4	La paramétrisation de la médiatrice d'un cylindre circulaire et une quadrique non développable ou un tore . . . . .	201
3.5	La paramétrisation de la médiatrice de deux quadriques développables . . . . .	208
<b>4</b>	<b>Le diagramme de Voronoï d'un ensemble de demi-droites parallèles restreint à un domaine compact <math>\mathcal{D}_0 \subset \mathbb{R}^3</math></b> . . . . .	<b>215</b>
4.1	Le diagramme de Voronoï d'un ensemble de demi-droites parallèles restreint à un domaine $\mathcal{D}_0 \subset \mathbb{R}^3$ . . . . .	217
4.2	La topologie de la surface médiatrice et de la courbe trisectrice dans un domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$ . . . . .	225
4.3	L'Algorithme . . . . .	231
	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>257</b>
	<b>Bibliographie</b> . . . . .	<b>259</b>
<b>A</b>	<b>Annexes</b> . . . . .	<b>269</b>
A.1	Le code Maple du test de régularité de l'algorithme 7 . . . . .	269

# Table des figures

1	En haut on a la médiatrice algébrique (bleue) et en bas la médiatrice géométrique (bleue) du cercle (vert) et de la PH-cubique (rouge) . . .	27
2	La médiatrice algébrique (bleue) du cercle (vert) et de l' hyperbole (rouge) . . . . .	28
3	La médiatrice algébrique (bleue) d'une droite(vert) et de l'ellipse(rouge) . . . . .	29
4	La courbe médiatrice géométrique est caractérisée en couleur blanche	31
5	La courbe médiatrice géométrique est caractérisée en couleur blanche	32
6	La trace de points de la médiatrice géométrique collectés est en couleur noir pour $\varepsilon = 0.005$ . . . . .	32
7	La trace de points de la médiatrice géométrique collectés est en couleur noir pour $\varepsilon = 0.0025$ . . . . .	33
8	La trace de points de la médiatrice géométrique collectés est en couleur noir pour $\varepsilon = 0.0005$ . . . . .	34
9	La composante contenant la surface médiatrice géométrique (bleue) du cylindre circulaire (rose) et du paraboloidé elliptique (vert). . . . .	37
10	La surface médiatrice algébrique (bleue) du plan (vert) et du cylindre hyperbolique (rouge). . . . .	38
11	La surface médiatrice de deux droites parallèles composée de deux demi-plans (vert et rouge) et une portion de demi-cylindre parabolique (bleu). . . . .	39
12	L'approximation de la cellule associée au site $d_1$ . . . . .	40
13	L'approximation de la cellule associée au site $d_2$ . . . . .	41
14	L'approximation de la cellule associée au site $d_3$ . . . . .	41
15	Une approximation du diagramme de Voronoï de trois sites $d_1, d_2$ et $d_3$ . . . . .	42
1.1	Une ellipse plane contenue dans le plan: $y - 2z = 0$ . . . . .	51
1.2	Une courbe spirale gauche . . . . .	52
1.3	Le support géométrique de la courbe $g$ en vert et celui $h$ en en pointillés bleue . . . . .	53
1.4	La parabole plane (bleue) définie par l'intersection d'un plan (rouge) et d'un cylindre parabolique (vert). . . . .	61
1.5	La courbe quartique en bleue définie par l'intersection de deux cylindres paraboliques. . . . .	62
1.6	Le cylindre parabolique: support géométrique de la surface paramétrée de l'exemple 1. . . . .	63

1.7	Le paraboloides elliptique: support géométrique de la surface paramétrée de l'exemple 2. . . . .	64
1.8	Le cylindre elliptique: support géométrique de la surface paramétrée de l'exemple 3. . . . .	65
1.9	Le segment de droite isotope à la courbe spatiale dans un domaine compact de l'exemple 17. . . . .	76
1.10	En haut la surface algébrique $\mathcal{S}$ (bleue) et en bas le polyèdre (rouge) isotope à $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{D}$ de l'exemple 18. . . . .	77
1.11	Le diagramme de Voronoï de $\mathcal{S} = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$ pour distance euclidienne. . . . .	79
1.12	L'enveloppe inférieure et le diagramme de minimisation de la famille $\mathcal{F}$ sont respectivement, représentées par les quatre portions de courbes et les six segments de droite horizontaux (en cinq couleurs différentes) avec les indices correspondants. . . . .	81
1.13	Les différentes fenêtres de GeoGebra . . . . .	85
1.14	La fenêtre GeoGebra de couleur dynamique . . . . .	86
1.15	Le modèle de couleur <b>RGB</b> . . . . .	87
1.16	Le modèle de couleur <b>CMY</b> . . . . .	88
1.17	L'illustration graphique de la version plane d'une structure BSP-trees, extrait de Gomes et al. [67] . . . . .	90
1.18	L'illustration graphique de la version plane de la méthodes des plans séparateurs médians de la structure $kd$ -trees pour la construction de $kd$ -trees. . . . .	91
1.19	L'illustration graphique de la version 3D d'une structure $kd$ -trees : le plan(rouge) divise l'espace racine (cyan) en deux sous-espaces-fils, chacun d'eux est ensuite divisé par le plan (bleu) en deux sous-espaces-petit-fils, puis, chacun des quatre petit-fils, est divisé par le plan (vert) en deux sous-espaces et ainsi de suite... . . . . .	92
2.1	La médiatrice géométrique (en bleue) correspond au centres dont les cercles sont extérieurement tangent à la courbe $r$ et le point $P$ . . . . .	99
2.2	La médiatrice algébrique à gauche et la médiatrice géométrique à droite du point $P$ et de l'ellipse $r$ de l'exemple 22. . . . .	107
2.3	La figure correspondant à l'exemple 23: du haut en bas, on a successivement: la médiatrice algébrique(bleue), la portion résultante issue de la première étape (en bleue) et la médiatrice géométrique (en bleue), du cercle (vert) et de la parabole (rouge). . . . .	112
2.4	la figure correspondante de l'exemple 24: la médiatrice algébrique (bleue) d'une parabole (rouge) et une quartique (rouge). . . . .	113
2.5	En haut la médiatrice algébrique (bleue) et en bas la médiatrice géométrique (bleue) du cercle (vert) et de la cubique (rouge) de l'exemple 25.1. . . . .	124
2.6	En haut la médiatrice algébrique (bleue) et en bas la médiatrice géométrique (bleue) du cercle (vert) et de l'hyperbole (rouge) de l'exemple 25.2. . . . .	128

2.7	En haut la médiatrice algébrique (bleue) et en bas la médiatrice géométrique (bleue) d'une droite (vert) et d'une cubique (rouge) de l'exemple 25.3. . . . .	130
2.8	En haut la médiatrice algébrique (bleue) et en bas la médiatrice géométrique (bleue) de la droite (vert) et de l'ellipse (rouge) de l'exemple 25.4. . . . .	133
2.9	Evolution du scanneur balayant un domaine contenant la médiatrice (blanc) de deux courbes (en vert et rouge) planes. . . . .	135
2.10	La capture des propriétés de couleur dynamique des points par GeoGebra . . . . .	137
2.11	La médiatrice algébrique (en bleu) de de la parabole (rouge) et de cubique (rouge) obtenue par la méthode algébrique dans l'exemple 26.1. . . . .	139
2.12	La caractérisation géométrique de la médiatrice géométrique (en blanche) de l'exemple 26.1. . . . .	140
2.13	La médiatrice algébrique (bleue) de la droite (rouge) et de la courbe fermée (vert) obtenue l'exemple 26.2. . . . .	141
2.14	La caractérisation géométrique de médiatrice géométrique (blanche) de l'exemple 26.2. . . . .	141
2.15	La médiatrice algébrique (bleue) de la parabole (rouge) et du cercle (vert) obtenue dans l'exemple 26.3. . . . .	142
2.16	La caractérisation géométrique de la médiatrice géométrique (blanche) de l'exemple 26.3. . . . .	142
2.17	La médiatrice algébrique (bleue) de la parabole (rouge) et du point $P$ (vert) obtenue dans l'exemple 26.4. . . . .	144
2.18	La caractérisation géométrique de la médiatrice géométrique (blanche) de l'exemple 26.4 . . . . .	144
2.19	La médiatrice algébrique (bleue) de la parabole (rouge) et de la quartique (rouge) obtenue dans l'exemple 26.5. . . . .	145
2.20	La caractérisation géométrique de la médiatrice géométrique (blanche) de l'exemple 26.5. . . . .	146
2.21	La médiatrice algébrique (bleue) de la parabole (rouge) et de la quintique (rouge) obtene dans l'exemple 26.6. . . . .	147
2.22	La caractérisation géométrique de la médiatrice géométrique (blanche) 26.6. . . . .	147
2.23	Cette capture montre l' évolution de la liste finale <b>List</b> , pour $\varepsilon = 0.025$ en fonction de l'avancement du scanneur. La liste <b>List</b> qui, précédemment contenait les coordonnées d'un seul point $(5.491, 0)$ , s'actualise avec les coordonnées de trois points $(5.506, 0.04)$ , $(5.506, 0)$ , $(5.506, -0.04)$ de la liste <b>cRGBpuro</b> mémorisés à la position $a = 1.186$ du scanneur . . . . .	148
2.24	La trace de points de (ou assez proche de) la médiatrice géométrique détectés par le scanneur, pour l'exemple 27.1. . . . .	149
2.25	La trace de points de (ou assez proche de) la médiatrice géométrique détectés par le scanneur, pour l'exemple 27.2. . . . .	150

2.26	La trace de points de (ou assez proche de) la médiatrice géométrique détectés par le scanner, pour l'exemple 27.3. . . . .	151
2.27	La trace de points de (ou assez proche de) la médiatrice géométrique détectés par le scanner, pour l'exemple 27.4. . . . .	151
3.1	Illustration schématique de la définition de la médiatrice algébrique (bleue) dans le cas de deux courbes planes (rouge) . . . . .	156
3.2	La médiatrice algébrique de deux sphères donnée par les composantes $\mathbf{B}_1$ et $\mathbf{B}_2$ respectivement présentées en couleurs rose et bleue . . . . .	161
3.3	Les deux vecteurs normaux $(\vec{\mathbf{N}}_1, \vec{\mathbf{N}}_2)$ et $(\vec{\mathbf{N}}'_1, \vec{\mathbf{N}}'_2)$ sont sortant vis à vis de faces opposées de surfaces $S_1$ et $S_2$ , tandis que $(\vec{\mathbf{N}}'_1, -\vec{\mathbf{N}}_2)$ ne le sont pas. . . . .	162
3.4	Les vecteurs normaux $\mathbf{N}_1$ et $\mathbf{N}_2$ sont sortant vis à vis de faces opposées et les points $P_1, P_2$ et $B$ forment un triangle isocèle en $B$ . . . . .	165
3.5	La médiatrice géométrique de deux sphères disjointes . . . . .	168
3.6	La médiatrice géométrique (bleue) du plan oblique (jaune) et du cône circulaire (rose). . . . .	172
3.7	La médiatrice algébrique (bleue) d'une sphère et d'un plan sécants, en couleur . . . . .	187
3.8	La surface médiatrice géométrique d'un plan et d'un ellipsoïde . . . . .	189
3.9	Du haut en bas on a respectivement: le plan (en rouge) et Hyperboloïde à deux nappes (vert), et leur médiatrice algébrique (bleue). . . . .	199
3.10	Une composante contenant la médiatrice géométrique (bleue) du cylindre circulaire (rose) et du parabolôïde elliptique (vert). . . . .	205
3.11	La médiatrice géométrique (bleue-violet) d'un cylindre circulaire (jaune-claire) et d'un ellipsoïde (vert-claire). . . . .	208
3.12	La médiatrice géométrique (bleue) du cylindre elliptique (vert) et du cylindre parabolique (rose) . . . . .	211
3.13	La médiatrice géométrique de deux cylindres paraboliques . . . . .	212
3.14	La médiatrice géométrique de deux cylindres circulaires . . . . .	212
4.1	Les trois composante de la surface médiatrice de l'exemple 36: du gauche vers la droite: le demi-plan(vert), la portion du demi-cylindre parabolique(bleu) et le demi-plan parallèle à l'axe ( $Ox$ ). . . . .	221
4.2	Les quatre composantes de la trisectrice de l' exemple 37 . . . . .	224
4.3	Les quatre courbes trisectrices concourantes au point quadrisecteur dans l'exemple 38 . . . . .	225
4.4	La figure correspondant à la $d$ -liste initiale (à droite) et la $d$ -liste mailée (gauche) . . . . .	239
4.5	La figure correspondant à la $d$ -liste initiale en haut et à la $d$ -liste maillée en bas. . . . .	242
4.6	Du haut en bas on a la $d$ -liste initiale de six médiatrices, les quatre trisectrices concourante au point quadrisecteur et l'ensemble de polyèdres qui représente la maille de la $d$ -liste initiale. . . . .	246
4.7	La maille de la cellule associée au site $d_1$ de l'exemple 1. . . . .	250
4.8	La maille de la cellule associée au site $d_2$ de l'exemple 1. . . . .	250

---

4.9	La maille de la cellule associée au site $d_3$ de l'exemple 1. . . . .	251
4.10	La maille du diagramme de Voronoï de $d_1, d_2$ et $d_3$ restreint à $\mathcal{D}_0$ de l'exemple 1. . . . .	251
4.11	La maille de la cellule associée au site $d_1$ de l'exemple 2. . . . .	252
4.12	La maille de la cellule associée au site $d_2$ de l'exemple 2. . . . .	253
4.13	La maille de la cellule associée au site $d_3$ de l'exemple 2. . . . .	253
4.14	La maille de la cellule associée au site $d_4$ de l'exemple 2. . . . .	254
4.15	La maille du diagramme de Voronoï de $d_1, d_2$ et $d_3$ restreint à $\mathcal{D}_0$ de l'exemple 2. . . . .	254



# Liste des tableaux

3.1	La représentation algébrique de la médiatrice algébrique du Plan et de Quadrique/Tore. . . . .	154
3.2	La comparaison sur le temps de calcul de la paramétrisation de la médiatrice de deux surfaces données par leur paramétrisation classique et par leur PN-paramétrisation. . . . .	213



# Introduction générale

Dans ce chapitre introductif, nous allons présenter le contexte général de cette thèse dans la première section, ensuite l'objectif de la thèse décrivant la contribution apportée accompagnée d'un certain nombre d'exemples illustratifs dans la deuxième section. Enfin, la troisième section présente la structure de la thèse.

## 0.1 Contexte

La technologie courante de la Conception Assistée par l'Ordinateur (CAO) et de la Conception Géométrique Assistée par l'Ordinateur (CGAO) (CAD, pour Computer Aided Design et CAGD, pour Computer Aided Geometric Design, en anglais) rencontre des limitations dues au conflit entre le fond mathématique sous-jacent et les fonctionnalités attendues par les divers domaines d'application. L'incorporation et l'intégration de résultats provenant d'autres disciplines que l'analyse numérique, sont très attendues, non seulement, pour améliorer les outils fondamentaux, mais aussi, pour conduire à des nouveaux outils de conception et de méthodologies. L'objectif de cette thèse est de mieux intégrer les résultats mathématiques actuels dans le domaine de la géométrie pour la CAO en incorporant des résultats de différentes disciplines telles que la géométrie algébrique et différentielle, l'algèbre linéaire, le calcul symbolique et les calcul géométrique proposant ainsi des nouvelles approches pour le traitement de primitives géométriques (telles que les médiatrices et les axes médians) des courbes et des surfaces de petit degré dans la CAO. La représentation la plus courante pour les courbes et les surfaces en CAO/CGAO reste la représentation paramétrique rationnelle. La représentation implicite est aussi utilisée dans certaines opérations spécifiques telles que le calcul d'intersection de courbes et de surfaces ou le test caractérisant l'appartenance d'un point à une courbe ou une surface. Les représentations implicites restent invariantes sous certaines opérations géométriques de base (telles que le calcul d'offset ou de médiatrice de courbes et de surfaces), mais leur calcul exact est souvent impraticable car impliquent la manipulation d'un ensemble de solutions associées à des systèmes d'équations non linéaires de degré très élevé. De plus, les représentations paramétriques ne sont pas conservées dans des telles opérations. Ainsi la description exacte de certaines primitives géométrique est problématique.

La géométrie algorithmique qui s'est récemment développée pour apporter des solutions à des problèmes de la CAO, de la robotique, de l'infographie, de la géographie, de la géologie, de la biologie structurale, de la conception de circuits intégrés, etc, trouve son fondement dans les structures de données dont l'une des plus importantes est le diagramme de Voronoï. Dans l'espace de dimension trois et supérieure, beaucoup de questions de base restent toujours ouvertes. Par exemple, le calcul d'une description exacte du diagramme de Voronoï d'un ensemble d'objets, différents des points, constitue l'une des difficultés majeures.

## 0.2 Objectifs de la thèse

L'objectif principal de cette thèse est d'apporter un certain nombre de contributions sur deux sujets connexes ayant diverses applications dans la CAO/CGAO et dans Géométrie Algorithmique, la **médiatrice** et le **diagramme de Voronoï** :

- La **médiatrice algébrique** de deux objets géométriques (point, courbe, surface) est définie comme étant l'ensemble de centres de cercles, dans  $\mathbb{R}^2$ , (ou de centres de spheres, dans  $\mathbb{R}^3$ ) qui sont simultanément tangents au deux objets.

- La **médiatrice géométrique** (ou **vraie médiatrice**) de deux objets géométriques est déterminé par le lieu géométrique de points équidistants à partir de deux objets.
- Le **diagramme de Voronoï** d'un ensemble d'objets discrets dans un espace métrique est la décomposition de l'espace en régions (appelées cellules de Voronoï). Il y a une région par objet, constituée de points qui sont plus proches de l'objet que de tout autre. Sa description résulte d'un arrangement des hypersurfaces médiatrices de paires d'objets.

### 0.2.1 Les contributions relatives à la médiatrice

Les contributions principales relatives à la médiatrice sont les suivantes :

1. **Une nouvelle approche pour calculer une paramétrisation algébrique (rationnelle ou non-rationnelle) exacte de la médiatrice algébrique de deux courbes rationnelles planes dont l'une est un cercle ou une droite, données par leur paramétrisations respectives  $\mathbf{s}(u)$  et  $\mathbf{r}(t)$ .**

Un point de la médiatrice algébrique de deux courbes régulières doit être à l'intersection commune des droites normales aux courbes et à égales distances à partir des points où ces droites sont normales aux courbes. L'approche consiste :

- Tout d'abord, en appliquant la règle de Cramer (classique) au système d'équations décrivant les points de l'intersection commune des normales à  $s$  et à  $r$  aux points  $\mathbf{s}(u)$  et  $\mathbf{r}(t)$ , pour obtenir une solution (les coordonnées des points) en fonction de paramètres  $u$  et  $t$  sous la forme de

$$\mathbf{b}_0(u, t) = (h_1(u, t), h_2(u, t))^T \in \mathbb{R}^2.$$

- Ensuite, à partir de l'équation décrivant les points qui sont à égales distances à partir des points  $\mathbf{s}(u)$  et  $\mathbf{r}(t)$ , on peut facilement exprimer l'un des paramètres en fonction de l'autre, disons  $u$  en fonction de  $t$ , et selon le degré de l'équation en  $u$  on peut avoir  $m$  ( $m \geq 1$ ) expressions :

$$u_i = u_i(t), i = 1, \dots, m.$$

- Enfin, en substituant  $u$  par  $u_i(t)$  dans  $\mathbf{b}_0(u, t)$  nous obtenons la paramétrisation de la courbe médiatrice algébrique sous la forme

$$\mathbf{b}_i(t) = \mathbf{b}_0(u_i(t), t), i = 1, \dots, m.$$

La paramétrisation que nous obtenons est constituée par plusieurs composantes, qui, en général, ne sont pas rationnelles car elle dépende de l'hodographe (c-à-d, norme de vecteur vitesse) de l'autre courbe. Elle peut être utilisée pour caractériser la médiatrice géométrique par "élagage" (c-à-d, identification et élimination d'un certain nombre fini de portions de la médiatrice algébrique qui n'appartiennent à la médiatrice géométrique). L'essentiel de cette approche sera détaillé à la section 2.2 du chapitre 2.

Les exemples suivants en sont une illustration de l'approche :

(a) Pour un cercle et une cubique de paramétrisations respectives

$$\mathbf{s}(u) = \left( \frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2} + 4 \right)^T \quad \text{et} \quad \mathbf{r}(t) = \left( 2t^2 - 2, \frac{2}{3\sqrt{3}}t(t^2 - 1) \right)^T,$$

les composantes de la paramétrisation de la courbe médiatrice sont données par :

$$\mathbf{b}_1(t) = \left( \frac{X_1(t)}{U_1(t)}, \frac{Y_1(t)}{V_1(t)} \right)^T \quad \text{et} \quad \mathbf{b}_2(t) = \left( \frac{X_2(t)}{U_2(t)}, \frac{Y_2(t)}{V_2(t)} \right)^T,$$

avec

$$\begin{aligned} X_1(t) &= \sqrt{3}(6t^4 + 4\sqrt{3}t^3 - 19t\sqrt{3} + 9)(-6t^4 + 4\sqrt{3}t^3 \\ &\quad + 5\sqrt{3}t + 15), \\ Y_1(t) &= \sqrt{3}t(330 - 1014t^2 - 12t^4 + 130\sqrt{3}t^3 - 275t\sqrt{3} \\ &\quad + 300t^6 + 227\sqrt{3}t^5 - 80t^7\sqrt{3} - 144t^8 - 26\sqrt{3}t^9 \\ &\quad + 24\sqrt{3}t^{11}), \\ U_1(t) &= 18(2\sqrt{3}t^4 - 7\sqrt{3}t^2 + 24t + \sqrt{3}), \\ V_1(t) &= 3(2\sqrt{3}t^4 - 7\sqrt{3}t^2 + 24t + \sqrt{3})(-2t^3 + 5t \\ &\quad - 3t^5 + 6\sqrt{3}t^2 - 2\sqrt{3}), \\ X_2(t) &= \sqrt{3}(-6t^4 + 4\sqrt{3}t^3 + 11t\sqrt{3} + 21)(6t^4 + 4\sqrt{3}t^3 \\ &\quad - 13t\sqrt{3} + 3), \\ Y_2(t) &= \sqrt{3}t(306 - 990t^2 + 204t^4 + 162\sqrt{3}t^3 - 255\sqrt{3}t \\ &\quad + 84t^6 + 139\sqrt{3}t^5 - 80\sqrt{3}t^7 - 144t^8 + 10\sqrt{3}t^9 \\ &\quad - 6 + 24\sqrt{3}t^{11}), \\ U_2(t) &= 18(2\sqrt{3}t^4 - \sqrt{3}t^2 + 24t + 3\sqrt{3}), \\ V_2(t) &= 3(-2t^3 + 5t - 3t^5 + 6\sqrt{3}t^2 - 2\sqrt{3})(2\sqrt{3}t^4 \\ &\quad - \sqrt{3}t^2 + 24t + 3\sqrt{3}). \end{aligned}$$

A partir de cette paramétrisation, après le processus de "élagage", nous obtenons la médiatrice géométrique qui est déterminée par la restriction de la composante  $\mathbf{b}_1$  à l'intervalle  $[-0.833, -0.0697]$  et la restriction de la composante  $\mathbf{b}_2$  à l'intervalle  $[1.16838, 9.60459]$ . Il y'a lieu de préciser que les nombres (qui déterminent les extrémités) utilisés dans les intervalles sont des approximations des nombres algébriques. La figure 1 montre le graphique correspondant des médiatrices algébrique et géométrique.

(b) Pour le cercle et l'hyperbole de paramétrisations respectives

$$\mathbf{s}(u) = \left( \frac{2u}{1+u^2} + 2, \frac{1-u^2}{1+u^2} + 1 \right)^T \quad \text{et} \quad \mathbf{r}(t) = \left( \frac{4t}{1-t^2}, \frac{2(1-t^2)}{1-t^2} \right)^T,$$

les composantes de la paramétrisation pour la courbe médiatrice sont données par :

$$\mathbf{b}_1(t) = \left( \frac{X_1(t)}{W(t)}, \frac{Y_1(t)}{W(t)} \right)^T \quad \text{et} \quad \mathbf{b}_2(t) = \left( \frac{X_2(t)}{W(t)}, \frac{Y_2(t)}{W(t)} \right)^T,$$

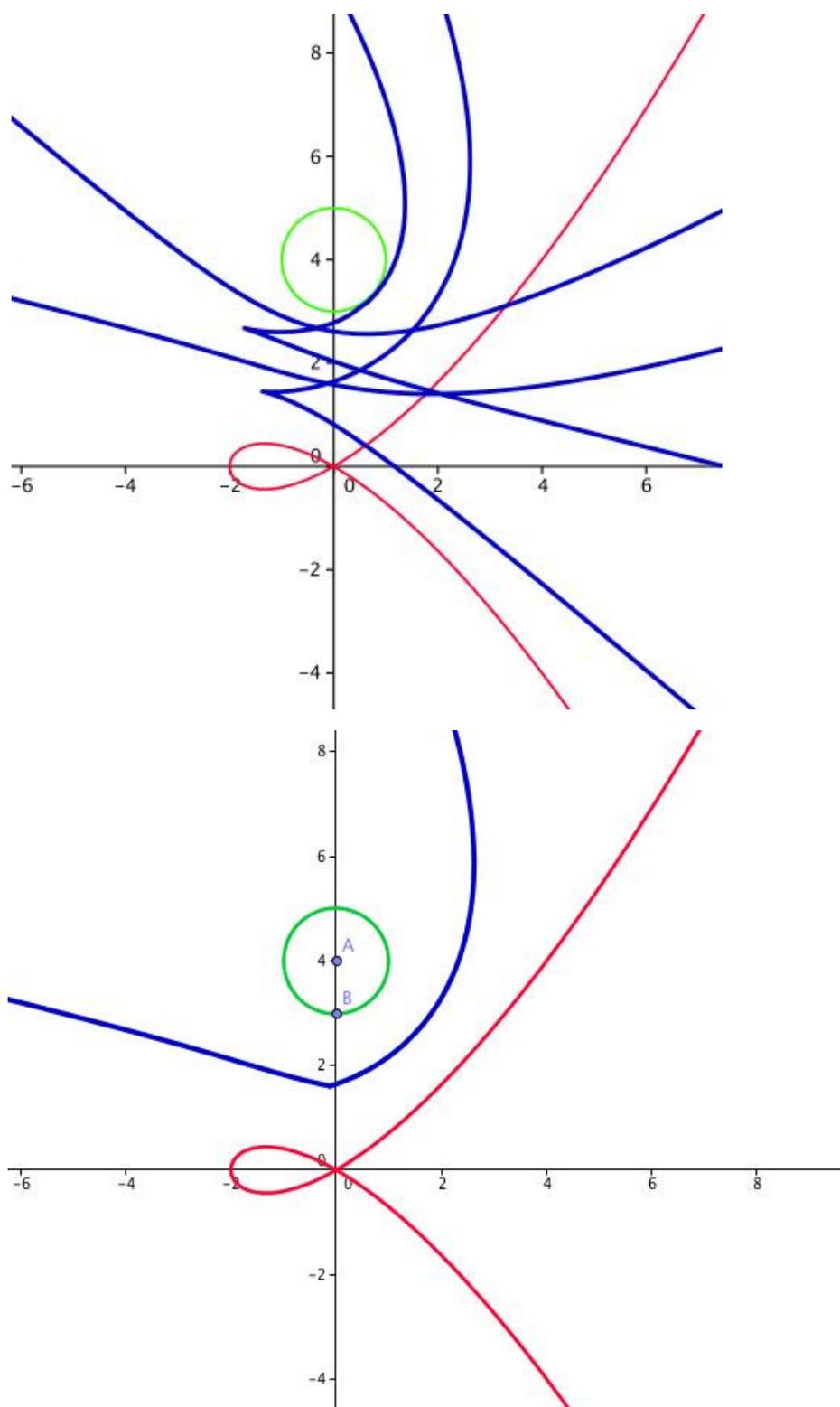


FIGURE 1 – En haut on a la médiatrice algébrique (bleue) et en bas la médiatrice géométrique (bleue) du cercle (vert) et de la PH-cubique (rouge)

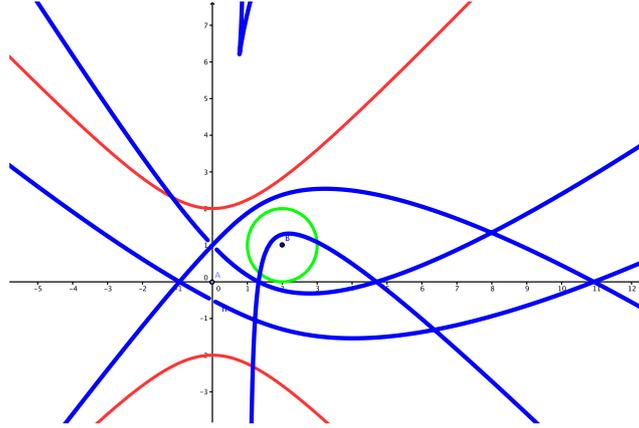


FIGURE 2 – La médiatrice algébrique (bleue) du cercle (vert) et de l'hyperbole (rouge)

avec

$$\begin{aligned}
 X_1(t) &= -4t(-t^{10} + 22t^9 + 17t^8 - 8t^7 + 18t^6 + 4t^5 + 14t^4 \\
 &\quad - 8t^3 + 15t^2 - 10t + 1) - 4t(2t^4 + 2)(1 - 4t \\
 &\quad + 4t^2 + 4t^3 + 3t^4)(\sqrt{6t^2 + 1 + t^4}), \\
 Y_1(t) &= 2(1 + t^2)(t^{10} + 2t^9 + 39t^8 + 72t^7 + 6t^6 - 20t^5 \\
 &\quad - 6t^4 - 56t^3 + 25t^2 + 2t - 1) + 2(1 + t^2)(4t^3 + 4t^2 \\
 &\quad - 4t)(1 - 4t + 4t^2 + 4t^3 + 3t^4)(\sqrt{6t^2 + 1 + t^4}), \\
 X_2(t) &= 4t(t^{10} - 22t^9 - 17t^8 + 8t^7 - 18t^6 - 4t^5 - 14t^4 \\
 &\quad + 8t^3 - 15t^2 + 10t - 1) + 4t(2t^4 + 2)(1 - 4t \\
 &\quad + 4t^2 + 4t^3 + 3t^4)(\sqrt{6t^2 + 1 + t^4}), \\
 Y_2(t) &= 2(1 + t^2)(-t^{10} - 2t^9 - 39t^8 - 72t^7 - 6t^6 + 20t^5 \\
 &\quad + 6t^4 + 56t^3 - 25t^2 - 2t + 1) + 2(1 + t^2) \\
 &\quad (4t^3 + 4t^2 - 4t)(1 - 4t + 4t^2 + 4t^3 + 3t^4) \\
 &\quad (\sqrt{6t^2 + 1 + t^4}), \\
 W(t) &= (t^2 - 1)(-t^{10} + 10t^9 - 11t^8 - 40t^7 + 6t^6 + 12t^5 \\
 &\quad + 10t^4 + 24t^3 - 5t^2 - 6t + 1) + (t^2 - 1)(t^4 - 2t^3 \\
 &\quad - 2t^2 + 2t + 1)(1 - 4t + 4t^2 + 4t^3 + 3t^4) \\
 &\quad (\sqrt{6t^2 + 1 + t^4}).
 \end{aligned}$$

Le graphique correspondant est représenté à la figure 2.

(c) Pour une droite et une ellipse de paramétrisations respectives

$$\mathbf{s}(u) = (2u + 1, 3u - 2)^T \text{ et } \mathbf{r}(t) = \left( \frac{2t}{1 + t^2}, \frac{2(1 - t^2)}{1 + t^2} \right)^T,$$

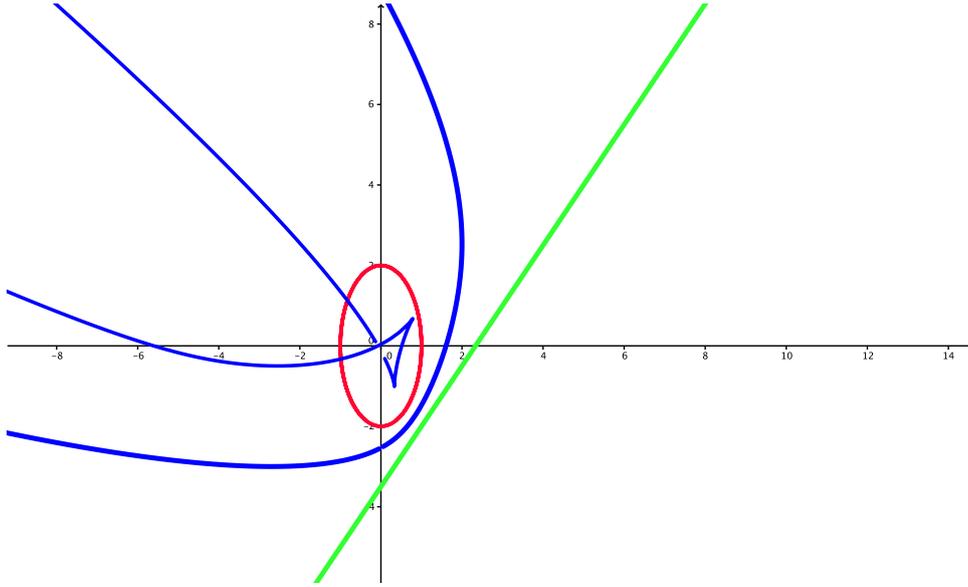


FIGURE 3 – La médiatrice algébrique (bleue) d’une droite(vert) et de l’ellipse(rouge)

les composantes de la paramétrisation pour la courbe médiatrice sont données par :

$$\mathbf{b}_1(t) = \begin{pmatrix} \frac{-2t(3t^4+96t^3-158t^2+240t-53+2\sqrt{13}(3t^2-6t+11)\sqrt{14t^2+1+t^4})}{(t-3)(3t+1)(1+t^2)(-3+3t^2-8t)}, \\ \frac{(-1+t^2)(-12t^4+120t^3-148t^2+48t+\sqrt{13}(3t^2-6t+11)\sqrt{14t^2+1+t^4}-40)}{(t-3)(3t+1)(1+t^2)(-3+3t^2-8t)} \end{pmatrix}^T$$

et

$$\mathbf{b}_2(t) = \begin{pmatrix} \frac{2t(-3t^4-96t^3+158t^2-240t+53+2\sqrt{13}(3t^2-6t+11)\sqrt{14t^2+1+t^4})}{(t-3)(3t+1)(1+t^2)(-3+3t^2-8t)}, \\ -\frac{(-1+t^2)(12t^4-120t^3+148t^2-48t+\sqrt{13}(3t^2-6t+11)\sqrt{14t^2+1+t^4}+40)}{(t-3)(3t+1)(1+t^2)(-3+3t^2-8t)} \end{pmatrix}^T$$

Le graphique correspondant est représenté à la figure 3.

2. **Une nouvelle approche automatique pour les caractérisations géométrique et numérique de la médiatrice géométrique de deux objets géométriques (point, courbe) planes donnés par leur paramétrisations, en utilisant le modèle de couleur dynamique au GeoGebra<sup>2</sup>, un logiciel de mathématique dynamique.**

Cette méthode qui est similaire à celle introduite par Botana et Abanades ([24]) est réalisée en collaboration avec Rafael Losada<sup>3</sup>.

2. <http://www.geogebra.org>

3. <http://www.iespvia.com/rafa/rafa.htm>

Il faut tout d'abord préciser que GeoGebra est un logiciel libre initialement conçu pour les enseignements mathématiques, qui associe, de façon dynamique, trois représentations différentes d'un objet mathématique : une représentation géométrique, une représentation algébrique, et une représentation par un tableur. Ce logiciel a connu une grande évolution dans les cinq dernières années et sa portée actuelle dépasse l'unique aspect pédagogique, car il est de plus en plus utilisé dans la recherche fondamentale notamment dans la résolution de problèmes d'algèbre et de géométrie et dans la validation de nouvelles constructions dans le plan.

Les modèles de couleur sont utilisés pour faciliter la spécification de la couleur de manière classique. Ainsi, un modèle de couleur spécifie un système de coordonnées en dimension 3 dans lequel chaque couleur est représentée par un seul point dont la valeur numérique de chacune des coordonnées est normalisée à l'intervalle  $[0, 1]$ . Pour un modèle de couleur **RGB**(Red, Green, Blue), c-à-d (rouge, vert, bleu), on a les correspondances suivantes : **rouge**(**1, 0, 0**), **vert**(**0, 1, 0**), **bleu**(**0, 0, 1**), **noir**(**0, 0, 0**), **blanc**(**1, 1, 1**), etc.

Étant donnés deux objets géométriques  $O_1$  et  $O_2$  (points, courbes paramétriques) du plan, de paramétrisations respectives  $\mathbf{O}_1(u)$ ,  $u \in I_1$  et  $\mathbf{O}_2(v)$ ,  $v \in I_2$ , où  $I_1$  et  $I_2$  sont des intervalles (pouvant, éventuellement, être réduits à un point), grâce à la mise en oeuvre du logiciel GeoGebra, le lieu géométrique des points (qui sont suffisamment proches) de leur courbe médiatrice géométrique sera scanné et affiché en une couleur spécifique.

Le processus de scannage consiste à considérer une liste de  $n$  points  $B_1, \dots, B_n$  situés dans une même verticale uniformément distants et assez proches, formant ainsi une ligne de scannage. A un simple Clic, les points sont automatiquement animés dans un procédé de déplacement horizontal de pixels balayant un domaine qui contient les deux objets géométriques. La fonction trace de chacun des  $n$  points est activée de telle sorte que l'écran apparaisse en des couleurs différentes acquises par chacun des points à chaque position du scanneur en fonction de la configuration de la carte de couleur.

Le scannage fonctionne grâce à la condition numérique que doit vérifier chaque point  $B$  de la médiatrice géométrique de deux objets  $O_1$  et  $O_2$  à savoir :

$$D(B) \equiv d(B, O_1) - d(B, O_2) = 0, \quad (1)$$

où  $d$  est la fonction distance définie par

$$d : (B, O) \mapsto \inf_{u \in I} \|B - \mathbf{O}(u)\|. \quad (2)$$

Ainsi tout au long du déplacement horizontal, à chaque position, la distance entre chaque point scanné et deux objets géométriques  $O_1$  et  $O_2$  est calculée, et la trace du point qui vérifie la condition numérique (1) (c-à-d un point appartenant à la médiatrice géométrique) s'affichera en une couleur qui dépend de la configuration de la carte de couleur établie. A la fin du scannage la courbe médiatrice s'affiche dans le domaine balayé dans une couleur choisie.

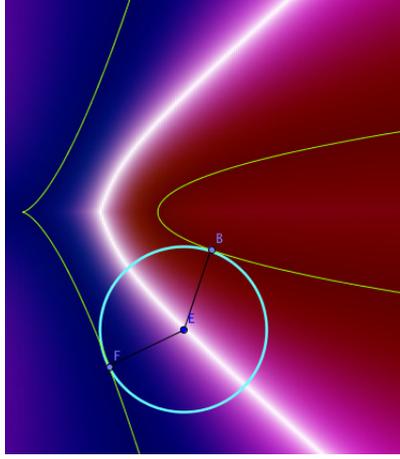


FIGURE 4 – La courbe médiatrice géométrique est caractérisée en couleur blanche

En prenant le modèle **RGB** et en normalisant la condition numérique (1) par

$$\exp(-|D(B)|) \in [0, 1],$$

la courbe médiatrice géométrique s'affichera en couleur blanche comme le montrent les exemples suivants. Le détail de cette méthode réalisée en collaboration avec Rafael Losada fera l'objet de la section 2.3 du chapitre 2.

Pour le cas :

- (a) de deux courbes de paramétrisations respectives

$$\mathbf{C}_1(t) = (t^3 + 5, t^2)^T \text{ et } \mathbf{C}_2(t) = (t^2 + 5, t)^T,$$

la caractérisation géométrique de leur courbe médiatrice en une couleur blanche est présentée à la figure 4.

- (b) d'une courbe paramétrique et d'un point donnés respectivement par

$$\mathbf{C}_1(u) = (u^3 + 5, u^2)^T \text{ et } P = (10, -1),$$

la caractérisation géométrique de leur courbe médiatrice en une couleur blanche est présentée à la figure 5.

Cette approche permet aussi de collecter numériquement les coordonnées de points scannés qui sont suffisamment proches de la courbe médiatrice géométrique. Plus précisément, pour un  $\varepsilon > 0$  assez petit que l'on veut, les coordonnées tous les points de la ligne scanneur vérifiant :

$$\left| d(B, O_1) - d(B, O_2) \right| < \varepsilon \quad (3)$$

seront collectées sous forme d'une liste donnant ainsi une caractérisation numérique.

Par exemple pour une parabole et une ellipse de paramétrisations respectives

$$\mathbf{C}_1(t) = \left( \frac{1}{4}t^2 - 5, t \right)^T \text{ et } \mathbf{C}_2(t) = \left( \frac{2(1-t^2)}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right)^T,$$

on a :

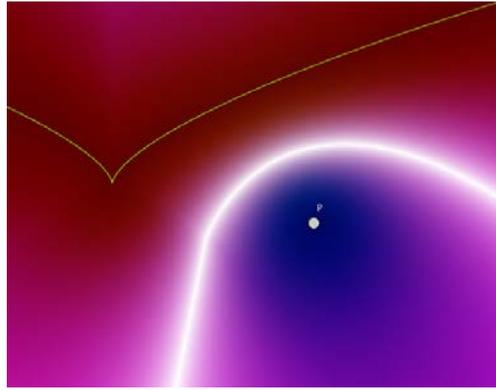


FIGURE 5 – La courbe médiatrice géométrique est caractérisée en couleur blanche

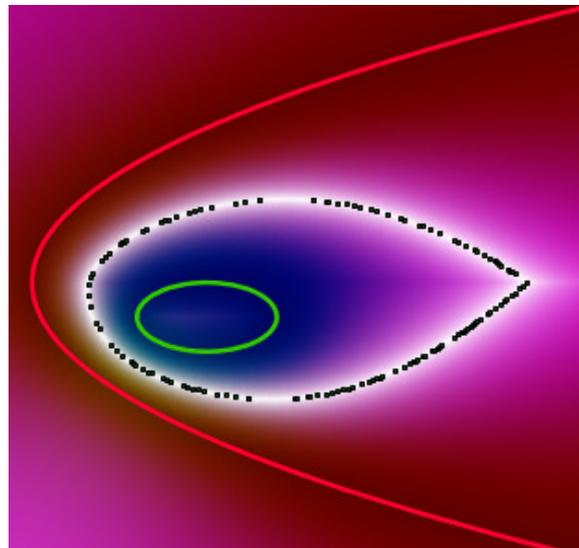


FIGURE 6 – La trace de points de la médiatrice géométrique collectés est en couleur noir pour  $\varepsilon = 0.005$ .

- (a) pour  $\varepsilon = 0.005$ , on obtient une liste de 134 de coordonnées de points détectés dont la trace est présentée à la figure 6.
- (b) pour  $\varepsilon = 0.0025$ , on obtient une liste de 71 coordonnées de points détectés dont la trace est présentée à la figure 7.
- (c) pour  $\varepsilon = 0.0005$  on obtient la liste (ci-dessous) de coordonnées de 38

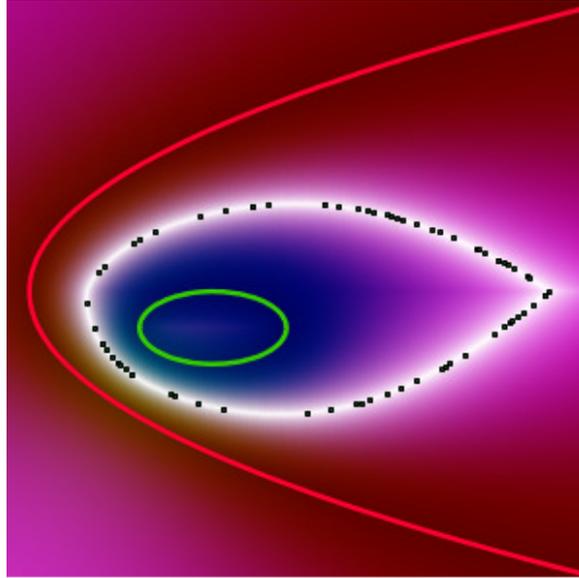


FIGURE 7 – La trace de points de la médiatrice géométrique collectés est en couleur noir pour  $\varepsilon = 0.0025$ .

points détectés dont la trace est présentée à la figure 8.

$$\begin{aligned}
 \text{Liste} = \{ & (-3.385, 0.96), (-3.142, 1.44), (-0.02, 3.12), \\
 & (4.885, 3.04), (7.044, -0.64), (8.326, 0.28), \\
 & (8.436, 1.48), (8.636, 1.36), (8.7, 1.32), \\
 & (8.823, 0.68), (8.765, 1.28), (8.528, 0.44), \\
 & (8.012, 0.04), (7.656, 1.92), (7.426, 2.04), \\
 & (6.115, -1.2), (5.99, 2.68), (4.049, -2.08), \\
 & (3.994, 3.24), (0.537, -2.28), (0.349, 3.2), \\
 & (-0.181, 3.08), (-0.333, 3.04), (-1.561, 2.6), \\
 & (-2.521, 2.04), (-2.363, -1.16), (0.536, -2.28), \\
 & (2.577, -2.36), (3.056, 3.36), (5.323, -1.6), \\
 & (5.495, -1.52), (5.991, 2.68), (8.093, 1.68), \\
 & (8.369, 1.52), (8.427, 0.36), (8.477, 0.4), \\
 & (9.062, 0.88), (9.156, 0.96)\}
 \end{aligned}$$

Les exemples précédents montrent que même si cette méthode fournit aucune représentation algébrique, elle permet de collecter les coordonnées d'un certain nombre de points suffisamment proches de la courbe médiatrice géométrique. Les coordonnées de points ainsi collectées peuvent être utilisées pour calculer une représentation approximative de la médiatrice, par B-splines par exemple. Nous venons plus en détails au chapitre 1.

### 3. Une nouvelle approche pour calculer une paramétrisation algébrique

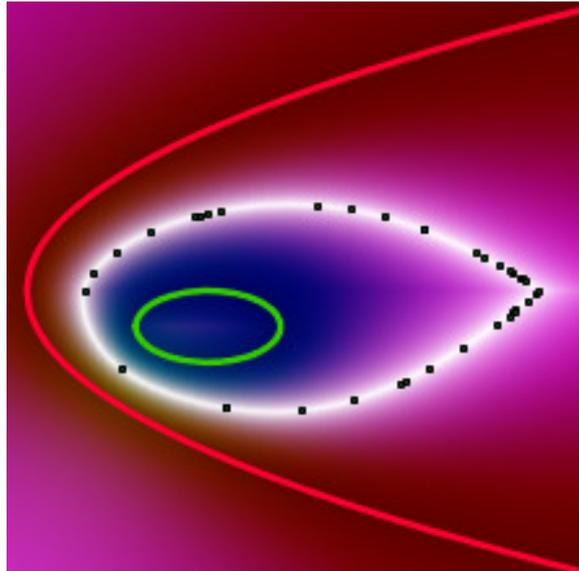


FIGURE 8 – La trace de points de la médiatrice géométrique collectés est en couleur noir pour  $\varepsilon = 0.0005$ .

### de la médiatrice (algébrique) de deux surfaces rationnelles de petit degré.

Cette approche est une généralisation de celle utilisée dans le cas de deux courbes planes introduite ci-haut (rubrique 1). Pour deux surfaces rationnelles  $S_1$  et  $S_2$  données par leur paramétrisations respectives  $\mathbf{S}_1(u, v)$  et  $\mathbf{S}_2(s, t)$  :

- (a) La matrice associée au système d'équations décrivant les points de l'intersection commune de normales de deux surfaces aux points  $\mathbf{S}_1(u, v)$  et  $\mathbf{S}_2(s, t)$ , est rectangulaire d'ordre  $4 \times 3$  (c-à-d : de quatre lignes et trois colonnes). Nous utilisons la règle de Cramer généralisée pour la résolution du système. Nous obtenons la solution (les coordonnées des points) du système en fonction de paramètres  $u, v, s$  et  $t$  sous la forme

$$\mathbf{B}_0(u, v, s, t) = [h_1(u, v, s, t), h_2(u, v, s, t), h_3(u, v, s, t)]^T \in \mathbb{R}^3.$$

- (b) Ensuite, nous éliminons deux de quatre paramètres  $u, v, s, t$  à partir du système précédent et de l'équation décrivant les points qui sont à égales distances à partir des points  $\mathbf{S}_1(u, v)$  et  $\mathbf{S}_2(s, t)$  en exprimant :
- tout d'abord un des paramètres à partir du système, disons

$$t = t(u, v, s),$$

- puis (par exemple)  $s$  en fonction  $u$  et  $v$  à partir de l'équation décrivant les points qui sont à égales distances. Ainsi selon le degré de l'équation en  $u$  on peut avoir  $m$  ( $m \geq 1$ ) expressions, disons

$$s_i = s_i(u, v), i = 1, \dots, m.$$

- (c) Enfin en substituant les expressions de  $t$  et  $s$  dans  $\mathbf{B}_0(u, v, s, t)$ , nous obtenons une paramétrisation algébrique de la surface médiatrice algébrique de la forme

$$\mathbf{B}_i(u, v) = \begin{bmatrix} x_i(u, v) \\ y_i(u, v) \\ z_i(u, v) \end{bmatrix}, i = 1, \dots, m$$

qui n'est, en général, pas rationnelle car elle dépend des normes des vecteur normaux de deux surfaces.

La paramétrisation de la médiatrice algébrique que nous obtenons, coïncide avec celle obtenue par d'autres méthodes dans certains cas rationnels. La méthode est particulièrement bien adaptée pour obtenir des approximations dans le cas non-rationnel. Elle permet de traiter facilement le cas de plan et quadrique, plan et tore, cylindre circulaire et quadrique, cylindre circulaire et tore, deux cylindres, deux cônes. Les détails de cette nouvelle approche fera l'objet du chapitre 3. Les exemples suivants donnent un aperçu sur les résultats de cette approche :

- (a) Soient un cylindre et un parabolôide elliptique de même axe de révolution, de paramétrisations respectives

$$\mathbf{S}_1(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{10u}{1+u^2} \\ \frac{-5(-1+u^2)}{1+u^2} \\ v \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{S}_2(s, t) = \begin{bmatrix} \frac{s(-1+t^2)}{(-1+s^2)(1+t^2)} \\ \frac{-2st}{(-1+s^2)(1+t^2)} \\ \frac{-s^2+s^4+1}{(-1+s)^2(s+1)^2} \end{bmatrix},$$

la paramétrisation de leur surface médiatrice algébrique est donnée par les quatre composantes suivantes :

$$\mathbf{B}_1(s, t) = \begin{bmatrix} \frac{(11s^2-9)s(-1+t^2)}{(-1+s^2)(s^2+t^2s^2-2st^2-2s+1+t^2)} \\ \frac{-2(11s^2-9)st}{(-1+s^2)(s^2+t^2s^2-2st^2-2s+1+t^2)} \\ -\frac{4s^4+11s^3+3s^2-9s-6}{(-1+s)^2(s+1)^2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_2(s, t) = \begin{bmatrix} \frac{-(9s^2-11)s(-1+t^2)}{(-1+s^2)(s^2+t^2s^2+2s+2st^2+1+t^2)} \\ \frac{2(9s^2-11)st}{(-1+s^2)(s^2+t^2s^2+2s+2st^2+1+t^2)} \\ \frac{6s^4-9s^3-3s^2+11s-4}{(-1+s)^2(s+1)^2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_3(s, t) = \begin{bmatrix} \frac{(11s^2-9)s(-1+t^2)}{(-1+s^2)(s^2+t^2s^2+2s+2st^2+1+t^2)} \\ \frac{-2(11s^2-9)st}{(-1+s^2)(s^2+t^2s^2+2s+2st^2+1+t^2)} \\ -\frac{4s^4-11s^3+3s^2+9s-6}{(-1+s)^2(s+1)^2} \end{bmatrix}$$

et

$$\mathbf{B}_4(s, t) = \begin{bmatrix} \frac{-(9s^2-11)s(-1+t^2)}{(-1+s^2)(s^2+t^2s^2-2st^2-2s+1+t^2)} \\ \frac{2(9s^2-11)st}{(-1+s^2)(s^2+t^2s^2-2st^2-2s+1+t^2)} \\ \frac{6s^4+9s^3-3s^2-11s-4}{(-1+s)^2(s+1)^2} \end{bmatrix}.$$

La figure 9 présente le graphique correspondant.

- (b) Soient un cylindre hyperbolique et d'un plan, disjoints, de paramétrisations respectives

$$\mathbf{S}_1(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{2u}{1-u^2} \\ \frac{1+u^2}{1-u^2} \\ v \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{S}_2(s, t) = \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ t \end{bmatrix},$$

la paramétrisation de leur surface médiatrice est donnée par les deux composantes suivantes :

$$\mathbf{B}_1(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{u^4-2u^2+1+(1+u^2)\sqrt{6u^2+1+u^4}}{2u(-1+u^2)} \\ \frac{-(u^4+6u^2+1+(1+u^2)\sqrt{6u^2+1+u^4})(1+u^2)}{4(-1+u^2)u^2} \\ v \end{bmatrix},$$



FIGURE 9 – La composante contenant la surface médiatrice géométrique (bleue) du cylindre circulaire (rose) et du parabolôide elliptique (vert).

$$\mathbf{B}_2(u, v) = \begin{bmatrix} -\frac{-u^4+2u^2-1+(1+u^2)\sqrt{6u^2+1+u^4}}{2u(-1+u^2)} \\ \frac{(-u^4-6u^2-1+(1+u^2)\sqrt{6u^2+1+u^4})(1+u^2)}{4(-1+u^2)u^2} \\ v \end{bmatrix}$$

La figure 10 présente le graphique correspondant.

## 0.2.2 Les contributions relatives au diagramme de Voronoï

En ce qui concerne le diagramme de Voronoï, nous développons, en collaboration avec Bernard Mourrain<sup>4</sup>, **un nouveau algorithme pour calculer une approximation du diagramme de Voronoï d'un ensemble de  $n$  demi-droites parallèles, de même orientation, restreint à un domaine compact de la forme**

$$\mathcal{D}_0 = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \subset \mathbb{R}^3,$$

**pour la distance euclidienne.**

Cette nouvelle approche fournit un résultat topologiquement correct pour le diagramme de Voronoï de  $n$  demi-droites parallèles restreint à  $\mathcal{D}_0$ , et ses différentes étapes se résument comme suit :

4. <http://www-sop.inria.fr/members/Bernard.Mourrain/>

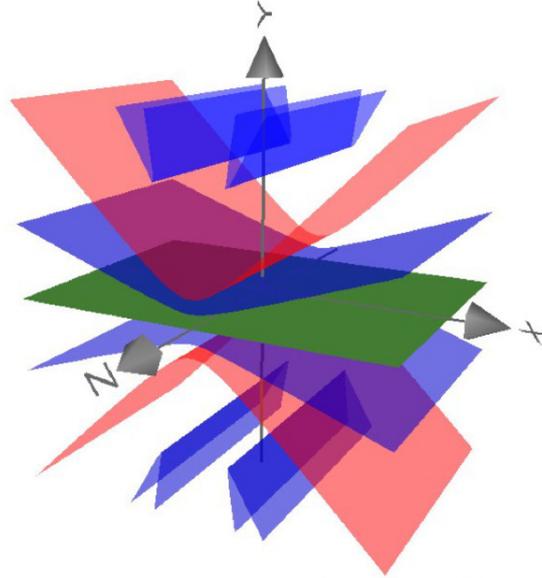


FIGURE 10 – La surface médiatrice algébrique (bleue) du plan (vert) et du cylindre hyperbolique (rouge).

- La subdivision du domaine initial  $\mathcal{D}_0$  suivant une structure arborescente *kd*-tree (voir [19]), tout en identifiant les sous-domaines, qui génèrent les cellules de Voronoï, organisés suivant un graphe d’adjacence.
- La reconstruction d’une approximation des cellules de Voronoï en parcourant le graphe d’adjacence (ainsi obtenu à l’issue de la subdivision) au moyen d’un algorithme de parcours **DFS** (Depth-First Search) (voir [8, 33, 77, 107, 118, 128]) tout en maillant les frontières de régions de Voronoï contenues dans chaque sous-domaine rencontré.

Pour ces types de sites, chaque cellule de Voronoï résulte d’un arrangement de demi-plans et de parties de demi-cylindre paraboliques (surfaces médiatrices de deux demi-droites parallèles comme indiquée à la figure 11) qui est localement approximée par de parties linéaires topologiquement équivalentes. La cellule ouverte est complétée par une partie du bord de  $\mathcal{D}_0$ . Ainsi chaque cellule de Voronoï est délimitée par un polyèdre isotope à l’arrangement correspondant à l’intérieur du domaine  $\mathcal{D}_0$ . Le détail de cette méthode fera l’objet du chapitre 4.

L’exemple suivant nous donne une idée de la méthode proposée .

Considérons de l’ensemble de trois demi-droites

$$\{d_1 = (-5 + t, 3, -2)^T, d_2 = (-3 + t, -4, 4)^T, d_3 = (3 + t, 4, 3)^T, t \geq 0\}$$

et le domaine

$$\mathcal{D}_0 = [-10, 10] \times [-6, 6] \times [-6, 6].$$

L’approximation de chacune des cellules de Voronoï de  $\{d_1, d_2, d_3\}$  restreint au domaine  $\mathcal{D}_0$  sont décrites comme suit :

- L’approximation de la cellule associée au site  $d_1$  présentée à la figure 12 est délimitée par le polyèdre, formé de parties isotopes aux surfaces médiatrices

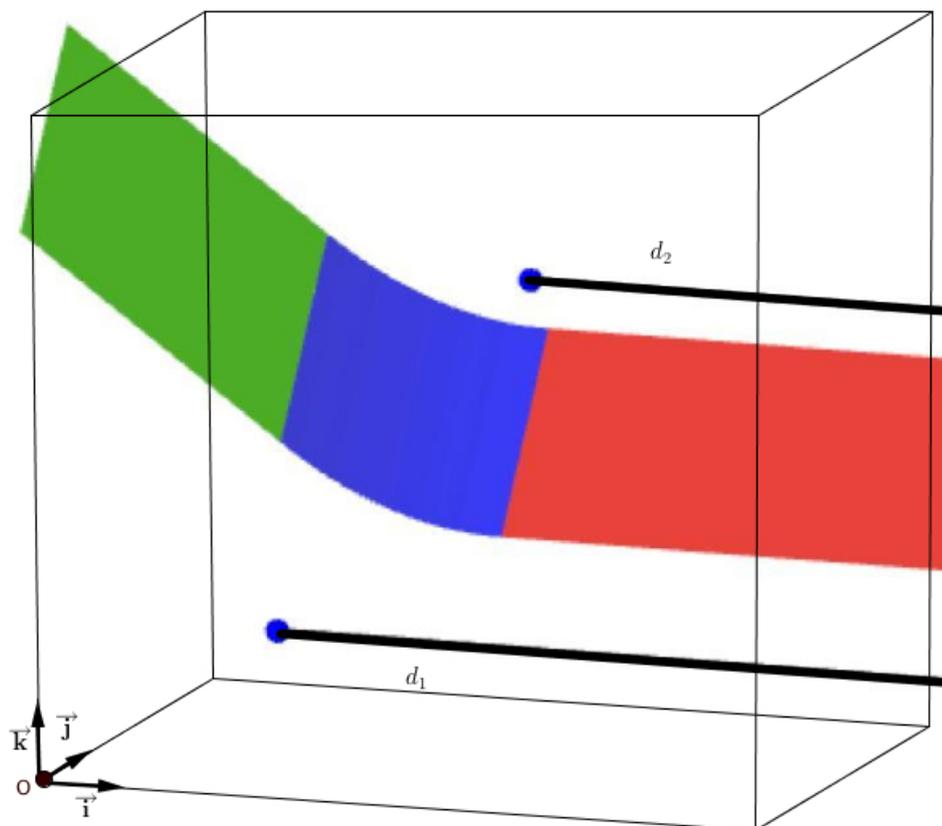


FIGURE 11 – La surface médiatrice de deux droites parallèles composée de deux demi-plans (vert et rouge) et une portion de demi-cylindre parabolique (bleu).

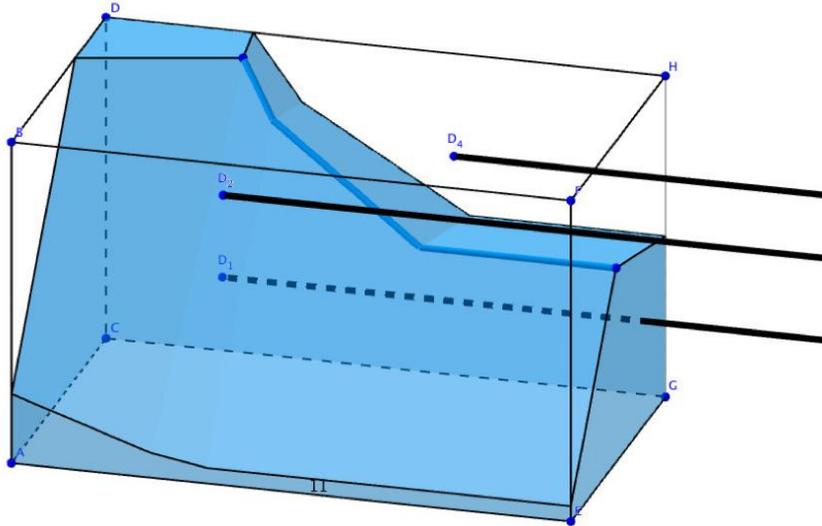


FIGURE 12 – L'approximation de la cellule associée au site  $d_1$ .

de sites  $d_1$  et  $d_2$  et de sites  $d_1$  et  $d_3$  dans le domaine  $\mathcal{D}_0$  et complété par des parties du bord  $\partial\mathcal{D}_0$ .

- L'approximation de la cellule associée au site  $d_2$  présentée à la figure 13, est délimitée par le polyèdre, formé de parties isotopes aux surfaces médiatrices de sites  $d_2$  et  $d_1$ , et de sites  $d_2$  et  $d_3$  dans le domaine  $\mathcal{D}_0$  et complété par des parties du bord  $\partial\mathcal{D}_0$ .
- L'approximation de la cellule associée au site  $d_3$  présentée à la figure 14, est délimitée par le polyèdre, formé de parties isotopes aux surfaces médiatrices de sites  $d_3$  et  $d_1$ , et de sites  $d_3$  et  $d_2$  dans le domaine  $\mathcal{D}_0$  et complété par des parties du bord  $\partial\mathcal{D}_0$ .

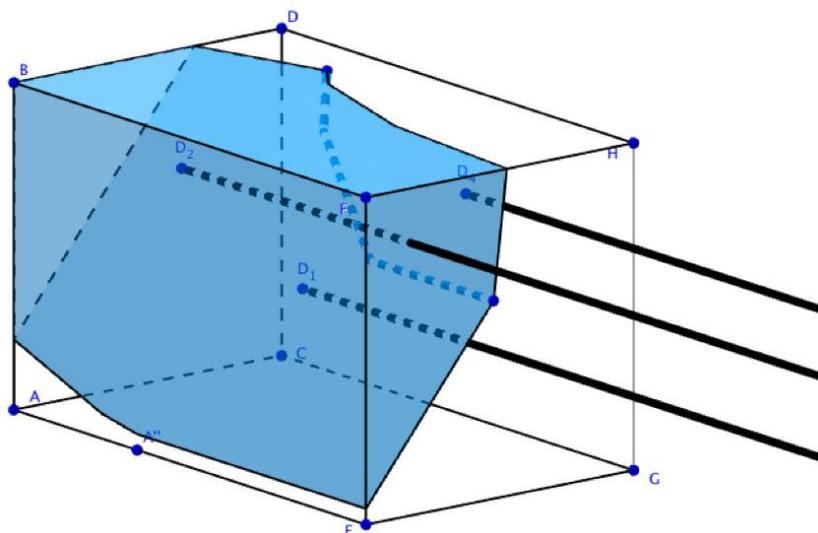
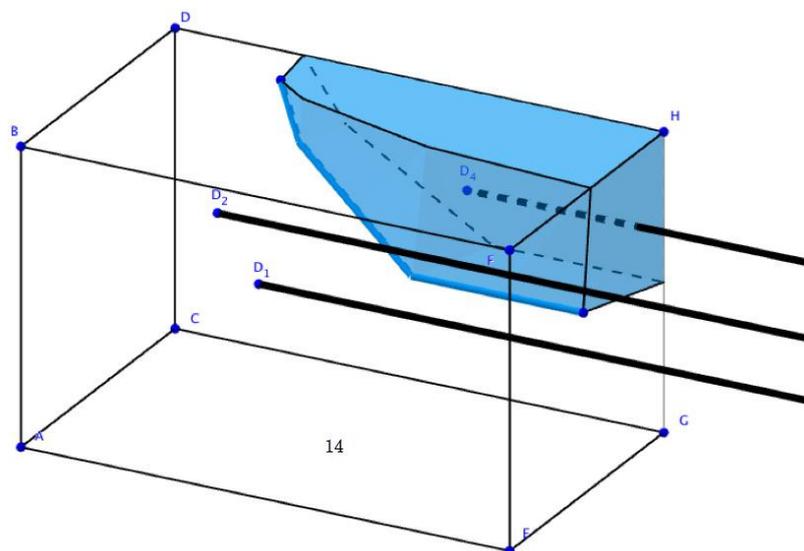
Enfin, les trois cellules approximatives de Voronoï sont simultanément présentées à la figure 15.

Ce chapitre introductif dont le détail de différentes notions introduites fera l'objet des chapitres 2, 3 et 4, a résulté à l'article [64] accepté pour publication dans *SAGA Official Book* qui sera publié par Springer.

### 0.3 Structure de la thèse

Ce mémoire est constitué de quatre chapitres organisés comme suit :

- Au chapitre 1, nous allons rappeler un certain nombre de notions préliminaires et notations que nous aurons à utiliser dans le reste des chapitres. Ainsi nous allons rappeler des notions et notations relatives aux vecteurs et matrices, des notions relatives aux polynômes, des notions relatives aux courbes et surfaces (représentations, opérations géométriques intervenant en CAO/CGAO,

FIGURE 13 – L'approximation de la cellule associée au site  $d_2$ .FIGURE 14 – L'approximation de la cellule associée au site  $d_3$ .

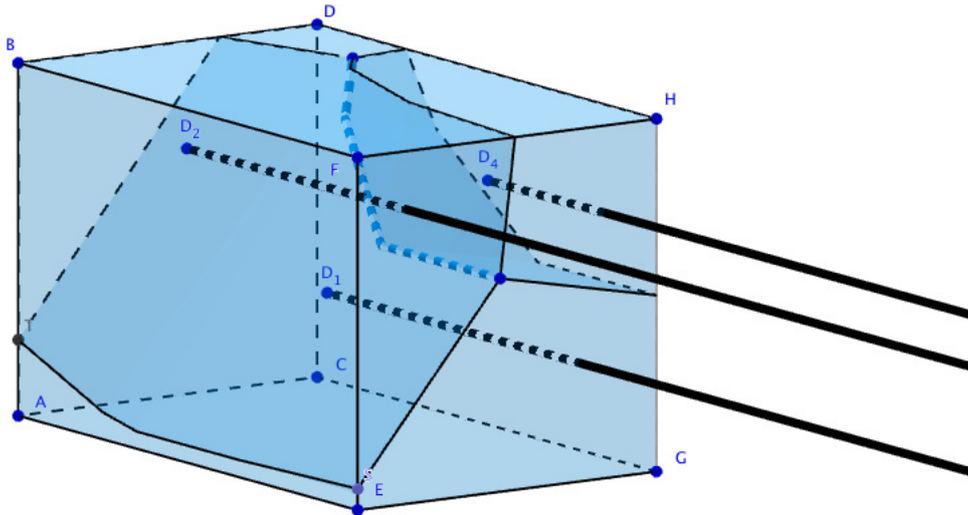


FIGURE 15 – Une approximation du diagramme de Voronoï de trois sites  $d_1, d_2$  et  $d_3$ .

géométrie différentielle, topologie, etc), et des notions du diagramme de Voronoï, d'enveloppe inférieure et du diagramme de minimisation. Nous allons aussi rappeler la règle de Cramer généralisée, et présenter le logiciel GeoGebra (brève présentation et fonctionnement du mécanisme de couleur dynamique). Enfin il sera présenté des notions sur la subdivision spatiale, structures de données et algorithme de parcours de graphe **DFS** (Depth First Search).

- Le chapitre 2 sera consacré à l'étude de la courbe médiatrice de deux objets géométriques (point, courbe) du plan. Nous allons tout d'abord rappeler la méthode algébrique de calcul de la représentation de la courbe médiatrice dans le cas point-courbe et courbe-courbe. Ensuite la nouvelle approche calculant une paramétrisation algébrique de la médiatrice algébrique d'un cercle ou une droite et une courbe rationnelle sera présentée. A la fin nous donnons des caractérisations géométrique et numérique de la courbe médiatrice géométrique à l'aide du logiciel GeoGebra.
- Dans le chapitre 3, nous allons présenter une approche, qui généralise celle appliquée au chapitre 2, pour calculer une paramétrisation algébrique de la surface médiatrice algébrique de deux surfaces rationnelles de petit degré. Après avoir introduit le sujet, la définition et les équations de la surface médiatrice, nous proposons le nouveau algorithme pour calculer une représentation algébrique de la médiatrice de deux surfaces rationnelles. Ensuite nous allons étudier successivement les cas du plan-quadrique, plan-tore, cylindre circulaire-quadrique non développables, cylindre circulaire-tore et deux quadriques développables (cône et cylindre).
- Le chapitre 4 est consacré au calcul de diagramme de Voronoï d'un ensemble de  $n$  demi-droites parallèles de même orientation restreint à un domaine compact de  $\mathbb{R}^3$ . Après une introduction du sujet et de la définition formelle du diagramme de Voronoï et de ses différentes composantes (faces, arêtes et sommets), nous présentons une étude topologique détaillée de ces composantes qui

va permettre d'aborder la partie algorithmique et fondamentale du chapitre. Dans cette partie algorithmique, il sera présenté l'algorithme de la subdivision du domaine initial pour identifier et organiser en graphe d'adjacence, les sous-domaines engendrant les cellules de Voronoï. Des algorithmes de maillage des frontières de cellules engendrées par les sous-domaines seront présentés et utilisés en même temps que l'algorithme **DFS** dans l'algorithme de reconstruction de cellules de Voronoï afin d'obtenir la répartition du domaine initial en des polyèdres isotopes aux cellules de Voronoï.

- Nous terminons ce mémoire avec une conclusion et des perspectives de travaux futurs.

Des codes Maple en seront présentés en annexe enfin du mémoire.



# Chapitre 1

## Notions préliminaires

Dans ce chapitre, nous allons présenter certaines des notations et notions de base qui seront utilisées dans les différents chapitres de cette thèse.

### Introduction

Ce chapitre est consacré aux rappels des notions préliminaires qui serviront tout au long de ce mémoire, non seulement pour guider le lecteur, mais aussi pour faciliter la présentation et l'explication de nouvelles approches qui seront développées dans les différents chapitres. Ainsi, nous allons successivement présenter les notations usuelles relatives aux vecteurs et matrices à la section 1.1, les notions et notations relatives aux polynômes à la section 1.2, les notions relatives aux courbe et surfaces à la section 1.3, les notions relatives aux enveloppe inférieure et diagramme de minimisation à la section 1.4, la règle Cramer généralisée à la section 1.5, la présentation du logiciel GeoGebra à la section 1.6 et les notions relatives aux subdivisions spatiale, structures de données et algorithme de parcours de graphe à la section 1.7.

### 1.1 Notations relatives aux vecteurs et matrices

Cette section fera l'objet des notations algébriques usuelles, notamment sur les vecteurs et les matrices.

Dans tout ce qui suit :

1. Nous supposons que l'espace  $\mathbb{R}^n$  est muni de sa structure affine euclidienne et du repère canonique orthonormé direct.
2. Nous désignons par des lettres en gras, un vecteur, une fonction à valeur vectorielle et une matrice :
  - Un vecteur de  $\mathbb{R}^n$  s'écrit

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix},$$

où  $u_1, \dots, u_n$  sont les composantes du vecteur  $\mathbf{u}$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

- Une fonction vectorielle  $\mathbf{f}$  d'une variable réelle  $t$  s'écrit

$$\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix},$$

où  $f_1, \dots, f_n$  sont les fonctions composantes  $\mathbf{f}$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

- Une fonction vectorielle  $\mathbf{F}$  de  $p$  variables réelles  $t_1, \dots, t_p$  s'écrit

$$\mathbf{F}(t_1, \dots, t_p) = \begin{pmatrix} f_1(t_1, \dots, t_p) \\ \vdots \\ f_n(t_1, \dots, t_p) \end{pmatrix},$$

où  $f_1, \dots, f_n$  sont les fonctions composantes de  $\mathbf{F}$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

- Une matrice réelle de  $m$  lignes et  $n$  colonnes s'écrit

$$\mathbf{A} = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

3. Pour tous vecteurs  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  on note par :

- $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ , le produit scalaire de  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$ .
- $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$ , la norme du vecteur  $\mathbf{u}$ .
- $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ , le produit vectoriel de  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$ .

4. Pour deux points  $A$  et  $B$  de  $\mathbb{R}^n$ , on désigne par

- $\|A - B\|$ , la distance euclidienne entre les deux points :

$$\|A - B\| = d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|.$$

- $(A, B)$ , la droite passant les deux points.
- $[A, B]$ , (resp.  $]A, B[$ ), le segment de droite fermé (resp. ouvert) delimité par les deux points.

5. Pour tout vecteur  $\mathbf{u}$  de  $\mathbb{R}^n$  et toute matrice  $\mathbf{A} = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  on note par :

- $\mathbf{A}\mathbf{u}$ , le produit de la matrice  $\mathbf{A}$  par le vecteur  $\mathbf{u}$ .
- $\mathbf{u}^T$ , le vecteur transposé de  $\mathbf{u}$ .
- $\mathbf{0}$ , le vecteur nul de  $\mathbb{R}^n$ .
- $\mathbf{A}^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , la matrice transposée de  $\mathbf{A}$ .
- $\det(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}|$ , le déterminant de la matrice  $\mathbf{A}$ .
- $\mathbf{I}_m$ , la matrice identité d'ordre  $m$ .
- $\mathbf{A}^{-1}$ , la matrice inverse de  $\mathbf{A}$  dans le cas où  $m = n$  et  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ .
- $\text{rang}(\mathbf{A})$ , le rang de la matrice  $\mathbf{A}$ .

6. Soient  $\mathbb{K}$  un corps et  $\delta \notin \mathbb{K}$ , un nombre algébrique de degré 2, on note par le corps

$$\mathbb{K}[\delta] = \{a\delta + b, a, b \in \mathbb{K}\},$$

une extension du corps  $\mathbb{K}$ .

## 1.2 Notions relatives aux polynômes

Dans cette section, nous allons présenter les notions et notations de base relatives aux polynômes et les outils d'éliminations qui seront utilisés dans les chapitres 2 et 3, notamment dans le calcul de l'équation implicite de courbes et surfaces médiatrices.

### 1. Degré du polynôme

- (a) Pour un polynôme univarié  $P$  (de variable  $x$ ), on note par  $\deg(P)$  : le degré du polynôme  $P$ .
- (b) Pour un polynôme multivarié  $P$  (de variable  $x_1, \dots, x_n$ ),

$$P = \sum_{i_1, \dots, i_n} a_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n},$$

on note par :

- $\deg_{x_i}(P)$  : le degré partiel du polynôme  $P$  (i.e : en la variable  $x_i$ ).
- $\deg(P)$  : le degré total du polynôme  $P$

### 2. Résultant et Discriminant

- (a) Soient  $P$  et  $Q$  des polynômes de degrés respectives  $p$  et  $q$  :

$$P(X) = \sum_{i=0}^p a_i X^i, \quad Q(X) = \sum_{i=0}^q b_i X^i.$$

- i. On appelle résultant de polynômes  $P$  et  $Q$  noté

$$\text{resultant}(P, Q),$$

le déterminant de la matrice de Sylvester de  $P$  et  $Q$  :

$$\text{resultant}(P, Q) = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 & 0 & \cdots & \\ a_1 & a_0 & \cdots & 0 & b_1 & \cdots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_0 & b_q & \ddots & \vdots & \\ a_p & \vdots & & \vdots & 0 & \ddots & & \\ 0 & a_p & \vdots & & & & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & a_p & 0 & \cdots & & b_q \end{vmatrix}.$$

- ii. On appelle discriminant du polynôme  $P$ , noté

$$\text{discrim}(P),$$

la quantité définie par

$$\text{discrim}(P) = \frac{(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}}}{a_p} \text{resultant}(P, P'),$$

où  $P'$  est le polynôme dérivé de  $P$ .

- (b) Le résultant et le discriminant peuvent se définir pour le cas de polynômes multivariés de la façon suivante :

Soient  $P$  et  $Q$  deux polynômes multivariés de variables  $x_1, \dots, x_n$  de degré partiel respectifs en  $x_i$ ,  $p_i = \deg_{x_i}(P)$ ,  $q_i = \deg_{x_i}(Q)$ .

- i. On appelle résultant de polynômes  $P$  et  $Q$  par rapport à la variable  $x_i$  noté

$$\text{resultant}_{x_i}(P, Q),$$

le résultant de  $P$  et  $Q$  vus comme étant des polynômes en  $x_i$ .

- ii. On appelle discriminant du polynôme  $P$  par rapport à la variable  $x_i$ , noté

$$\text{discrim}(P, x_i)$$

la quantité définie par

$$\text{discrim}(P, x_i) = \frac{(-1)^{\frac{p_i(p_i-1)}{2}}}{a_{p_i}} \text{resultant}_{x_i}(P, P').$$

Le résultant et le discriminant sont outils qui jouent des rôles très importants dans la recherche et l'existence de racines de polynômes, dans le problème d'intersection, dans la théorie d'élimination, etc.

Par exemple

- pour  $P(X) = aX^2 + bX + c$ , on a l'expression classique

$$\text{discrim}(P) = b^2 - 4ac$$

dont le signe permet de décider, non seulement de l'existence, mais aussi, de la nature réelle ou complexe des racines du polynôme  $P$ ,

- pour  $P(X) = X^3 + aX + b$  on a

$$\text{discrim}(P) = -4a^3 - 27b^2.$$

Si  $\text{discrim}(P) > 0$ , le polynôme  $P$  admet trois racines réelles distinctes, si  $\text{discrim}(P) = 0$ , une racine est multiple, et toutes sont réelles, et si  $\text{discrim}(P) < 0$ , le polynôme  $P$ , n'admet qu'une racine réelle et les deux autres complexes,

- si  $\text{resultant}(P, Q) = 0$ , ceci est équivalent à dire que les deux polynômes possèdent au moins de racines en commun.  
– pour une courbe paramétrée définie par :

$$c(t) = \begin{cases} X = \frac{x(t)}{w(t)} \\ Y = \frac{y(t)}{w(t)} \end{cases},$$

où  $x, y$  et  $w$  sont des polynômes univariés.

En posant

$$P(X, t) = w(t)X - x(t) \text{ et } Q(Y, t) = w(t)Y - y(t),$$

on a

$$P(X, t) = 0, \quad Q(Y, t) = 0$$

pour les valeurs de  $X, Y$ , et  $t$  vérifiant

$$X = \frac{x(t)}{w(t)} \text{ et } Y = \frac{y(t)}{w(t)}.$$

Alors, l'équation implicite de la courbe est déterminée par

$$f(X, Y) = \text{resultant}_t(P, Q) = 0.$$

### 1.3 Notions relatives aux courbes et surfaces

Nous consacrons cette section au rappel d'un certain nombre de notations et notions de base sur les courbes (planes et spatiales) et les surfaces qui serviront tout au long de ce mémoire. Nous allons tout d'abord nous intéresser aux représentations algébriques et à certaines des propriétés différentielles, analytiques et géométriques de courbes et de surfaces. Ensuite, nous allons présenter certaines opérations géométriques et des notions topologiques des courbes et les surfaces qui seront utilisées dans les restes des chapitres.

1. Pour décrire une courbe ou une surface, plusieurs moyens sont disponibles : une représentation implicite, une représentation paramétrique, intersection de deux surfaces (pour le cas d'une courbe), équations différentielles, etc. Cependant, la description la mieux adaptée pour la CAO/CGAO est la représentation paramétrique. La représentation implicite est aussi utilisée dans certaines opérations spécifiques.
  - (a) Si la représentation implicite est définie par des polynômes, on dira que la courbe ou la surface est algébrique. Dans ce cas précis :
    - la représentation implicite d'une courbe algébrique de l'espace  $\mathbb{R}^2$  ou d'une surface algébrique de l'espace  $\mathbb{R}^3$  est déterminée par une équation polynomiale.
    - une courbe algébrique de l'espace  $\mathbb{R}^3$  peut être déterminée par l'intersection de deux surfaces, et donc, sa représentation implicite est donnée par le système formé de représentations implicites de deux surfaces.
  - (b) Si la représentation paramétrique est définie par une fonction rationnelle, on dira que la courbe ou la surface est rationnelle.
2. Il faut noter que chacune de ces représentations possède ses propres avantages selon le contexte :
  - La représentation implicite est mieux adaptée dans certaines opérations, par exemple, pour tester l'appartenance d'un point à une courbe ou à une surface. Cependant son calcul s'avère souvent compliqué.
  - La représentation paramétrique permet de générer assez facilement et rapidement l'intégralité d'une courbe ou d'une surface mais moins appropriée pour déterminer la position relative d'un point par rapport à une courbe ou à une surface, la position relative entre deux courbes, une courbe et une surface ou deux surfaces.

Le processus d'"élagage" de la courbe médiatrice algébrique à partir de la représentation paramétrique, qui sera présenté au chapitre 2, montre certains des avantages d'une représentation paramétrique par rapport à la représentation implicite.

3. Il est souvent possible, dans certaines conditions, de passer d'une représentation à une autre, mais en général le processus nécessite l'utilisation des algorithmes "couteux" :
  - le processus du passage d'une représentation implicite à une représentation paramétrique est connu sous le nom de *Paramétrage* ou *Paramétrisation*,
  - le processus du passage d'une représentation paramétrique à une représentation implicite est connu sous le nom de *Implication*.

Ces deux processus constituent l'un des domaines de recherche les plus actifs dans la théorie de courbes et de surfaces et de ses applications. La littérature est très vaste, des algorithmes robustes et efficaces ont été proposés tant pour le paramétrage que pour l'implication avec diverses méthodes, citons quelques références récentes (voir [29, 30, 31, 68, 110, 111, 112, 117]).

4. Dans certaines opérations géométriques (telles que intersection, offset, etc) sur les courbes et les surfaces algébriques, il est possible d'obtenir directement l'une des représentations. Mais en générale certaines propriétés algébriques (telle que la rationalité pour la représentation paramétrique) de représentations initiales ne sont pas conservées.

Nous allons, à présent, aborder ces deux types de représentations en détails cas par cas, pour les courbes planes et spatiales, et pour les surfaces.

### 1.3.1 Les courbes

Dans cette sous-section nous allons présenter des notions de bases relatives aux courbes paramétriques planes et spatiales et courbe algébriques planes (voir [2, 37, 51]).

#### Représentations paramétrique d'une courbe

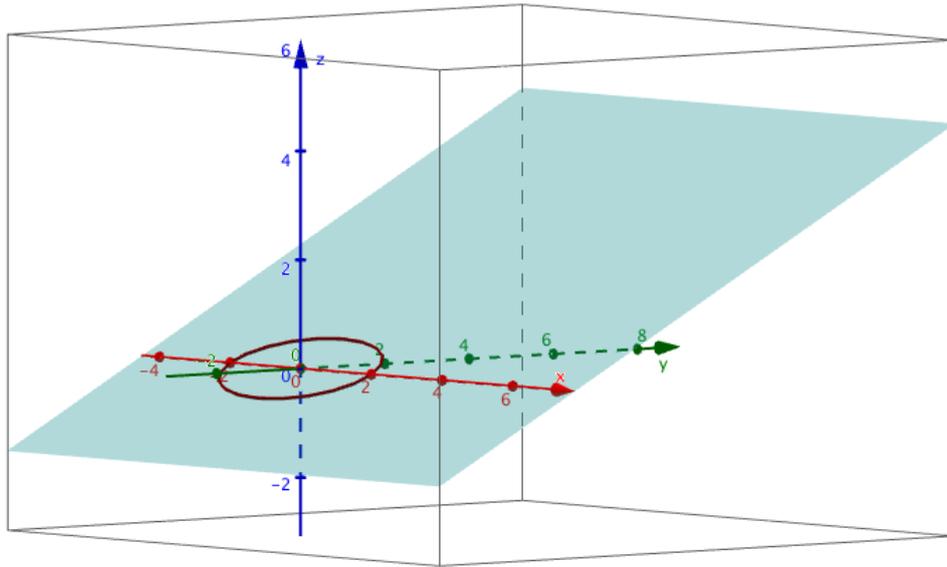
**Définition 1.** On appelle courbe paramétrée de classe  $C^k$  de  $\mathbb{R}^n$  une application de classe  $C^k$

$$\mathbf{f} : t \in I \longmapsto \mathbf{f}(t) \in \mathbb{R}^n,$$

1. L'ensemble  $\mathcal{C} = \{\mathbf{f}(t), t \in I\}$  est appelé image ou support géométrique de  $\mathbf{f}$ . On dit que  $\mathcal{C}$  est une courbe géométrique et que  $\mathbf{f}$  est une représentation paramétrique ou une paramétrisation de  $\mathcal{C}$ .
2. Si l'application  $\mathbf{f}$  est injective (sauf éventuellement pour un nombre fini de points), on dira que la paramétrisation est propre.
3. Si la paramétrisation  $\mathbf{f}$  est rationnelle (c-à-d ses fonctions composantes sont des rationnelles), on dira que la courbe est rationnelle.

**Définition 2.** Soit une courbe paramétrée

$$\mathbf{f} : t \in I \longmapsto \mathbf{f}(t) \in \mathbb{R}^n.$$

FIGURE 1.1 – Une ellipse plane contenue dans le plan :  $y - 2z = 0$ .

1. Si  $n = 2$ , la courbe paramétrée est dite plane.
2. Si  $n = 3$ , la courbe paramétrée est dite spatiale.
  - Si sa courbe géométrique (support géométrique) est contenu dans un plan lui-même contenu dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ , elle est aussi dite plane.
  - Si la courbe géométrique n'est pas contenue dans un plan, on dira qu'elle est une courbe gauche.

**Exemple 1.**

1. la courbe paramétrée  $\mathbf{f}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par

$$\mathbf{f}(t) = \left( \frac{2(1-t^2)}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}, \frac{t}{1+t^2} \right)^T$$

est plane, car sa courbe géométrique est contenue dans le plan :  $y - 2z = 0$ , voir la figure 1.1.

2. la courbe paramétrée  $\mathbf{f}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par

$$\mathbf{f}(t) = \left( \frac{2(1-t^2)}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}, t \right)^T$$

est gauche (figure 1.2).

**Remarque 1.** Partant de la définition 1, on peut dire que courbe paramétrée donne non seulement les renseignements sur le support géométrique, mais aussi sur l'allure de son parcours.

**Exemple 2.** Considérons la courbe paramétrée  $\mathbf{g} : ]-\pi, \pi[ \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par

$$\mathbf{g}(t) = (a \cos(t), b \sin(t))^T.$$

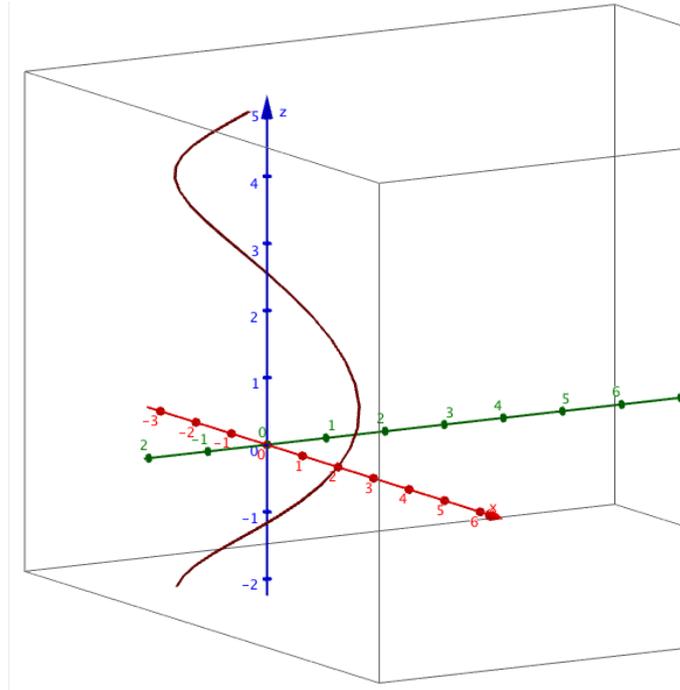


FIGURE 1.2 – Une courbe spirale gauche

Sa courbe géométrique est une ellipse.

La courbe géométrique de  $\mathbf{h} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par

$$\mathbf{h}(t) = (at, b\sqrt{1-t^2})^T,$$

est contenu dans celle de  $\mathbf{g}$  (voir figure 1.3)

Ainsi comme le montre l'exemple 2, qu'une courbe géométrique peut donc avoir plusieurs représentations paramétriques, cela nous conduit à la notion de reparamétrisation.

### Reparamétrisation

Nous aurons, tout d'abord, besoins d'introduire la notion de difféomorphisme

**Définition 3.** Soient  $U_1$  et  $U_2$  deux domaines ouverts de  $\mathbb{R}^n$ .

Une application  $\varphi : U_1 \rightarrow U_2$  est un  $C^1$  difféomorphisme si :

- $\varphi$  est une bijection de  $U_1$  dans  $U_2$ .
- $\varphi$  et  $\varphi^{-1}$  sont toutes les deux de classe  $C^1$ .

Avant de parvenir à la définition de la reparamétrisation, le lemme suivant est aussi nécessaire.

**Lemme 1.** Soient  $I_1, I_2$  des intervalles ouverts de  $\mathbb{R}$ , une courbe paramétrée

$$\mathbf{f} : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

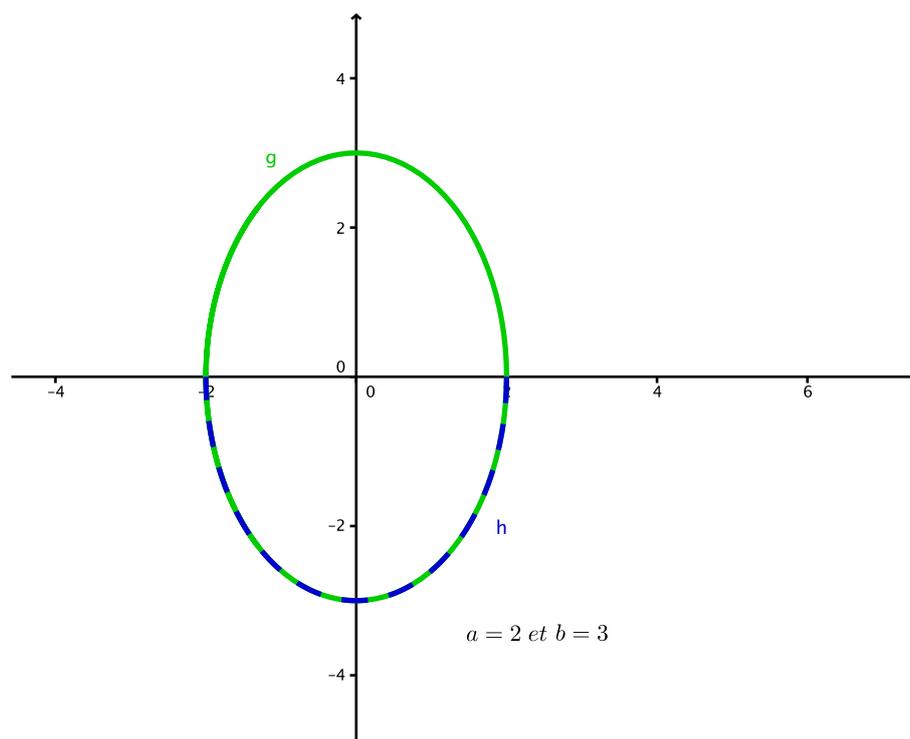


FIGURE 1.3 – Le support géométrique de la courbe  $g$  en vert et celui  $h$  en en pointillés bleue

de classe  $C^1$  et un  $C^1$  difféomorphisme

$$\varphi : I_2 \longrightarrow I_1,$$

alors la courbe paramétrée

$$\mathbf{f} \circ \varphi : I_2 \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

possède la même courbe géométrique que  $\mathbf{f}$ .

**Définition 4.** L'application

$$\mathbf{f} \circ \varphi : I_2 \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

est appelée une reparamétrisation de  $\mathbf{f}$ .

### Courbe régulière, Repère de Serret-Frenet

Dans cette partie, nous allons rappeler des notions de l'allure locale d'une courbe paramétrée. Commençons par la notion de régularité d'une courbe paramétrée.

**Définition 5.** Une courbe paramétrée

$$\mathbf{f} : t \in I \longmapsto \mathbf{f}(t) \in \mathbb{R}^n,$$

est dite régulière ou lisse si :

1.  $\mathbf{f}(t)$  est de classe  $C^1$  dans  $I$  et

2.  $\mathbf{f}'(t) \neq 0$  pour tout  $t$  dans  $I$ .

**Remarque 2.** Si

$$\mathbf{f} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

est régulière, alors toute reparamétrisation

$$\mathbf{f} \circ \varphi : I_2 \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

de  $\mathbf{f}$  est aussi régulière.

Cette remarque montre qu'en reparamétrisant une courbe paramétrique, sa régularité est conservée.

**Exemple 3.**

La courbe paramétrée définie par :

$$\mathbf{f}(t) : ] - \pi, \pi ] \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

avec  $\mathbf{f}(t) = (\cos(t), \sin(t))^T$ , est régulière car :  $\|\mathbf{f}'(t)\| = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} = 1 \neq 0$ .

Pour le repère de Serret-Frenet, nous distinguons le cas de courbe plane et le cas de courbe spatiale.

**Définition 6.** Soit

$$\mathbf{f} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

une courbe paramétrée régulière plane de classe  $C^1$ .

1. Si  $n = 2$ , le repère de Serret-Frenet de  $\mathbf{f}$  au point  $\mathbf{f}(t)$  est le repère orthonormé :

$$(\mathbf{f}(t), \tau(t), \eta(t)),$$

où

$\tau(t) = \frac{\mathbf{f}'(t)}{\|\mathbf{f}'(t)\|}$ , est appelé vecteur tangent unitaire et

$\eta(t)$  est le vecteur normal unitaire tels que  $(\tau(t), \eta(t))$  soit une base orthonormée directe du plan.

2. Si  $n = 3$ , le repère de Serret-Frenet de  $\mathbf{f}$  au point  $\mathbf{f}(t)$  est le repère orthonormé :

$$(\mathbf{f}(t), \tau(t), \eta(t), \tau(t) \times \eta(t)).$$

**Exemple 4.**

Soit  $\mathbf{f}(t) : ]a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$  la courbe paramétrée régulière définie par

$$\mathbf{f}(t) = (x(t), y(t))^T.$$

Le vecteurs tangent et normal en un point  $P_0 = (x(t_0), y(t_0))$  sont, respectivement, donnés par :

$$\tau_0 = \frac{1}{\sqrt{x'^2(t_0) + y'^2(t_0)}} (x'(t_0), y'(t_0)), \quad \eta_0 = \frac{1}{\sqrt{x'^2(t_0) + y'^2(t_0)}} (-y'(t_0), x'(t_0))$$

### Point multiple et point singulier d'une courbe paramétrique

**Définition 7.** Soit une courbe paramétrée

$$\mathbf{f} : t \in I \longmapsto \mathbf{f}(t) \in \mathbb{R}^n,$$

de courbe géométrique  $\mathcal{C}$

1. On dit qu'un point  $\mathbf{f}(t_0)$  de  $\mathcal{C}$  est multiple (double, triple, ...), s'il existe  $t_1 \in I, t_0 \neq t_1$  ( $t_2, t_3, \dots$ ) deux à deux distincts tels que  $\mathbf{f}(t_0) = \mathbf{f}(t_1)$  ( $\mathbf{f}(t_0) = \mathbf{f}(t_2) = \mathbf{f}(t_3), \dots$ ). Le point  $\mathbf{f}(t_0)$  est aussi appelé point d'auto-intersection.
2. Un point  $\mathbf{f}(t_0)$  de  $\mathcal{C}$  est appelé un point singulier si la dérivée de  $\mathbf{f}$  s'annule en ce point i.e. :  $\mathbf{f}'(t_0) = \mathbf{0}$ .

**Exemple 5.**

1. Soit  $\mathbf{f}(t) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$  la courbe paramétrée définie par

$$\mathbf{f}(t) = (t(t-3), 5t^4(t^2-9))^T$$

possède le point  $O(0,0)$  comme un point double, car :  $\mathbf{f}(0) = \mathbf{f}(3) = (0,0)$

2. Soit  $\mathbf{f}(t) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$  la courbe paramétrée définie par

$$\mathbf{f}(t) = (t^3, t^2)^T$$

possède le point  $O(0,0)$  comme point singulier, car :  $\mathbf{f}'(0) = (0,0)$ .

### Offset d'une courbe rationnelle

Dans cette partie nous rappelons la définition d'une offset d'une courbe rationnelle.

**Définition 8.** Soit  $C(t)$  une paramétrisation rationnelle d'une courbe  $\mathcal{C}$ , on appelle offset à une distance (algébrique)  $d$  à la courbe  $\mathcal{C}$ , la courbe  $\mathcal{C}_o$  représentée par la paramétrisation

$$C_o(t) = C(t) + d \mathbf{n}(t),$$

où

$$\mathbf{n}(t) = \frac{\mathbf{N}(t)}{\|\mathbf{N}(t)\|} \text{ est le vecteur normal unitaire de la courbe } \mathcal{C}.$$

Il y a lieu de préciser que la courbe offset n'est en général pas rationnelle, car la norme du vecteur vitesse ne l'est pas toujours. Des critères permettant d'identifier les courbes rationnelles qui possèdent de offset rationnelle ont été établies (voir [15, 52, 105]). Dans la partie qui suit, il sera présenté les types des courbes possédant de offsets rationnelles.

## Les PH-Courbes

Dans cette partie, nous allons rappeler la notion de PH-courbe qui est une classe spéciale de courbe rationnelle possédant une propriété utile dans plusieurs opérations géométriques en CAO/CGAO (voir [52]), notamment dans le calcul de offset ou de médiatrice de courbes.

**Définition 9.** Une courbe paramétrique rationnelle

$$\mathbf{f} : t \in I \mapsto \mathbf{f}(t) \in \mathbb{R}^n,$$

définie par

$$\mathbf{f}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$$

vérifiant

$$\|\mathbf{f}'(t)\| = \sqrt{x_1'^2(t) + \dots + x_n'^2(t)} = \sigma(t) \in \mathbb{R}(t),$$

est appelée courbe d'hodographe pythagoricien ou PH-courbe (pour Pythagorean Hodograph curve).

**Remarque 3.** Pour le cas de courbes paramétriques planes dire qu'une courbe est une PH-courbe est équivalent à dire que la norme de son vecteur normal est rationnelle.

**Exemple 6.**

1. Un cercle donné par sa de paramétrisation rationnelle classique

$$\mathbf{f}(t) = \left( \frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right)^T$$

est une PH-courbe car on a :

$$\|\mathbf{f}'(t)\| = \frac{2}{1+t^2} \in \mathbb{R}(t).$$

2. Soit une parabole donnée par sa de paramétrisation rationnelle classique

$$\mathbf{f}(t) = (t, t^2)$$

on a :

$$\|\mathbf{f}'(t)\| = \sqrt{1+4t^2} \notin \mathbb{R}(t).$$

Par contre, avec la reparamétrisation

$$\tilde{\mathbf{f}}(t) = \mathbf{f} \left( \frac{t^2-1}{4t} \right) = \left( \frac{t^2-1}{4t}, \frac{(1-t^2)^2}{16t^2} \right)^T, t \neq 0$$

on a

$$\|\tilde{\mathbf{f}}'(t)\| = \frac{(t^2+1)^4}{8|t^3|},$$

la fonction est rationnelle par morceaux.

La propriété pour une courbe d'être d'hodographe pythagoricien dépend de la paramétrisation de la courbe. On a la définition suivante.

**Définition 10.** Une paramétrisation pour laquelle la courbe est PH-courbe, est appelée PH-paramétrisation.

Des méthodes PH-reparamétrisation et de construction de PH-courbe ont été proposées par Arrondo et al. ([15]), Farouki ([52]) et Pottmann ([105]).

## Représentation implicite d'une courbe algébrique plane

Donnons la définition d'une courbe algébrique plane.

**Définition 11.** Une courbe plane  $\mathcal{C}$  est dite algébrique si elle est définie par une équation polynomiale à coefficients réels :  $P(x, y) = 0$ .

1. Le polynôme  $P$  est la représentation implicite de la courbe  $\mathcal{C}$  et le degré total du polynôme  $P$ , supposé sans facteur carré, est appelé le degré de la courbe.
2. Ainsi selon son degré, une courbe algébrique plane
  - est une droite si elle est de degré 1 ;
  - est une conique si elle est de degré 2 ;
  - est une courbe cubique si elle est de degré 3, etc.
3. La courbe  $\mathcal{C}$  est dite indécomposable si le polynôme  $P$  est irréductible dans  $\mathbb{R}[x, y]$  et décomposable dans le cas contraire.

## Points singuliers et genre d'une courbe algébrique

Nous allons donner les définitions du point singulier et du genre d'une courbe algébrique.

### Points singuliers

**Définition 12.** Soient  $\mathcal{C}$  une courbe algébrique plane définie par un polynôme  $P \in \mathbb{R}[x, y]$ , et  $P_0 = (a, b) \in \mathcal{C}$ .

1. Un point  $P_0$  est dit de multiplicité  $m$  sur  $\mathcal{C}$  si et seulement si toutes les dérivées supérieures d'ordre  $m - 1$  de  $P$  s'annulent en  $P_0$ , mais au moins, une des dérivées d'ordre  $m$  est non nul en  $P_0$ .
2. Si  $m = 1$ , le point  $P_0$  est dit point simple.
3. Si  $m > 1$ , le point  $P_0$  est dit point singulier de multiplicité  $m$  sur  $\mathcal{C}$ .
4. On dit qu'une courbe algébrique est dite régulière ou lisse si elle ne possède pas de point singulier, c-à-d : si

$$\forall (x, y) \in \mathcal{C}, \nabla P = \left( \partial_x P(x, y), \partial_y P(x, y) \right)^T \neq \mathbf{0}.$$

Voyons maintenant comment passer d'une représentation à l'autre. Il faut noter que toute courbe rationnelle est algébrique, c-à-d : il est possible de calculer une représentation implicite d'une courbe algébrique plane à partir de sa représentation paramétrique rationnelle, cette opération est connue sous le nom de *implicitisation*. Plusieurs méthodes de l'implicitisation ont été proposées (voir [29, 110, 112]). Mais en général l'opération inverse, connue sous le nom *paramétrisation*, n'est pas toujours possible. Cependant il existe un critère permettant d'identifier les classes de courbes algébriques qui possèdent une paramétrisation rationnelle. Le critère est basé sur la valeur numérique du genre de la courbe.

## Le genre d'une courbe algébrique

**Définition 13.** Soit  $\mathcal{C}$  une courbe algébrique définie par

$$P(x, y) = 0,$$

avec  $P \in \mathbb{R}[x, y]$  et  $d = \mathbf{deg}(P)$ .

On appelle le genre de la courbe  $\mathcal{C}$ , l'entier  $g$  défini par

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - ns,$$

où  $ns$  est le nombre de points singuliers (comptés avec la multiplicité) de la courbe.

Le genre d'une courbe algébrique permet de savoir si la courbe peut avoir une paramétrisation rationnelle ou pas. Plus précisément, le théorème suivant donne le lien entre la rationalité d'une courbe algébrique plane et la valeur numérique de son genre.

**Théorème 1.1.** ([130], p. 229) Une courbe algébrique  $\mathcal{C}$  est rationnellement paramétrisable si et seulement si son genre est égal à zéro.

Par exemple, toute conique est de genre 0, une courbe elliptique (qui est une cubique sans singularité) est de genre 1, mais une cubique qui admet un point singulier est de genre 0.

Différentes méthodes ont été proposées pour le calcul de la paramétrisation rationnelle (voir [5, 20, 106, 113, 122, 124]).

### Exemple 7. Les représentations paramétrique et implicite de droite et conique

1. Les représentations paramétrique et implicite d'une droite plane sont respectivement de la forme

$$\mathbf{f}(t) = (a_1 t + b_1, a_2 t + b_2)^T \text{ et } P(x, y) = ax + by + c = 0.$$

2. Les représentations paramétrique et implicite d'une conique plane sont respectivement de la forme

$$\mathbf{f}(t) = \left( \frac{a_2 t^2 + a_1 t + a_0}{c_2 t^2 + c_1 t + c_0}, \frac{b_2 t^2 + b_1 t + b_0}{c_2 t^2 + c_1 t + c_0} \right)^T$$

et

$$P(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Les coniques se classifient en fonction de coefficients de leur représentations. Ainsi, la conique est respectivement une hyperbole, parabole et ellipse selon que :

$$c_1^2 - 4c_0c_2 > 0, c_1^2 - 4c_0c_2 = 0 \text{ et } c_1^2 - 4c_0c_2 < 0,$$

pour la représentation paramétrique, et

$$b^2 - 4ac > 0, b^2 - 4ac = 0 \text{ et } b^2 - 4ac < 0,$$

pour la représentation implicite.

### 1.3.2 Les surfaces

Dans cette sous-section nous allons présenter des notions de base relatives aux surfaces paramétriques, surfaces et courbes spatiales algébriques.

#### Représentation implicite d'une surface algébrique

**Définition 14.** Une surface  $\mathcal{S}$  est dite algébrique si elle est définie par une équation polynomiale à coefficients réels

$$P(x, y, z) = 0.$$

1. Le polynôme  $P$  est la représentation implicite de la surface  $\mathcal{S}$  et le degré totale du polynôme  $P$ , supposé sans facteur carré, est appelé le degré de la surface.
2. Ainsi selon son degré, une surface algébrique
  - est un plan si elle est de degré 1 ;
  - est une quadrique si elle est de degré 2 ;
  - est une surface cubique si elle est de degré 3, etc..
3. La surface  $\mathcal{S}$  est dite indécomposable si le polynôme  $P$  est irréductible dans  $\mathbb{R}[x, y, z]$ , et décomposable dans le cas contraire.

**Définition 15.** Soit  $\mathcal{S}$  une surface algébrique de représentation implicite

$$P(x, y, z) = 0.$$

1. Un point  $M(x_0, y_0, z_0)$  de  $\mathcal{S}$  est dit singulier si
 
$$\nabla P(x_0, y_0, z_0) = \left( \partial_x P(x_0, y_0, z_0), \partial_y P(x_0, y_0, z_0), \partial_z P(x_0, y_0, z_0) \right)^T = \mathbf{0}.$$
2. La surface est dite régulière ou lisse si elle ne possède pas de point singulier, c-a-d : si

$$\forall (x, y, z) \in \mathcal{S}, \nabla P(x, y, z) = \left( \partial_x P(x, y, z), \partial_y P(x, y, z), \partial_z P(x, y, z) \right)^T \neq \mathbf{0}.$$

#### Exemple 8. Les quadriques

Les quadriques sont définies par l'équation polynomiale de la forme :

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 2Gx + 2Hy + 2Iz + J = 0 \quad (1.1)$$

où  $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J \in \mathbb{R}$ .

Après un changement de repère via la réduction de formes quadratique associées, chacune des quadriques peut voir son équation ramenée à l'une des formes suivantes sans tenir compte de cas de vide, d'une droite, d'un plan ou réunion de deux plans sécants ou parallèles :

1. Ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

La sphère

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$$

étant un cas particulier.

2. Hyperboloïde à une nappe

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

3. Cylindre elliptique

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

4. Cylindre hyperbolique

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

5. Cylindre parabolique

$$x^2 - 2py = 0.$$

6. Hyperboloïde à une nappe

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

7. Cône elliptique

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

8. Paraboloides elliptique

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z}{c} = 0.$$

9. Paraboloides hyperbolique

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z}{c} = 0.$$

## Représentation implicite d'une courbe spatiale algébrique

**Définition 16.** Une courbe algébrique spatiale  $\mathcal{C}$  peut être déterminée par l'intersection de deux surfaces algébriques  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  de représentations implicites respectives

$$P_1(x, y, z) = 0 \text{ et } P_2(x, y, z) = 0.$$

La représentation implicite de la courbe  $\mathcal{C}$  est donnée par

$$\begin{cases} P_1(x, y, z) = 0 \\ P_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

et son degré est donné par le produit des degrés de  $P_1$  et  $P_2$ .

Ainsi, les courbes algébriques de degré 1 et 2 sont de droite et de conique, qui sont, respectivement, l'intersection de deux plans et l'intersection d'un plan et d'une quadrique.

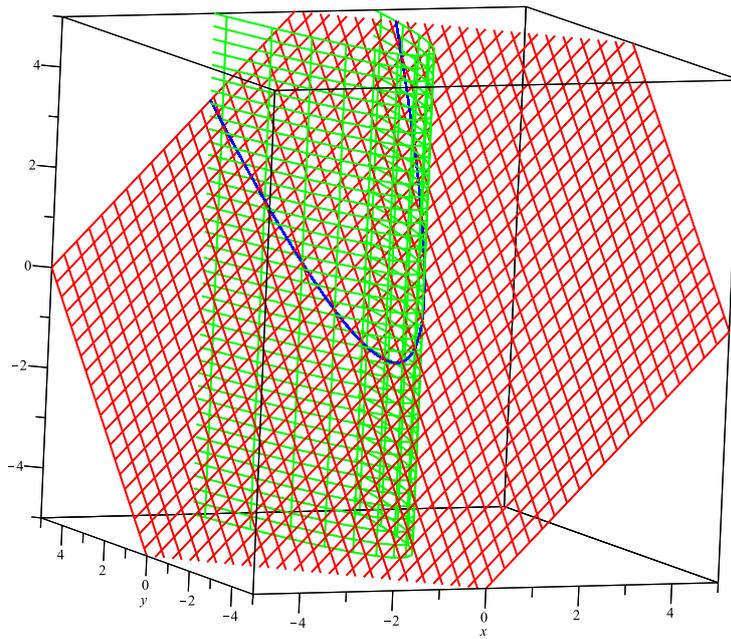


FIGURE 1.4 – La parabole plane (bleue) définie par l’intersection d’un plan (rouge) et d’un cylindre parabolique (vert).

**Exemple 9.** La courbe algébrique définie par

$$\begin{cases} -2x^2 + y + 1 = 0 \\ x - z + y = 0, \end{cases}$$

est une parabole (voir figure 1.4) de paramétrisation

$$\mathbf{f}(t) = (t, 2t^2 - 1, 2t^2 + t - 1)^T.$$

La courbe algébrique définie par

$$\begin{cases} -2x^2 + y + 1 = 0 \\ y^2 + x - z = 0, \end{cases}$$

est une quartique (voir figure 1.5) de paramétrisation

$$\mathbf{f}(t) = (t, 2t^2 - 1, 4t^4 - 4t^2 + t + 1)^T.$$

Tout comme le cas d’une courbe algébrique plane, il est toujours possible de calculer la représentation implicite d’une courbe spatiale à partir de la paramétrisation rationnelle. Cependant l’opération inverse n’est pas toujours possible et même lorsque c’est possible, le calcul est une tâche non évidente. Des méthodes de calcul de la paramétrisation d’une courbe spatiale déterminée par deux surfaces quadriques, peuvent être consultées au [32, 38, 39, 55, 59, 84, 86, 96, 126]. En général la courbe possède une paramétrisation qui contient des racines carrées des expressions polynomiales.

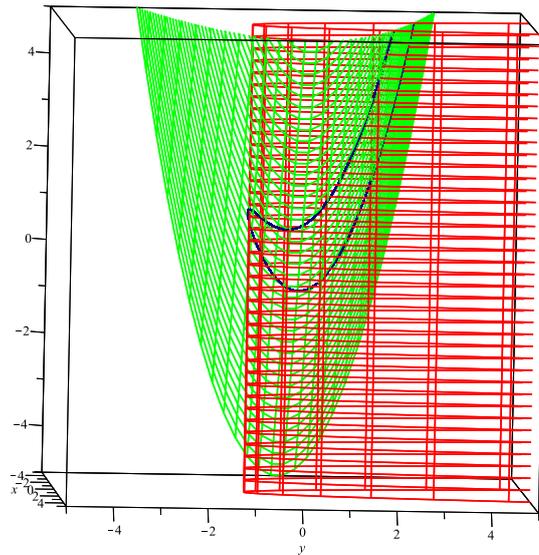


FIGURE 1.5 – La courbe quartique en bleue définie par l’intersection de deux cylindres paraboliques.

### Représentation paramétrique d’une surface

**Définition 17.** On appelle surface paramétrée de classe  $C^k$ , une application de classe  $C^k$

$$\mathbf{F} : (u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbf{F}(u, v) \in \mathbb{R}^3,$$

1. L’ensemble  $\mathcal{S} = \{\mathbf{F}(u, v), (u, v) \in U\}$  est appelé image ou support géométrique de la surface paramétrée. On dit que  $\mathcal{S}$  est une surface géométrique et que  $\mathbf{F}$  est une représentation paramétrique ou une paramétrisation de  $\mathcal{S}$ .
2. Si l’application  $\mathbf{F}$  est injective (sauf éventuellement un nombre fini), on dira que la paramétrisation est propre.
3. Si la paramétrisation  $\mathbf{F}$  est rationnelle (c-à-d ses fonctions composantes sont des rationnelles), on dira que la surface est rationnelle.

Il y a lieu de mentionner à titre d’exemple que toutes les surfaces quadriques sont des surfaces paramétrées rationnelles, l’exemple suivant en donne quelques unes d’entre elles.

#### Exemple 10.

1. Soit une surface paramétrée définie par

$$\mathbf{F}(u, v) = (u^2, v, u)^T,$$

son support géométrique est déterminé par le cylindre parabolique présenté à la figure 1.6.

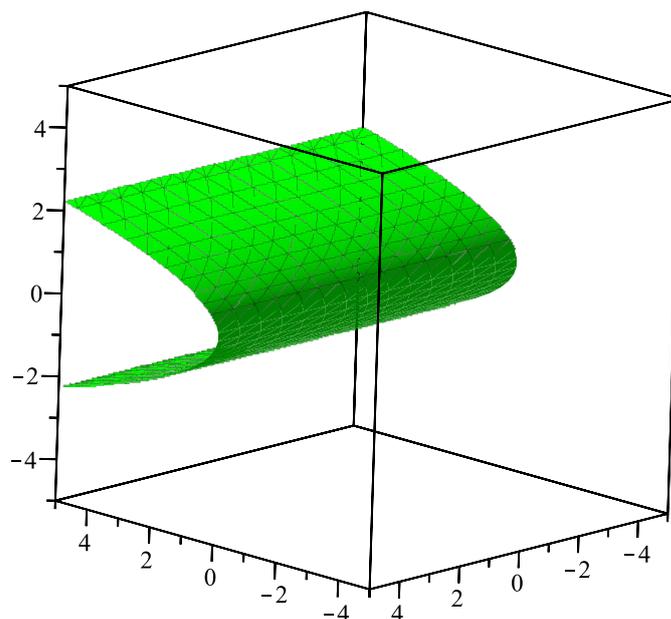


FIGURE 1.6 – Le cylindre parabolique : support géométrique de la surface paramétrée de l'exemple 1.

2. Soit une surface paramétrée définie par

$$\mathbf{F}(u, v) = (u, v, u^2 + v^2 - 5)^T,$$

son support géométrique est déterminé par le cylindre parabolique présenté à la figure 1.7.

3. Soit une surface paramétrée définie par

$$\mathbf{F}(u, v) = \left( \frac{10u}{1+u^2}, v, \frac{3(1-u^2)}{1+u^2} \right)^T,$$

son support géométrique est déterminé par le cylindre elliptique présenté à la figure 1.8.

## Reparamétrisation

**Définition 18.** Soient une surface paramétrée

$$\mathbf{F} : U \mapsto \mathbb{R}^3,$$

de classe  $C^1$  et

$$\varphi : U' \longrightarrow U,$$

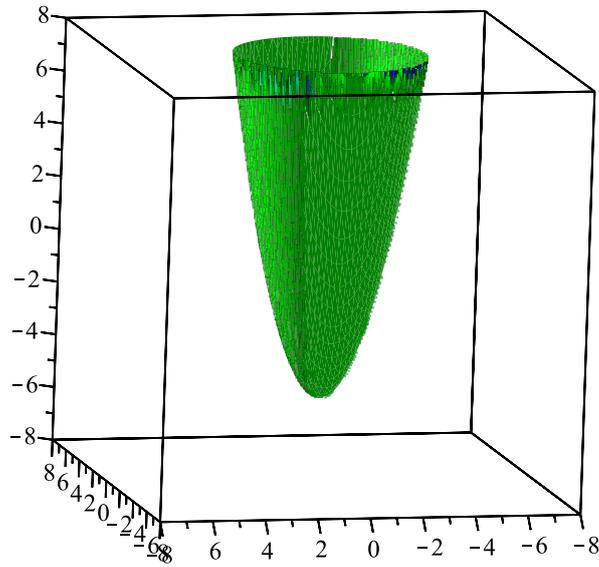


FIGURE 1.7 – Le paraboloid elliptique : support géométrique de la surface paramétrée de l'exemple 2.

un  $C^1$  difféomorphisme, alors la surface paramétrée

$$\mathbf{F} \circ \varphi : U' \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

possède le même support géométrique que  $\mathbf{F}$ .

L'application  $\mathbf{F} \circ \varphi : U' \longrightarrow \mathbb{R}^3$  est appelée une reparamétrisation de  $\mathbf{F}$ .

### Surface régulière, espace tangent et vecteur normal

**Définition 19.** Une surface paramétrée

$$\mathbf{F} : U \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

est dite régulière en un point  $m_0 = \mathbf{F}(u_0, v_0)$  si les deux vecteurs  $\partial_u \mathbf{F}(u_0, v_0)$  et  $\partial_v \mathbf{F}(u_0, v_0)$  sont libres, c-à-d si

$$\partial_u \mathbf{F}(u_0, v_0) \times \partial_v \mathbf{F}(u_0, v_0) \neq \mathbf{0}.$$

La surface est dite régulière ou lisse si elle est régulière en tout point.

Tout comme le cas des courbes, la régularité ne dépende pas de la paramétrisation de la surface.

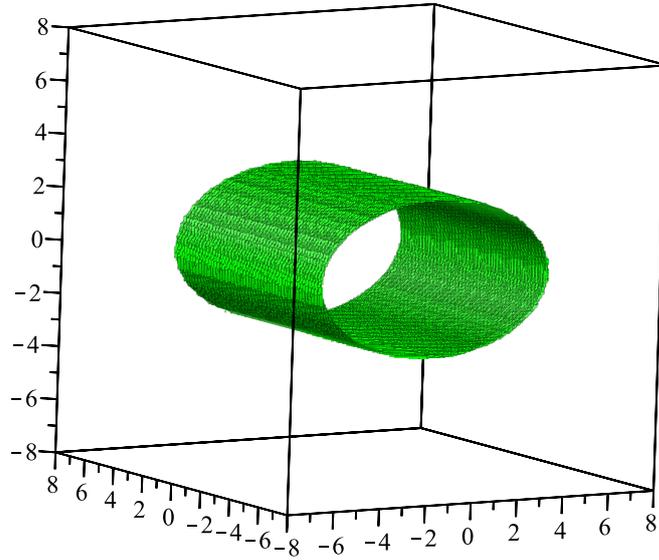


FIGURE 1.8 – Le cylindre elliptique : support géométrique de la surface paramétrée de l'exemple 3.

**Définition 20.** Soit une surface paramétrée régulière

$$\mathbf{F} : U \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

on appelle espace tangent à la surface  $\mathcal{S}$  en un point  $m_0 = \mathbf{F}(u_0, v_0)$ , l'espace affine, noté  $T_{m_0}\mathcal{S}$  passant par  $m_0$  et engendré par les vecteurs  $\partial_u \mathbf{F}(u_0, v_0)$  et  $\partial_v \mathbf{F}(u_0, v_0)$ .

**Exemple 11.**

1. La surface paramétrée définie par

$$\mathbf{F}(u, v) = (u^2, v, u)^T,$$

est régulière, car on a

$$\partial_u \mathbf{F}(u, v) \times \partial_v \mathbf{F}(u, v) = (2u, 0, 1)^T \times (0, 1, 0)^T = (-1, 0, 2u)^T \neq \mathbf{0}.$$

2. La surface paramétrée définie par

$$\mathbf{F}(u, v) = \left( \frac{2vu}{u^2+1} + 1, \frac{v(-u^2+1)}{u^2+1}, v \right)^T$$

n'est pas régulière au point  $m_0 = \mathbf{F}(u, 0) = (1, 0, 0)$  car on a

$$\partial_u \mathbf{F}(u, 0) \times \partial_v \mathbf{F}(u, 0) = \mathbf{0} \times \left( \frac{2u}{u^2+1}, \frac{-u^2+1}{u^2+1}, 1 \right)^T = \mathbf{0}.$$

**Définition 21.** *Soit*

$$\mathbf{F} : U \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

*une surface paramétrée régulière de support géométrique  $\mathcal{S}$ .*

1. *On appelle vecteur normal à  $\mathcal{S}$  en un point  $m = \mathbf{F}(u, v)$ , le vecteur orthogonal à l'espace tangent  $T_m\mathcal{S}$ , c-à-d défini par*

$$\mathbf{N}(u, v) = \partial_u \mathbf{F}(u, v) \times \partial_v \mathbf{F}(u, v).$$

2. *Le vecteur*

$$\mathbf{n}(u, v) = \frac{\mathbf{N}(u, v)}{\|\mathbf{N}(u, v)\|}$$

*est un vecteur normal unitaire.*

Il faut noter que le vecteur normal dépend de la paramétrisation de la surface  $\mathcal{S}$  et il permet d'orienter la surface.

### Orientation d'une surface paramétrée

Soit  $\mathcal{S}$  une surface paramétrique régulière. Choisissons une paramétrisation  $\mathbf{F} : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ , pour la surface  $\mathcal{S}$ . On dispose alors en tout point un vecteur normal qui oriente la normale à la surface. L'expression de  $\mathbf{N}(u, v)$  montre que ce champ de vecteur normal à  $\mathcal{S}$  est de classe  $C^{k-1}$  si le paramétrage est de classe  $C^k$ . La surface est ainsi orientée par le choix du paramétrisation. Nous admettrons qu'il y a deux classes de paramétrisation possibles qui correspondent intuitivement aux deux "faces" de la surface  $\mathcal{S}$ .

### Quelques types de surfaces paramétriques usuelles

Dans cette partie, nous allons présenter les paramétrisation de certaines surfaces usuelles qui seront utilisées dans ce memoire.

1. **Les surfaces réglées :** Ce sont des surfaces engendrées par une droite variable  $d_u$  dont la position dépend d'un paramètre  $u$ . Cette droite peut être déterminée par un point  $P(u)$  d'une courbe gauche paramétrée  $\mathcal{C}$  appelée la directrice et par un vecteur directeur  $\mathbf{K}(u)$ . Ainsi une surface réglée  $\mathcal{S}$  peut être paramétrisée comme suit :

$$\mathbf{S}(u, v) = \mathbf{G}(u) + v\mathbf{K}(u),$$

où  $\mathbf{G}(u) = (a(u), b(u), c(u))^T$  et  $\mathbf{K}(u) = (\alpha(u), \beta(u), \gamma(u))^T$  sont des applications rationnelles, c-à-d :

$$\mathbf{S}(u, v) = (a(u) + v\alpha(u), b(u) + v\beta(u), c(u) + v\gamma(u))^T$$

L'exemple classique de surfaces réglées sont les surfaces développables qui sont constituées de trois types de surfaces : les surfaces tangentes, les surface cylindriques et les surfaces coniques.

2. **Surfaces cylindriques** : ce sont des surfaces réglées engendrées par des droites de vecteur directeur fixe  $\mathbf{K} = (\alpha, \beta, \gamma)^T$  appelées génératrices, qui s'appuient sur une courbe gauche  $\mathcal{C}$  (la directrice). Ainsi si  $\mathcal{C}$  est paramétrée par :

$$\mathbf{f}(u) = (a(u), b(u), c(u))^T,$$

la paramétrisation de la surface cylindrique est de la forme :

$$\mathbf{S}(u, v) = (a(u) + \alpha v, b(u) + \beta v, c(u) + \gamma v)^T.$$

**Exemple 12.**

Pour

$$\mathbf{K} = (0, k, 0)^T, k \neq 0 \text{ et } \mathbf{f}(u) = \left( \frac{r_1(1-u^2)}{1+u^2}, 0, \frac{2r_2 u}{1+u^2} \right)^T,$$

on obtient un cylindre elliptique de paramétrisation

$$\mathbf{S}(u, v) = \left( \frac{r_1(1-u^2)}{1+u^2}, kv, \frac{2r_2 u}{1+u^2} \right)^T.$$

3. **Surfaces coniques** : Ce sont des surfaces réglées, engendrées par des droites (la génératrices), qui passent par un point fixe  $V(\alpha, \beta, \gamma)$  appelé sommet et qui s'appuient sur une courbe gauche  $\mathcal{C}$  (directrice). Ainsi si  $\mathcal{C}$  est paramétrée par :

$$\mathbf{f}(u) = (a(u), b(u), c(u))^T,$$

la paramétrisation de la surface cylindrique est de la forme :

$$\mathbf{S}(u, v) = (v(a(u) - \alpha) + \alpha, v(b(u) - \beta) + \beta, v(c(u) - \gamma) + \gamma)^T.$$

**Exemple 13.**

Pour

$$V = (0, 0, 0) \text{ et } \mathbf{f}(u) = \left( \frac{r_1(1-u^2)}{1+u^2}, \frac{2r_2 u}{1+u^2}, k \right)^T, k \neq 0,$$

on obtient un cône elliptique de paramétrisation

$$\mathbf{S}(u, v) = \left( \frac{r_1 v (1-u^2)}{1+u^2}, \frac{2r_2 u v}{1+u^2}, kv \right)^T.$$

4. **Surfaces de révolution** : peuvent être caractérisées par la rotation d'une courbe  $\mathcal{C}$  appelée la méridienne autour d'un axe  $\Delta$ . Ainsi, en prenant l'axe  $\Delta = (Oz)$  et  $\mathcal{C}$  une courbe plane du plan  $(O, x, z)$  paramétrée par :

$$\mathbf{f}(u) = (a(u), 0, c(u))^T,$$

la paramétrisation de la surface de révolution sera de la forme :

$$\mathbf{S}(u, v) = (a(u) \cos(v), a(u) \sin(v), c(u))^T.$$

La sphère, le cylindre circulaire, le parabolôide circulaire sont des surfaces de révolutions.

### Offset d'une surface rationnelle

Dans cette partie nous rappelons la définition d'un offset d'une surface rationnelle.

**Définition 22.** Soit  $S(u, v)$  une paramétrisation rationnelle d'une surface  $\mathcal{S}$ , on appelle offset à une distance (algébrique)  $d$  à la surface  $\mathcal{S}$ , la surface  $\mathcal{S}_o$  représentée par la paramétrisation

$$S_o(u, v) = S(u, v) + d \mathbf{n}(u, v),$$

où

$$\mathbf{n}(u, v) = \frac{\mathbf{N}(u, v)}{\|\mathbf{N}(u, v)\|} \text{ est le vecteur normal unitaire de la surface } \mathcal{S}.$$

Tout comme dans le cas de courbe, la surface offset n'est en général pas rationnelle, car la norme du vecteur normal  $\mathbf{N}(u, v)$  ne l'est pas toujours. Des critères permettant d'identifier les surfaces rationnelles qui possèdent de l'offset rationnelle ont été établies (voir [15, 91, 93, 105]). Dans la partie qui suit, il sera présenté les types de surfaces possédant de l'offset rationnelle.

### Les PN-surfaces

Dans cette partie, nous allons donner la notion de PN-surfaces qui sont une classe spéciale de surfaces rationnelles possédant une propriété utile dans plusieurs opérations géométriques en CAO/CGAO (voir [91, 93, 105]), notamment dans le calcul d'offset et de médiatrice de surface.

**Définition 23.** Une surface paramétrique rationnelle

$$\mathbf{F} : (u, v) \in U \mapsto \mathbf{F}(u, v) \in \mathbb{R}^3,$$

définie par

$$\mathbf{F}(u, v) = \left( x(u, v), y(u, v), z(u, v) \right)^T$$

vérifiant

$$\|\partial_u \mathbf{F}(u, v) \times \partial_v \mathbf{F}(u, v)\| \in \mathbb{R}(u, v),$$

est appelée PN-surface (pour *Pythagorean Normal surface*).

### Exemple 14.

1. Une sphère donnée par sa paramétrisation rationnelle classique

$$\mathbf{F}(u, v) = \left( \frac{2ru}{1+u^2+v^2}, \frac{2rv}{1+u^2+v^2}, \frac{r(1-u^2-v^2)}{1+u^2+v^2} \right)^T$$

est une PN-surface car on a :

$$\|\partial_u \mathbf{F}(u, v) \times \partial_v \mathbf{F}(u, v)\| = \frac{2r^2}{(1+u^2+v^2)^2} \in \mathbb{R}(u, v).$$

2. Pour un cylindre parabolique donnée par sa de paramétrisation rationnelle classique

$$\mathbf{F}(u, v) = (u, v, u^2)$$

on a :

$$\|\partial_u \mathbf{F}(u, v) \times \partial_v \mathbf{F}(u, v)\| = \sqrt{4u^2 + 1} \notin \mathbb{R}(u, v).$$

Par contre, avec la reparamétrisation

$$\tilde{\mathbf{F}}(u, v) = \mathbf{F}\left(\frac{u^2 - 1}{4u}, v\right) = \left(\frac{u^2 - 1}{4u}, v, \frac{(1 - u^2)^2}{16u^2}\right)^T, u \neq 0$$

on a

$$\|\partial_u \tilde{\mathbf{F}}(u, v) \times \partial_v \tilde{\mathbf{F}}(u, v)\| = \frac{(u^2 + 1)^4}{8|u^3|}$$

est une fonction rationnelle par morceaux.

La propriété de PN-surface dépend de la paramétrisation de la surface. On a la définition suivante :

**Définition 24.** *Une paramétrisation pour laquelle une surface paramétrée est PN-surface, est appelée PN-paramétrisation.*

Des méthodes de PN-reparamétrisation et de construction de PN-surfaces pour les surfaces développables et non développables ont été proposées par Pottmann ([105]), et pour les surfaces quadriques par Lü ([91, 93]). Comme nous aurons à utiliser les surfaces quadriques avec leur PN-paramétrisations, nous allons rappeler les techniques de PN-paramétrisations développées par Lü ([91, 93]) dont le fondement (lié à la rationalité de surface offset) est basé sur le théorème suivant :

**Théorème 1.2.** ([91]) *Soit  $\mathcal{S}$  une surface algébrique irréductible rationnelle définie par le polynôme  $F(z, y, z) = 0$ . Alors pour que la surface offset de  $\mathcal{S}$  soit rationnelle, il faut et il suffit la surface*

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ \partial_x F^2(x, y, z) + \partial_y F^2(x, y, z) + \partial_z F^2(x, y, z) - r^2 = 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

admet une paramétrisation rationnelle dans l'espace  $(x, y, z, r)$ .

En se basant sur ce théorème et certaines transformations quadratiques, nous donnons une procédure pour calculer la PN-paramétrisation de surfaces quadriques.

Soit

$$F(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy + 2px + 2qy + 2rz + d = 0,$$

la représentation implicite de surface quadratique, qui peut s'écrire sous l'une des formes suivantes :

$$x = f(y, z), \quad y = f(x, z), \quad z = f(x, y),$$

où  $f$  est une forme quadratique, ou

$$a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 = 1,$$

Les étapes de PN-paramétrisation se résument dans l'algorithme suivant :

---

**Algorithme 1. PN-paramétrisation de quadriques ([91, 93])**


---

**Input** :  $F(x, y, z) = 0$ , l'équation implicite d'une surface quadrique  $\mathcal{S}$  (exceptée de cylindres elliptique et hyperbolique et cône non-circulaire)

**Output** :  $\tilde{\mathbf{S}}(s, t)$ , une PN-paramétrisation de la surface  $\mathcal{S}$ .

1. Si  $\mathcal{S}$  est quadrique définie par une équation implicite de la forme :

$$z = f(x, y),$$

on a à paramétriser la surface

$$\begin{cases} z = f(x, y) \\ 1 + \partial_x f^2(x, y) + \partial_y f^2(x, y) - r^2 = 0, \end{cases} \quad (1.3)$$

dans l'espace  $(x, y, z, r)$  comme suit :

- On paramétrise

$$1 + \partial_x f^2(x, y) + \partial_y f^2(x, y) - r^2 = 0$$

dans l'espace  $(x, y, r)$  disons

$$x = x(s, t), y = y(s, t) \text{ et } r = r(s, t),$$

cette paramétrisation.

- Enfin, en substituant la paramétrisation correspondante de  $(x, y)$  dans

$$z = f(x, y),$$

on obtient la PN-paramétrisation de  $\mathcal{S}$  de la forme

$$\tilde{\mathbf{S}}(s, t) = \begin{bmatrix} x(s, t) \\ y(s, t) \\ f(x(s, t), y(s, t)) \end{bmatrix}.$$

2. Si  $\mathcal{S}$  est une quadrique de représentation implicite de la forme :

$$a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 = 1,$$

- on considère les transformations quadratiques :

$$x = \frac{\sigma + 1}{\sqrt{a'}}; y = \sigma u; z = \sigma v; r = 2(\sigma\omega + \sqrt{a'}), \quad (1.4)$$

- on cherche la paramétrisation de  $\sigma, \omega, u$  et  $v$  en fonction des nouveaux paramètres  $s, t$  en substituant

$$x = \frac{\sigma + 1}{\sqrt{a'}}; y = \sigma u; z = \sigma v; r = 2(\sigma\omega + \sqrt{a'})$$

dans

$$\begin{cases} a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 = 1 \\ 4a'^2x^2 + 4b'^2y^2 + 4c'^2z^2 - r^2 = 0, \end{cases} \quad (1.5)$$

et en utilisant certains résultats basiques de la géométrie algébrique de ([3, 4]), on obtient :

$$\sigma = \sigma(s, t), \omega = \omega(s, t), u = u(s, t) \text{ et } v = v(s, t).$$

- Enfin, en substituant les paramétrisations correspondantes de  $\sigma$ ,  $\omega$ ,  $u$  et  $v$  dans (1.4), on obtient la PN-paramétrisation de  $\mathcal{S}$  de la forme

$$\tilde{\mathbf{S}}(s, t) = \begin{bmatrix} \frac{\sigma(s, t) + 1}{\sqrt{a'}} \\ \sigma(s, t)u(s, t) \\ \sigma(s, t)v(s, t) \end{bmatrix}.$$

**Exemple 15.** Soit le cylindre parabolique :  $F(x, y, z) = y + 2ax^2 = 0$

Nous avons à paramétriser la surface

$$\begin{cases} y + 2ax^2 = 0 \\ 1 + 16a^2x^2 - r^2 = 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

dans l'espace  $(x, y, r)$ , comme suit :

- On paramétrise

$$1 + 16a^2x^2 - r^2 = 0$$

dans l'espace  $(x, r)$  et on obtient :

$$x = \frac{1 - t^2}{8at}, r = \frac{t^2 + 1}{2t}, t \neq 0$$

- En substituant l'expression de  $x$  dans

$$y = -2ax^2,$$

nous obtenons

$$\tilde{\mathbf{S}}(t, s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} \frac{1-t^2}{at} \\ -\frac{1}{32} \frac{(1-t^2)^2}{at^2} \\ s \end{bmatrix}$$

### 1.3.3 Les notions sur le calcul d'intersection entre les courbes et surfaces

Dans cette sous-section, nous rappelons une méthode de calcul de point d'intersection entre une surface algébrique donnée par sa représentation implicite et une courbe algébrique donnée par sa représentation paramétrique. Cette notion sera

utilisée dans le chapitre 4, notamment dans le calcul de points d'intersection d'une surface médiatrice avec les arêtes, de la courbe trisectrice avec les faces, d'un domaine compact de  $\mathbb{R}^3$ , et d'une surface médiatrice avec une courbe trisectrice pour déterminer le point quadrisecteur, le tout servira pour leur maillage dans le domaine.

Pour calculer une telle intersection, nous procédons par la méthode la plus simple qui consiste à substituer les composantes de la paramétrisation de la courbe dans l'équation implicite de la surface et de résoudre l'équation résultante pour obtenir les valeurs paramétriques des points d'intersection correspondants.

Soient  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{S}$  une courbe algébrique spatiale et une surface algébrique données respectivement par la représentation paramétrique

$$\mathbf{f}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T \quad (1.7)$$

de degré  $d_1$  et la représentation implicite

$$P(x, y, z) = 0, \quad (1.8)$$

de degré  $d_2$ . En substituant (1.7) dans (1.8) nous obtenons l'équation

$$P(x(t), y(t), z(t)) = 0, \quad (1.9)$$

de degré au plus égal à  $d_1 d_2$  en  $t$ .

Ainsi, par exemple, pour l'intersection :

- d'une surface quadrique et une courbe conique, l'équation (1.9) est de degré au plus 4.
- d'une surface quadrique et une droite, l'équation (1.9) est de degré au plus 2.
- d'un plan et une conique, l'équation (1.9) est de degré au plus 2.
- d'un plan et une droite, l'équation (1.9) est de degré au plus 1.

Comme dans notre cas nous avons à calculer les points d'intersection entre une quadrique et une conique ou une droite, un plan et une conique ou une droite, nous aurons à résoudre des équations de degré 4, 2, ou 1 de façon exacte ou bien approximative (notamment pour le cas des équations de 4).

### Exemple 16.

1. Soient  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{C}$  un cylindre parabolique et une parabole respectivement représentées par

$$x^2 y^2 + 6x^2 y + 9x^2 - 2y - 2 = 0 \text{ et } \mathbf{f}(t) = \left( t + 3, t^2 - 5, t^2 + \frac{1}{2} \right)^T.$$

L'équation résultante correspondante est donnée par

$$-257t^2 - 14t + 909 = 0,$$

et on obtient pour solutions

$$t_1 = -\frac{7}{257} - \frac{1}{257}\sqrt{233662}, \quad t_2 = -\frac{7}{257} + \frac{1}{257}\sqrt{233662}.$$

Les points d'intersection correspondants sont obtenus en substituant  $t_1$  et  $t_2$  dans la paramétrisation de la courbe  $\mathcal{C}$  :

$$\begin{aligned} A_1 &= \left( \frac{764}{257} - \frac{\sqrt{233662}}{257}, -\frac{96534}{66049} + \frac{14\sqrt{233662}}{66049}, \frac{533471}{132098} + \frac{14\sqrt{233662}}{66049} \right), \\ A_2 &= \left( \frac{764}{257} + \frac{\sqrt{233662}}{257}, -\frac{96534}{66049} - \frac{14\sqrt{233662}}{66049}, \frac{533471}{132098} - \frac{14\sqrt{233662}}{66049} \right). \end{aligned}$$

2. Soient  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{C}$  un hyperboloïde à deux nappes et une parabole respectivement représentées par

$$x^2 - y^2 + 9x^2 - 2y - 2 - z^2 + 8x = 0 \text{ et } \mathbf{f}(t) = \left( t + 3, t^2 - 5, t^2 + \frac{1}{2} \right)^T.$$

L'équation résultante correspondante est

$$-2t^4 + 17t^2 + 68t + \frac{387}{4} = 0.$$

Par une résolution numérique, on obtient pour solution approchée

$$t_1 = -1.947941072, \quad t_2 = 4.345722230,$$

et les points d'intersection correspondants sont donnés par :

$$\begin{aligned} A_1 &= (1.052058928, -1.205525580, 4.294474420), \\ A_2 &= (7.345722230, 13.88530170, 19.38530170). \end{aligned}$$

### 1.3.4 Les notions sur les calculs de la topologie des courbes et des surfaces

Dans cette partie nous allons présenter des notions de bases qui seront utilisées dans le maillage (c-à-d à dire le calcul de la topologie) de courbes spatiales et de surfaces algébriques réelles. Ces notions seront utiles dans le chapitre 4, notamment dans le maillage de surface médiatrice et de courbe trisectrice.

Rappelons tout d'abord les notions d'homéomorphisme et d'isotopie qui sont fondamentales dans cette partie.

**Définition 25.** Soient  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  deux espaces topologiques, une application

$$h : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y},$$

est appelée un homéomorphisme si elle est bijective et continue et la réciproque

$$h^{-1} : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X},$$

est continue. Les deux espaces topologiques  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  sont dits homéomorphes.

**Définition 26.** Une isotopie entre deux objets géométriques  $\mathcal{O}, \mathcal{O}' \subset \mathbb{R}^3$  (courbe ou surface) est une application  $\gamma : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ , telle que :

- $\gamma(\cdot, 0) = Id_{\mathbb{R}^3}$  et
- pour tout  $t \in ]0, 1]$ ,  $\gamma(\cdot, t)$  est un homéomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  et déformant continuellement l'objet  $\mathcal{O}$  à la maille  $\mathcal{O}'$  :

$$\gamma(\mathcal{O}, 1) = \mathcal{O}'.$$

Ceci implique que l'objet  $\mathcal{O}$  et l'objet maillé  $\mathcal{O}'$  sont homéomorphes, c'est à dire qu'ils ont la même topologie.

Pour une courbe algébrique spatiale  $\mathcal{C}$  et une surface algébrique  $\mathcal{S}$ , le calcul de leur topologie consiste à déterminer respectivement un graphe de points de  $\mathcal{C}$  connectés par des segments de droite qui est isotope à  $\mathcal{C}$ , et un ensemble de polygones (non nécessairement coplanaires) formés à partir de points de  $\mathcal{S}$  qui est isotope à  $\mathcal{S}$ . Différentes méthodes de calcul de la topologie ont été proposées tant pour le cas de courbes et surfaces régulières que pour le cas de courbes et surfaces présentant de singularités, et la littérature est très vaste. Citons quelques unes de références récentes et certaines sur lesquelles la méthode utilisée au chapitre 4 prend son fondement (voir [9, 10, 11, 12, 34, 46, 65, 69, 88]). Nous sommes intéressés à la topologie de courbes et surfaces qui intersectent un domaine compact de la forme

$$\mathcal{D} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2 \text{ ou } \mathcal{D} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \subset \mathbb{R}^3, \quad (1.10)$$

nous allons calculer leur topologie restreinte au domaine. Ainsi, moyennant des critères de régularité pour la topologie de courbe et surface algébriques, établis par L. Alberti and B. Mourrain (voir [9]), il sera facile de calculer leur topologie à partir de leur intersection avec le bord du domaine  $\mathcal{D}$ . Donnons la définition de la régularité topologique.

**Définition 27.** (voir [9] et [88]) Soit  $\mathcal{D}$  un domaine compact de la forme (1.10).

1. On dit qu'une courbe  $\mathcal{C}$  de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n = 2, 3$ , est *t-régulière* (pour régularité topologique) dans un domaine compact  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ , si sa topologie est uniquement déterminée à partir de son intersection avec le bord  $\partial\mathcal{D}$ .
2. Une surface algébrique  $\mathcal{S}$  définie par  $f(x, y, z) = 0$  est dite *z-t-régulière* (resp. *x, y-t-régulière*) si :
  - $\mathcal{S}$  n'admet pas de droite tangente parallèle à la direction  $(Oz)$  (resp.  $(Ox)$ ,  $(Oy)$ ), et
  - $\mathcal{S} \cap \partial\mathcal{D}_z$  (resp.  $\mathcal{S} \cap \partial\mathcal{D}_x$ ,  $\mathcal{S} \cap \partial\mathcal{D}_y$ ) est *t-régulière* (dans  $\partial\mathcal{D}_z$ ), où  $\partial\mathcal{D}_u$  est une face de  $\mathcal{D}$  qui est orthogonale à la  $u$ -direction, avec  $u = x, y, z$ .
 La surface  $\mathcal{S}$  est dite *t-régulière* dans le domaine  $\mathcal{D}$  si elle est *x, y* ou *z-t-régulière* dans  $\mathcal{D}$ .

**Remarque 4.**

- Si  $\mathcal{S}$  est *t-régulière*, alors sa topologie est uniquement déterminée à partir de son intersection avec les arêtes de  $\mathcal{D}$  (voir [88]).
  - Il faut noter que cette notion de *t-régularité* dans un domaine compact qui est purement topologique, est différente de la notion de régularité différentielle (lisse) introduites dans les définitions 5, 12, 15 ou 20.
- Si une surface est *t-régulière* dans un domaine  $\mathcal{D}$ , alors sa topologie est déterminée à partir de ses points d'intersection avec les arêtes de  $\mathcal{D}$ .

### Topologie d'une courbe spatiale dans un domaine compact $\mathcal{D}$

Dans cette partie nous allons calculer la topologie d'une courbe algébrique spatiale dans un domaine compact. La proposition suivante dont le détail se trouve dans [88], établit un critère de  $t$ -régularité simple à vérifier.

**Proposition 1.** ([9]) *Soit  $\mathcal{C}$  une courbe algébrique de classe  $\mathcal{C}^\infty$  dans le domaine  $\mathcal{D}$ . Si pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}$ , le plan  $(x = x_0)$  a au plus un seul point d'intersection avec la courbe  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{D}$ , alors la topologie de  $\mathcal{C}$  est uniquement déterminée par les points de  $\mathcal{C} \cap \partial\mathcal{D}$ , c-à-d que la courbe est  $t$ -régulière.*

Donnons un exemple de calcul de la topologie d'une courbe spatiale pour illustrer cette notions.

**Exemple 17.** Soit une courbe spatiale  $\mathcal{C}$  définie par

$$\mathbf{f}(t) = \left( t, \frac{3}{56}t^2 + \frac{5}{7} - \frac{3}{7}t, -\frac{1}{14}t^2 - \frac{3}{7}t + \frac{33}{7} \right)^T, t \in [-3, 0].$$

Cette courbe est évidemment lisse et pour  $x_0 \in [-3, 0]$ , il n'est pas difficile de vérifier que le plan  $(x = x_0)$  intersecte  $\mathcal{C}$  en exactement un seul point, donc elle est  $t$ -régulière dans le domaine  $\mathcal{D} = [-3, 0] \times [0, 3] \times [5, 5.5]$ . Le segment de droite définie par

$$\mathbf{s}(t) = \left( -2.2360679t - 3, 1.4091938t + \frac{139}{56}, 0.3571428t + \frac{75}{14} \right)^T, t \in [-1, 0],$$

est isotope à  $\mathcal{C}$  dans le domaine  $\mathcal{D} = [-3, 0] \times [0, 3] \times [5, 5.5]$ , La figure 1.9 montre la courbe et le segment de droite qui lui est isotope dans  $\mathcal{D}$ .

### Topologie d'une surface dans un domaine compact $\mathcal{D}$

Dans cette partie nous allons calculer la topologie d'une surface algébrique dans un domaine compact. La proposition suivante, dont le détail se trouve dans [9, 88], établit un critère de  $t$ -régularité simple à vérifier.

**Proposition 2.** (voir [9]) *Soient  $\mathcal{S}$  une surface algébrique définie par  $f(x, y, z) = 0$  et  $(u, v, w)$  une permutation de  $(x, y, z)$ . Si  $\partial_u f \neq 0$  dans  $\mathcal{D}$  et si  $\mathcal{S} \cap \partial\mathcal{D}_u$  est une courbe  $t$ -régulière, où  $\partial\mathcal{D}_u$  est une face de  $\mathcal{D}$  orthogonale à  $(Ou)$ , alors  $\mathcal{S}$  est  $t$ -régulière dans  $\mathcal{D}$ .*

Ainsi, pour toute surface  $\mathcal{S}$  algébrique vérifiant le critère de la proposition 2, sa topologie dans  $\mathcal{D}$  sera déterminée à partir de ses points d'intersection avec les arêtes de  $\mathcal{D}$ . Plus précisément, le polyèdre construit à partir de ces points est isotope à  $\mathcal{S}$  dans  $\mathcal{D}$ . La figure 1.10 donne une illustration de calcul de topologie d'une telle surface dans un domaine  $\mathcal{D}$ .

**Exemple 18.** Soit une surface algébrique  $\mathcal{S}$  définie par

$$x^2y^2 + 6x^2y + 9x^2 - 2y - 2 = 0.$$

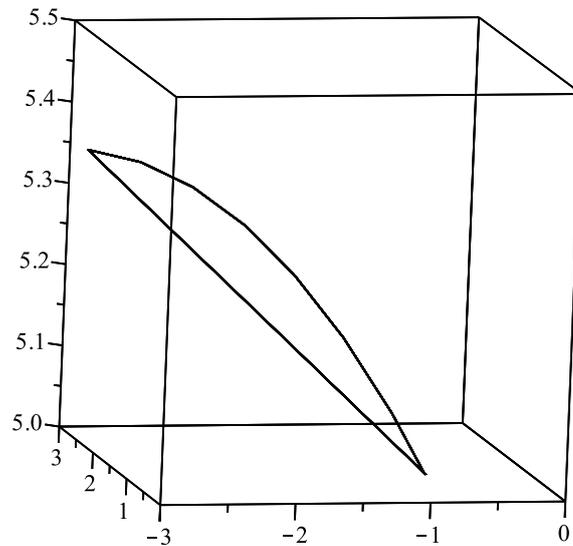


FIGURE 1.9 – Le segment de droite isotope à la courbe spatiale dans un domaine compact de l'exemple 17.

La surface  $\mathcal{S}$  vérifie le critère de la proposition 2 dans le domaine

$$\mathcal{D} = [2, 4] \times [0, 4] \times [-2, 0],$$

elle est donc  $t$ -régulière. Le polyèdre formé de deux triangles  $\triangle(ABD)$  et  $\triangle(ACD)$ , est isotope à  $\mathcal{S}$  dans le domaine  $\mathcal{D}$  avec

$$A = (2, 1, -2), B = (2, 4, -1), C = (4, 0, -2), D = (4, 4, -0.68) \in \mathcal{S} \cap \partial\mathcal{D}.$$

La figure 1.10 montre la surface  $\mathcal{S}$  et le polyèdre qui lui est isotope dans  $\mathcal{D}$ .

## 1.4 Notions relatives aux diagramme de Voronoï, enveloppe inférieure et diagramme de minimisation d'une famille de fonctions continues

Dans cette section, nous allons donner une brève notion du diagramme de Voronoï, et les notions d'envelopes inférieures et du diagramme de minimisation d'une famille de fonctions continues. Ces notions seront très importantes dans le chapitre 4, notamment dans le calcul du diagramme de Voronoï. L'essentiel des détails de ces notions se trouvent [22, 116].

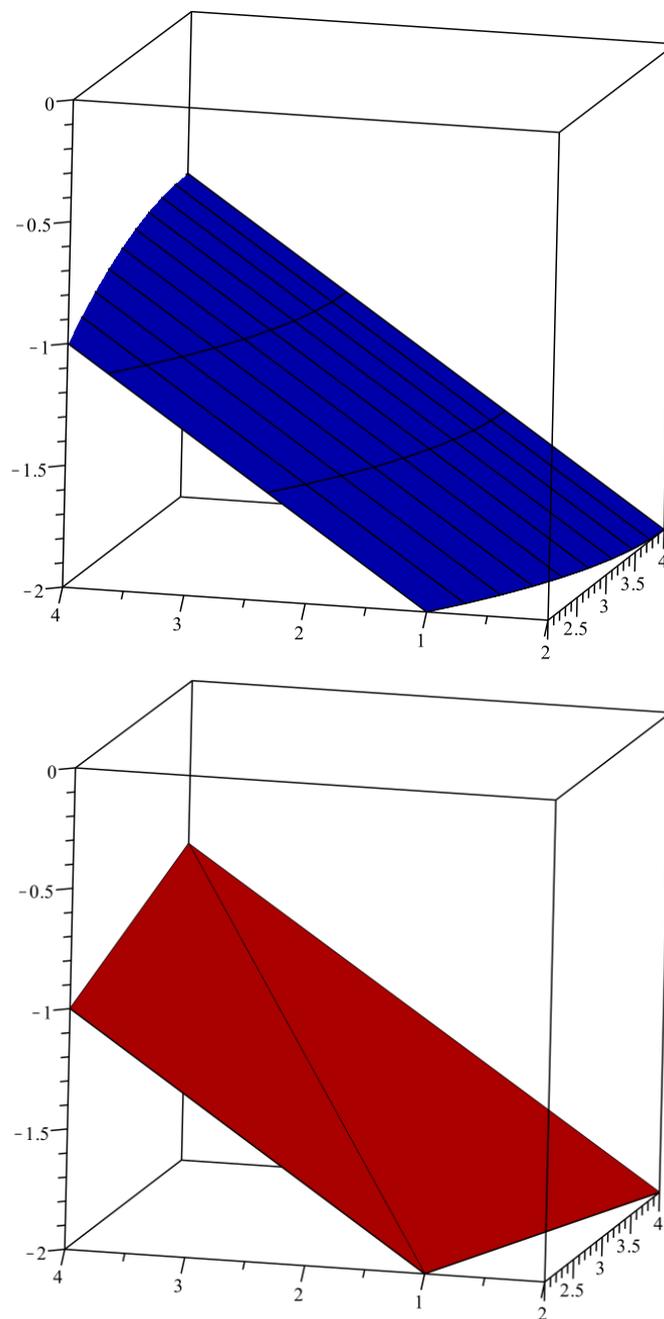


FIGURE 1.10 – En haut la surface algébrique  $\mathcal{S}$  (bleue) et en bas le polyèdre (rouge) isotope à  $\mathcal{S}$  dans  $\mathcal{D}$  de l'exemple 18.

### 1.4.1 Notions relatives au diagramme de Voronoï

Dans cette sous-section nous rappelons la définition et le langage propre du diagramme de Voronoï.

**Définition 28.** Soient  $(\mathcal{E}, d)$  un espace métrique, et  $\mathcal{S} = \{s_1, \dots, s_n\} \subset \mathcal{E}$  un ensemble discret d'objets géométriques.

On appelle diagramme de Voronoï de  $\mathcal{S}$  pour la distance  $d$ , la partition de l'espace  $\mathcal{E}$  en des régions, dont chaque région par objet, est constituée de tous les points qui sont plus proche de cet objet que de tout autre.

La théorie du diagramme de Voronoï dispose d'un langage propre comme le rappelle la définition suivante.

**Définition 29.** Soient  $\mathcal{S} = \{s_1, \dots, s_n\} \subset (\mathcal{E}, d)$ .

1. Les éléments de l'ensemble  $\mathcal{S} = \{s_1, \dots, s_n\}$  pour lequel on va calculer le diagramme de Voronoï sont appelés des *sites*.
2. La région constituée des tous les points les plus proche d'un site  $s_i$  est appelée la *cellule de Voronoï* associée au site  $s_i$ .
3. L'ensemble de toutes les cellules de Voronoï constituent le *diagramme de Voronoï* de l'ensemble  $\mathcal{S}$  pour la distance  $d$ .

**Exemple 19.** Soient  $\mathcal{S} \subset (\mathbb{R}^2, d)$ , où  $d$  est la distance euclidienne, et

$$\mathcal{S} = \{A_1 = (-0.24, 3.35), A_2 = (1.14, 2.65), A_3 = (1.82, 1.81), A_4 = (0.29, 1.28), A_5 = (-0.12, 2.74), A_6 = (-0.72, 2.1)\}.$$

Le diagramme de Voronoï de  $\mathcal{S}$  pour distance euclidienne est montré à la figure 1.11.

### 1.4.2 Notions relatives aux enveloppes inférieures et diagramme de minimisation d'une famille de fonctions continues

Dans cette sous-section nous rappelons les notions basiques relatives aux enveloppe inférieure et diagramme de minimisation d'une famille de fonctions continues.

**Définition 30.** Soit

$$\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_n\},$$

une famille finie de  $n$  fonctions à  $m$  variables continues définies sur  $\mathbb{R}^m$ .

1. L'enveloppe inférieure de la famille  $\mathcal{F}$  est définie par

$$\mathcal{F}^- = \min_{1 \leq i \leq n} f_i.$$

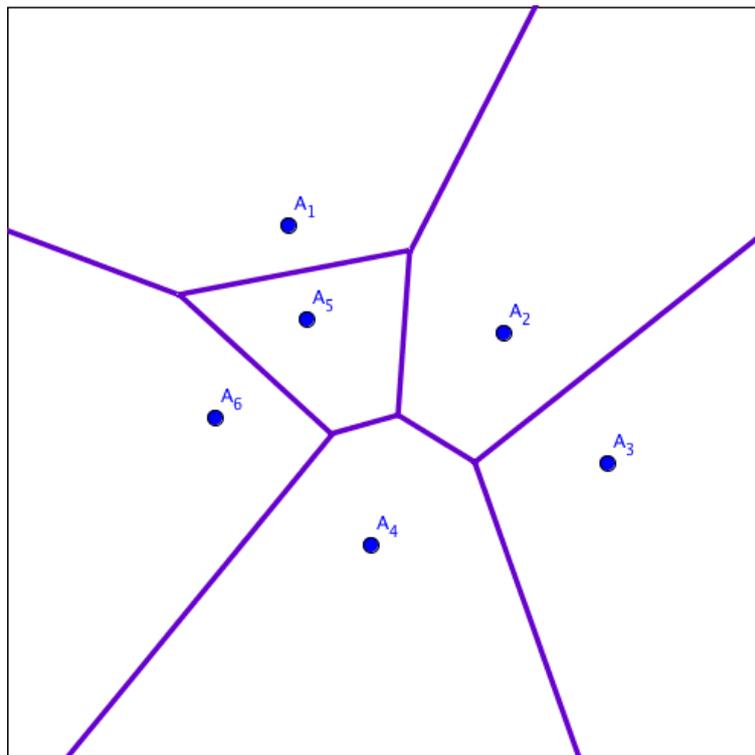


FIGURE 1.11 – Le diagramme de Voronoï de  $\mathcal{S} = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$  pour distance euclidienne.

2. Pour tout  $A \in \mathbb{R}^m$ , on appelle ensemble d'indices de  $A$ , l'ensemble défini par :

$$\mathcal{I}(A) = \{i \in \{1, \dots, n\} : \mathcal{F}^-(A) = f_i(A)\}.$$

3. On définit une relation d'équivalence notée  $\sim$ , entre deux points  $A$  et  $B$  de  $\mathbb{R}^m$  par

$$A \sim B \Leftrightarrow \mathcal{I}(A) = \mathcal{I}(B).$$

4. On appelle le diagramme de minimisation de  $\mathcal{F}$  ( $MD(\mathcal{F})$ ) l'ensemble de classes d'équivalence de  $\mathbb{R}^m / \sim$  formant ainsi une partition de  $\mathbb{R}^m$ .

5. Les frontières de ces classes d'équivalence sont appelées les faces du diagramme de minimisation de  $\mathcal{F}$ .

**Exemple 20.** Soient

$$\begin{aligned} f_1(x) &= (x - 2)^2 + 5, f_2(x) = (x + 2)^2 + 4, f_3(x) = (x - 5)^2 + 1, \\ f_4(x) &= (x + 5)^2 + 2, f_5(x) = 0.2(x + 6)^2 + 3, \end{aligned}$$

des fonctions univariées (définies sur  $\mathbb{R}$ ). L'enveloppe inférieure et le diagramme de minimisation de la famille

$$\mathcal{F} = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\},$$

sont montrés à la figure 1.12.

**Remarque 5.**

1. L'ensemble d'indices d'une face est défini comme le plus grand sous-ensemble des indices communes à tous les points de la face. Réciproquement, la face d'un ensemble d'indices  $\mathcal{I}$  est donnée par tous les points  $A$  tels que  $\mathcal{I} \subset \mathcal{I}(A)$ .
2. Si les fonctions  $f_i$  sont définies par

$$\forall X \in \mathbb{R}^m, A_i \in \mathbb{R}^m (\text{un objet géométrique}), f_i(X) = \|X - A_i\|,$$

le diagramme de minimisation de  $\mathcal{F}$  coïncide avec le diagramme de Voronoï des objets  $A_i$  pour la distance associée à la norme  $\|\cdot\|$ . Si de plus la norme  $\|\cdot\|$  est euclidienne, minimiser  $\|X - A_i\|$  sur les  $i$ , est équivalent à minimiser  $\|X - A_i\|^2$ , ainsi donc, les diagrammes de minimisation de

$$\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_n\} \text{ et } \mathcal{F}' = \{f_1^2, \dots, f_n^2\},$$

sont identiques, c-à-d :

$$MD(\mathcal{F}) = MD(\mathcal{F}').$$

Pour plus détails sur cet aspect le lecteur peut aussi se référer au papier [41].

## 1.5 La règle de Cramer généralisée

La règle de Cramer généralisée permet, entre autre, de résoudre un système d'équations linéaires général (rectangulaire) ([35],[36]), Dans cette section nous allons rappeler la règle généralisée de Cramer qui sera utilisée dans le chapitre 3, pour résoudre un système d'équations rectangulaire dans la définition de la surface médiatrice.

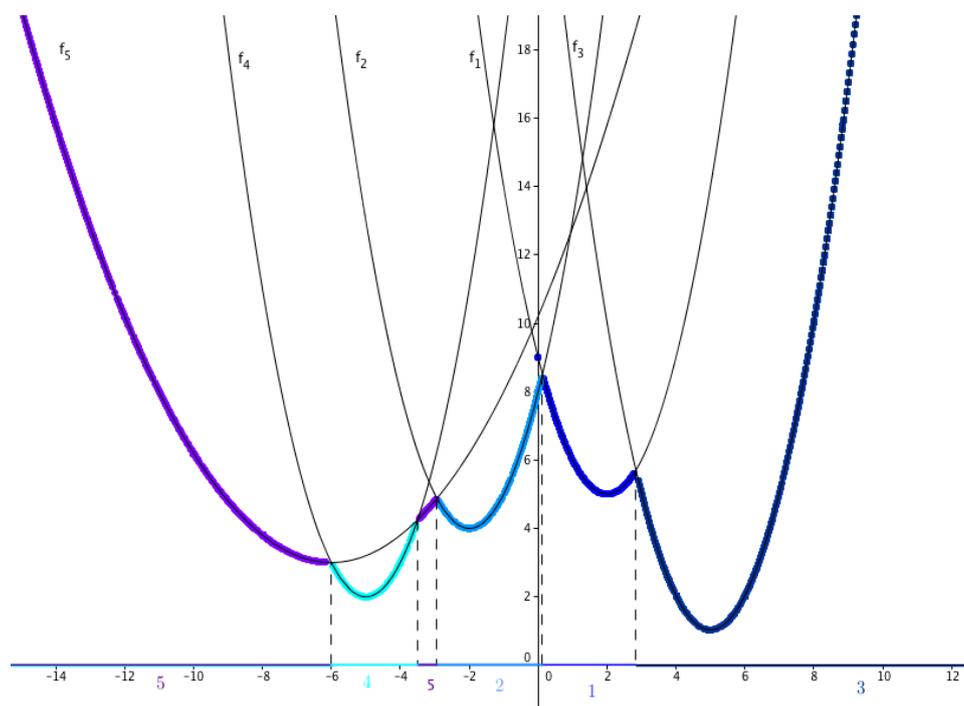


FIGURE 1.12 – L’enveloppe inférieure et le diagramme de minimisation de la famille  $\mathcal{F}$  sont respectivement, représentées par les quatre portions de courbes et les six segments de droite horizontaux (en cinq couleurs différentes) avec les indices correspondants.

### 1.5.1 L'inverse généralisée d'une matrice

Commençons par cette définition de la matrice inverse généralisée introduite par R. Penrose [101].

**Définition 31.** Pour toute matrice rectangulaire  $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m \times n}$  à coefficients dans le corps  $\mathbb{K}$ , on appelle inverse généralisée de  $\mathbf{A}$ , l'unique matrice notée  $\mathbf{A}^\dagger \in \mathbb{K}^{n \times m}$  vérifiant

1.  $\mathbf{A} \mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} = \mathbf{A}$
2.  $\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} \mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^\dagger$
3.  $(\mathbf{A} \mathbf{A}^\dagger)^T = \mathbf{A} \mathbf{A}^\dagger$
4.  $(\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A})^T = \mathbf{A}^\dagger \mathbf{A}$ ,

où  $\mathbf{A}^T$  désigne la transposée de  $\mathbf{A}$  ou la transposée de la conjuguée de  $\mathbf{A}$ , si  $\mathbf{A}$  est à coefficients complexes. Dans le cas où  $\mathbf{A}$  est une matrice carrée et non-singulière (c-à-d  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ ), l'inverse généralisée est l'inverse de la matrice  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^{-1}$

**Remarque 6.** La matrice inverse généralisée  $\mathbf{A}^\dagger$  est aussi bien connue sous le nom l'inverse de Moore-Penrose.

Une expression explicite de la matrice inverse de Moore-Penrose  $\mathbf{A}^\dagger$  proposée par Decell [35] est donnée par :

$$\mathbf{A}^\dagger = -a_k^{-1} \mathbf{A}^T \left[ (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^{k-1} + a_1 (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^{k-2} + \dots + a_{k-1} \mathbf{I}_n \right], \quad (1.11)$$

où  $a_i$  et  $k$  sont tels que

$$\det(w \mathbf{I}_n - \mathbf{A} \mathbf{A}^T) = a_0 w^n + a_1 w^{n-1} + \dots + a_{n-1} w + a_n,$$

avec  $a_0 = 1$ ; ( $k \neq 0$  est le plus grand indice tel que  $a_k \neq 0$ ) ou ( $k = 0$  et  $\mathbf{A}^\dagger = 0$ ).

Une version généralisée de l'inverse de Moore-Penrose a été introduite par G. Diaz-Toca et al. [36] conduisant aussi à une règle généralisée de Cramer.

### 1.5.2 La résolution des systèmes d'équations par la règle de Cramer généralisée

Soit

$$\mathbf{A} \mathbf{B} = \mathbf{V}, \quad (1.12)$$

avec  $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{K}^n$ ,  $\mathbf{V} \in \mathbb{K}^m$ , un système rectangulaire. La règle généralisée de Cramer appliquée au système (1.12) consiste à :

- Calculer l'inverse généralisée de la matrice  $\mathbf{A}$  :  $\mathbf{A}^\dagger$  donnée par la formule (1.11).
- Calculer la solution du système (1.12) sous la forme :  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^\dagger \mathbf{V}$ .

**Exemple 21.** 1. Soit le système d'équations suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 2 & 9 & 6 \\ 5 & -9 & 2 \\ 1 & 5 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 19 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Le système peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{V}.$$

La matrice inverse de Moore-Penrose  $\mathbf{A}^\dagger$  de  $\mathbf{A}$  est donnée par

$$\mathbf{A}^\dagger = \begin{bmatrix} -\frac{25503}{185077} & \frac{27452}{185077} & \frac{64821}{370154} & -\frac{12753}{370154} \\ -\frac{11336}{185077} & \frac{13153}{185077} & -\frac{3163}{185077} & \frac{845}{185077} \\ \frac{18710}{185077} & -\frac{4109}{185077} & -\frac{8563}{370154} & \frac{21831}{370154} \end{bmatrix}$$

et la solution du système d'équations est donnée par :

$$\begin{aligned} X = \mathbf{A}^\dagger \mathbf{V} &= \begin{bmatrix} -\frac{25503}{185077} & \frac{27452}{185077} & \frac{64821}{370154} & -\frac{12753}{370154} \\ -\frac{11336}{185077} & \frac{13153}{185077} & -\frac{3163}{185077} & \frac{845}{185077} \\ \frac{18710}{185077} & -\frac{4109}{185077} & -\frac{8563}{370154} & \frac{21831}{370154} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 19 \\ 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{676018}{185077} \\ -\frac{7328}{185077} \\ \frac{33907}{185077} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2. Soit le système d'équations

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 2 \\ 2 & 9 & 6 & 6 \\ 5 & -9 & 2 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 19 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Le système peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{V}.$$

La matrice inverse de Moore-Penrose  $\mathbf{A}^\dagger$  de  $\mathbf{A}$  est donnée par

$$\mathbf{A}^\dagger = \begin{bmatrix} -\frac{488}{19371} & \frac{111}{6457} & \frac{613}{19371} \\ -\frac{1822}{36981} & \frac{821}{12327} & -\frac{1024}{36981} \\ \frac{57991}{406791} & \frac{1642}{135597} & -\frac{14375}{406791} \\ -\frac{24512}{406791} & \frac{6634}{135597} & \frac{26980}{406791} \end{bmatrix}$$

et la solution du système d'équations est donnée par :

$$X = \mathbf{A}^\dagger \mathbf{V} = \begin{bmatrix} -\frac{488}{19371} & \frac{111}{6457} & \frac{613}{19371} \\ -\frac{1822}{36981} & \frac{821}{12327} & -\frac{1024}{36981} \\ \frac{57991}{406791} & \frac{1642}{135597} & -\frac{14375}{406791} \\ -\frac{24512}{406791} & \frac{6634}{135597} & \frac{26980}{406791} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 19 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3957}{6457} \\ -\frac{422}{1761} \\ \frac{2678}{19371} \\ \frac{26156}{19371} \end{bmatrix}.$$

3. Soit le système d'équations

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 2 & 9 & 6 \\ 5 & -9 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 19 \end{bmatrix}.$$

Le système peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{AX} = \mathbf{V}.$$

La matrice inverse de Moore-Penrose  $\mathbf{A}^\dagger$  de  $\mathbf{A}$  est donnée par

$$\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{24}{149} & \frac{19}{149} & \frac{27}{149} \\ -\frac{26}{447} & \frac{11}{149} & -\frac{8}{447} \\ \frac{21}{149} & \frac{2}{149} & -\frac{5}{149} \end{bmatrix}$$

et la solution du système d'équations est donnée par :

$$X = \mathbf{A}^\dagger \mathbf{V} = \begin{bmatrix} -\frac{24}{149} & \frac{19}{149} & \frac{27}{149} \\ -\frac{26}{447} & \frac{11}{149} & -\frac{8}{447} \\ \frac{21}{149} & \frac{2}{149} & -\frac{5}{149} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{545}{149} \\ -\frac{6}{149} \\ \frac{26}{149} \end{bmatrix}.$$

## 1.6 GeoGebra

Le logiciel GeoGebra joue un rôle important dans cette thèse, notamment dans les caractérisations géométrique et numérique de la courbe médiatrice (chapitre 2) dans le plan. Il est aussi utilisé dans certaines constructions graphiques 3D. Dans cette section nous donnons une brève présentation de GeoGebra et de la mise en oeuvre de couleur dynamique en GeoGebra afin de faciliter la compréhension du processus de la caractérisation géométrique.

### 1.6.1 Présentation de GeoGebra

GeoGebra est un logiciel libre (gratuitement disponible pour tous et sous une licence du type Creative Commons et GNU GPL) de mathématique dynamique en 2D, c'est-à-dire permettant de manipuler des objets géométriques du plan (point, droite, conique, angle, etc) et de voir le résultat instantanément. Étant développé en Java, GeoGebra fonctionne sur tous les systèmes d'exploitation incluant Java (Windows, Linux, Mac OS, etc.). Il se lance en ligne ou se télécharge sur la page web officielle : <http://www.geogebra.org>. En associant, de façon dynamique, trois représentations différentes d'un objet mathématique, à savoir une représentation géométrique, une représentation algébrique, et une représentation par tableur, GeoGebra permet d'afficher l'objet mathématique dans les trois différentes représentations : géométrique (point, courbe représentative d'une fonction, etc), algébrique (coordonnées de points,

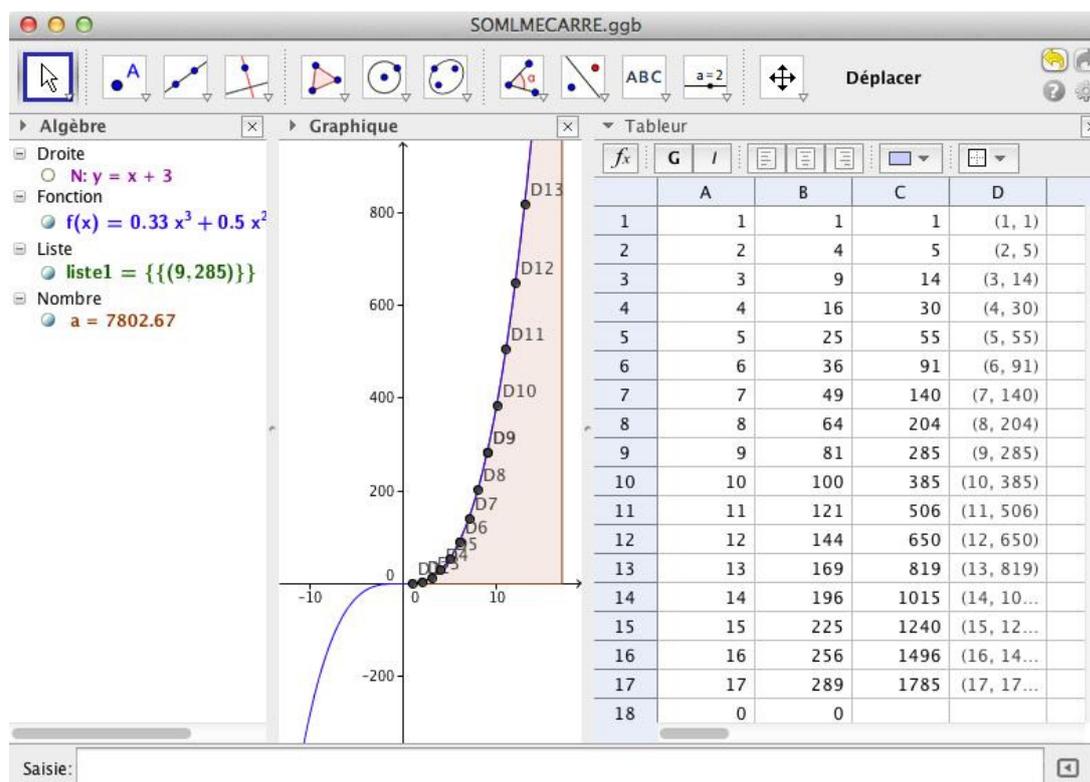


FIGURE 1.13 – Les différentes fenêtres de GeoGebra

équations de la courbe, etc), et dans des cellules de tableau, comme indiquée à la figure 1.13. Ainsi toute modification apportée sur l'une des représentations d'un objet engendre automatiquement des modifications sur les autres. Il permet d'explorer la géométrie affine en donnant ainsi à l'utilisateur la possibilité de manipuler les différents objets géométriques de base et les transformations affines du plan opérées sur ces derniers. Avec une bonne adaptation des unités du repère au problème courant, GeoGebra peut servir d'outils graphique. Ce logiciel est initialement conçu pour les enseignements mathématiques, il peut aussi permettre à toute personne, qui souhaite explorer visuellement les transformations géométriques du plan, de le faire. GeoGebra dispose d'un ensemble de fonctions (qui déterminent l'intersection de deux objets, un lieu géométrique, calculent la distance d'un point à un objet, etc) efficace dans la résolution de certains problèmes géométriques. Grâce à une équipe internationale de développeurs, GeoGebra a connu une évolution considérable (de la version 3.0 en mars 2008, par la version 3.2 en juin 2009, et la version 4.0 en octobre 2011, à la version 4.2.51.0 parue en juin 2013) avec des nouvelles fonctionnalités. Ainsi le calcul formel est désormais possible avec les dernières versions du logiciel. Cet important progrès, fait qu'il est de plus en plus impliqué dans la recherche fondamentale en assistant à la résolution de beaucoup de problème courant d'algèbre et de géométrie, et dans la validation de nouvelles constructions dans le plan (voir [1, 14, 25, 26, 90]), ce qui dépasse le cadre pédagogique. Une version expérimentale de GeoGebra 3D est aussi disponible. Cette version expérimentale est utilisée dans certaines constructions dynamiques en 3D.

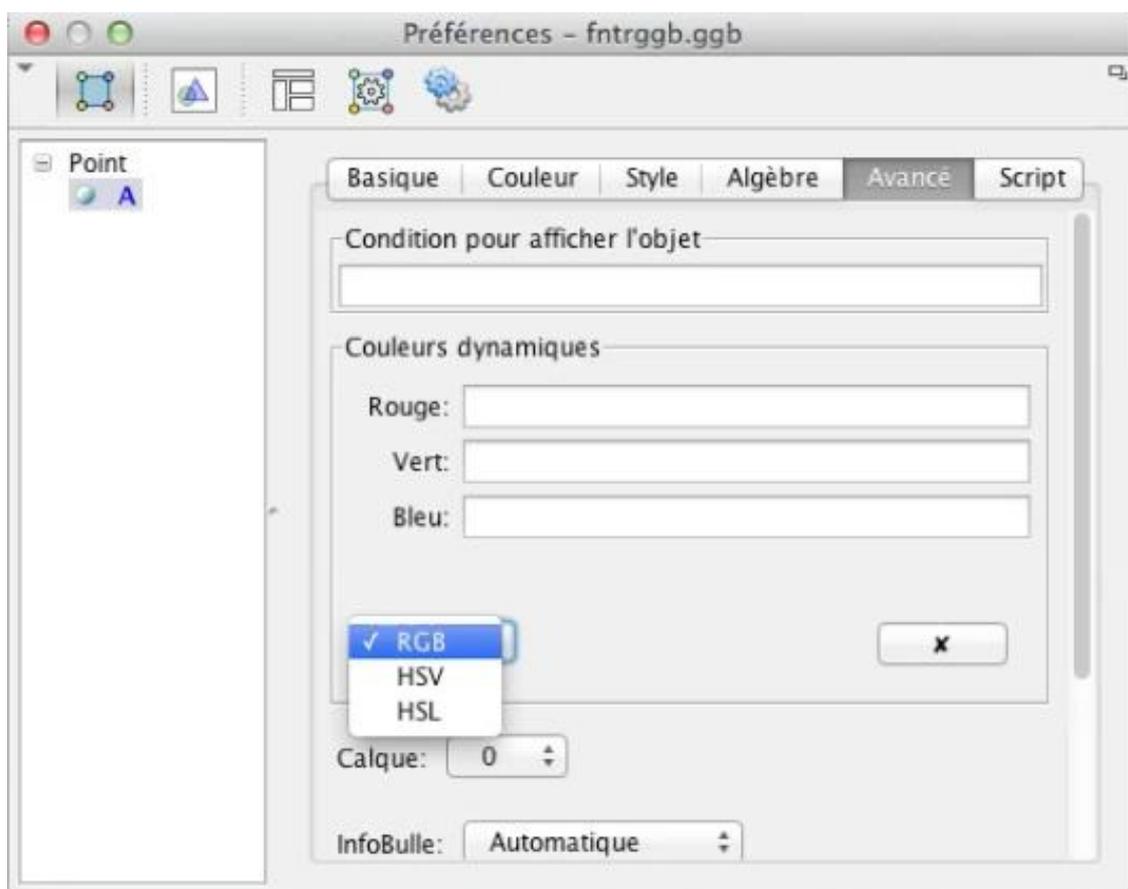
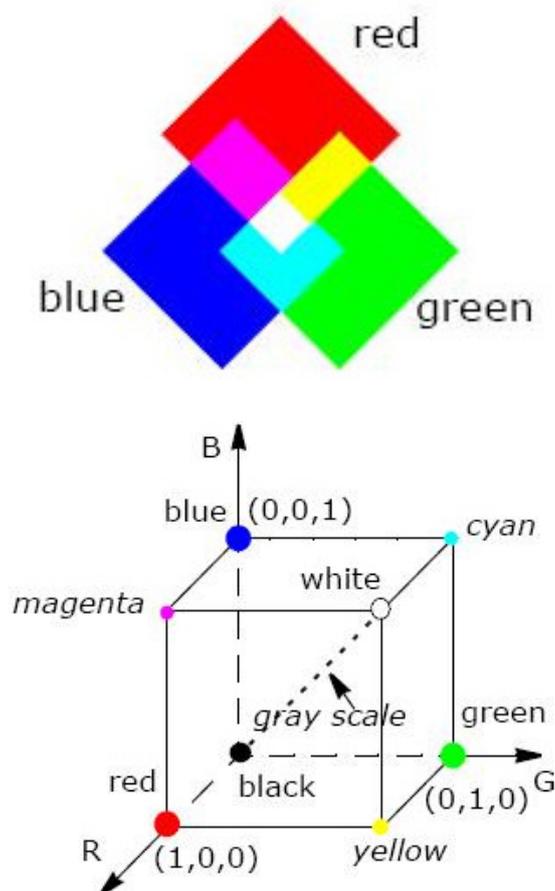


FIGURE 1.14 – La fenêtre GeoGebra de couleur dynamique

## 1.6.2 La couleur dynamique en GeoGebra

En GeoGebra chaque objet est doté de propriétés de la couleur dynamique (accessible à partir de **Propriétés** de l'objet puis la fenêtre **avancée** comme l'indique la figure 1.14) conformément à la théorie de couleurs. Le modèle de couleur est utilisé pour faciliter la spécification de la couleur d'une manière classique. Pour une discussion complète sur les modèles de couleur, le lecteur peut se référer à Gerritsen ([66]) et à Norman ([98]). Ainsi, un modèle de couleur spécifie un système de coordonnées tridimensionnelles dans lequel chaque couleur est représentée par un seul point. Le sous-espace couleur concernée est un cube comme indiqué respectivement dans les figures 1.15 et 1.16 pour les modèles de couleurs **RGB**(Red, Green, Blue) et **CMY**(Cyan, Magenta, Yellow) (les valeurs normalisées à  $[0, 1]$ ), dans lesquels les valeurs **RGB** sont les trois angles ; cyan, magenta et jaune sont les trois autres coins, le noir est à leur origine, et le blanc est dans le coin le plus éloigné de l'origine et vice versa pour les valeurs **CMJ**. L'échelle de gris s'étend du noir au blanc le long de la

FIGURE 1.15 – Le modèle de couleur **RGB**

diagonale joignant ces deux points. Les couleurs sont les points situés sur l'intérieur du cube, défini par des vecteurs qui s'étendent à partir de l'origine. Par conséquent, pour le modèle **RGB**, nous avons respectivement les correspondances suivantes : rouge  $(1, 0, 0)$ , vert  $(0, 1, 0)$ , bleu  $(0, 0, 1)$ , noir  $(0, 0, 0)$ , blanc  $(1, 1, 1)$ , etc, pour plus de précision sur le principe de couleur dynamique nous renvoyons le lecteur à Rafael Losada (voir [89]). Une discussion profonde et détaillée sur les modèle de couleur, telle que brièvement présentée ici, peut se trouver avec différents auteurs comme Boynton ([27]; Foley et al. [60]; Hall ([72]); Rogers ([108]), etc. Avec les dernières versions du logiciel, trois types de modèles de couleurs usuels sont disponibles, à savoir **RGB**(Rouge, Vert, Bleu), **HSV**(Teinte, Saturation, Valeur), **HSL**(Teinte, Saturation, Luminance). Pour un modèle donné, la propriété de couleur dynamique assigne à un objet trois valeurs numériques (comprises entre 0 et 1) qui correspond à l'intensité de chaque composante du modèle. La propriété de couleur dynamique permet de visualiser un lieu géométrique inconnu moyennant la condition numérique que vérifie les points du lieu. Nous allons utiliser la mise en oeuvre de la couleur dynamique en GeoGebra dans le chapitre 2, pour la caractérisation géométrique de la courbe médiatrice de deux objets géométriques du plan.

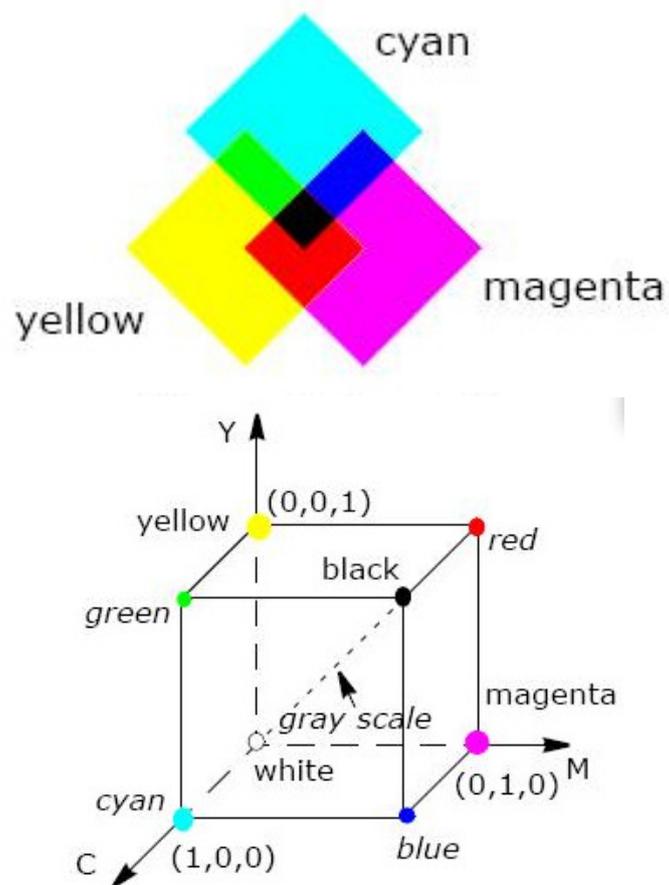


FIGURE 1.16 – Le modèle de couleur CMY

## 1.7 Subdivision spatiale, Structures de données et Algorithme de Parcours de graphe

Dans cette section, nous allons présenter les notions relatives à la subdivision de l'espace, les structures de données, l'algorithme de parcours de graphe qui vont être utilisés dans le calcul de diagramme de Voronoï au chapitre 4.

### 1.7.1 Subdivision de l'espace

La subdivision de l'espace est le processus qui consiste à diviser l'espace en deux ou plus sous-espaces disjoints. En d'autres termes, la subdivision de l'espace divise un espace en des régions de telle sorte que tout point dans l'espace peut être identifié pour se situer dans exactement une des régions. En subdivisant l'espace le processus est souvent hiérarchique, c'est à dire qu'un espace est divisé en plusieurs régions, et le même processus est récursivement appliqué à chacune des régions ainsi créées. Les régions peuvent être rangées en une structure arborescente.

### 1.7.2 Structures de données

La plupart des processus de subdivision utilisent des hyperplans pour diviser l'espace, les points qui se trouvent d'un côté de l'hyperplan forment une région, les points situés de l'autre côté forment une autre et les (éventuels) points appartenant à l'hyperplan sont attribués à l'une des deux régions. Ainsi une telle subdivision récursive de l'espace à l'aide des hyperplans produit une structure appelée **Arbre de partition binaire de l'espace (BSP-trees pour Binary Space Partition-trees, en anglais)**, qui est une des formes classiques les plus usuelles de la subdivision de l'espace, voir la figure 1.17 pour une illustration de la version plane de BSP-trees. La structure de données *kd-trees* qui est un cas particulier de BSP-trees, sera utilisée au chapitre 4 dans le processus de subdivision d'un domaine compact  $\mathcal{D}_0 \subset \mathbb{R}^3$ , pour identifier des sous-domaines susceptibles de contenir les faces, les arêtes et les sommets du diagramme de Voronoï d'un ensemble de demi-droites parallèles restreint à  $\mathcal{D}_0$ . Pour une discussion approfondie sur les différentes structures de données et leur adaptation au traitement de courbes et surfaces implicites, le lecteur peut se référer au livre de Gomes et al. [67]. Les structures *kd-trees* sont introduites pour la première fois par Bentley [19] en 1975. Tous les détails sur les définitions, les propriétés et les méthodes de constructions des structures *kd-trees* que nous allons donner, se trouvent dans [19, 123, 129].

**Définition 32.** *Le **kd-trees** (abrégéant le *k-dimensional-trees*) est une subdivision de l'espace à *k*-dimensions particulière de BSP-trees, dans laquelle les hyperplans séparateurs sont normaux à l'un des axes du système de coordonnées de l'espace.*

Plusieurs méthodes de construction de structure *kd-trees* ont été proposées, tout dépend du choix des hyperplans séparateurs. Parmi ces méthodes, nous allons évoquer que l'une des plus simples et usuelles dans l'espace  $\mathbb{R}^3$  et que nous aurons à utiliser dans notre cas : **Méthodes des plans séparateurs médians**. Ainsi comme son nom l'indique, cette méthode consiste à diviser l'espace racine (espace initial)

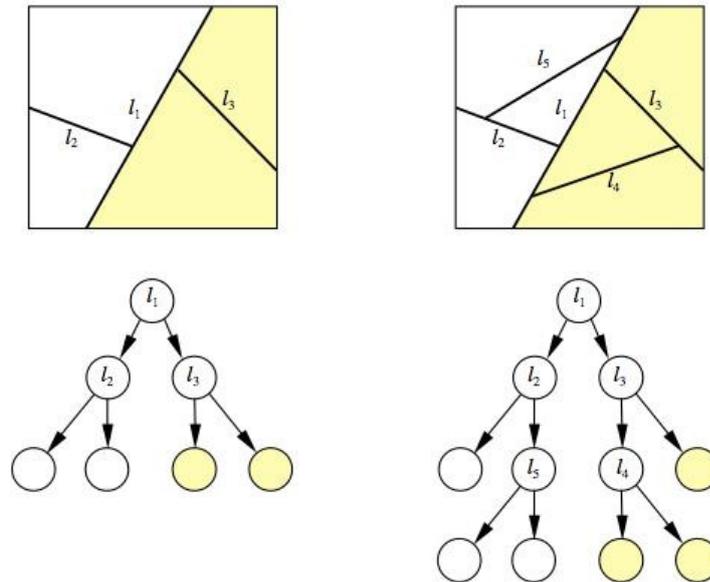


FIGURE 1.17 – L’illustration graphique de la version plane d’une structure BSP-trees, extrait de Gomes et al. [67]

par un plan séparateur médian à l’espace qui est (par exemple) normal au vecteur  $(1, 0, 0)$ , les plans séparateurs des deux espaces fils seront normaux au vecteur  $(0, 1, 0)$ , ceux des petits-fils seront normaux au vecteur  $(0, 0, 1)$ , et puis le processus se répète avec des plan médians normaux au vecteur  $(1, 0, 0)$ , et ainsi de suite. Des illustrations graphiques des versions plane et spatiale de cette méthode sont respectivement montrée à la figure 1.18 et à la figure 1.19. Comme cette méthode de construction ne tient pas compte de la repartition spatiale, elle ne garantie pas l’équilibre de la subdivision. L’avantage principale de la structure *kd-trees* réside dans la possibilité d’obtenir, non seulement, une subdivision optimisée de l’espace rendant ainsi le traitement des données assez rapide, mais aussi, le stockage de données en une structure arborescente binaire facile à parcourir.

Après avoir subdivisé un espace en des sous-espaces et rangés en graphe, nous aurons aussi besoins d’outils pour parcourir le graphe, c’est ainsi qu’un algorithme de parcours de graphe fera l’objet de la sous-section suivante.

### 1.7.3 Algorithme de parcours en profondeur DFS

L’algorithme de parcours en profondeur **DFS** (pour Depth First Search, en anglais) est un algorithme de parcours ou de recherche d’une structure arborescente ou d’un graphe qui se décrit de façon récursive. Cet algorithme a été introduit par le mathématicien français Trémaux [100] au 19<sup>e</sup> siècle, comme une technique de résolution de problème de labyrinthes. Son application la plus simple consiste à déterminer s’il existe un chemin d’un sommet (ou noeud) à un autre. Pour les graphes

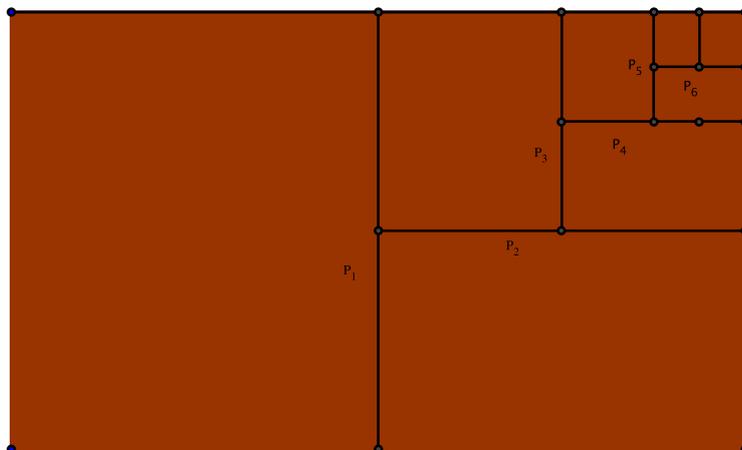


FIGURE 1.18 – L'illustration graphique de la version plane de la méthodes des plans séparateurs médians de la structure *kd-trees* pour la construction de *kd-trees*.

non orientés, il correspond à la méthode intuitive qu'on utilise pour trouver la sortie d'un labyrinthe sans tourner en rond.

### Principe

C'est un algorithme de recherche qui progresse à partir d'un noeud  $S$  d'un graphe  $\mathcal{G}$  en s'appelant récursivement pour chaque noeud voisin de  $S$ . Le nom d'algorithme en profondeur est dû au fait que, contrairement à l'algorithme de parcours en largeur, il explore en fait "à fond" les chemins un à un : pour chaque noeud, il marque le noeud actuel, et il prend le premier noeud voisin jusqu'à ce qu'un noeud n'ait plus de voisins (ou que tous ses voisins soient marqués), et revient alors au noeud initial. Si  $\mathcal{G}$  n'est pas un arbre, l'algorithme pourrait tourner indéfiniment, c'est pour cela que l'on doit en outre marquer chaque noeud déjà parcouru, et ne peut parcourir que les noeuds non encore marqués. Dans le cas d'un arbre (tel que *kd-trees*), le parcours en profondeur est utilisé pour caractériser l'arbre. Enfin, on notera qu'il est tout à fait possible de l'implémenter itérativement à l'aide d'une pile **LIFO** contenant les noeuds à explorer : on dépile un noeud et on empile ses voisins non encore explorés. L'algorithme de parcours en profondeur se résume de la façon suivante ([8, 118, 128]) :

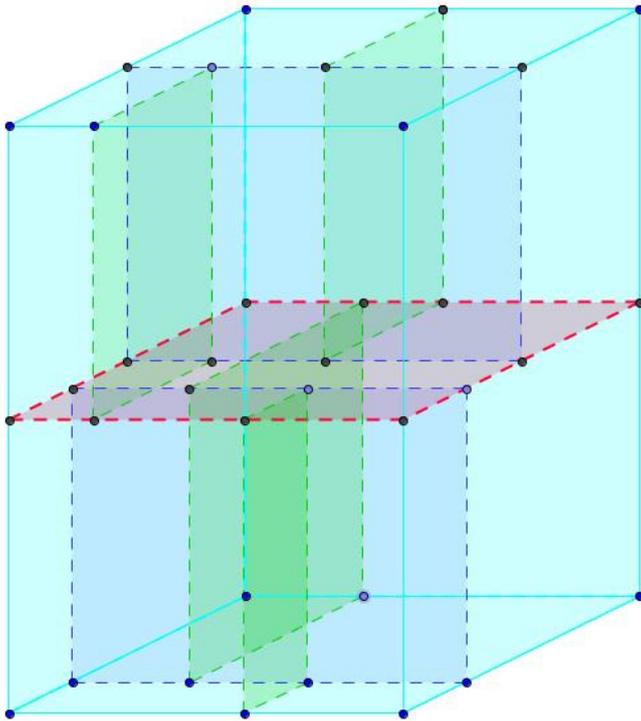


FIGURE 1.19 – L'illustration graphique de la version 3D d'une structure *kd-trees* : le plan(rouge) divise l'espace racine (cyan) en deux sous-espaces-fils, chacun d'eux est ensuite divisé par le plan (bleu) en deux sous-espaces-petit-fils, puis, chacun des quatre petit-fils, est divisé par le plan (vert) en deux sous-espaces et ainsi de suite...

---

**Algorithme 2. DFS** (graphe  $\mathcal{G}$ , noeud  $S$ )

---

**Marquer**( $S$ );POUR CHAQUE élément  $S_{fils}$  de  $\text{Voisins}(S)$  FAIRESI **NonMarqué**( $S_{fils}$ ) ALORS**DFS**( $\mathcal{G}$ ,  $S_{fils}$ );

FIN-SI

FIN-POUR

---

Tout comme les autres algorithmes de parcours de graphe, l'algorithme de parcours en profondeur trouve l'ensemble des noeuds accessibles depuis un noeud donné  $S$ , c'est-à-dire ceux vers lesquels il existe un chemin partant de  $S$ . Il s'agit précisément des noeuds marqués par l'algorithme. Cet algorithme s'applique à un graphe orienté ou non orienté. Sur un graphe non orienté, on peut utiliser cette propriété pour le calcul des composantes connexes. Dans le cas d'un graphe orienté acyclique, le parcours en profondeur peut servir à calculer un tri topologique des noeuds. D'ample explications et applications de **DFS** sont disponibles avec ([33, 62, 70, 77, 81]). Nous allons particulièrement utiliser cet algorithme au chapitre 4 pour parcourir le graphe d'adjacence de sous-domaines engendrant les cellules de Voronoï, qui en résultent de la subdivision du domaine initial  $\mathcal{D}_0$ .



# Chapitre 2

## La Médiatrice d'un point et d'une courbe et la Médiatrice de deux courbes, dans le plan

Dans ce chapitre nous présentons un algorithme pour le calcul d'une paramétrisation de la courbe médiatrice de deux courbes rationnelles planes. Nous présentons aussi une méthode expérimentale pour les caractérisations géométrique et numérique de la courbe médiatrice de deux courbes rationnelles ou d'un point et une courbe rationnelle plane.

### Introduction

La médiatrice se trouve dans plusieurs domaines d'applications tels que la CAO, la génération de chemins, la planification de mouvements, l'axe médian, le calcul du Diagramme de Voronoï, biologie structurale, etc. Étant donnés deux objets géométriques  $O_1$  et  $O_2$  (points ou courbes paramétriques) dans le plan, de paramétrisations respectives  $\mathbf{O}_1(u)$ ,  $u \in I_1$  et  $\mathbf{O}_2(v)$ ,  $v \in I_2$ , où  $I_1$  et  $I_2$  sont des intervalles (pouvant, éventuellement, être réduits à un point dans le cas d'un point), leur courbe *médiatrice géométrique*  $\mathcal{B}(O_1, O_2)$  est définie comme l'ensemble des points équidistants pour les deux objets :

$$\mathcal{B}(O_1, O_2) = \left\{ B \in \mathbb{R}^2 : \inf_{u \in I_1} \|B - \mathbf{O}_1(u)\| = \inf_{v \in I_2} \|B - \mathbf{O}_2(v)\| \right\} \quad (2.1)$$

Son implication dans plusieurs domaines théoriques et pratiques a fait en sorte que le sujet de la médiatrice a attiré l'attention d'éminents chercheurs au cours du siècle tant en  $2D$  qu'en  $3D$ .

Le calcul d'une représentation et sa rationalité de la courbe médiatrice constituent la première préoccupation, car la caractérisation n'étant pas évidente à partir de la définition (2.1). En effet, malgré que les courbes considérées possèdent de paramétrisations régulières et propres, la fonction distance d'un point  $B$  à une courbe paramétrique  $\mathbf{O}(u)$

$$d : (B, O) \longmapsto \inf_{u \in I} \|B - \mathbf{O}(u)\|, \quad (2.2)$$

n'est pas, toujours, différentiable par rapport au point  $B$  et qu'un minimum peut être atteint en plus d'une seule valeur paramétrique. Pour surmonter ces difficultés Farouki et Johnstone ([53], [54]) ont introduit une définition alternative pour la médiatrice d'un point et une courbe rationnelle comme une offset à une "distance - variable" à la courbe, et pour la médiatrice de deux courbes comme une enveloppe de famille à un paramètre de courbes médiatrices d'un point fixe (sur l'une des courbes) et l'autre courbe. Cette nouvelle formulation est équivalente à la définition courante de la *médiatrice algébrique* utilisée dans la littérature (voir [43, 44, 45, 103]), qui peut être exprimée (dans le plan) comme l'ensemble de centres de cercles qui sont simultanément tangents aux deux objets géométriques. Puisque cette définition ne suppose pas de distances minimales mesurées à partir de deux objets, on note l'existence de certaines parties extérieures à "élaguer" (c-à-d : éliminer) afin de réaliser la médiatrice géométrique.

Le processus d'"élagage" de parties extérieures, qui constitue la deuxième difficulté, est plus facile à partir d'une représentation paramétrique, qui, d'ailleurs, n'est toujours pas disponible. La médiatrice algébrique d'un point et d'une courbe rationnelle étant une courbe rationnelle, une méthode algorithmique pour l'"élagage" de parties extérieures à partir de sa paramétrisation a été introduite par Farouki et Johnstone ([54]). Mais la médiatrice algébrique de deux courbes planes rationnelles n'est, en général, pas rationnelle et sa représentation algébrique est très souvent de degré très élevé, rendant ainsi le processus d'"élagage" très difficile et impraticable. La caractérisation graphique devient aussi difficile avec les logiciels classiques utilisés (Maple, jSurfer et GeoGebra) à cause de la taille énorme de la représentation (voir l'exemple 26.6). Ainsi donc plusieurs méthodes d'approximation ont été proposées pour calculer la représentation de la courbe médiatrice de deux courbes rationnelles planes (voir [42] et [57]).

Il existe plusieurs paires de courbes dont la médiatrice est rationnelle, mais, en général, il serait difficile d'établir un critère pour la rationalité de la courbe médiatrice et très peu de classifications sont disponibles à nos jours. Cependant, la rationalité de la médiatrice pour des PH-courbes (Pythorean Hodograph curves) planes (c-à-d une courbe rationnelle dont la norme du vecteur vitesse est rationnelle) est espérée. Dans le cas de deux courbes planes, dont l'une est une droite ou un cercle et l'autre est une PH-courbe, il a été démontré que leur médiatrice est rationnelle (voir [44] et [103]).

Des méthodes ont été récemment introduites par Botana et Abánades ([24], [23]). Leur méthode utilise, GeoGebra et la version en ligne de CAS du logiciel Sage pour calculer la représentation algébrique et graphique de la médiatrice d'un point et une courbe algébrique plane et de deux courbes planes de petit degré. Pour les courbes de plus grand degré, ils utilisent la couleur dynamique en GeoGebra.

Nos principales contributions à ce sujet sont les suivantes :

- Une nouvelle méthode algorithmique, basée sur la règle de Cramer et une technique simple d'élimination par substitution, permettant de calculer une paramétrisation algébrique de la médiatrice algébrique de deux courbes rationnelles planes dont l'une est une droite ou un cercle.
- Une approche pour les caractérisations géométrique (la visualisation) et numérique de la courbe médiatrice géométrique de deux objets géométriques plans

en utilisant la théorie de couleur dynamique avec une mise en oeuvre au logiciel GeoGebra. Tout comme la récente méthode numérique algorithmique introduite par Shou et al. ([119]) pour le calcul de la courbe médiatrice d'un point et d'une courbe algébrique plane, notre approche nécessite aucune étape supplémentaire d'"élagage". Cette méthode utilise un processus de scannage d'un lieu géométrique inconnu du GeoGebra.

Le reste du chapitre est organisé comme suit : dans la section 2.1, nous donnons un rappel sur la méthode algébrique pour le calcul de la paramétrisation de la médiatrice algébrique d'un point et une courbe rationnelle dans le plan, et de la médiatrice algébrique de deux courbes rationnelles dans le plan, et processus d'"élagage". La nouvelle approche pour le calcul de la paramétrisation de la médiatrice algébrique d'un cercle ou d'une droite et une courbe rationnelle dans le plan sera développée dans la section 2.2. Enfin, à la section 2.3, nous présentons les caractérisations géométrique et numérique de la courbe médiatrice géométrique de deux objets du plan, par la théorie de couleur dynamique en GeoGebra.

## 2.1 La représentation algébrique de la médiatrice d'un point et d'une courbe rationnelle, et de deux courbes rationnelles du plan

Dans cette section il sera tout d'abord question du rappel sur la méthode algébrique introduite par Farouki et Johnstone ([54]) pour le calcul de la médiatrice algébrique d'un point et une courbe plane rationnelle ainsi qu'un bref aperçu sur le processus d'"élagage". Ensuite, en se basant sur le cas point-courbe, le cas de deux courbes planes sera abordé. Bien que notre but n'étant pas de réaliser des représentations égalées de la courbe médiatrice, nous allons procéder à l'"élagage" aux travers des exemples à partir de paramétrisations que nous calculons afin de montrer l'intérêt et l'importance de notre approche et de faire valoir comment les résultats obtenus pourraient servir en ce sens.

### 2.1.1 La médiatrice algébrique d'un point et d'une courbe

Soient

$$\mathbf{r}(u) = (x(u), y(u)) \text{ et } P = (\alpha, \beta),$$

avec

$$x(u) = \frac{X(u)}{W(u)}, y(u) = \frac{Y(u)}{W(u)},$$

où  $X, Y, W$  sont des polynômes ( $W$  pourrait être constant), respectivement la paramétrisation d'une courbe rationnelle et un point (n'appartenant pas à la courbe) fixe du plan. La médiatrice algébrique de la courbe  $r$  et du point  $P$  est une courbe rationnelle est définie comme une offset à une "distance-variable" à la courbe  $r$  (voir [54]) :

$$\mathbf{b}(u) = \mathbf{r}(u) + d(u)\mathbf{n}(u), \tag{2.3}$$

où pour  $P \notin \mathbf{r}(u)$ ,

$$d(u) = \frac{|P - \mathbf{r}(u)|^2}{2(P - \mathbf{r}(u)) \cdot \mathbf{n}(u)}, \quad \mathbf{n}(u) = \frac{(y'(u), -x'(u))}{\sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2}}.$$

Si  $P$  appartient à  $r$ ,  $P = \mathbf{r}(u_0)$ , cet point doit être étudié séparément ; si  $\mathbf{r}(u_0)$  est un point singulier, la médiatrice peut être bi-dimensionnelle (voir [58]).

Explicitement, la paramétrisation rationnelle de la médiatrice est donnée par :

$$\mathbf{b}(u) = \left( \frac{X_b(u)}{W_b(u)}, \frac{Y_b(u)}{W_b(u)} \right), \quad (2.4)$$

où dans le cas :

– polynomial (c-à-d pour  $w = 1$ ) :

$$\begin{aligned} X_b(u) &= [\alpha^2 - X^2(u) + (\beta - Y(u))^2] Y'(u) - 2X(u)X'(u)(\beta - Y(u)), \\ Y_b(u) &= 2(\alpha - X(u))Y(u)Y'(u) - X'(u)[(\alpha - X(u))^2 + \beta^2 Y^2(u)], \\ W_b(u) &= 2[(\alpha - X(u))Y'(u) - (\beta - Y(u))X'(u)]. \end{aligned}$$

– rational (c-à-d pour  $W \neq \text{constant}$ ) :

$$\begin{aligned} X_b(u) &= [\alpha^2 W^2(u) - X^2(u) + (\beta W(u) - Y(u))^2] (W(u)Y'(u) \\ &\quad - W'(u)Y(u)) - 2X(u)(\beta W(u) - Y(u))(W(u)X'(u) - W'(u)X(u)), \\ Y_b(u) &= 2Y(u)(\alpha W(u) - X(u))(W(u)Y'(u) - W'(u)Y(u)) \\ &\quad - (W(u)X'(u) - W'(u)X(u))[(\alpha W(u) - X(u))^2 + \beta^2 W^2(u)], \\ W_b(u) &= 2W(u)[(\alpha W(u) - X(u))(W(u)Y'(u) - W'(u)Y(u)) \\ &\quad - (\beta W(u) - Y(u))(W(u)X'(u) - W'(u)X(u))]. \end{aligned}$$

Ainsi, comme illustre la figure 2.1, cette formulation est équivalente à dire que la médiatrice algébrique est le lieu géométrique de centres des cercles qui sont simultanément tangents à la courbe  $r$  et au point  $P$ . En particulier la médiatrice géométrique est donnée par le lieu de centres de cercles qui sont extérieurement (c-à-d aucun des cercles ne peut contenir la courbe ou une partie de la courbe) tangents au point et à la courbe.

### Le processus d'"élagage"

Le processus d'"élagage" dû à Farouki et Johnstone ([54]) qui consiste à éliminer un nombre fini des portions de la médiatrice algébrique qui ne contribuent pas à la médiatrice géométrique, c'est à dire des portions qui ne répondent pas aux critères de la définition (2.1). Les techniques utilisées sont basées sur celles d'"élagage" de parties extérieures pour les courbes offset dans ([56]). Rappelons tout d'abord les deux théorèmes fondamentaux sur lesquels repose le processus d'"élagage"

Rappelons les notions de points particuliers de la courbe médiatrice.

**Définition 33.** Soient  $r$  et  $P$  une courbe et un point, et  $b$  leur courbe médiatrice algébrique.

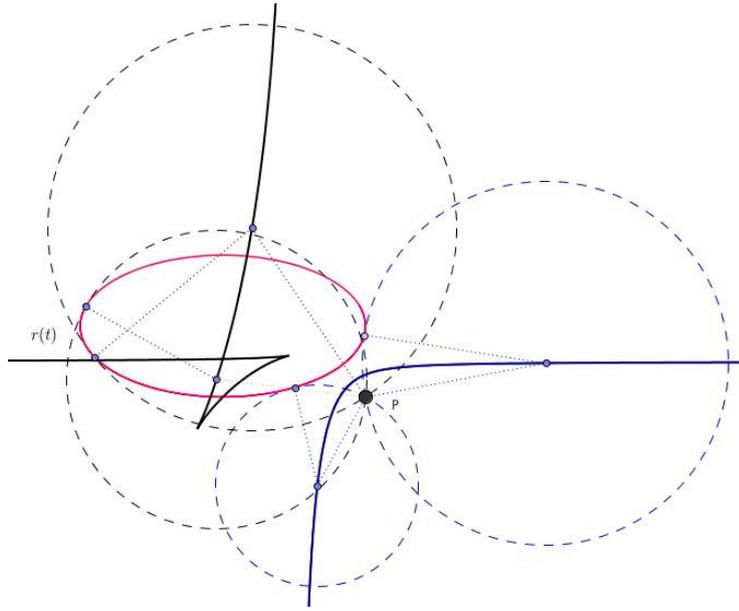


FIGURE 2.1 – La médiatrice géométrique (en bleue) correspond au centres dont les cercles sont extérieurement tangent à la courbe  $r$  et le point  $P$ .

1. On appelle point classe de la courbe  $r$  par rapport au point  $P$  le point correspondant au point à l'infini sur la courbe médiatrice algébrique  $b$ .
2. On appelle point circulaire de la courbe  $r$  par rapport au point  $P$ , le point correspondant au point cuspidal (ou point de rebroussement) sur la courbe médiatrice algébrique  $b$ .

La notion suivante est aussi nécessaire.

**Définition 34.** Un segment d'une courbe médiatrice algébrique est dit actif s'il contribue à la médiatrice géométrique, il est dit inactif dans le cas contraire.

**Théorème 2.1.** (Théorème 3.7 [54]) Soit  $\mathbf{b}(u)$  une paramétrisation d'une courbe médiatrice algébrique d'un point  $P$  et d'une courbe régulière de paramétrisation  $\mathbf{r}(u)$  définie sur un intervalle  $I$ . Alors, si  $\{i_1, \dots, i_M\}$  est un ensemble ordonné de valeurs paramétriques sur  $I$  qui correspondent aux points classes et points circulaire de  $\mathbf{r}(u)$  et si on dénote par  $i_0$  et  $i_{M+1}$  les extrémités de  $I$ , on a :

–  $\mathbf{b}(u)$  est actif pour tout  $u \in [i_k, i_{k+1}]$

ou

–  $\mathbf{b}(u)$  est inactif pour tout  $u \in [i_k, i_{k+1}]$

sur chaque intervalle  $[i_k, i_{k+1}]$  pour  $k = 0, \dots, M$ .

**Théorème 2.2.** (Théorème 3.10 [54]) Soient  $\mathbf{b}(u)$  une paramétrisation d'une courbe médiatrice algébrique d'un point  $P$  et d'une courbe régulière de paramétrisation  $\mathbf{r}(u)$  définie sur un intervalle  $I$ , et  $\{i_1, \dots, i_M\}$  l'ensemble ordonné de valeurs paramétriques sur  $I$  qui correspondent aux extrémités de segments actifs sur  $\mathbf{b}(u)$  ou aux points d'auto-intersection de  $\mathbf{b}(u)$ , c-à-d,  $\mathbf{b}(i_j) = \mathbf{b}(i_k)$  pour  $1 \leq j \neq k \leq M$ . Alors, pour chaque segment actif  $u \in [i_j, i_k]$  (où  $i_j < i_k$ ), on a :

- $\mathbf{b}(u)$  appartient à la médiatrice géométrique, pour tout  $u \in [i_k, i_{k+1}]$

ou

- $\mathbf{b}(u)$  n'appartient pas à la médiatrice géométrique pour tout  $u \in [i_k, i_{k+1}]$

sur chaque intervalle  $[i_l, i_{l+1}]$  pour  $l = j, \dots, k - 1$  entre deux points d'auto-intersection consécutifs sur ce segment actif.

Une fois que la paramétrisation est calculée, le processus d'"élagage" se résume comme suit :

1. Calculer et ordonner les valeurs paramétriques correspondant aux points classes et points circulaires de la courbe  $r$  par rapport au point  $P$ , c-à-d les valeurs paramétriques correspondant respectivement aux points à l'infini et aux points cuspidaux (ou point de rebroussement) sur la médiatrice algébrique.
2. La médiatrice algébrique est ensuite découpée en ces points en des portions, et grâce au Théorème 2.1, toute portion dont le milieu n'appartenant à la médiatrice géométrique, est éliminée.
3. Calculer et ordonner les valeurs paramétriques correspondant aux points d'auto-intersection sur la médiatrice algébrique.
4. Grâce au Théorème 2.2, on répète l'opération 2 pour les points d'auto-intersection, et les portions restantes, qui sont une restriction de la paramétrisation à un certain nombre fini d'intervalles, constitue la médiatrice géométrique.

**Remarque 7.** Ainsi, en présence d'une paramétrisation (rationnelle ou non rationnelle) de la médiatrice algébrique de deux courbes planes, ce même processus pourrait être utilisé pour obtenir la médiatrice géométrique (voir l'exemple 23).

Dans le processus d'"élagage" introduit par Farouki et Johnstone ([54]) pour le cas d'un point  $P$  et d'une courbe  $r$ , les valeurs paramétriques correspondants aux points à l'infini et aux points cuspidaux sur la médiatrice algébrique sont déterminées à partir de la courbe  $r$  et du point  $P$ . En effet ces deux points particuliers, résultent de la position relative de  $r$  et  $P$ , et souvent, d'une certaine forme particulière de la courbe  $r$ . Mais dans le cas de deux courbes, il serait très difficile procéder de la même manière. Nous allons chercher les valeurs paramétriques de ces points particuliers directement à partir de la paramétrisation de la médiatrice algébrique que nous calculons.

### Points particuliers de la médiatrice algébrique

Comme dans le processus d'"élagage", nous aurons besoins de valeur paramétriques correspondants aux points à l'infini, points cuspidaux et points d'auto-intersection pour délimiter les portions de courbe afin d'identifier celles qui contribuent à la médiatrice géométrique, nous aurons besoin d'un rappel sur les définitions et la façon de déterminer les valeurs paramétriques correspondantes.

**Définition 35.** *Soit  $\mathcal{C}$  une courbe paramétrique de paramétrisation*

$$\mathbf{c}(t) = \left( \frac{X(t)}{U(t)}, \frac{Y(t)}{V(t)} \right)^T, t \in I \subset \mathbb{R}.$$

1. *On dit que la courbe  $\mathcal{C}$  admet un point à l'infini, s'il existe une valeur  $t_0 \in I$  de paramètre  $t$  pour laquelle on a*

$$U(t_0) = 0 \text{ ou } V(t_0) = 0 \text{ et } X(t_0) \neq 0 \text{ et } Y(t_0) \neq 0. \quad (2.5)$$

2. *On dit qu'un point  $Q = \mathbf{c}(t_0)$  est un point de rebroussement ou cusp de la courbe  $\mathcal{C}$ , s'il vérifie :*

$$\mathbf{c}'(t_0) = \mathbf{0}. \quad (2.6)$$

3. *On dit qu'un point  $Q := \mathbf{c}(t_0)$  de  $\mathcal{C}$  est un point d'auto-intersection ou point multiple, s'il existe  $t_1 \in I, t_0 \neq t_1$  tels que  $\mathbf{c}(t_0) = \mathbf{c}(t_1)$ .*

### Détermination de valeurs paramétriques correspondantes

La détermination de valeurs paramétriques correspondant aux points particuliers sur une courbe constitue un domaine de recherche actif dans l'étude des courbes paramétriques, et la plupart de méthodes pour leur calcul, sont établies pour les courbes qui possèdent une paramétrisation rationnelle. Mais dans notre situation, nous aurons à traiter les courbes médiatrices données par des paramétrisations qui, en général, ne sont pas rationnelles. Ainsi donc, dans le cas rationnel, nous pouvons utiliser les méthodes classiques et dans le cas non rationnel nous allons utiliser la définition pour déterminer les valeurs paramétriques. Nous allons donner, cas par cas, pour chaque type de point, la méthode de calcul :

1. Pour le point à l'infini sur une courbe paramétrique (rationnelle ou non rationnelle), pour déterminer les valeurs paramétriques correspondantes, il suffit de chercher les valeurs de  $t_0$  vérifiant la condition (2.5).
2. Pour le point de rebroussement, distinguons les cas rationnel et non rationnel :
  - (a) Dans le cas où la paramétrisation de la courbe est rationnelle, plusieurs méthodes ont été proposées (voir [87], [94], [95] et [102]). Pour déterminer les valeurs paramétriques qui correspondent au point de rebroussement on peut résoudre le système (2.6), soit utiliser la méthode de Li et Cripps ([87]) qui paraît la plus simple et directe. Cette dernière consiste à dire que, pour une courbe rationnelle de paramétrisation

$$\mathbf{c}(t) = \left( \frac{X(t)}{W(t)}, \frac{Y(t)}{W(t)} \right)^T$$

qui peut s'écrire en coordonnées homogènes

$$\mathbf{r}(t) = (X(t), Y(t), W(t))^T,$$

une valeur paramétrique  $t_0$  qui est racine double de

$$\left\langle \mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t) \right\rangle = \begin{vmatrix} X(t) & Y(t) & W(t) \\ X'(t) & Y'(t) & W'(t) \\ X''(t) & Y''(t) & W''(t) \end{vmatrix} = 0 \quad (2.7)$$

correspond au point cuspidal.

- (b) Si la paramétrisation de la courbe n'est pas rationnelle, nous allons utiliser la définition pour déterminer les valeurs paramétriques correspondantes aux points cuspidaux. Plus précisément, pour une courbe  $\mathcal{C}$  de paramétrisation non rationnelle donnée par :

$$c(t) = (X(t), Y(t))^T, t \in I$$

avec  $X$  et  $Y$  sont des fonctions non-rationnelles, les valeurs paramétriques correspondant aux points cuspidaux sur  $\mathcal{C}$  sont données par la solution commune de deux équations

$$\begin{cases} X'(t) = 0 \\ Y'(t) = 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

Il faut noter que la résolution d'un tel système n'est pas évident, car ça contient des fonctions non-rationnelles et aussi des puissances élevées. Cependant dans notre cas de courbe médiatrice, nous avons à traiter avec des fonctions racines carrées, nous allons utiliser de résolution numérique à l'aide du logiciel Maple pour déterminer les valeurs paramétriques approximatives si elles existent.

3. Pour le point d'auto-intersection, nous allons aussi distinguer le cas rationnel du cas non rationnel :

- (a) Dans le cas où la paramétrisation de la courbe est rationnelle, la méthode la plus utilisée pour calculer les valeur paramétriques correspondantes aux points d'auto-intersection est celle de D-résultant ([49] et [71]). Pour une courbe rationnelle  $\mathcal{C}$  de paramétrisation

$$\mathbf{c}(t) = (X(t), Y(t))^T,$$

au lieu de résoudre le système

$$\begin{cases} X(t) = X(s) \\ Y(t) = Y(s), \end{cases} \quad (2.9)$$

La méthode consiste calculer et à résoudre le résultant du système

$$\begin{cases} F(t, s) = 0 \\ G(t, s) = 0, \end{cases} \quad (2.10)$$

où

$$F(t, s) = \begin{cases} \frac{X(t) - X(s)}{t - s} & \text{si } X \text{ est polynomiale,} \\ \frac{P(t)R(s) - P(s)R(t)}{t - s} & \text{si } X = \frac{P}{R}, \text{ est rationnelle.} \end{cases}$$

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{Y(t) - Y(s)}{t - s} & \text{si } Y \text{ est polynomiale,} \\ \frac{Q(t)R(s) - Q(s)R(t)}{t - s} & \text{si } Y = \frac{Q}{R}, \text{ est rationnelle,} \end{cases}$$

$$\text{resultant}_t(F(s, t), G(s, t)) = 0. \quad (2.11)$$

par rapport à  $t$ .

Les solutions de l'équation (2.11) déterminent les valeurs paramétriques correspondant aux point d'auto-intersection (voir [16] et [102]).

(b) Dans le cas où la courbe  $\mathcal{C}$  possède une paramétrisation non rationnelle

$$\mathbf{c}(t) = (X(t), Y(t))^T,$$

nous allons tout simplement procéder à la résolution du système

$$\begin{cases} X(t) = X(s) \\ Y(t) = Y(s), \end{cases} \quad (2.12)$$

de façon numérique comme dans le cas des points cuspidaux.

**Exemple 22.** Pour une ellipse et un point donnés par

$$\mathbf{r}(t) = \left( \frac{4t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2} \right)^T \text{ et } \mathbf{P} = (2, -1),$$

La paramétrisation de leur médiatrice algébrique est donnée par :

$$\mathbf{b}(t) = \left( \frac{t(2t^2 - 2 + t^4)}{(-1+t)(t^2+1)^2}, \frac{(5t^2 + 1 - 3t^3 - 3t + t^4)(t^2 - 1)}{(-1+t)(t^2+1)^2} \right)^T.$$

1. Les valeurs paramétriques correspondant au point à l'infini de la médiatrice algébrique est donnée par la solution de l'équation :

$$(-1+t)(t^2+1)^2 = 0$$

c-à-d :  $t_\infty = \{1\}$

2. Les valeurs paramétriques correspondant au point de rebroussement est donnée par la solution commune du système d'équations

$$\mathbf{b}'(t) = \mathbf{0}$$

c-à-d

$$\begin{cases} -t^6 - 3t^4 + 12t^3 - 12t^2 + 2 = 0 \\ -t^8 + 2t^7 - 4t^6 + 18t^5 - 39t^4 + 36t^3 - 10t^2 - 4t + 2 = 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

Une résolution numérique du système nous donne les solutions communes suivantes :

$$t_{cusp} = \{-0.3476409716, 0.5639956260\}$$

En ordonnant les valeurs  $t_\infty$  et  $t_{cusp}$ , on obtient les intervalles suivants :

$$]-\infty, -0.347640971] \cup [-0.347640971, 0.5639956260] \cup [0.5639956260, 1] \cup [1, +\infty[.$$

On va vérifier parmi les quatre intervalles, celui qui correspond à la portion de la médiatrice géométrique. On calcule le point qui correspond à la valeur paramétrique du milieu de chaque intervalle et pour les intervalles extrêmes (non bornés), il suffit de calculer un point qui correspond à une valeur paramétrique quelconque qui est strictement contenue dans l'intervalle (c-à-d une valeur qui n'appartient pas à la frontière de l'intervalle).

– Pour l'intervalle  $]-\infty, -0.347640971]$ , on prend par exemple la valeur  $t = -2$ , et on calcule le point de la médiatrice algébrique correspondant, on obtient :

$$A_1 = \mathbf{b}(-2) = \left(\frac{44}{75}, \frac{67}{25}\right).$$

Ensuite on vérifie si ce point appartient à la médiatrice géométrique de  $r$  et  $P$ , pour cela on calcule les distances minimales de du point  $A_1$  à  $r$  et à  $P$  :

$$d(A_1, r) = 1.71 \neq d(A_1, P) = 3.94.$$

Donc le point  $A_1$  n'appartient pas à la médiatrice géométrique et par conséquent la portion de la médiatrice algébrique qui correspond à l'intervalle  $]-\infty, -0.3476409]$ , ne contribue pas à la médiatrice géométrique.

– Pour l'intervalle  $[-0.347640971, 0.5639956260]$ , on calcule le point de la médiatrice algébrique qui correspond à la valeur paramétrique de son milieu :  $t = 0.1081773272$ , on obtient :

$$A_2 = \mathbf{b}(0.1081773272) = (0.2342285924, -0.7907082459).$$

Ensuite on vérifie si ce point appartient à la médiatrice géométrique de  $r$  et  $P$ , pour cela on calcule les distances minimales de du point  $A_2$  à  $r$  et à  $P$  :

$$d(A_2, r) = 0.2 \neq d(A_2, P) = 1.78.$$

Donc le point  $A_2$  n'appartient pas à la médiatrice géométrique et par conséquent la portion de la médiatrice algébrique qui correspond à l'intervalle  $[-0.347640971, 0.5639956260]$ , ne contribue pas à la médiatrice géométrique.

– Pour l'intervalle  $[0.5639956260, 1]$  on calcule le point de la médiatrice algébrique qui correspond à la valeur paramétrique de son milieu :  $t = 0.7819978130$ , on obtient :

$$A_3 = \mathbf{b}(0.7819978130) = (0.5566465916, -0.4466618118).$$

Ensuite on vérifie si ce point appartient à la médiatrice géométrique de  $r$  et  $P$ , pour cela on calcule les distances minimales de du point  $A_3$  à  $r$  et à  $P$  :

$$d(A_3, r) = 0.51 \neq d(A_3, P) = 1.55.$$

Donc le point  $A_3$  n'appartient pas à la médiatrice géométrique et par conséquent la portion de la médiatrice algébrique qui correspond à l'intervalle  $[0.5639956260, 1]$ , ne contribue pas à la médiatrice géométrique.

- Pour l'intervalle  $[1, +\infty[$  on prend par exemple la valeur  $t = 2 \in [1, +\infty[$ , et on calcule le point de la médiatrice algébrique correspondant, on obtient :

$$A_4 = \mathbf{b}(2) = \left( \frac{44}{25}, -\frac{21}{25} \right).$$

Ensuite on vérifie si ce point appartient à la médiatrice géométrique de  $r$  et  $P$ , pour cela on calcule les distance minimale de du point  $A_4$  à  $r$  et à  $P$  :

$$d(A_4, r) = 0.29 = d(A_4, P) = 0.29.$$

Donc le point  $A_4$  appartient à la médiatrice géométrique et par conséquent la portion de la médiatrice algébrique qui correspond à l'intervalle  $[1, +\infty[$ , contribue à la médiatrice géométrique.

Toutes les portions correspondant autres intervalles seront éliminées pour poursuivre l'étape suivante avec l'unique portion qui correspond à l'intervalle  $[1, +\infty[$ .

3. Les valeurs paramétriques qui correspond aux points d'auto-intersection se calculent de la façon suivante : En posant

$$\begin{aligned} P(t) &= t(2t^2 - 2 + t^4), \\ Q(t) &= -(5t^2 + 1 - 3t^3 - 3t + t^4)(t^2 - 1), \\ R(t) &= (-1 + t)(t^2 + 1)^2, \end{aligned}$$

on peut écrire

$$\mathbf{b}(t) = \left( \frac{P(t)}{R(t)}, \frac{Q(t)}{R(t)} \right)^T.$$

Ainsi avec

$$\begin{aligned} F(s, t) &= \frac{P(t)R(s) - P(s)R(t)}{t - s} \\ &= -s^4t^4 - 2s^4t^2 - 2s^2t^4 + 3s^4t + 3s^3t^2 + 3s^2t^3 + 3st^4 \\ &\quad - s^4 - 3s^3t - 7s^2t^2 - 3st^3 - t^4 + 6s^2t + 6st^2 - 2s^2 \\ &\quad - 6st - 2t^2 + 2 \\ G(s, t) &= \frac{Q(t)R(s) - Q(s)R(t)}{t - s} \\ &= -s^5t^5 + s^5t^4 + s^4t^5 - 2s^5t^3 - s^4t^4 - 2s^3t^5 + 2s^5t^2 \\ &\quad + 8s^4t^3 + 8s^3t^4 + 2s^2t^5 - s^5t - 11s^4t^2 - 19s^3t^3 \\ &\quad - 11s^2t^4 - st^5 + s^5 + 7s^4t + 19s^3t^2 + 19s^2t^3 + 7st^4 \\ &\quad + t^5 - 4s^4 - 11s^3t - 19s^2t^2 - 11st^3 - 4t^4 + 5s^3 \\ &\quad + 11s^2t + 11st^2 + 5t^3 - 2s^2 - 4st - 2t^2 - 2s - 2t + 2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
H(s) &= \text{resultant}_t(F(s, t), G(s, t)) \\
&= (s - 1)^4 (-81 s^{36} + 243 s^{35} - 1701 s^{34} + 6075 s^{33} \\
&\quad - 23328 s^{32} + 71685 s^{31} - 209709 s^{30} + 540675 s^{29} \\
&\quad - 1288629 s^{28} + 2773602 s^{27} - 5451462 s^{26} + 9715140 s^{25} \\
&\quad - 15752718 s^{24} + 23120478 s^{23} - 30742902 s^{22} + 36735282 s^{21} \\
&\quad - 39184479 s^{20} + 36593127 s^{19} - 28856169 s^{18} + 17338779 s^{17} \\
&\quad - 4719060 s^{16} - 6200631 s^{15} + 13179591 s^{14} - 15609105 s^{13} \\
&\quad + 14217201 s^{12} - 10615212 s^{11} + 6608628 s^{10} - 3306258 s^9 \\
&\quad + 1232010 s^8 - 222588 s^7 - 104004 s^6 + 117612 s^5 - 59292 s^4 \\
&\quad + 15552 s^3 - 1944 s + 648)
\end{aligned}$$

les valeurs paramétriques correspondant aux points d'auto-intersection sont solutions simples de l'équation

$$H(s) = 0.$$

Une résolution numérique nous donne les solutions suivant :

$$\{\pm 0.8555996772, -0.3476409716, -0.3476409716, 0.5639956260, 0.5639956260\},$$

et les valeur paramétriques correspondant à l'unique point d'auto-intersection sont données par

$$t_{self} = \{\pm 0.8555996772, \}$$

et le point est donné par

$$\mathbf{b}(-0.8555996772) = \mathbf{b}(0.8555996772) = (0., -0.4641016148).$$

Mais ces valeur paramétriques n'appartiennent pas à l'intervalle  $[1, +\infty[$  ( $\pm 0.8555996772 \notin [1, +\infty[$ ), donc aucune opération n'est nécessaire.

On conclut que la médiatrice géométrique de  $r$  et  $P$  est donnée par la restriction de la paramétrisation  $\mathbf{b}(t)$  à l'intervalle  $]1, +\infty[$ . La figure 2.2 montre la médiatrice algébrique et la médiatrice géométrique.

### 2.1.2 La médiatrice de deux courbes rationnelles planes

Le cas de la médiatrice de deux courbes planes est l'un des plus grands défis du thème de la médiatrice, tant pour le calcul de la représentation et de sa rationalité, que pour le processus d' "élagage" de parties extérieures à la médiatrice géométrique. Soient  $\mathbf{r}(u)$  et  $\mathbf{s}(v)$  les paramétrisations respectives de deux courbes planes rationnelles, en se basant du cas point-courbe, la représentation de leur médiatrice algébrique peut être déterminée comme suit (voir [53]) :

- Premièrement, nous calculons la paramétrisation de l'enveloppe (i.e : la famille à un paramètre) de courbes médiatrices d'un point fixe sur la courbe  $s$  pour

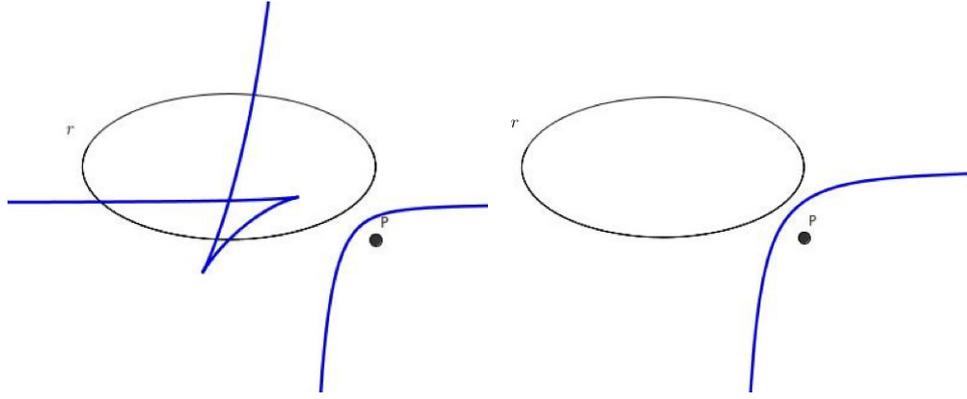


FIGURE 2.2 – La médiatrice algébrique à gauche et la médiatrice géométrique à droite du point  $P$  et de l'ellipse  $r$  de l'exemple 22.

$v = \lambda$ , et la courbe  $r$  toute entière, c-à-d la paramétrisation de la médiatrice d'un point  $s(\lambda)$  et de la courbe  $r$  :

$$\mathbf{b}_\lambda(u) = \left( \frac{X_{b\lambda}(u)}{W_{b\lambda}(u)}, \frac{Y_{b\lambda}(u)}{W_{b\lambda}(u)} \right)^T. \quad (2.14)$$

- Ensuite, nous déterminons la représentation implicite de l'enveloppe  $\mathbf{b}_\lambda$ , par implication de la paramétrisation (2.14). Pour cela il suffit d'éliminer le paramètre  $u$  du système

$$\begin{cases} x \cdot W_{b\lambda}(u) - X_{b\lambda}(u) = 0 \\ y \cdot W_{b\lambda}(u) - Y_{b\lambda}(u) = 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

par rapport à  $u$ . Ainsi, en calculant le résultant de (2.15), on obtient la représentation implicite de  $\mathbf{b}_\lambda$  :

$$F_\lambda(x, y) = \text{résultat}_u(x \cdot W_{b\lambda}(u) - X_{b\lambda}(u), y \cdot W_{b\lambda}(u) - Y_{b\lambda}(u)) = 0 \quad (2.16)$$

- Puis, on détermine l'équation implicite de la médiatrice algébrique des courbes  $r$  et  $s$  en calculant le discriminant de (2.16) par rapport à  $\lambda$  :

$$F(x, y) = \text{discrim}(F_\lambda(x, y), \lambda) = 0 \quad (2.17)$$

- Finalement, nous explorons la possibilité de la paramétrisation de (tous les facteurs irréductibles de) l'équation (2.17) en calculant son genre .

**Remarque 8.** Tout comme le cas d'un point et d'une courbe, la médiatrice algébrique contient des parties extérieures à élaguer. Si une paramétrisation est disponible, l'"élagage" peut être facilement effectué, en identifiant et éliminant les portions, qui n'appartiennent pas à la médiatrice géométrique, délimitées par des points particuliers. Mais, en générale, l'équation implicite de la médiatrice ne possède pas une

paramétrisation rationnelle et souvent elle est de degré très élevé, car pour

$$d_1 = \deg(r) \leq 3, d_2 = \deg(s) \leq 6,$$

le degré de l'équation implicite de la médiatrice est donné par (voir [44]) :

$$7d_1d_2 - 3(d_1 + d_2) + 1$$

et le processus d'"élagage" devient difficile. Ainsi, la plupart des résultats disponibles dans la littérature pour la représentation de la médiatrice de deux courbes planes rationnelles, sont approximatifs.

**Exemple 23.** Soient

$$\mathbf{r}(t) = (t, t^2 - 2)^T \text{ et } \mathbf{s}(u) = \left( \frac{2u}{u^2 + 1}, \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1} \right)^T,$$

les paramétrisations respectives d'une parabole et d'un cercle. Nous allons calculer la représentation de leur médiatrice algébrique et procéder à son "élagage" pour réaliser leur médiatrice géométrique en utilisant le même procédé d'"élagage" pour la médiatrice algébrique d'un point et d'une courbe, par Farouki et Johnstone.

1. La représentation de la médiatrice :

Fixons la parabole  $r$  et prenons  $u = \lambda$  sur le le cercle  $s$ , nous obtenons :

(a) La paramétrisation de l'enveloppe (i.e : la famille) des médiatrices de la courbe  $r$  et du point  $\mathbf{s}(\lambda)$ , (parcourant le cercle  $s$  tout entier) est donnée par :

$$\mathbf{b}_\lambda(t) = \left( -\frac{t(-6t^2 - 2t^2\lambda^2 + 6 + t^4\lambda^2 + t^4)}{-4t\lambda + t^2 + t^2\lambda^2 + 3 + \lambda^2}, \frac{-8t^3\lambda + 3t^4 + 3t^4\lambda^2 - 3t^2 - 3t^2\lambda^2 + 12t\lambda - 3 - 3\lambda^2}{2(-4t\lambda + t^2 + t^2\lambda^2 + 3 + \lambda^2)} \right)^T$$

(b) L'équation implicite de  $\mathbf{b}_\lambda$  est donnée par :

$$\begin{aligned}
 F_\lambda(x, y) = & \frac{1}{(\lambda^2 + 1)^8} (16(121\lambda^2 + 9))(3\lambda^4 + 1)^2 (-27 + 54y \\
 & - 81\lambda^2 - 81\lambda^4 - 486y\lambda^4 - 162y\lambda^2 - 324x\lambda \\
 & - 648x\lambda^3 - 270\lambda^6y - 324x\lambda^5 - 792y^2\lambda^6 - 360y^2\lambda^4 \\
 & + 504y^2\lambda^2 + 72y^2 + 297x^2\lambda^6 - 261x^2\lambda^4 - 432y^3\lambda^6 \\
 & + 1104y^3\lambda^4 + 432y^3\lambda^2 - 261x^2\lambda^2 + 378x^2y + 297x^2 \\
 & - 1728x\lambda^3y + 288x\lambda y - 2016x\lambda^5y - 2400x\lambda^5y^2 \\
 & + 1344x\lambda^3y^2 + 672x\lambda y^2 + 810x^2\lambda^6y - 1074x^2\lambda^4y \\
 & + 1566x^2\lambda^2y + 396x^2\lambda^6y^2 + 1412x^2\lambda^4y^2 \\
 & + 1124x^2\lambda^2y^2 - 27\lambda^6 - 80y^3 - 112y^4 + 108x^2y^2 \\
 & + 432x^3\lambda^5 - 160x^3\lambda^3 + 528y^4\lambda^6 + 432y^4\lambda^4 \\
 & - 208y^4\lambda^2 + 1152x\lambda^5y^3 + 1280x\lambda^3y^3 + 128x\lambda y^3 \\
 & + 432\lambda x^3 + 288x^3\lambda^5y + 576x^3\lambda^3y + 288x^3\lambda y \\
 & - 8x^2y^3 + 81x^4\lambda^4 + 27x^4\lambda^6 + 81x^4\lambda^2 + 27x^4 \\
 & - 32y^5 - 8x^2\lambda^6y^3 - 24x^2\lambda^4y^3 - 24x^2\lambda^2 + y^3 \\
 & - 224y^5\lambda^4 - 96y^5\lambda^6 - 160y^5\lambda^2 - 64y^4\lambda^5x \\
 & - 128y^4\lambda^3x - 64x\lambda y^4) = 0
 \end{aligned}$$

(c) L'équation implicite de la médiatrice algébrique de la courbe  $r$  et  $s$  est obtenue en éliminant le paramètre  $\lambda$  :

$$\begin{aligned}
 F(x, y) = & \text{discrim}(F_\lambda(x, y), \lambda) \\
 = & 729 + 5832y + 64x^4y^6 - 432x^6y^3 - 320x^4y^5 \\
 & - 22272x^2y^7 - 216x^6y^2 + 45008x^4y^4 \\
 & - 64896x^2y^6 - 14004x^6y + 114656x^4y^3 \\
 & - 23232x^2y^5 + 179148x^4y^2 + 14880x^2y^4 \\
 & + 120636x^4y - 163152x^2y^3 - 287496x^2y^2 \\
 & - 153252x^2y + 729x^8 - 7258x^6 + 27135x^4 \\
 & - 26730x^2 - 48384y^3 - 69984y^4 + 94464y^5 \\
 & + 164736y^6 + 24576y^7 - 37632y^8 - 6144y^9 \\
 & + 3072y^{10} + 4860y^2 = 0
 \end{aligned}$$

(d) Le genre de la courbe définie par  $F(x, y) = 0$  est nul. Alors, elle est donc rationnelle et sa paramétrisation calculée à l'aide de Maple est donnée par :

$$\mathbf{b}(t) = \left( \frac{X_1(t)}{V(t)}, \frac{Y_1(t)}{W(t)} \right)^T,$$

avec

$$\begin{aligned}
 X_1(t) &= 3072t^9 - 36238786560t^7 + 128247036263792640t^5 \\
 &\quad - 121029087867608368152576t^3 \\
 V(t) &= t^{10} - 14155776t^8 + 83494164234240t^6 \\
 &\quad - 249517433754834960384t^4 \\
 &\quad + 371801357929292906964713472t^2 \\
 &\quad - 219297364139287259557555158908928 \\
 Y_1(t) &= -t^8 + 16515072t^6 - 116891829927936t^4 \\
 &\quad + 354577405862133891072t^2 \\
 &\quad - 278851018446969680223535104 \\
 W(t) &= 2t^8 - 23592960t^6 + 111325552312320t^4 \\
 &\quad - 236384937241422594048t^2 \\
 &\quad + 185900678964646453482356736
 \end{aligned}$$

2. En utilisant le même processus d'"élagage" de l'exemple 22, nous avons :

(a) Les points à l'infini et aux cuspidés

Les valeurs paramétriques correspondantes aux points à l'infini et aux deux (2) cuspidés sur la médiatrice algébrique sont respectivement données par :

$$t_\infty = \{\pm 1536, 0\}, t_{cusps} = \{\pm 3219.582574\}.$$

En découpant la médiatrice algébrique en des portions, délimitées par des points correspondants à ces valeurs paramétriques et ensuite en vérifiant si le point correspondant au milieu de chaque intervalle de paramètre appartient à la médiatrice géométrique (c-à-d s'il vérifie la condition (2.1)), nous trouvons que seule la portion définie par la restriction de  $\mathbf{b}$  à l'intervalle  $[-1536, 1536]$ , contribue à la médiatrice géométrique, (voir la figure 2.3) car le point  $A = (0, -\frac{3}{2})$  correspondant à la valeur paramétrique  $t = 0$ , milieu de  $[-1536, 1563]$ , vérifie (2.1).

(b) Les points d'auto-intersection

Les valeurs paramétriques correspondantes aux cinq (5) points d'auto-intersection de médiatrice algébrique sont par :

$$\begin{aligned}
 t_{self} &= \{\pm 2362.658306, \pm 2172.232032, \pm 2080.725816, \pm 1223.001933, \\
 &\quad \pm 1167.586313\},
 \end{aligned}$$

En découpant la portion résultante de la première étape, délimitée par des points correspondants à ces valeurs paramétriques et ensuite en vérifiant si le point correspondant au milieu de chaque intervalle de paramètre appartient à la médiatrice géométrique, nous trouvons que la médiatrice géométrique est définie par la restriction de paramétrisation  $\mathbf{b}$  aux intervalles :

$$\begin{aligned}
 &[-1223.001, -1167.586] \cup [-1167.586, 1167.586] \cup [1167.586, 1223.001] \\
 &= [-1223.001, 1223.001]
 \end{aligned}$$



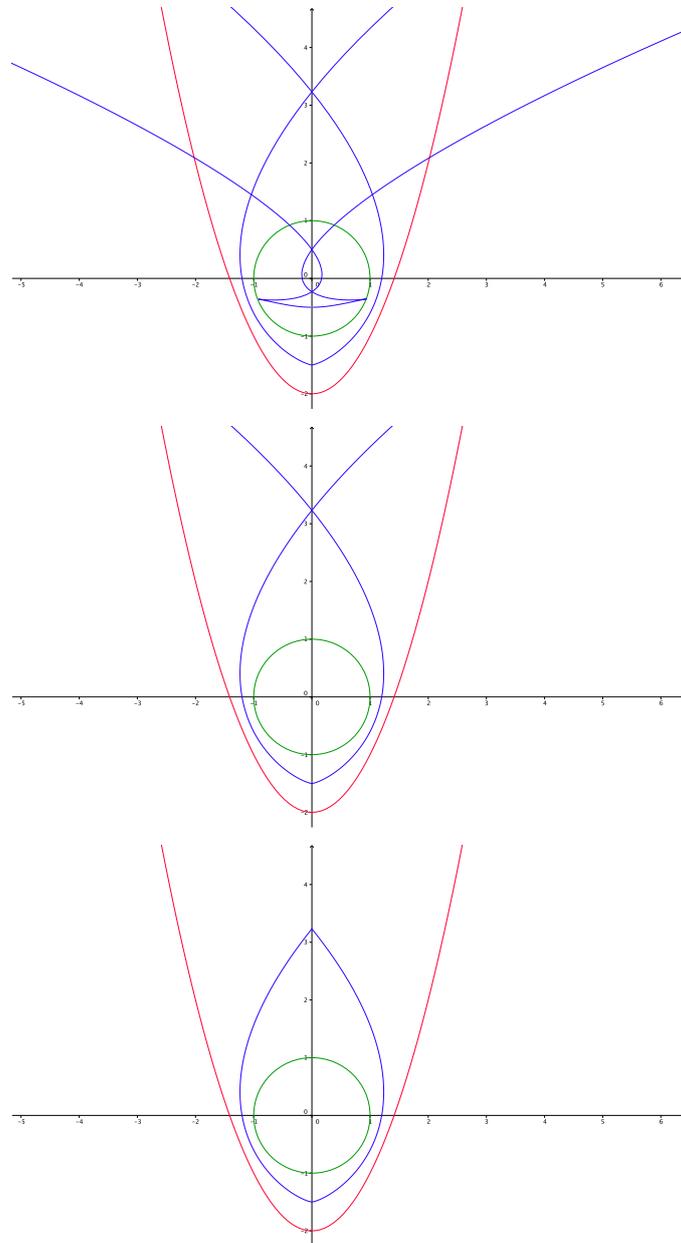


FIGURE 2.3 – La figure correspondant à l'exemple 23 : du haut en bas, on a successivement : la médiatrice algébrique(bleue), la portion résultante issue de la première étape (en bleue) et la médiatrice géométrique (en bleue), du cercle (vert) et de la parabole (rouge).

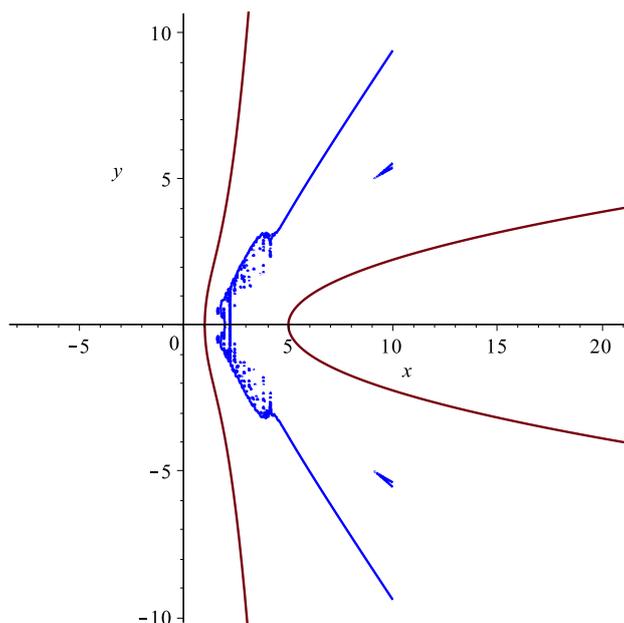


FIGURE 2.4 – la figure correspondante de l'exemple 24 : la médiatrice algébrique (bleue) d'une parabole (rouge) et une quartique (rouge).

## 2.2 La paramétrisation de la médiatrice d'un cercle ou droite et d'une courbe rationnelle

Dans cette section, nous allons présenter une nouvelle approche algorithmique pour calculer une paramétrisation algébrique de la médiatrice algébrique de deux courbes rationnelles planes dont l'une, au moins, est un cercle ou une droite. Dans le cas d'un cercle ou d'une droite et une PH-courbe nous obtenons une paramétrisation rationnelle, ce qui coïncide avec le résultats de [44, 103]. En générale la paramétrisation est non rationnelle et peut être utilisée dans le processus d'"élagage".

Rappelons tout d'abord la définition et les équations de la médiatrice algébrique.

### 2.2.1 Définition et équations de la médiatrice algébrique

Donnons la définition de la médiatrice algébrique de deux courbes rationnelles.

**Définition 36.** *Soient  $s$  et  $r$  deux courbes rationnelles et régulières du plan, leur médiatrice algébrique, peut être définie comme l'ensemble de centres des cercles qui sont simultanément tangents aux deux courbes.*

En traduisant cette définition, nous avons :

#### Equations

Soient  $\mathbf{s}(u)$  et  $\mathbf{r}(t)$  les paramétrisations respectives de deux courbes rationnelles planes  $s$  et  $r$ . Un point  $\mathbf{B} = (x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ , appartient à la médiatrice algébrique de deux courbes, s'il vérifie le système d'équations suivant :

– Le point  $\mathbf{B}$  appartient aux normales de  $s$  et  $r$  en  $\mathbf{s}(u)$  et  $\mathbf{r}(t)$  respectivement :

$$\begin{aligned}\langle (x, y) - \mathbf{s}(u), \mathbf{s}'(u) \rangle &= 0, \\ \langle (x, y) - \mathbf{r}(t), \mathbf{r}'(t) \rangle &= 0,\end{aligned}\tag{2.18}$$

– Le point  $\mathbf{B}$  est à égales distances à partir de  $\mathbf{s}(u)$  et  $\mathbf{r}(t)$

$$\langle (x, y), 2(\mathbf{r}(t) - \mathbf{s}(u)) \rangle + \|\mathbf{s}(u)\|^2 - \|\mathbf{r}(t)\|^2 = 0.\tag{2.19}$$

Les équations (2.18) peuvent être écrites sous la forme matricielle suivante

$$\mathbf{A} \mathbf{B} = \mathbf{V},\tag{2.20}$$

où

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}'_x(u) & \mathbf{s}'_y(u) \\ \mathbf{r}'_x(t) & \mathbf{r}'_y(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{s}(u), \mathbf{s}'(u) \rangle \\ \langle \mathbf{r}(t), \mathbf{r}'(t) \rangle \end{bmatrix}.$$

Si les vecteurs tangents correspondants sont parallèles et que les courbes ne sont pas tangentes, les points de la médiatrice est le point médian du segment entre  $\mathbf{r}(u)$  et  $\mathbf{s}(t)$ . Si les courbes sont tangentes on peut avoir une demi-droite des points dans la médiatrice, correspondant au point  $\mathbf{r}(u) = \mathbf{s}(t)$  où les courbes sont tangentes (voir [24] et [53]). Donc nous supposons que les vecteurs tangents ne sont pas parallèles et par conséquent  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ . De plus, nous supposons des cas pour lesquels le vecteur  $\mathbf{V}$  est non nul d'autant que nous considérons que des courbes non-parallèles (telles qu'une courbe et sa courbe offset).

## 2.2.2 L'approche générale

Notre approche consiste :

1. Tout d'abord, à résoudre le système (2.20) pour  $\mathbf{B}$  en fonction de  $u$  et  $t$ , en utilisant la règle de Cramer (classique). Ainsi sous la condition  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ , nous avons :

$$\mathbf{B}(u, t) = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{V},\tag{2.21}$$

et en substituant  $\mathbf{B}(u, t)$  dans (2.19) on obtient :

$$F(u, t) = \langle \mathbf{B}(u, t), 2(\mathbf{r}(t) - \mathbf{s}(u)) \rangle + \|\mathbf{s}(u)\|^2 - \|\mathbf{r}(t)\|^2 = 0.\tag{2.22}$$

2. Ensuite, exprimer si possible un paramètre, disons  $u$ , en fonction du paramètre  $t$  à partir de l'équation (2.22) (selon le degré de  $F$  en  $u$  on peut obtenir  $m, m \geq 1$  expressions comme solutions) soit

$$u_i = u_i(t), \quad i = 1, \dots, m.$$

3. Enfin, en substituant  $u$  par  $u_i(t)$ , dans  $\mathbf{B}(u, t)$  nous obtenons la paramétrisation de la courbe médiatrice algébrique de la forme :

$$\mathbf{b}_i(t) = \mathbf{B}(u_i(t), t) = [x_i(t), y_i(t)]^T, \quad i = 1, \dots, m,$$

où,  $x_i(t), y_i(t)$  sont en générale des fonctions non rationnelles.

Le processus se résume dans l'algorithme suivant :

---

**Algorithme 3. Paramétrisation algébrique de la médiatrice de deux courbes rationnelles planes**

---

**Input :**  $\mathbf{s}(u)$  et  $\mathbf{r}(t)$ , les paramétrisations rationnelle de deux courbes

**Output :**  $\mathbf{b}_1(t), \dots, \mathbf{b}_m(t)$ , les composantes de la paramétrisation algébrique de la médiatrice algébrique de courbes  $s$  et  $r$

1. Calculons la matrice inverse de  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A}^{-1}$  avec  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ .
2. Résolvons le système (2.20) pour  $\mathbf{B}$  en fonction de  $u$  et  $t$  :

$$\mathbf{B}(u, t) = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{V}.$$

3. Exprimons  $u$  en fonction de  $t$  à partir de  $F(u, t) = 0$  :

$$u = u_i(t), i = 1, \dots, m.$$

4. Substituons  $u$  par  $u_i(t)$  dans  $\mathbf{B}(u, t)$  pour obtenir une paramétrisation pour la médiatrice algébrique de la forme

$$\mathbf{b}_i(t) = \mathbf{B}(u_i, t) = [x_i(t), y_i(t)]^T, i = 1, \dots, m.$$

---

Cet algorithme nous permet de calculer aisément la paramétrisation algébrique de la médiatrice de deux courbes rationnelles planes dont l'une est une droite ou un cercle.

### 2.2.3 La paramétrisation algébrique de la médiatrice d'une droite et d'une courbe rationnelle

Dans le cas d'une droite et d'une courbe rationnelle régulière de paramétrisations respectives

$$\mathbf{s}(u) = (\alpha_1 u + \beta_1, \alpha_2 u + \beta_2)^T \text{ et } \mathbf{r}(t) = (a(t), b(t))^T,$$

l'algorithme s'applique comme suit :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ a'(t) & b'(t) \end{bmatrix}, \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \alpha_1^2 u + \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2^2 u + \alpha_2 \beta_2 \\ a'(t) a(t) + b'(t) b(t) \end{bmatrix}.$$

Pour  $\alpha_2 a'(t) - \alpha_1 b'(t) \neq 0$ , on a

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{b'(t)}{-\alpha_1 b'(t) + \alpha_2 a'(t)} & \frac{\alpha_2}{-\alpha_1 b'(t) + \alpha_2 a'(t)} \\ \frac{a'(t)}{-\alpha_1 b'(t) + \alpha_2 a'(t)} & -\frac{\alpha_1}{-\alpha_1 b'(t) + \alpha_2 a'(t)} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(u, t) &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{V} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{-b'(t)\alpha_1^2u - b'(t)\alpha_1\beta_1 - b'(t)\alpha_2^2u - b'(t)\alpha_2\beta_2 + \alpha_2a'(t)a(t) + \alpha_2b'(t)b(t)}{-\alpha_1b'(t) + \alpha_2a'(t)} \\ -\frac{a'(t)\alpha_1^2u - a'(t)\alpha_1\beta_1 - a'(t)\alpha_2^2u - a'(t)\alpha_2\beta_2 + \alpha_1a'(t)a(t) + \alpha_1b'(t)b(t)}{-\alpha_1b'(t) + \alpha_2a'(t)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

et en substituant  $\mathbf{B}(t, u)$  dans (2.19), l'équation résultante  $F(u, t) = 0$  est quadratique en  $u$  et nous avons le résultat suivant :

**Théorème 2.3.** Soit  $\underline{\sigma}(t) = \sqrt{a'(t)^2 + b'(t)^2}$  la norme du vecteur vitesse de la courbe  $r$ .

1. Le discriminant de l'équation  $F(u, t) = 0$ , par rapport à  $u$  est positif et donc il existe deux composantes  $\mathbf{b}_1$  et  $\mathbf{b}_2$  pour la paramétrisation de la médiatrice algébrique, qui pourraient contenir de racines carrées d'une expression polynomiale positive (provenant de  $\underline{\sigma}$ ).
2. Si la courbe  $r$  est une PH-courbe, la paramétrisation de la médiatrice est rationnelle. Si de plus, la norme du vecteur vitesse de la droite  $s$ ,  $\|\mathbf{s}'(u)\| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$ , n'est pas un nombre rationnel, la paramétrisation de la médiatrice est rationnelle et à coefficients dans le corps  $\mathbb{Q} \left[ \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \right]$ , c-a-d si

$$\underline{\sigma} \in \mathbb{R}(t) \text{ et } \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \notin \mathbb{Q}, \text{ alors } \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in \mathbb{Q} \left[ \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \right] (t)$$

*Démonstration.* En substituant  $\mathbf{B}(u, t)$  dans (2.19), nous obtenons :

$$\begin{aligned} F(u, t) &= -2b'(t)\alpha_1^2ua(t) + 2b'(t)\alpha_1^2u\beta_1 - 2b'(t)\alpha_1\beta_1a(t) \\ &\quad - 2b'(t)\alpha_2^2ua(t) + b'(t)\alpha_2^2u^2\alpha_1 + 2b'(t)\alpha_2^2u\beta_1 \\ &\quad - 2b'(t)\alpha_2\beta_2a(t) + 2b'(t)\alpha_2\beta_2\beta_1 - 2\alpha_2a'(t)a(t)\beta_1 \\ &\quad + 2\alpha_2b'(t)b(t)a(t) - 2\alpha_2b'(t)b(t)\beta_1 \\ &\quad + 2a'(t)\alpha_1^2ub(t) - a'(t)\alpha_1^2u^2\alpha_2 - 2a'(t)\alpha_1^2u\beta_2 \\ &\quad + 2a'(t)\alpha_1\beta_1b(t) - 2a'(t)\alpha_1\beta_1\beta_2 + 2a'(t)\alpha_2^2ub(t) \\ &\quad - 2a'(t)\alpha_2^2u\beta_2 + 2a'(t)\alpha_2\beta_2b(t) - 2\alpha_1a'(t)a(t)b(t) \\ &\quad + 2\alpha_1a'(t)a(t)\beta_2 + 2\alpha_1b'(t)b(t)\beta_2 + b'(t)\alpha_1^3u^2 \\ &\quad + b'(t)\alpha_1\beta_1^2 + \alpha_2a'(t)a(t)^2 - a'(t)\alpha_2^3u^2 \\ &\quad - a'(t)\alpha_2\beta_2^2 - \alpha_1b'(t)b(t)^2 \\ &\quad + \beta_1^2\alpha_2a'(t) - \beta_2^2\alpha_1b'(t) + a(t)^2\alpha_1b'(t) - (b(t))^2\alpha_2a'(t) = 0. \end{aligned}$$

Le discriminant de  $F(u, t) = 0$  par rapport à  $u$  est donné par :

$$\Delta = 4 \left( a'(t)^2 + b'(t)^2 \right) \left( -\alpha_2\beta_1 + \alpha_2a(t) - b(t)\alpha_1 + \beta_2\alpha_1 \right)^2 \left( \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \right) \geq 0,$$

et donc les deux expressions du paramètre  $u$  en fonction de  $t$  sont données par :

$$u_1(t) = \frac{v_1(t)}{k(t)} \text{ et } u_2(t) = \frac{v_2(t)}{k(t)},$$

$$\begin{aligned}
 v_1(t) &= -\left( b'(t) \alpha_2^2 a(t) - b'(t) \alpha_2^2 \beta_1 - a'(t) \alpha_1^2 b(t) - a'(t) \alpha_2^2 b(t) \right. \\
 &\quad \left. - b'(t) \alpha_1^2 \beta_1 + a'(t) \alpha_1^2 \beta_2 + b'(t) \alpha_1^2 a(t) + a'(t) \alpha_2^2 \beta_2 \right. \\
 &\quad \left. - ((-\alpha_2 \beta_1 + \alpha_2 a(t) - b(t) \alpha_1 + \beta_2 \alpha_1)) \sqrt{(a'(t)^2 + b'(t)^2) (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)} \right), \\
 v_2(t) &= -\left( b'(t) \alpha_2^2 a(t) - b'(t) \alpha_2^2 \beta_1 - a'(t) \alpha_1^2 b(t) - a'(t) \alpha_2^2 b(t) \right. \\
 &\quad \left. - b'(t) \alpha_1^2 \beta_1 + a'(t) \alpha_1^2 \beta_2 + b'(t) \alpha_1^2 a(t) + a'(t) \alpha_2^2 \beta_2 \right. \\
 &\quad \left. + ((-\alpha_2 \beta_1 + \alpha_2 a(t) - b(t) \alpha_1 + \beta_2 \alpha_1)) \sqrt{(a'(t)^2 + b'(t)^2) (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)} \right) \\
 k(t) &= (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) (-\alpha_1 b'(t) + \alpha_2 a'(t)).
 \end{aligned}$$

En substituant  $u$  par  $u_1(t)$  et par  $u_2(t)$  dans  $\mathbf{B}(u, t)$ , nous obtenons les deux composantes de la paramétrisation de la médiatrice algébrique comme suit :

$$\mathbf{b}_1(t) = \mathbf{B}(u_1(t), t) = \begin{bmatrix} \frac{x_1(t)}{w(t)} \\ \frac{y_1(t)}{w(t)} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{b}_2(t) = \mathbf{B}(u_2(t), t) = \begin{bmatrix} \frac{x_2(t)}{w(t)} \\ \frac{y_2(t)}{w(t)} \end{bmatrix},$$

où

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= -\alpha_1^2 b(t) b'(t) a'(t) + \alpha_1^2 b'(t)^2 a(t) + \alpha_1^2 \beta_2 b'(t) a'(t) \\
 &\quad - \alpha_1 \alpha_2 b(t) b'(t)^2 - \alpha_1 \alpha_2 a(t) a'(t) b'(t) + \alpha_1 \alpha_2 \beta_2 b'(t)^2 \\
 &\quad - \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 b'(t) a'(t) - \alpha_2^2 \beta_1 b'(t)^2 + \alpha_2^2 a(t) a'(t)^2 \\
 &\quad + \alpha_2^2 b'(t)^2 a(t) - b'(t) \\
 &\quad (\alpha_1 \beta_2 + a(t) \alpha_2 - \alpha_1 b(t) - \alpha_2 \beta_1) \sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_1^2 \sigma(t)}, \\
 y_1(t) &= -\alpha_1^2 a'(t)^2 b(t) + \alpha_1^2 b(t) b'(t)^2 - \alpha_1^2 \beta_2 a'(t)^2 - \alpha_1 \alpha_2 a(t) a'(t)^2 \\
 &\quad - \alpha_1 \alpha_2 b(t) b'(t) a'(t) + \alpha_1 \beta_1 \alpha_2 a'(t)^2 - \alpha_1 \alpha_2 \beta_2 a'(t) b'(t) \\
 &\quad + \alpha_2^2 \beta_1 a'(t) b'(t) - \alpha_2^2 a(t) a'(t) b'(t) + \alpha_2^2 a'(t)^2 b(t) \\
 &\quad - a'(t) (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 a(t) - \alpha_1 b(t) - \alpha_2 \beta_1) \sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_1^2 \sigma(t)}, \\
 x_2(t) &= -\alpha_1^2 b(t) b'(t) a'(t) + \alpha_1^2 b'(t)^2 a(t) + \alpha_1^2 \beta_2 b'(t) a'(t) \\
 &\quad - \alpha_1 \alpha_2 b(t) b'(t)^2 - \alpha_1 \alpha_2 a(t) a'(t) b'(t) + \alpha_1 \alpha_2 \beta_2 b'(t)^2 \\
 &\quad - \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 b'(t) a'(t) - \alpha_2^2 \beta_1 b'(t)^2 + \alpha_2^2 a(t) a'(t)^2 + \alpha_2^2 b'(t)^2 a(t) \\
 &\quad + b'(t) (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 a(t) - \alpha_1 b(t) - \alpha_2 \beta_1) \sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_1^2 \sigma(t)}, \\
 y_2(t) &= \alpha_1^2 a'(t)^2 b(t) + \alpha_1^2 b(t) b'(t)^2 - \alpha_1^2 \beta_2 a'(t)^2 - \alpha_1 \alpha_2 a(t) a'(t)^2 \\
 &\quad - \alpha_1 \alpha_2 b(t) b'(t) a'(t) + \alpha_1 \beta_1 \alpha_2 a'(t)^2 - \alpha_1 \alpha_2 \beta_2 a'(t) b'(t) \\
 &\quad + \alpha_2^2 \beta_1 a'(t) b'(t) - \alpha_2^2 a(t) a'(t) b'(t) + \alpha_2^2 a'(t)^2 b(t) - a'(t) \\
 &\quad (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 a(t) - \alpha_1 b(t) - \alpha_2 \beta_1) \sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_1^2 \sigma(t)}; \\
 w(t) &= (\alpha_2 a'(t) - \alpha_1 b'(t))^2
 \end{aligned}$$

et

$$\underline{\sigma}(t) = \sqrt{a'(t)^2 + b'(t)^2} = \|\mathbf{r}'(t)\|.$$

Si  $r$  est une PH-courbe alors  $\underline{\sigma} \in \mathbb{R}(t)$  et par conséquent  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in \mathbb{R}(t)$ . Et si, de plus  $\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \notin \mathbb{Q}$ , alors  $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Q} \left[ \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \right] (t)$ , et par conséquent

$$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in \mathbb{Q} \left[ \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \right] (t).$$

Le théorème est ainsi démontré.  $\square$

## 2.2.4 La paramétrisation algébrique de la médiatrice d'une courbe et d'une courbe rationnelle

Dans le cas d'un cercle et d'une courbe rationnelle régulière de paramétrisations respectives

$$\mathbf{s}(u) = \left( \frac{2ru}{1+u^2}, \frac{r(1-u^2)}{1+u^2} \right) \text{ et } \mathbf{r}(t) = (a(t), b(t)),$$

l'algorithme s'applique comme suit :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 \frac{r(-1+u^2)}{(1+u^2)^2} & -4 \frac{ru}{(1+u^2)^2} \\ a'(t) & b'(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0 \\ a'(t)a(t) + b'(t)b(t) \end{bmatrix}.$$

Pour  $b'(t) - b'(t)u^2 + 2ua'(t) \neq 0$ , on a

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{b'(t)(1+u^2)^2}{2r(b'(t)-b'(t)u^2+2ua'(t))} & \frac{4ru}{2r(b'(t)-b'(t)u^2+2ua'(t))} \\ -\frac{a'(t)(1+u^2)^2}{2r(b'(t)-b'(t)u^2+2ua'(t))} & -\frac{2r(-1+u^2)}{2r(b'(t)-b'(t)u^2+2ua'(t))} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}(t, u) = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \frac{2u(a'(t)a(t)+b'(t)b(t))}{b'(t)-b'(t)u^2+2ua'(t)} \\ -\frac{(-1+u^2)(a'(t)a(t)+b'(t)b(t))}{b'(t)-b'(t)u^2+2ua'(t)} \end{bmatrix}$$

et en substituant  $\mathbf{B}(t, u)$  dans (2.19) on obtient

$$F(u, t) = (1+u^2)^2 F_0(u, t) = 0,$$

où  $F_0(u, t)$  est quadratique en  $u$  et nous avons le résultat suivant :

**Théorème 2.4.** Soit  $\underline{\sigma}(t) = \sqrt{a'(t)^2 + b'(t)^2}$ , la norme du vecteur vitesse de la courbe  $r$ .

1. Le discriminant de l'équation  $F_0(u, t) = 0$ , par rapport à  $u$  est positif, et donc il existe deux composantes  $\mathbf{b}_1$  et  $\mathbf{b}_2$  pour la paramétrisation de la médiatrice algébrique, qui pourraient contenir de racines carrées d'une expression polynomiale positive (provenant de  $\underline{\sigma}$ ).

2. Si la courbe  $r$  est une PH-courbe alors la paramétrisation de médiatrice algébrique est rationnelle.

*Démonstration.* En substituant  $\mathbf{B}(u, t)$  dans (2.19), nous obtenons

$$F(u, t) = (1 + u^2)^2 F_0(u, t) = 0,$$

avec

$$\begin{aligned} F_0(u, t) = & -r^2 u^2 b'(t) + a(t)^2 b'(t) u^2 - 2a'(t) a(t) r u^2 - 2b'(t) b(t) r u^2 \\ & - b'(t) b(t)^2 u^2 - 2a'(t) a(t) b(t) u^2 - 2b(t)^2 u a'(t) + 2u a'(t) a(t)^2 \\ & + 2r^2 u a'(t) + 4u b'(t) b(t) a(t) + r^2 b'(t) - 2b'(t) b(t) r \\ & + 2a'(t) a(t) b(t) - 2a'(t) a(t) r - a(t)^2 b'(t) + b'(t) b(t)^2 = 0. \end{aligned}$$

Le discriminant de  $F_0(u, t) = 0$  par rapport à  $u$  est donné par :

$$\Delta = 4 \left( a(t)^2 + b(t)^2 - r^2 \right)^2 \left( a'(t)^2 + b'(t)^2 \right) \geq 0,$$

et donc on a les deux expressions du paramètre  $u$  en fonction de  $t$  :

$$u_1(t) = \frac{h_1}{k}, u_2(t) = \frac{h_2}{k}$$

où

$$\begin{aligned} h_1 &= -b(t)^2 a'(t) + a'(t) a(t)^2 + r^2 a'(t) + 2b'(t) b(t) a(t) \\ &\quad + (a(t)^2 + b(t)^2 - r^2) \sqrt{a'(t)^2 + b'(t)^2}, \\ h_2 &= -b(t)^2 a'(t) + a'(t) a(t)^2 + r^2 a'(t) + 2b'(t) b(t) a(t) \\ &\quad - (a(t)^2 + b(t)^2 - r^2) \sqrt{a'(t)^2 + b'(t)^2}, \\ k &= 2a'(t) a(t) b(t) + 2b'(t) b(t) r + b'(t) b(t)^2 + r^2 b'(t) \\ &\quad + a(t)^2 b'(t) + 2a'(t) a(t) r \end{aligned}$$

En substituant  $u$  par  $u_1(t)$  et par  $u_2(t)$  dans  $\mathbf{B}(u, t)$ , nous obtenons les deux composantes de la paramétrisation de la médiatrice algébrique, comme suit :

$$\mathbf{b}_1(t) = \mathbf{B}(u_1(t), t) = \begin{bmatrix} \frac{x_1(t)}{w(t)} \\ \frac{y_1(t)}{w(t)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2(t) = \mathbf{B}(u_2(t), t) = \begin{bmatrix} \frac{x_2(t)}{w(t)} \\ \frac{y_2(t)}{w(t)} \end{bmatrix},$$

où

$$\begin{aligned} x_1(t) = & \left( a(t)^2 a'(t) + 2b(t) b'(t) a(t) + r^2 a'(t) - b(t)^2 a'(t) \right. \\ & \left. + (a(t)^2 - r^2 + b(t)^2) \underline{\sigma}(t) \right) \left( -2b(t) b'(t) r - 2a(t) a'(t) r \right. \\ & \left. - b(t)^2 b'(t) - r^2 b'(t) + a(t)^2 b'(t) - 2a(t) a'(t) b(t) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_1(t) = & -2b(t)^3 b'(t)^2 r - 4b(t) b'(t) a(t) r^2 a'(t) - 6b(t)^2 b'(t) r a(t) a'(t) \\
& + 4a(t)^3 a'(t) b(t) b'(t) - 4b(t)^3 b'(t) a(t) a'(t) + 2b(t) b'(t)^2 r a(t)^2 \\
& - 2a(t) a'(t) r^3 b'(t) + 2a(t)^3 a'(t) r b'(t) - 4a(t)^2 a'(t)^2 r b(t) \\
& + a(t)^4 a'(t)^2 + r^4 a'(t)^2 + b(t)^4 a'(t)^2 - 2a(t)^2 a'(t)^2 r^2 \\
& - 2a(t)^2 a'(t)^2 b(t)^2 + 4b(t)^2 b'(t)^2 a(t)^2 - 2r^2 a'(t)^2 b(t)^2 \\
& - 2b(t) b'(t)^2 r^3 - 4b(t)^2 b'(t)^2 r^2 \\
& + \left( a(t) \left( 2b(t) b'(t) a(t) + a(t)^2 a'(t) + r^2 a'(t) - b(t)^2 a'(t) \right)^2 \right. \\
& \left( r \left( 2b(t) b'(t) a(t) + a(t)^2 a'(t) + r^2 a'(t) - b(t)^2 a'(t) \right) \right)^2 \\
& \left. + \left( b(t) \left( 2b(t) b'(t) a(t) + a(t)^2 a'(t) + r^2 a'(t) - b(t)^2 a'(t) \right) \right)^2 \right) \underline{\sigma}(t), \\
x_2(t) = & -(2b(t) b'(t) a(t) + a(t)^2 a'(t) + r^2 a'(t) - b(t)^2 a'(t) \\
& - \left( a(t)^2 - r^2 + b(t)^2 \right) \underline{\sigma}(t)) \left( -2b(t) b'(t) r - 2a(t) a'(t) r - b(t)^2 b'(t) \right), \\
y_2(t) = & -r^2 b'(t) + a(t)^2 b'(t) - 2a(t) a'(t) b(t) - r^2 b'(t) + a(t)^2 b'(t) \\
& - 2a(t) a'(t) b(t) 2b(t)^3 b'(t)^2 r + 4b(t) b'(t) a(t) r^2 a'(t) \\
& + 6b(t)^2 b'(t) r a(t) a'(t) - 4a(t)^3 a'(t) b(t) b'(t) + 4b(t)^3 b'(t) a(t) a'(t) \\
& - 2b(t) b'(t)^2 r a(t)^2 + 2a(t) a'(t) r^3 b'(t) - 2a(t)^3 a'(t) r b'(t) \\
& + 4a(t)^2 a'(t)^2 r b(t) - a(t)^4 a'(t)^2 - r^4 a'(t)^2 - b(t)^4 a'(t)^2 \\
& + 2a(t)^2 a'(t)^2 r^2 + 2a(t)^2 a'(t)^2 b(t)^2 - 4b(t)^2 b'(t)^2 a(t)^2 \\
& + 2r^2 a'(t)^2 b(t)^2 + 2b(t) b'(t)^2 r^3 + 4b(t)^2 b'(t)^2 r^2; \\
& + \underline{\sigma}(t) \left( 2b(t) b'(t) a(t) \left( a(t)^2 - r^2 + b(t)^2 \right) + a(t)^4 a'(t) \right. \\
& - a(t)^2 a'(t) r^2 + a(t)^2 a'(t) b(t)^2 + r^2 a'(t) \left( a(t)^2 - r^2 + b(t)^2 \right) \\
& \left. - b(t)^2 a'(t) a(t)^2 - r^2 + b(t)^2 \right) \\
w(t) = & 2a'(t) b'(t) a(t)^3 - 2a(t)^2 a'(t)^2 r - 2a(t)^2 a'(t)^2 b(t) + 2a(t)^2 r b'(t)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+4 a(t)^2 b(t) b'(t)^2 - 2 a(t) r^2 a'(t) b'(t) - 6 a(t) a'(t) b(t)^2 b'(t) \\
 &-8 a(t) a'(t) b(t) b'(t) r - 2 a'(t)^2 r^2 b(t) + 2 a'(t)^2 b(t)^2 r + 2 a'(t)^2 b(t)^3 \\
 &-2 a'(t)^2 r^3 - 4 b(t) b'(t)^2 r^2 - 2 r^3 b'(t)^2 - 2 b(t)^2 b'(t)^2 r, \\
 &+2 \left( a(t)^2 - r^2 + b(t)^2 \right) \underline{\sigma}(t) (a(t) b'(t) - r a'(t) - b(t) a'(t))
 \end{aligned}$$

et

$$\underline{\sigma}(t) = \sqrt{a'(t)^2 + b'(t)^2} = \|\mathbf{r}'(t)\|.$$

Si  $r$  est une PH-courbe, alors  $\underline{\sigma}(t) \in \mathbb{R}(t)$  et par conséquent  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in \mathbb{R}(t)$   
Le théorème est ainsi démontré. □

**Remarque 9.**

- Si  $\mathbf{r}(t)$  est une paramétrisation d'une PH-courbe (c-à-d  $\|\mathbf{r}'(t)\| \in \mathbb{R}(t)$ ), les composantes de la paramétrisation  $\mathbf{b}_1(t)$  et  $\mathbf{b}_2(t)$  sont rationnelles. Si de plus la courbe  $s$  est une droite de paramétrisation  $\mathbf{s}(u) = (\alpha_1 u + \beta_1, \alpha_2 u + \beta_2)$ ,  $\mathbf{b}_1(t), \mathbf{b}_2(t)$  sont rationnelles avec des coefficients dans le corps  $\mathbb{Q}[\sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_1^2}]$  (voir l'exemple 25.3).
- Même si la paramétrisation que nous obtenons n'en général pas est pas rationnelle (car contenant une racine carrée), elle peut être utilisée pour calculer une représentation approximative soit par une approximation de la racine carrée, soit par interpolation de points calculés à partir de la paramétrisation. Elle peut aussi rendre le processus d' "élagage" plus facile. En effet, les valeurs des paramétriques correspondantes aux points critiques (auto-intersection, point cuspidal, etc) et points à l'infini de la médiatrice algébrique, pourraient être calculées numériquement à partir de la paramétrisation, ensuite, en délimitant les portions de la médiatrice en ces points, les portions qui n'appartiennent pas à la médiatrice géométrique seront facilement identifiées et éliminées en utilisant la méthode de Farouki et Johnstone (voir [54]).

**Exemple 25.**

1. soient

$$\mathbf{s}(u) = \left( \frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2} + 4 \right)^T \text{ et } \mathbf{r}(t) = \left( 2t^2 - 2, \frac{2\sqrt{3}}{3}t(t^2 - 1) \right)^T,$$

les paramétrisations respectives d'un cercle et d'une PH-cubique.

Les normes de vecteurs vitesses respectives sont données par

$$\sigma_s(u) = \frac{2}{u^2 + 1} \text{ et } \sigma_r(t) = \frac{2\sqrt{3}}{3} (1 + 3t^2).$$

Par application de l'algorithme 3 aux  $\mathbf{s}(u)$  et  $\mathbf{r}(t)$  on a :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{2(-1+u^2)}{(u^2+1)^2} & -\frac{4u}{(u^2+1)^2} \\ 4t & -\frac{2}{3}\sqrt{3} + 2\sqrt{3}t^2 \end{bmatrix}, \mathbf{V} = \begin{bmatrix} -\frac{16u}{(u^2+1)^2} \\ -\frac{20}{3}t + \frac{8}{3}t^3 + 4t^5 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2 \det(\mathbf{A})} \begin{bmatrix} -\sqrt{3}(-1+3t^2)(u^2+1)^2 & -6u \\ 6t(u^2+1)^2 & 3(-1+u^2) \end{bmatrix}$$

avec

$$\det(\mathbf{A}) = \sqrt{3} - 3\sqrt{3}t^2 - \sqrt{3}u^2 + 3\sqrt{3}t^2u^2 - 12tu \neq 0$$

$$\mathbf{B}(u, t) = \begin{bmatrix} \frac{4u(-2\sqrt{3}+6\sqrt{3}t^2+5t-2t^3-3t^5)}{\sqrt{3}-3\sqrt{3}t^2-\sqrt{3}u^2+3\sqrt{3}t^2u^2-12tu} \\ \frac{2t(-24u+5-2t^2-3t^4-5u^2+2u^2t^2+3u^2t^4)}{\sqrt{3}-3\sqrt{3}t^2-\sqrt{3}u^2+3\sqrt{3}t^2u^2-12tu} \end{bmatrix}$$

$$F(u, t) = (u^2 + 1)^2 F_0(u, t) = 0,$$

avec

$$\begin{aligned} F_0(u, t) = & 12\sqrt{3}t^8u^2 - 12\sqrt{3}t^8 - 16\sqrt{3}t^6u^2 + 96t^7u + 16\sqrt{3}t^6 + 8\sqrt{3}t^4u^2 \\ & - 180t^5u^2 - 96\sqrt{3}t^4u - 96t^5u - 8\sqrt{3}t^4 + 209\sqrt{3}t^2u^2 + 108t^5 \\ & - 120t^3u^2 + 192\sqrt{3}t^2u - 96t^3u - 65\sqrt{3}t^2 - 63\sqrt{3}u^2 + 72t^3 \\ & + 300tu^2 - 96\sqrt{3}u - 444ut + 15\sqrt{3} - 180t = 0. \end{aligned}$$

Le discriminant de  $F_0(u, t)$ , par rapport à  $u$ , est donné par :

$$\Delta = 12(3t^2 + 1)^2(-4t^6 + 16\sqrt{3}t^3 - 4t^4 - 16\sqrt{3}t + 20t^2 - 57)^2.$$

Les deux expressions du paramètre  $u$  en fonction de  $t$  sont données par :

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \frac{4\sqrt{3}t^3 + 6t^4 - 13\sqrt{3}t + 3}{4\sqrt{3}t^3 - 6t^4 + 11\sqrt{3}t + 21}, \\ u_2(t) &= -\frac{4\sqrt{3}t^3 - 6t^4 + 5\sqrt{3}t + 15}{4\sqrt{3}t^3 + 6t^4 - 19\sqrt{3}t + 9}, \end{aligned}$$

et la paramétrisation de la médiatrice algébrique est donnée par :

$$\mathbf{b}_1(t) = \begin{bmatrix} -\frac{x_1(t)}{18w_1(t)} \\ -\frac{y_1(t)}{3w_1(t)} \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{b}_2(t) = \begin{bmatrix} \frac{x_2(t)}{18w_2(t)} \\ \frac{y_2(t)}{3w_2(t)} \end{bmatrix},$$

avec

$$\begin{aligned} x_1(t) &= (4\sqrt{3}t^3 + 6t^4 - 19\sqrt{3}t + 9)(-3t^5 + 6\sqrt{3}t^2 - 2t^3 - 2\sqrt{3} + 5t) \\ & \quad (4\sqrt{3}t^3 - 6t^4 + 5\sqrt{3}t + 15), \\ y_1(t) &= \sqrt{3}(8t^6 - 14t^4 - 4t^2 + 55)(-3t^5 + 6\sqrt{3}t^2 - 2t^3 - 2\sqrt{3} + 5t)t, \\ w_1(t) &= (-3t^5 + 6\sqrt{3}t^2 - 2t^3 - 2\sqrt{3} + 5t)(2t^4 + 8\sqrt{3}t - 7t^2 + 1) \\ x_2(t) &= (4\sqrt{3}t^3 - 6t^4 + 11\sqrt{3}t + 21)(-3t^5 + 6\sqrt{3}t^2 - 2t^3 - 2\sqrt{3} + 5t) \\ & \quad (4\sqrt{3}t^3 + 6t^4 - 13\sqrt{3}t + 3), \\ y_2(t) &= \sqrt{3}(-3t^5 + 6\sqrt{3}t^2 - 2t^3 - 2\sqrt{3} + 5t)(8t^6 - 2t^4 - 12t^2 + 51)t, \\ w_2(t) &= (-3t^5 + 6\sqrt{3}t^2 - 2t^3 - 2\sqrt{3} + 5t)(2t^4 + 8\sqrt{3}t - t^2 + 3). \end{aligned}$$

Dans ce cas, le processus d' "élagage", tel que utilisé dans les exemples 22 et 23, s'exécute sur chacune des deux composantes de la paramétrisation de la médiatrice algébrique. Les valeurs paramétriques correspondantes aux points à l'infini et aux points de rebroussement sont respectivement données par les valeurs correspondantes aux deux composantes  $\mathbf{b}_1$  et  $\mathbf{b}_2$  :

$$\begin{aligned} t_{1,cusp} &= \{-3.103686886, 0.8338652966\}, \\ t_{1,\infty} &= \{-2.490276334; -0.06971679356\} \\ t_{2,cusp} &= \{-2.425360219, 0.6799523227\}, \\ t_{2,\infty} &= \{-1.922858114, -0.2135162228\} \end{aligned}$$

Les valeurs paramétriques correspondantes aux points d'auto-intersection sont respectivement données par les valeurs correspondantes aux deux composantes  $\mathbf{b}_1$  et  $\mathbf{b}_2$ , et les valeurs de paramètres qui correspondent aux points d'intersection entre les deux courbes définies par  $\mathbf{b}_1$  et  $\mathbf{b}_2$  :

$$\begin{aligned} t_{1,self} &= \{-1.155044775, -0.8307075462, -0.06979019836, -0.06978916457, \\ &\quad 0.1054242558, 1.269670266\} \\ t_{2,self} &= \{-0.9995838141, -0.7402360580, 1.462622073, 1.16585173114743, \\ &\quad 9.604592985, 9.649685149\} \end{aligned}$$

Ainsi, à l'issue de deux étapes d' "élagage", nous obtenons que la médiatrice géométrique est définie par la restriction de la composante  $\mathbf{b}_1$  à l'intervalle  $[-0.8331, -0.06979]$  et la restriction de la composante  $\mathbf{b}_2$  à l'intervalle  $[1.16838, 9.60459]$ , c-à-d :

$$\mathbf{b}_1|_{[-0.8331, -0.06979]} \cup \mathbf{b}_2|_{[1.16838, 9.60459]},$$

qui est une courbe fermée de sommets  $A$  et  $B$  et englobant le cercle  $s$  :

$$\begin{aligned} A &= \mathbf{b}_1(-0.8331) = \mathbf{b}_2(1.16838) = (-0.1196, 1.6039) \\ B &= \mathbf{b}_1(-0.06979) = \mathbf{b}_2(9.60459) = (-8296.1533, 2035.0143). \end{aligned}$$

Le graphique correspondant est donné à la figure 2.5.

2. Soient

$$\mathbf{s}(u) = \left( \frac{2u}{1+u^2} + 2, \frac{1-u^2}{1+u^2} + 1 \right)^T \quad \text{et} \quad \mathbf{r}(t) = \left( \frac{4t}{1-t^2}, \frac{2(1+t^2)}{1-t^2} \right)^T,$$

les paramétrisations respectives d' un cercle et d'une hyperbole.

Les normes de vecteurs vitesses respectives sont données par

$$\sigma_{\mathbf{s}}(u) = \frac{2}{1+u^2} \quad \text{et} \quad \sigma_{\mathbf{r}}(t) = \frac{4\sqrt{1+6t^2+t^4}}{(1-t^2)^2}.$$

Par application de l'algorithme 3 aux  $\mathbf{s}(u)$  et  $\mathbf{r}(t)$  on a :

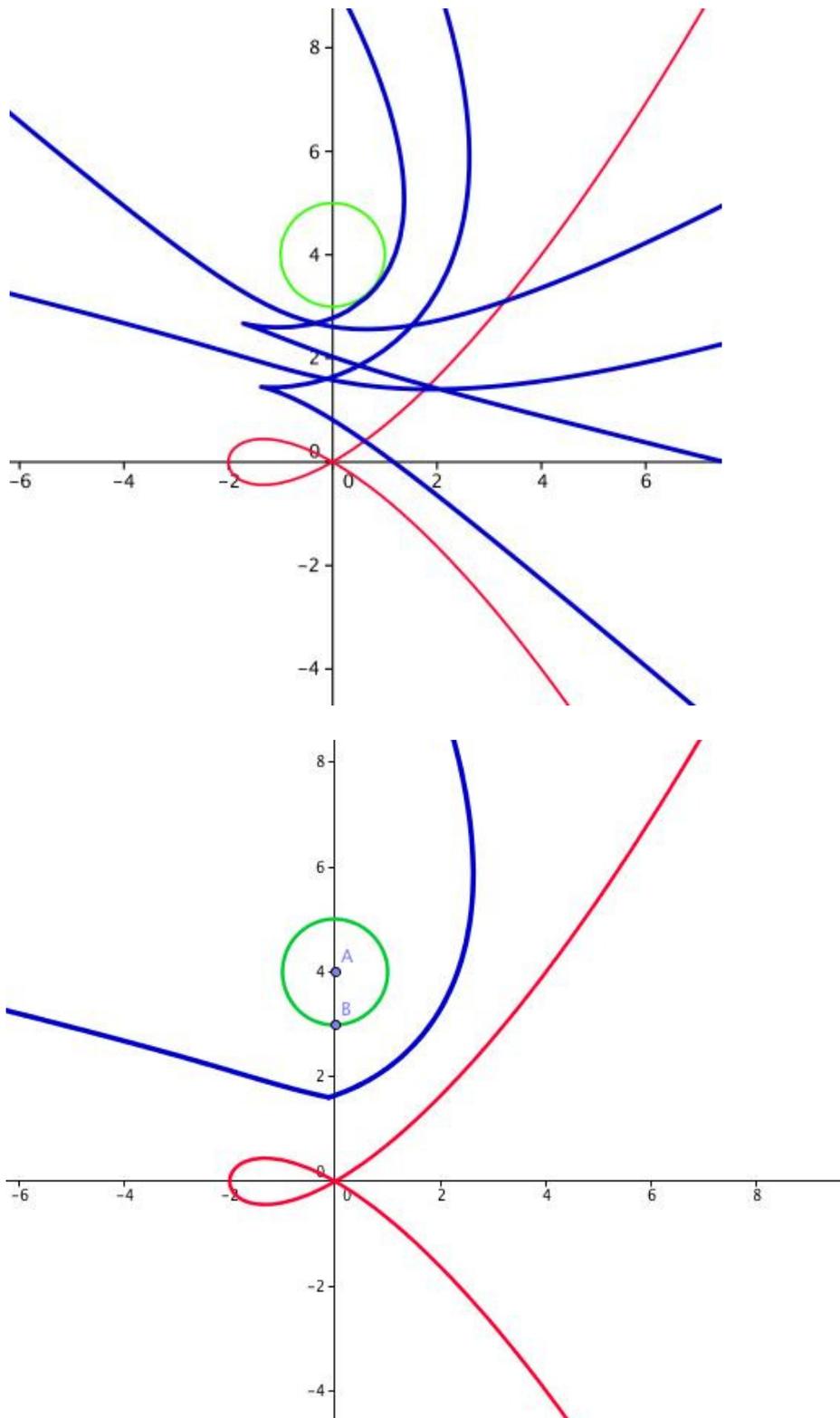


FIGURE 2.5 – En haut la médiatrice algébrique (bleue) et en bas la médiatrice géométrique (bleue) du cercle (vert) et de la cubique (rouge) de l'exemple 25.1.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{2(-1+u^2)}{(1+u^2)^2} & -\frac{4u}{(1+u^2)^2} \\ \frac{4(1+t^2)}{(-1+t^2)^2} & \frac{8t}{(-1+t^2)^2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} -\frac{4(u^2+u-1)}{(1+u^2)^2} \\ -\frac{32(1+t^2)t}{(-1+t^2)^3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{t(1+u^2)^2}{2(t-tu^2+u+ut^2)} & \frac{u(-1+t^2)^2}{4(t-tu^2+u+ut^2)} \\ -\frac{(1+t^2)(1+u^2)^2}{4(t-tu^2+u+ut^2)} & -\frac{(-1+u^2)(-1+t^2)^2}{8(t-tu^2+u+ut^2)} \end{bmatrix}$$

avec

$$\det(\mathbf{A}) = t - tu^2 + u + ut^2 \neq 0$$

$$\mathbf{B}(u, t) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{V} = \begin{bmatrix} -\frac{2t(-u^2+u^2t^2+3u+5ut^2+1-t^2)}{(t-tu^2+u+ut^2)(-1+t^2)} \\ \frac{(1+t^2)(-u^2+u^2t^2-u+ut^2+1-t^2-4t+4tu^2)}{(t-tu^2+u+ut^2)(-1+t^2)} \end{bmatrix}$$

$$F(u, t) = 4(u^2 + 1)^2 F_0(u, t) = 0,$$

avec

$$\begin{aligned} F_0(u, t) &= -3u^2t^4 + 2tu^2 + 2u^2t^5 - u^2 + 3u^2t^2 + 4u^2t^3 + u^2t^6 \\ &\quad - u + ut^6 + 6ut - 10ut^5 - 11ut^4 - 5ut^2 + 4ut^3 - 7t^5 \\ &\quad - 2t^2 - 2t^3 + t - 2t^6 + 4t^4 = 0. \end{aligned}$$

Le discriminant de  $F_0(u, t)$  par rapport à  $u$  est donné par :

$$\Delta = (1 + 6t^2 + t^4) (1 - 4t + 4t^2 + 4t^3 + 3t^4)^2$$

Les deux expressions du paramètre  $u$  en fonction de  $t$  sont données par :

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \frac{t^6 - 10t^5 - 11t^4 + 4t^3 - 5t^2 + 6t - 1 + (3t^4 + 4t^3 + 4t^2 - 4t + 1)\sqrt{t^4 + 6t^2 + 1}}{2t(2t^5 + 7t^4 - 4t^3 + 2t^2 + 2t - 1)}, \\ u_2(t) &= -\frac{-t^6 + 10t^5 + 11t^4 - 4t^3 + 5t^2 - 6t + 1 + (3t^4 + 4t^3 + 4t^2 - 4t + 1)\sqrt{t^4 + 6t^2 + 1}}{2t(2t^5 + 7t^4 - 4t^3 + 2t^2 + 2t - 1)}. \end{aligned}$$

La paramétrisation de la médiatrice algébrique est donnée par :

$$\mathbf{b}_1(t) = \begin{bmatrix} \frac{x_1(t)}{w(t)} \\ \frac{y_1(t)}{w(t)} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{b}_2(t) = \begin{bmatrix} \frac{x_2(t)}{w(t)} \\ \frac{y_2(t)}{w(t)} \end{bmatrix},$$

avec

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= -4t(-t^{10} + 22t^9 + 17t^8 - 8t^7 + 18t^6 + 4t^5 + 14t^4 - 8t^3 + 15t^2 \\
&\quad - 10t + 1 + (2t^4 + 2)(1 - 4t + 4t^2 + 4t^3 + 3t^4)\sqrt{6t^2 + 1 + t^4}) \\
y_1(t) &= 2(1 + t^2)(t^{10} + 2t^9 + 39t^8 + 72t^7 + 6t^6 - 20t^5 - 6t^4 - 56t^3 + 25t^2 \\
&\quad + 2t - 1 + (4t^3 + 4t^2 - 4t)(1 - 4t + 4t^2 + 4t^3 + 3t^4)\sqrt{6t^2 + 1 + t^4}) \\
x_2(t) &= 4t(t^{10} - 22t^9 - 17t^8 + 8t^7 - 18t^6 - 4t^5 - 14t^4 + 8t^3 - 15t^2 \\
&\quad + 10t - 1 + (2t^4 + 2)(1 - 4t + 4t^2 + 4t^3 + 3t^4)\sqrt{6t^2 + 1 + t^4}) \\
y_2(t) &= 2(1 + t^2)(-t^{10} - 2t^9 - 39t^8 - 72t^7 - 6t^6 + 20t^5 + 6t^4 + 56t^3 - 25t^2 \\
&\quad - 2t + 1 + (4t^3 + 4t^2 - 4t)(1 - 4t + 4t^2 + 4t^3 + 3t^4)\sqrt{6t^2 + 1 + t^4}) \\
w(t) &= (-1 + t^2)(-t^{10} + 10t^9 - 11t^8 - 40t^7 + 6t^6 + 12t^5 + 10t^4 + 24t^3 \\
&\quad - 5t^2 - 6t + 1 + (t^4 - 2t^3 - 2t^2 + 2t + 1) \\
&\quad (1 - 4t + 4t^2 + 4t^3 + 3t^4)\sqrt{6t^2 + 1 + t^4})
\end{aligned}$$

Dans ce cas, le processus d' "élagage", tel que utilisé dans les exemples 22 et 23, s'exécute sur chacune des deux composantes de la paramétrisation de la médiatrice algébrique. Les valeurs paramétriques correspondantes aux points à l'infini et aux points de rebroussement sont respectivement données par les valeurs correspondantes aux deux composantes  $\mathbf{b}_1$  et  $\mathbf{b}_2$  :

$$\begin{aligned}
t_{1,\infty} &= \{-1, 0, 1, 2.672981648\}, \\
t_{1,cusp} &= \{-0.6236982332, 1.764831905\}, \\
t_{2,\infty} &= \{-1, 0, 0.7966357862, 1\}, \\
t_{2,cusp} &= \{-.2679013883\}.
\end{aligned}$$

Les valeurs paramétriques correspondantes aux points d'auto-intersection sont respectivement données par les valeurs correspondantes aux deux composantes  $\mathbf{b}_1$  et  $\mathbf{b}_2$ , et les valeurs de paramètres qui correspondent aux points d'intersection entre les deux courbes définies par  $\mathbf{b}_1$  et  $\mathbf{b}_2$  :

$$\begin{aligned}
t_{1,self} &= \{-6.209835385, -2.164596107, -1.744070130, -0.1162766669, \\
&\quad 0, 0.6562214462, 0.6562419276, 0.6987147781, \}, \\
t_{2,self} &= \{-5.164482675, -1.670192001, -1.431199155, 0.119037293002913, \\
&\quad 0.1610348645, 0.4619799493, 0.4986291738, 8.600177722\}.
\end{aligned}$$

Ainsi, à l'issue de deux étapes d' "élagage", nous obtenons que la médiatrice géométrique est définie par la restriction de la composante  $\mathbf{b}_1$  à l'intervalle  $[-0.1162, 0.6987]$  et la restriction de la composante  $\mathbf{b}_2$  à l'union d'intervalles  $] -\infty, -1.4311] \cup [8.6001, +\infty[$ , c-à-d :

$$\mathbf{b}_1|_{[-0.1162, 0.6987]} \cup \mathbf{b}_2|_{]-\infty, -1.4311] \cup [8.6001, +\infty[}$$

qui est une courbe fermée de sommets  $A$  et  $B$  et englobant le cercle  $s$ .

$$\begin{aligned} A &= \mathbf{b}_1(-0.1162) = \mathbf{b}_2(8.6001) = (-0.9429, 0) \\ B &= \mathbf{b}_1(0.6987) = \mathbf{b}_2(-1.4311) = (10.9204, 0) \end{aligned}$$

Le graphique correspondant est donné à la figure 2.6.

3. Soient

$$\mathbf{s}(u) = (2u - 5, 8u - 1)^T \text{ et } \mathbf{r}(t) = \left( 2t^2 - 2, \frac{2\sqrt{3}}{3}t(t^2 - 1) \right)^T,$$

les paramétrisations respectives d'une droite et d'une PH-cubique. Les norme de vecteurs vitesses respectives sont données par

$$\sigma_s = 2\sqrt{17} \text{ et } \sigma_r(t) = \frac{2}{3}\sqrt{3}(1 + 3t^2)$$

Par application de l'algorithme 3 aux  $\mathbf{s}(u)$  et  $\mathbf{r}(t)$  on a :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 4t & 2\sqrt{3}t^2 - \frac{2}{3}\sqrt{3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 68u - 18 \\ \frac{8}{3}t^3 - \frac{20}{3}t + 4t^5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}(3t^2-1)}{2(3\sqrt{3}t^2-\sqrt{3}-24t)} & \frac{-6}{(3\sqrt{3}t^2-\sqrt{3}-24t)} \\ -\frac{3t}{3\sqrt{3}t^2-\sqrt{3}-24t} & \frac{3}{2(3\sqrt{3}t^2-\sqrt{3}-24t)} \end{bmatrix}$$

avec

$$\det(\mathbf{A}) = 3\sqrt{3}t^2 - \sqrt{3} - 24t \neq 0$$

$$\mathbf{B}(u, t) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \frac{102\sqrt{3}t^2u - 27\sqrt{3}t^2 - 34\sqrt{3}u + 9\sqrt{3} - 16t^3 + 40t - 24t^5}{3\sqrt{3}t^2 - \sqrt{3} - 24t} \\ \frac{2t(-102u + 22 + 2t^2 + 3t^4)}{3\sqrt{3}t^2 - \sqrt{3} - 24t} \end{bmatrix}$$

$$F(u, t) = -4\sqrt{3}(u - u_1(t))(u - u_2(t)) = 0$$

avec

$$u_1(t) = \frac{-\sqrt{17}\sqrt{3}(-6t^4 + 41\sqrt{3}t + 16\sqrt{3}t^3 - 3\sqrt{17} + 4t^3\sqrt{3}\sqrt{17} - 21 + 11t\sqrt{3}\sqrt{17})}{102(\sqrt{17}\sqrt{3} - 3t + 4\sqrt{3})}$$

$$u_2(t) = \frac{\sqrt{17}\sqrt{3}(6t^4 - 16\sqrt{3}t^3 + 4t^3\sqrt{3}\sqrt{17} + 11t\sqrt{3}\sqrt{17} - 41\sqrt{3}t + 21 - 3\sqrt{17})}{102(3t + \sqrt{17}\sqrt{3} - 4\sqrt{3})}$$

et la paramétrisation de la médiatrice algébrique est donnée par :

$$\mathbf{b}_1(t) = \begin{bmatrix} \frac{x_1(t)}{w_1(t)} \\ \frac{y_1(t)}{w_1(t)} \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{b}_2(t) = \begin{bmatrix} \frac{x_2(t)}{w_2(t)} \\ \frac{y_2(t)}{w_2(t)} \end{bmatrix},$$

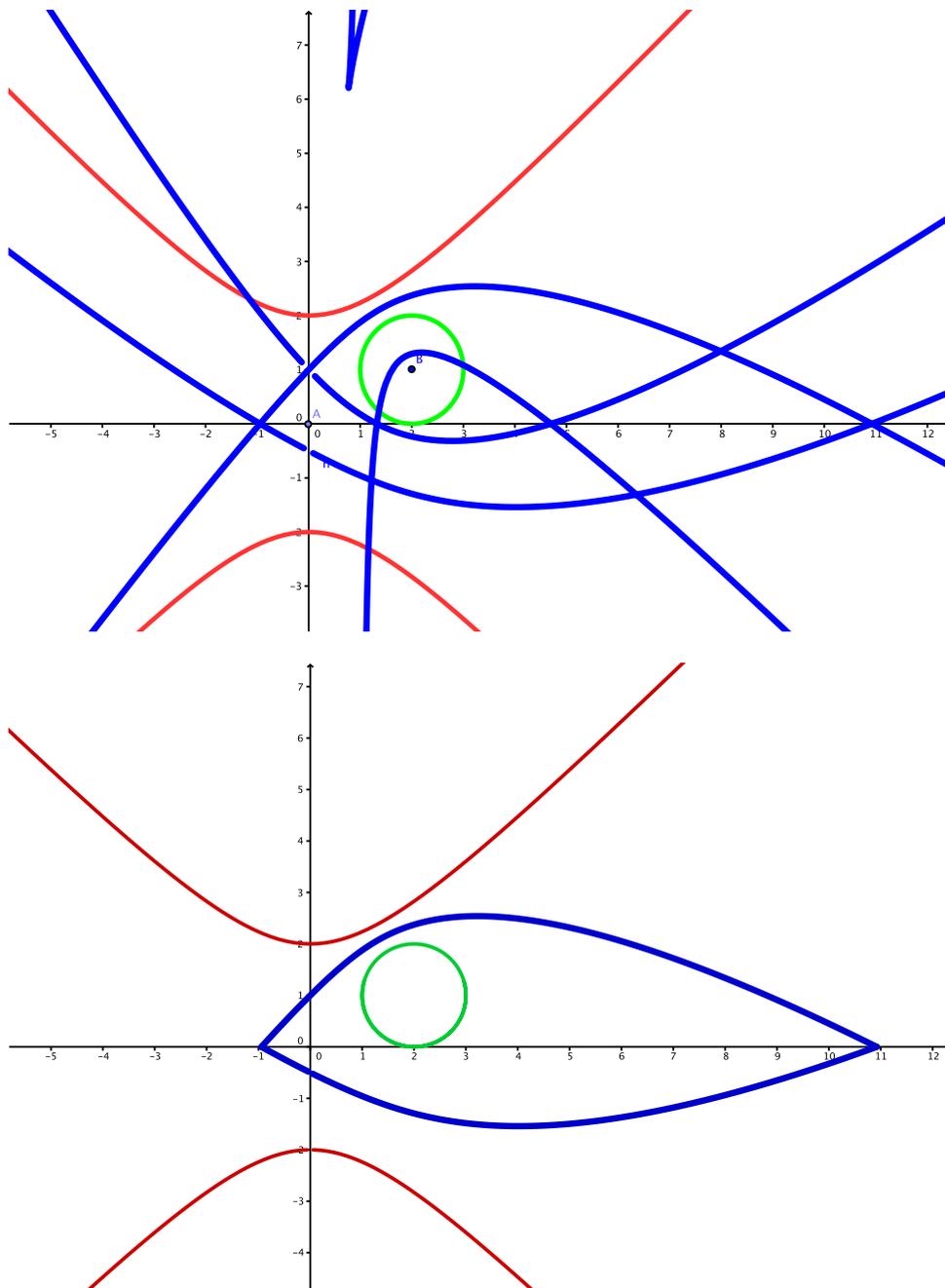


FIGURE 2.6 – En haut la médiatrice algébrique (bleue) et en bas la médiatrice géométrique (bleue) du cercle (vert) et de l'hyperbole (rouge) de l'exemple 25.2.

avec

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= 291t^2 - 320\sqrt{3}t + 476\sqrt{3}t^3 - 48t^4 - 81t\sqrt{3}\sqrt{17} \\
 &\quad + 123t^3\sqrt{3}\sqrt{17} + 6t^4\sqrt{17} - 57 + 18t^2\sqrt{17} - 18t^6\sqrt{17} \\
 &\quad - 6\sqrt{17} + 72t^5\sqrt{3}\sqrt{17} + 300\sqrt{3}t^5 - 72t^6, \\
 y_1(t) &= -2t(-\sqrt{17}\sqrt{3} + 3\sqrt{17}\sqrt{3}t^4 - 123t\sqrt{17} - 48\sqrt{17}t^3 \\
 &\quad - 37\sqrt{3} - 198t^3 - 495t - 2t^2\sqrt{17}\sqrt{3} - 8\sqrt{3}t^2 + 9t^5 \\
 &\quad - 12\sqrt{3}t^4), \\
 w_1(t) &= (\sqrt{17}\sqrt{3} - 3t + 4\sqrt{3}) (3\sqrt{3}t^2 - \sqrt{3} - 24t) \\
 x_2(t) &= -(-291t^2 + 320\sqrt{3}t - 476\sqrt{3}t^3 + 48t^4 - 81t\sqrt{3}\sqrt{17} \\
 &\quad + 123t^3\sqrt{3}\sqrt{17} + 6t^4\sqrt{17} + 57 + 18t^2\sqrt{17} - 18t^6\sqrt{17} \\
 &\quad - 6\sqrt{17} + 72t^5\sqrt{3}\sqrt{17} - 300\sqrt{3}t^5 + 72t^6), \\
 y_2(t) &= -2t(3\sqrt{17}\sqrt{3}t^4 - 48\sqrt{17}t^3 + 198t^3 + 495t - 123t\sqrt{17} \\
 &\quad - \sqrt{17}\sqrt{3} + 37\sqrt{3} - 2t^2\sqrt{17}\sqrt{3} + 8\sqrt{3}t^2 - 9t^5 + 12\sqrt{3}t^4), \\
 w_2(t) &= (3t + \sqrt{17}\sqrt{3} - 4\sqrt{3}) (3\sqrt{3}t^2 - \sqrt{3} - 24t).
 \end{aligned}$$

Dans ce cas, le processus d' "élagage", tel que utilisé dans les exemples 22 et 23, s'exécute sur chacune des deux composantes de la paramétrisation de la médiatrice algébrique. Les valeurs paramétriques correspondantes aux points à l'infini et aux points de rebroussement sont respectivement données par les valeurs correspondantes aux deux composantes  $\mathbf{b}_1$  et  $\mathbf{b}_2$  :

$$\begin{aligned}
 t_{1,cusp} &= \{-0.8672703304, 0.7725828968\}, \\
 t_{2,cusp} &= \{ \} \text{ (la composante } \mathbf{b}_2 \text{ n'admet aucun point de rebrous-} \\
 &\quad \text{sement),} \\
 t_{1,\infty} &= \left\{ \frac{1}{3} \sqrt{3} \sqrt{17} + \frac{4}{3} \sqrt{3}, -\frac{1}{3} (-4 + \sqrt{17}) \sqrt{3} \right\}, \\
 t_{2,\infty} &= \left\{ \frac{1}{3} \sqrt{3} \sqrt{17} + \frac{4}{3} \sqrt{3}, \frac{1}{3} (4 + \sqrt{17}) \sqrt{3} \right\}.
 \end{aligned}$$

Les valeurs paramétriques correspondantes aux points d'auto-intersection sont respectivement données par les valeurs correspondantes aux deux composantes  $\mathbf{b}_1$  et  $\mathbf{b}_2$ , et les valeurs de paramètres qui correspondent aux points d'intersection entre les deux courbes définies par  $\mathbf{b}_1$  et  $\mathbf{b}_2$  :

$$\begin{aligned}
 t_{1,self} &= \{-6.811032995, -0.6778671978, 0.593707278, \\
 &\quad 6.811032995, 7.247541234\}, \\
 t_{2,self} &= \{-1.466712580, 1.345587171, 7.247541234\}.
 \end{aligned}$$

Ainsi, à l'issue de deux étapes d' "élagage", nous obtenons que la médiatrice géométrique est définie par la restriction de la composante  $\mathbf{b}_1$  à l'intervalle  $[-0.677, 0.593]$  et la restriction de la composante  $\mathbf{b}_2$  à l'union d'intervalles  $] -\infty, -1.46671] \cup [1.34559, +\infty[$ , c-à-d :

$$\mathbf{b}_1|_{[-0.677, 0.593]} \cup \mathbf{b}_2|_{]-\infty, -1.46671] \cup [1.34559, +\infty[}$$

Le graphique correspondant est donné à la figure 2.7.

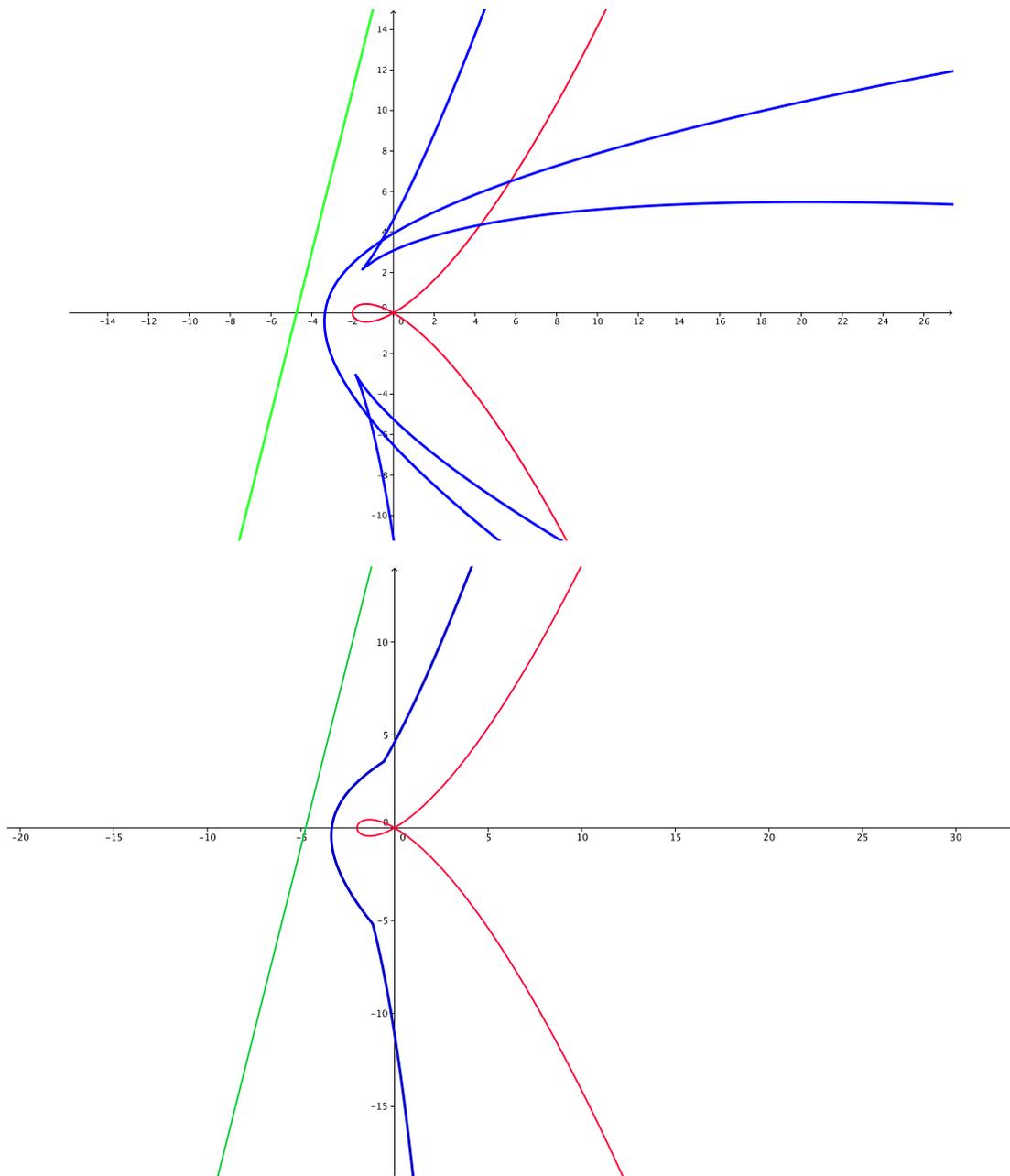


FIGURE 2.7 – En haut la médiatrice algébrique (bleue) et en bas la médiatrice géométrique (bleue) d'une droite (vert) et d'une cubique (rouge) de l'exemple 25.3.

4. Soient

$$\mathbf{s}(u) = (2u + 1, 3u - 2)^T \text{ et } \mathbf{r}(t) = \left( \frac{2t}{1+t^2}, \frac{2(1-t^2)}{1+t^2} \right)^T,$$

les paramétrisations respectives d'une droite et d'une ellipse. Les norme de vecteurs vitesses respectives sont données par

$$\sigma_{\mathbf{s}} = \sqrt{13} \text{ et } \sigma_{\mathbf{r}}(t) = \frac{2\sqrt{1+14t^2+t^4}}{(1+t^2)^2}.$$

Par application de l'algorithme 3 aux  $\mathbf{s}(u)$  et  $\mathbf{r}(t)$  on a :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -\frac{2(-1+t^2)}{(1+t^2)^2} & -\frac{8t}{(1+t^2)^2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 13u - 4 \\ \frac{12(-1+t^2)t}{(1+t^2)^3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{4t}{-8t-3+3t^2} & -\frac{3}{2} \frac{(1+t^2)^2}{-8t-3+3t^2} \\ \frac{-1+t^2}{-8t-3+3t^2} & \frac{(1+t^2)^2}{-8t-3+3t^2} \end{bmatrix}$$

avec

$$\det(\mathbf{A}) = (3t + 1)(t - 3) \neq 0$$

$$\mathbf{B}(u, t) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{V} = \begin{bmatrix} -\frac{2t(26u+26ut^2-17+t^2)}{(-8t-3+3t^2)(1+t^2)} \\ \frac{(-1+t^2)(13u+13ut^2-4-4t^2+12t)}{(-8t-3+3t^2)(1+t^2)} \end{bmatrix}$$

$$F(u, t) = -(13(3t + 1))(t - 3)(1 + t^2)^2 (u - u_1(t))(u - u_2(t)) = 0$$

avec

$$u_1(t) = \frac{52t^3 - 52t^2 + 52t - 52 + \sqrt{13}(3t^2 - 6t + 11)\sqrt{1+14t^2+t^4}}{13(3t + 1)(t - 3)(1 + t^2)},$$

$$u_2(t) = \frac{52t^3 - 52t^2 + 52t - 52 - \sqrt{13}(3t^2 - 6t + 11)\sqrt{1+14t^2+t^4}}{13(3t + 1)(t - 3)(1 + t^2)}.$$

La paramétrisation de la médiatrice algébrique est donnée par :

$$\mathbf{b}_1(t) = \begin{bmatrix} -\frac{2(3t^4+96t^3-158t^2+240t-53+2\sqrt{13}(3t^2-6t+11)\sqrt{1+14t^2+t^4})t}{(-8t-3+3t^2)(3t+1)(t-3)(1+t^2)} \\ \frac{(-12t^4+120t^3-148t^2+48t-40+\sqrt{13}(3t^2-6t+11)\sqrt{1+14t^2+t^4})(-1+t^2)}{(-8t-3+3t^2)(3t+1)(t-3)(1+t^2)} \end{bmatrix}$$

et

$$\mathbf{b}_2(t) = \begin{bmatrix} \frac{2(-3t^4-96t^3+158t^2-240t++53+2\sqrt{13}(3t^2-6t+11)\sqrt{1+14t^2+t^4})t}{(-8t-3+3t^2)(3t+1)(t-3)(1+t^2)} \\ -\frac{(12t^4-120t^3+148t^2-48t+40+\sqrt{13}(3t^2-6t+11)\sqrt{1+14t^2+t^4})(-1+t^2)}{(-8t-3+3t^2)(3t+1)(t-3)(1+t^2)} \end{bmatrix}.$$

Dans ce cas, le processus d' "élagage", tel que utilisé dans les exemples 22 et 23, s'exécute sur chacune des deux composantes de la paramétrisation de la médiatrice algébrique. Les valeurs paramétriques correspondantes aux points à l'infini et aux points de rebroussement sont respectivement données par les valeurs correspondantes aux deux composantes  $\mathbf{b}_1$  et  $\mathbf{b}_2$  :

$$\begin{aligned} t_{1,\infty} &= \left\{ -\frac{1}{3}, 3 \right\}, \\ t_{1,cusp} &= \{-3.900434967, -0.3619871482\}, \\ t_{2,\infty} &= \left\{ -\frac{1}{3}, 3 \right\}, \\ t_{2,cusp} &= \{\} \text{ (la composante } \mathbf{b}_2 \text{ n'admet aucun point de} \\ &\text{rebroussement)}. \end{aligned}$$

Les valeurs paramétriques correspondantes aux points d'auto-intersection sont respectivement données par les valeurs correspondantes aux deux composantes  $\mathbf{b}_1$  et  $\mathbf{b}_2$ , et les valeurs de paramètres qui correspondent aux points d'intersection entre les deux courbes définies par  $\mathbf{b}_1$  et  $\mathbf{b}_2$  :

$$\begin{aligned} t_{1,self} &= \{0.01208020154, 82.78007590\}, \\ t_{2,self} &= \{\} \text{ (la composante } \mathbf{b}_2 \text{ n'admet aucun point d'auto-} \\ &\text{intersection)}. \end{aligned}$$

Ainsi, à l'issue de deux étapes d' "élagage", nous obtenons que la médiatrice géométrique est définie par la restriction de la composante  $\mathbf{b}_2$  à  $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{3}, 3 \right\}$ , c-à-d :

$$\mathbf{b}_2]_{-\infty, -\frac{1}{3}[ \cup ]_{-\frac{1}{3}, 3[ \cup ]_{3, +\infty[$$

et les portions correspondants à la composante  $\mathbf{b}_1$  sont intégralement éliminées. Le graphique correspondant est donné à la figure 2.8.

## 2.3 Les caractérisations géométrique et numérique de la médiatrice par la méthode de couleur dynamique en GeoGebra

Dans cette section, la théorie de couleur dynamique est mise en jeu au logiciel GeoGebra pour des caractérisations géométrique et numérique de la courbe médiatrice géométrique d'un point et d'une courbe et de la médiatrice de deux courbes dans le plan. Ce travail a été réalisé en collaboration avec Rafael Losada ([89]). Il y'a de noter que la couleur dynamique mise en oeuvre au GeoGebra a été déjà utilisée dans d'autre contexte et a fait l'objet de publication comme dans [90]. Il a été utilisé la couleur dynamique en GeoGebra dans [23] et [24] pour la représentation graphique des médiatrices, quand les degrés des courbes est plus grand. Une version en ligne du calcul de la médiatrice d'un point et une courbe algébrique est disponible sur la page [131]. Même si notre méthode ne fournit ni une paramétrisation ni l'équation implicite de la médiatrice, elle permet de collecter à l'exception des certains cas

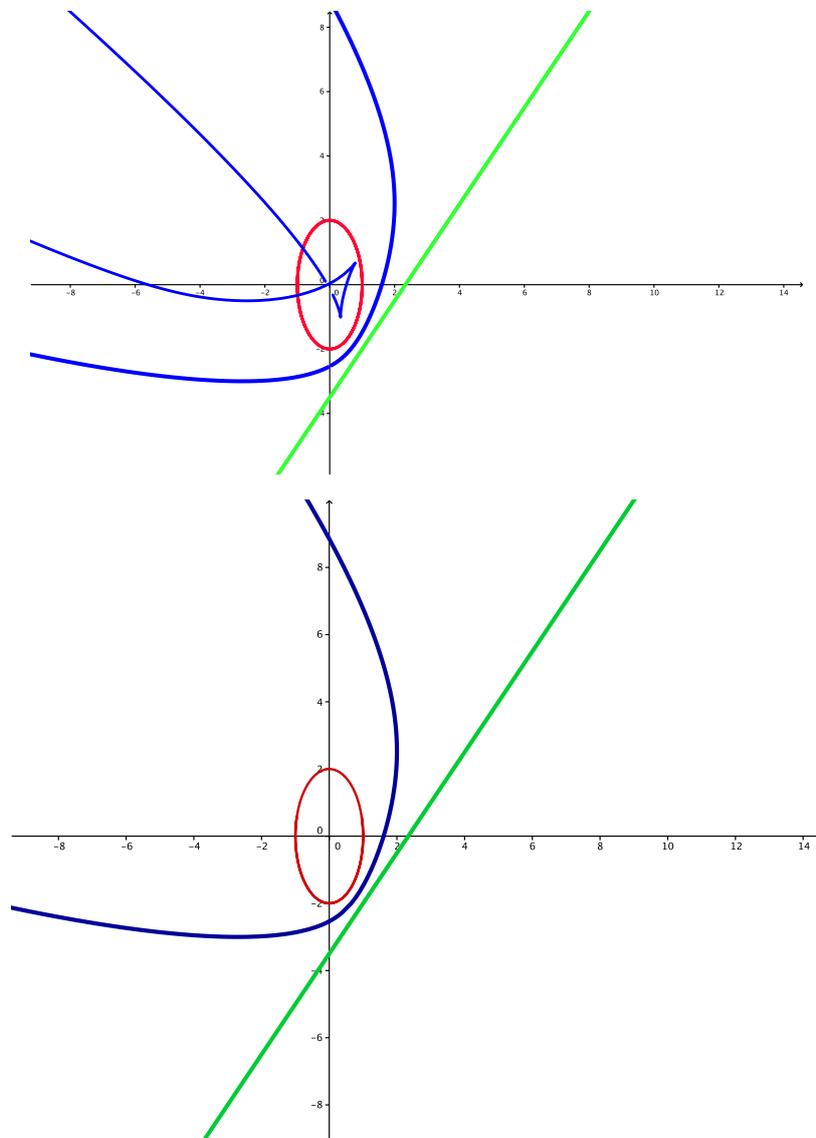


FIGURE 2.8 – En haut la médiatrice algébrique (bleue) et en bas la médiatrice géométrique (bleue) de la droite (vert) et de l'ellipse (rouge) de l'exemple 25.4.

particulier, numériquement, les coordonnées d'un certain nombre de points suffisamment proche, que l'on veut, de la courbe médiatrice géométrique, qui, pourraient être utilisées pour calculer une représentation paramétrique approximative.

Étant donnés deux objets géométriques (point ou courbe) dans le plan, l'approche consiste, dans un premier temps, à utiliser les propriétés de couleur dynamique au logiciel GeoGebra, telle que expliquée au chapitre 1, pour scanner et afficher, le lieu géométrique de point de leur courbe médiatrice géométrique, donnant ainsi la caractérisation géométrique. Ensuite, parmi les points scannés, ceux qui sont situés, à une erreur près fixée, sur la courbe médiatrice géométrique, seront détectés et les coordonnées correspondantes seront collectées et mises dans liste, ce qui donne la caractérisation numérique.

Nous allons commencer à introduire scanner qui est l'outils fondamental de cette méthode, ensuite donner les détails sur les propriétés de couleurs dynamiques en GeoGebra afin d'arriver le processus de scannage proprement dit.

### 2.3.1 Le scanner

Le scanner est composé de  $n$  points  $B_1, \dots, B_n$  situés dans une même verticale. Ces points sont automatiquement animés par un déplacement horizontal de pixels balayant un domaine donné (par exemple le domaine contenant deux courbes planes), au simple toucher d'un bouton. Dans leur progression, la trace de ces points est activée, de telle sorte que l'écran apparaisse en des couleurs différentes acquises par chaque point du domaine balayé par le scanner en fonction la configuration de la carte de couleur, comme cela est montré à la figure 2.9. Chacune de ces couleurs est déterminée par la propriété de couleur dynamique du point de scanner, exprimée par une valeur numérique. Deux points contigus du scanner, sont à une distance de  $\frac{1}{25}$  de l'unité du système cartésien de GeoGebra, ce qui est équivalent à  $\frac{1}{25} \text{ cm}$  (en supposant qu'il n'y a pas de zoom). La raison de cette constante est que chaque unité de GeoGebra équivaut à 50 pixels de la longueur. Pour cette raison, nous aurions, théoriquement, positionné chaque point du scanner à  $\frac{1}{50}$  du point suivant. Mais, il arrive que GeoGebra, non seulement, il montre pas la trace du pixel correspondant au point spécifique, mais aussi celui du pixel situé immédiatement au-dessus. Autrement dit, la trace de chaque point ayant une largeur de 2 pixels, la densité des points du scanner peut être réduite à  $\frac{1}{25}$ , sans perdre la précision de la cartographie.

### 2.3.2 Les propriétés de couleur dynamique en GeoGebra

La méthode de scannage automatique de GeoGebra d'un lieu géométrique inconnu, à l'aide de la couleur dynamique, est appliquée pour résoudre le problème de la médiatrice de deux objets géométriques dans le plan.

Rappelons qu'un modèle de couleur spécifie un système de coordonnées en dimension 3 dans lequel chaque couleur est représentée par un seul point dont le valeur numérique de chacune des coordonnées est normalisée à l'intervalle  $[0, 1]$ . Pour un modèle de couleur **RGB**(Red, Green, Blue), c-à-d (rouge, vert, bleu), nous avons les correspondances suivantes : **rouge**(1, 0, 0), **vert**(0, 1, 0), **bleu**(0, 0, 1), **noir**(0, 0, 0),

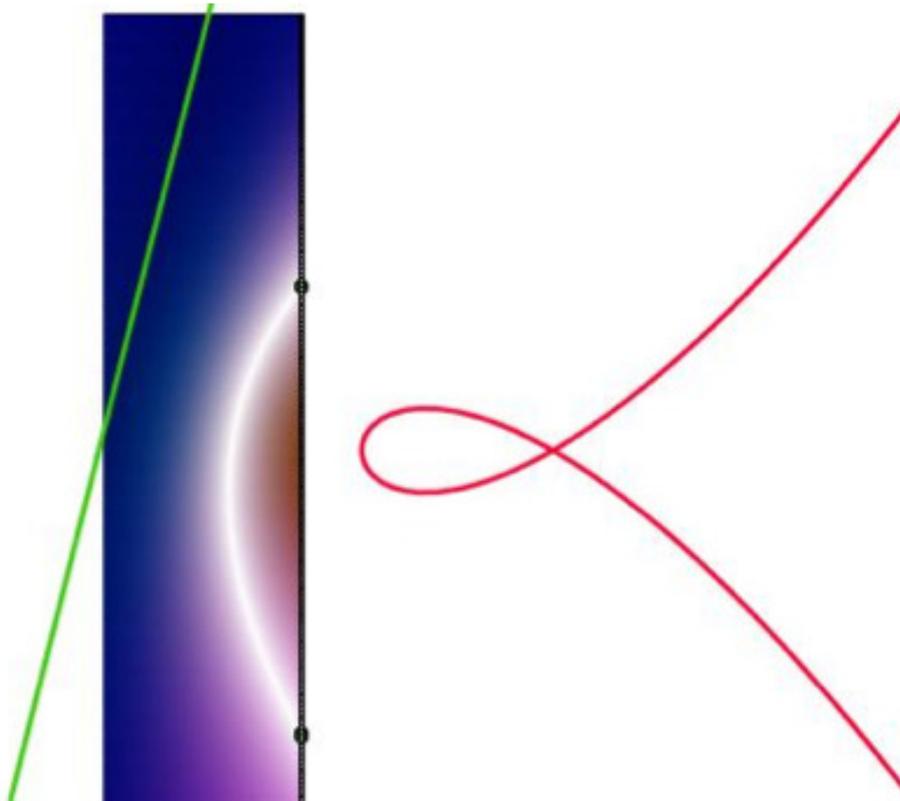


FIGURE 2.9 – Evolution du scanneur balayant un domaine contenant la médiatrice (blanc) de deux courbes (en vert et rouge) planes.

**blanc(1, 1, 1)**, etc.

Le scanneur fonctionne connaissant une condition numérique que doit vérifier chaque point du lieu géométrique à déterminer. Dans ce cas précis, la condition que doit vérifier chaque point  $B$  de la médiatrice géométrique de deux objets  $O_1$  et  $O_2$ , telle que donnée par (2.1) peut être exprimée comme :

$$D(B) \equiv d(B, O_1) - d(B, O_2) = 0. \quad (2.23)$$

Pour une telle condition, l'outil fondamental (ici) est la distance mesurée de chaque point du scanneur aux deux objets géométriques  $O_1$  et  $O_2$ . Pour ce faire, la commande GeoGebra utilisée est la suivante :

$$\text{Distance} [< \textit{point} >, < \textit{objet} >],$$

qui est typiquement la distance minimale mesurée à partir d'un point à un objet géométrique comme l'exige la définition (2.1) de la médiatrice géométrique.

En utilisant le modèle **RGB**(rouge, vert, bleu), les propriétés de couleur dynamique de points GeoGebra, qui sont accessibles par un Clic droit sur le point, en sélectionnant "Propriétés", puis "Avancé", (voir la capture à la figure 2.10) se composent de trois champs : Rouge, Vert, Bleu, ce qui correspond à la fois à "1" de la couleur de chaque canal **RGB**. Dans chacun de ces canaux Rouge, Vert et Bleu associé à tout point  $B$ , peut être entrée une expression numérique telle que  $D(B)$ . Bien que la couleur dynamique en GeoGebra suit la fonction numérique

$$c(x) = 1 - \left| 1 - x + 2 \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \right|$$

qui est périodique et de période 2, l'expression numérique  $D(B)$  ne peut pas être utilisée directement, parce que non seulement, dans de nombreux cas nous n'aurons pas une valeur valide (c-à-d : une valeur comprise entre 0 et 1), mais aussi le comportement périodique des valeurs entrées dans les canaux de couleurs dynamiques **RGB** peut causer une valeur de  $D(B)$  qui serait réduite à 0. Pour éviter ce problème, nous choisissons d'utiliser pour chaque canal de la couleur dynamique **RGB** une expression numérique bien adaptée :

$$\exp(-|D(B)|)$$

qui normalise toute valeur dans l'intervalle  $[0, 1]$ . Ainsi, si  $D(B)$  est 0, la valeur RGB résultante sera (1, 1, 1), c'est à dire on obtiendra la couleur blanche, ou la plus proche du blanc pur pour la partie inférieure en valeur absolue de  $D(B)$ .

#### Remarque 10.

1. Notez que la couleur résultante sera blanche, parce que nous avons choisi d'introduire la condition numérique (2.23) dans les trois canaux **RGB**. Si nous avons introduit la valeur "1" dans l'un d'eux, par exemple le rouge et attribuer la valeur "0" pour le bleu et le vert, la médiatrice s'affiche en rouge au lieu de blanche. Et ainsi de suite, il y'a plusieurs choix possibles, en fonction de l'affichage désiré.
2. Comme l'alternative au modèle **RGB**, la couleur dynamique GeoGebra permet un choix de modèle de couleurs **HSV** (Teinte, Saturation, Valeur) et **HSL** (Teinte, Saturation, Luminance).

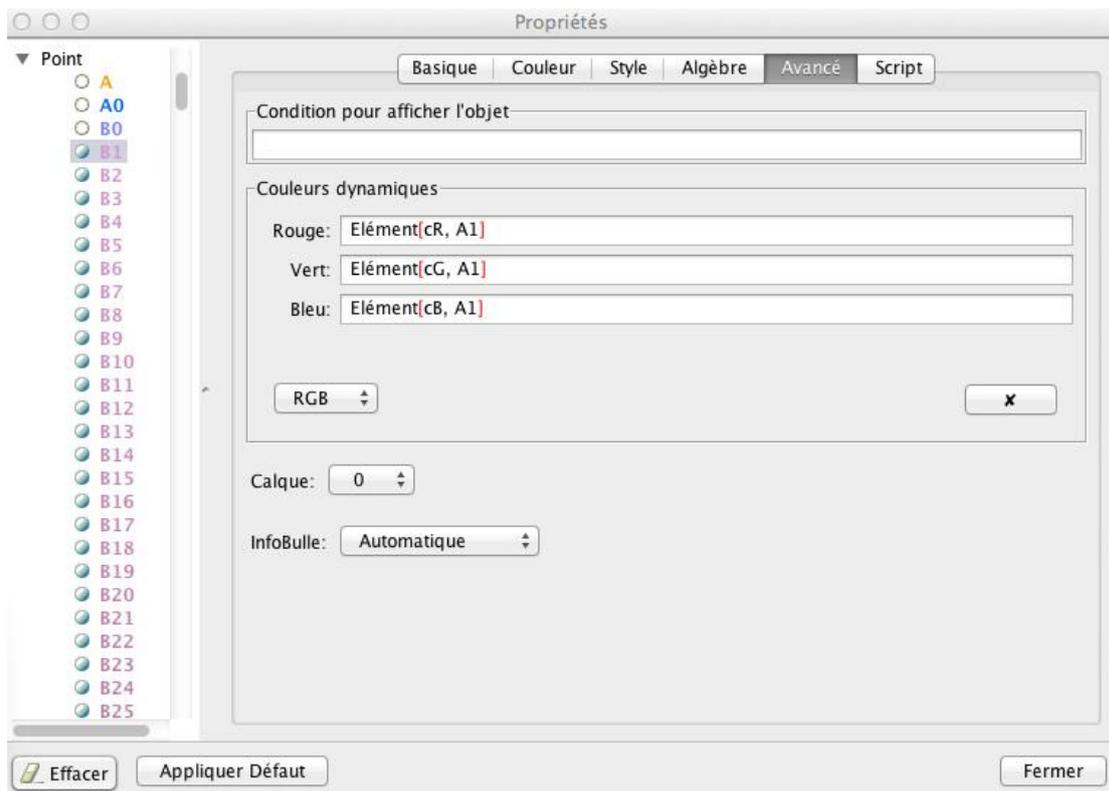


FIGURE 2.10 – La capture des propriétés de couleur dynamique des points par GeoGebra

### 2.3.3 Le processus du scannage

Soit un scanneur  $\mathcal{S}(a, n)$  constitué de  $n$  points à une position  $a$ . Pour un intervalle de valeur de  $a$  suffisamment choisi, le scanneur balaie horizontalement un domaine  $\mathcal{D}$  contenant les (ou une partie de) deux objets géométriques  $O_1$  et  $O_2$ .

A chaque valeur de  $a$  (c-à-d à chaque position  $a$  du scanneur), les distances minimales entre chaque point  $B_{a,k}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , du scanneur et les deux objets  $O_1$  et  $O_2$  respectivement notées  $d_{1,a,k}$  et  $d_{2,a,k}$  sont calculées. En posant  $cR_{a,k}$ ,  $cG_{a,k}$ , et  $cB_{a,k}$  respectivement pour les valeurs correspondant aux trois canaux du modèle de couleurs rouge, vert et bleu, les points qui sont assez proche de (ou appartenant à) la courbe médiatrice géométrique balayés par le scanneur s'affichent en couleur blanche (ou plus proche de blanche pure) selon la position des points de  $\mathcal{S}(a, n)$  par rapport à la médiatrice.

Le processus du scannage se résume comme suit :

1. On donne un point initial pour une position  $a$  initiale convenablement choisie du scanner :  $B_0 = (x_0 + a, y_0)$ .
2. Pour chaque position  $a$  du scanneur  $\mathcal{S}(a, n)$ 
  - (a) Les point du scanneur sont définis par :

$$B_{a,k} = \left( x_0 + a, y_0 - \frac{k}{25} \right), k = 1, \dots, n.$$

- (b) Les distances entre chaque point  $B_{a,k}$  du scanneur et les deux objets  $O_1$  et  $O_2$  sont calculées et données par

$$d_{a,k,1} := d(B_{a,k}, O_1) \text{ et } d_{a,k,2} := d(B_{a,k}, O_2).$$

- (c) Les valeurs numériques correspondantes aux canaux du modèle **RGB** sont données par

$$\begin{aligned} cR_{a,k} &:= \exp \left( - \left| \frac{d_{a,k,1}}{d_{a,k,2}} - 1 \right| \right), \\ cG_{a,k} &:= \exp \left( - \left| d_{a,k,1} - d_{a,k,2} \right| \right), \\ cB_{a,k} &:= \exp \left( - \left| \frac{d_{a,k,2}}{d_{a,k,1}} - 1 \right| \right). \end{aligned}$$

Ainsi, chaque fois que les deux distances sont (ou presque) égales, c-à-d :

$$d_{a,k,1} = (\simeq) d_{a,k,2},$$

alors le point  $B_{a,k}$  est situé sur (ou assez proche de) la médiatrice géométrique et la trace du point s'affiche en couleur blanche.

**Remarque 11.** L'utilisation de couleur dynamique pour la caractérisation des médiatrices est un méthode numérique. Par conséquent, elle doit être utilisée avec une grande précaution. Elle peut conduire à des résultats incorrects, par exemple, quand les courbes sont tangentes, ou quand une partie de la médiatrice est bi-dimensionnelle (voir [24] et [58]).

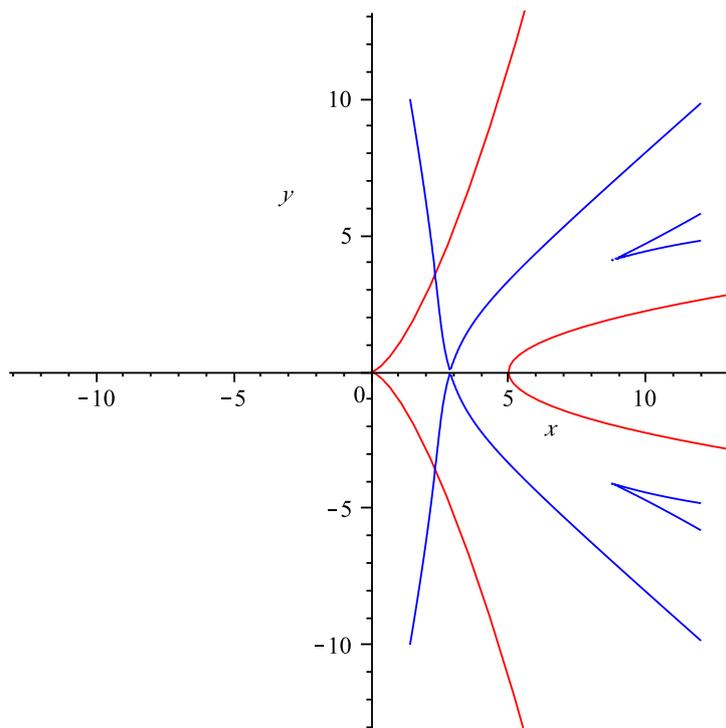


FIGURE 2.11 – La médiatrice algébrique (en bleu) de de la parabole (rouge) et de cubique (rouge) obtenue par la méthode algébrique dans l'exemple 26.1.

**Exemple 26.**

Pour un couple d'objets géométriques, nous allons montrer des exemples de la caractérisation géométrique de leur courbe médiatrice géométrique tout en comparant avec les résultats obtenus avec la méthode algébrique introduite à la section 2.1.

1. Soient

$$\mathbf{c}_1(t) = [ t^2, t^3 ]^T \text{ et } \mathbf{c}_2(t) = [ t^2 + 5, t ]^T,$$

les paramétrisations respectives d'une cubique et d'une parabole.

- (a) En utilisant la méthode algébrique, nous obtenons l'équation implicite de la médiatrice algébrique qui est déterminée par un polynôme irréductible de degré total égal à 23 dont le graphique correspondant est présenté à la figure 2.11.
- (b) En utilisant la méthode de couleur dynamique en GeoGebra, pour

$$x_0 = -1.54, y_0 = 6.12, n = 290, a \in [0, 13],$$

nous obtenons une caractérisation géométrique de la médiatrice géométrique présentée à la figure 2.12.

2. Soient

$$\mathbf{c}_1(t) = \begin{bmatrix} 3t + 4 \\ -8t + 4 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{c}_2(t) = \begin{bmatrix} \frac{2t+1-t^2}{1+t^2} \\ \frac{4t(1-t^2)-(1-t^2)(1+t^2)}{(1+t^2)^2} \end{bmatrix},$$

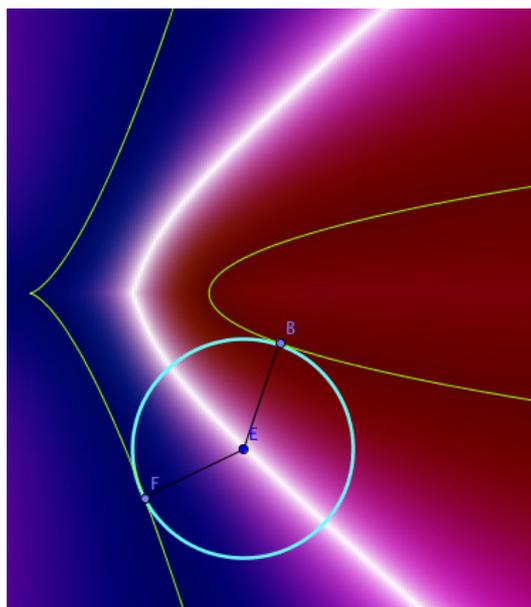


FIGURE 2.12 – La caractérisation géométrique de la médiatrice géométrique (en blanche) de l'exemple 26.1.

les paramétrisations respectives d'une droite et d'une courbe rationnelle.

- (a) En utilisant la méthode algébrique, nous obtenons l'équation implicite de la médiatrice algébrique qui est déterminée par un polynôme irréductible de degré total égal à 16 dont le graphique correspondant est présenté à la figure 2.13.
- (b) En utilisant la méthode de couleur dynamique en GeoGebra, pour

$$x_0 = -1.54, y_0 = 6.12, n = 290, a \in [0, 13],$$

nous obtenons une caractérisation géométrique de la médiatrice géométrique présentée à la figure 2.14.

3. Soient

$$\mathbf{c}_1(t) = \begin{bmatrix} t^2 + 5 \\ t \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{c}_2(t) = \begin{bmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2} + 7 \\ \frac{2t}{(1+t^2)} \end{bmatrix},$$

les paramétrisations respectives d'une parabole et d'un cercle.

- (a) En utilisant la méthode algébrique, nous obtenons l'équation implicite de la médiatrice algébrique qui est déterminée par un polynôme irréductible de degré total égal à 10. La courbe correspondante est rationnelle. Le graphique correspondant est présenté à la figure 2.15.
- (b) En utilisant la méthode de couleur dynamique en GeoGebra, pour

$$x_0 = -1.54, y_0 = 6.12, n = 290, a \in [0, 13],$$

nous obtenons une caractérisation géométrique de la médiatrice géométrique présentée à la figure 2.16

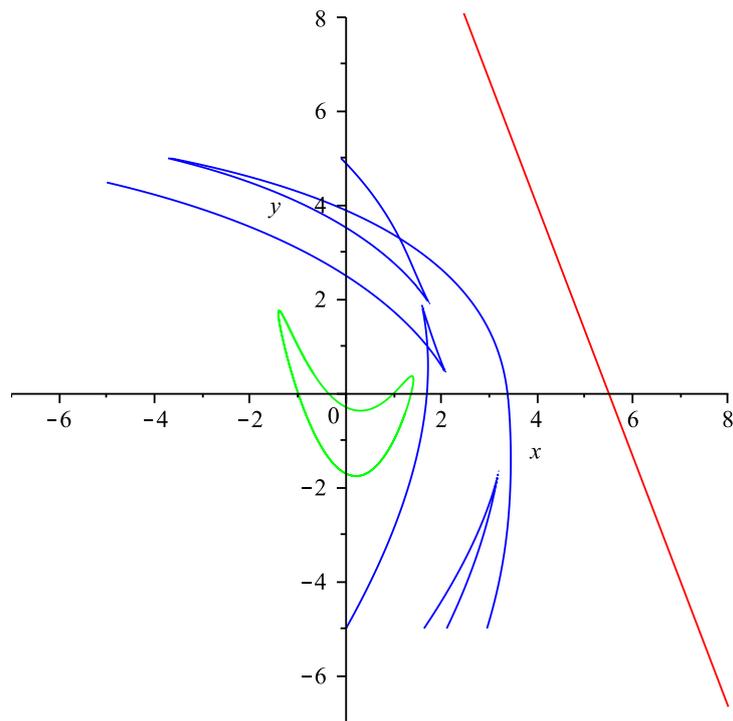


FIGURE 2.13 – La médiatrice algébrique (bleue) de la droite (rouge) et de la courbe fermée (vert) obtenue l'exemple 26.2.

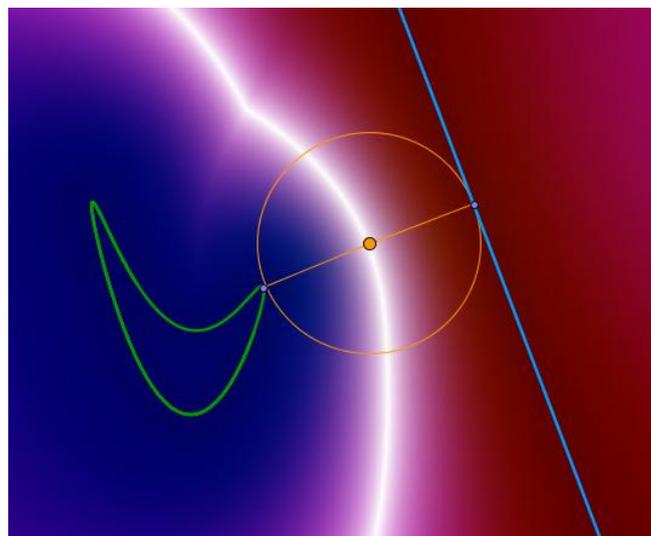


FIGURE 2.14 – La caractérisation géométrique de médiatrice géométrique (blanche) de l'exemple 26.2.

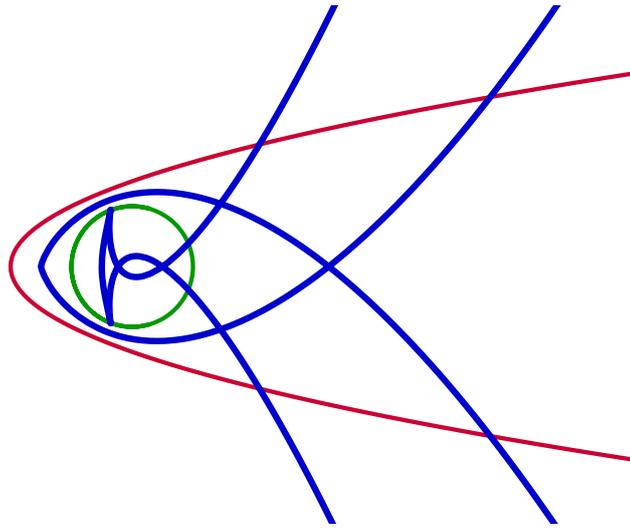


FIGURE 2.15 – La médiatrice algébrique (bleue) de la parabole (rouge) et du cercle (vert) obtenue dans l'exemple 26.3.

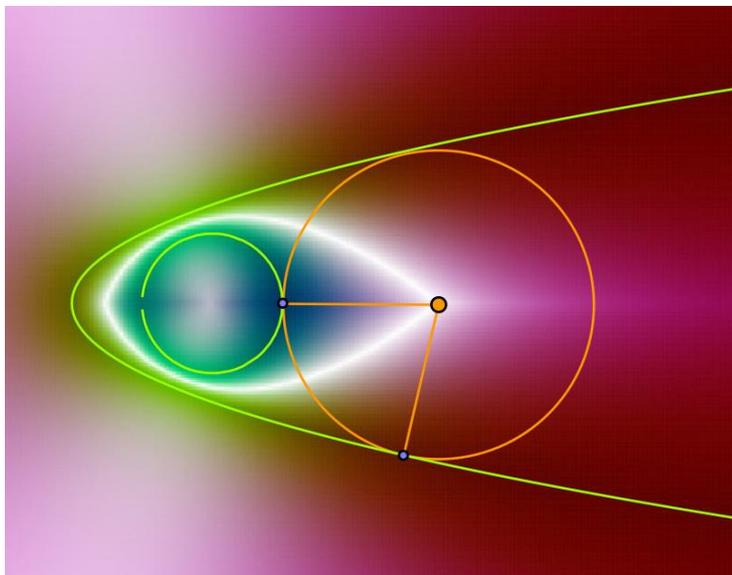


FIGURE 2.16 – La caractérisation géométrique de la médiatrice géométrique (blanche) de l'exemple 26.3.

4. Soient

$$c_1(t) = \begin{bmatrix} t^2 + 5 \\ t \end{bmatrix} \text{ et } P = (10.22, -0.02),$$

respectivement la paramétrisation d'une parabole et les coordonnées un point.

- (a) En utilisant la méthode algébrique, nous obtenons une paramétrisation rationnelle pour la médiatrice algébrique donnée par

$$B(t) = \begin{bmatrix} \frac{x(t)}{v(t)} \\ \frac{y(t)}{w(t)} \end{bmatrix},$$

avec

$$\begin{aligned} x(t) &= 1212092528689527982622109346216100298570965225632007700 \\ &0133936294974884472236681665792804307756574577996119309 \\ &830814538137600000 t^4 - 277629379838498342670893578537169 \\ &46203523829334406015617662884681519963064537903611378998 \\ &96832000 t^3 + 93206489524710142183143707473980546018706551 \\ &47190852976533464678400 t^2 - 93974032248715963390374214574 \\ &8008960 t + 13430213 \\ y(t) &= -8043586072981949134603226940277867896427739391816931118 \\ &754089860965004104961292882592971681149911650783327743141 \\ &3436555979806205699553183228050898786713600000 t^5 + 242418 \\ &505737905596524421869243220059714193045126401540002678725 \\ &899497689444733633315856086155131491559922386196616290762 \\ &75200000 t^4 + 16869637843344544032291928232692744416825 \\ &40050872197106873252650779726176737316301017739700469 \\ &76000 t^3 - 3085744729977056301806227064824860316338657 \\ &2462256700593701860147200 t^2 - 7214121210195545780783 \\ &5469715603456000 t + 4423312 \\ v(t) &= 165142610780847168999191544071545970975738043004798954 \\ &2263193600000 t^2 - 169220946426259237797792703315968 \\ &000 t + 1765950 \\ w(t) &= 74314174851381226049636194832195686939082119352 \\ &15952940184371200000 t^2 - 761494258918166570090067164 \\ &921856000 t + 7946775, \end{aligned}$$

et le graphique correspondant est présenté à la figure 2.17.

- (b) En utilisant la méthode de couleur dynamique en GeoGebra, pour

$$x_0 = -0.7, y_0 = 2.5, n = 290, a \in [0, 13],$$

nous obtenons la caractérisation géométrique de la médiatrice géométrique présentée à la figure 2.18.

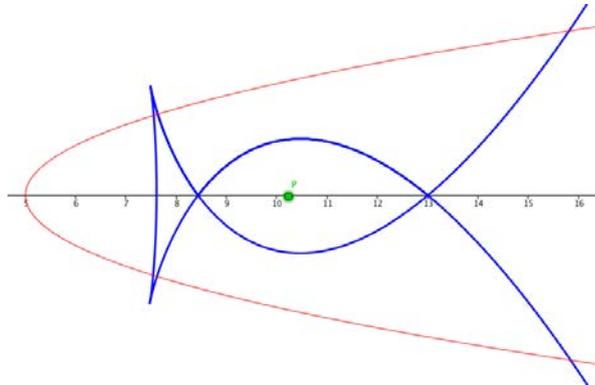


FIGURE 2.17 – La médiatrice algébrique (bleue) de la parabole (rouge) et du point  $P$  (vert) obtenue dans l'exemple 26.4.

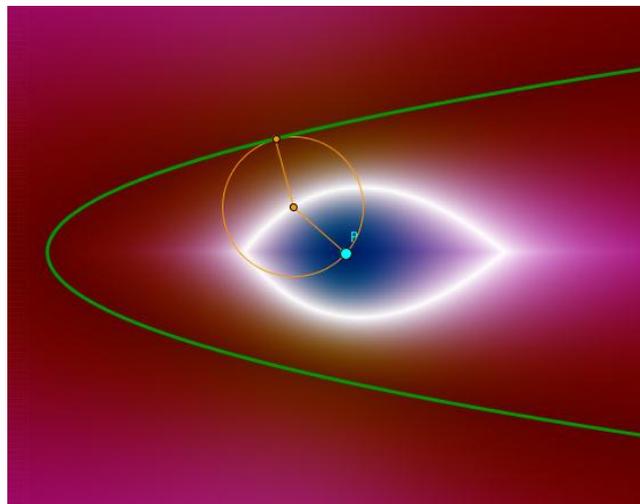


FIGURE 2.18 – La caractérisation géométrique de la médiatrice géométrique (blanche) de l'exemple 26.4

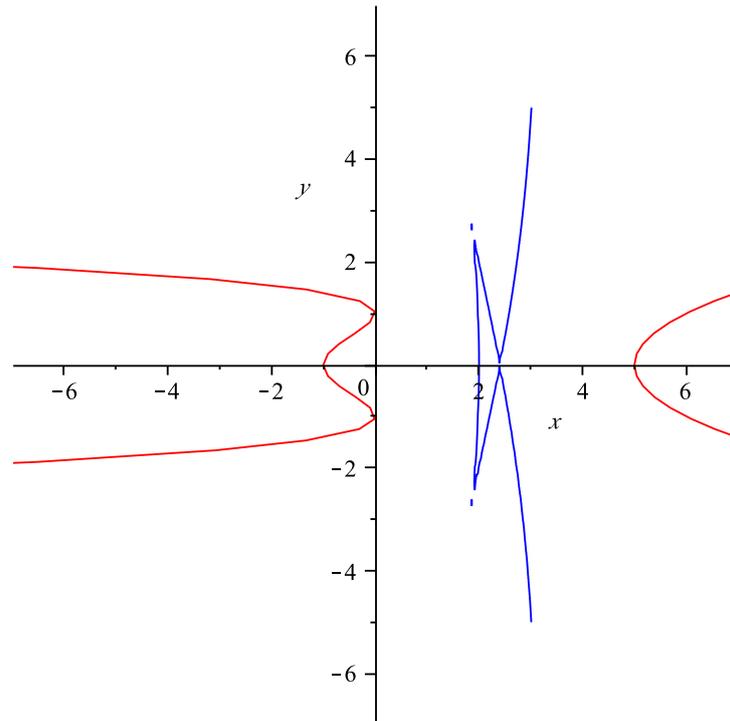


FIGURE 2.19 – La médiatrice algébrique (bleue) de la parabole (rouge) et de la quartique (rouge) obtenue dans l'exemple 26.5.

5. Soient

$$\mathbf{c}_1(t) = \left[ -(t+1)^2(t-1)^2, t \right]^T \text{ et } \mathbf{c}_2(t) = \left[ t^2 + 5, t \right]^T,$$

les paramétrisations respectives d'une quartique et d'une parabole.

- (a) En utilisant la méthode algébrique, nous obtenons que l'équation implicite de la médiatrice algébrique déterminée par un polynôme irréductible de degré total égal à 35 dont le graphique correspondant est présenté à la figure 2.19.
- (b) En utilisant la méthode de couleur dynamique en GeoGebra pour

$$x_0 = -1.54, y_0 = 6.12, n = 290, a \in [0, 13],$$

nous obtenons une caractérisation géométrique de la médiatrice géométrique présentée à la figure 2.20.

6. Nous revenons avec l'exemple 24 soient

$$\mathbf{c}_1(t) = \left[ t^2 + 1, t^5 + 3t \right]^T \text{ et } \mathbf{c}_2(t) = \left[ t^2 + 5, t \right]^T,$$

les paramétrisations respectives d'une quintique et d'une parabole.

- (a) Dans ce cas, nous obtenons par la méthode algébrique que l'équation implicite de la médiatrice algébrique, déterminée par un polynôme irréductible d'une taille énorme dont le degré total est 50 et le graphique correspondant est présenté à la figure 2.21.

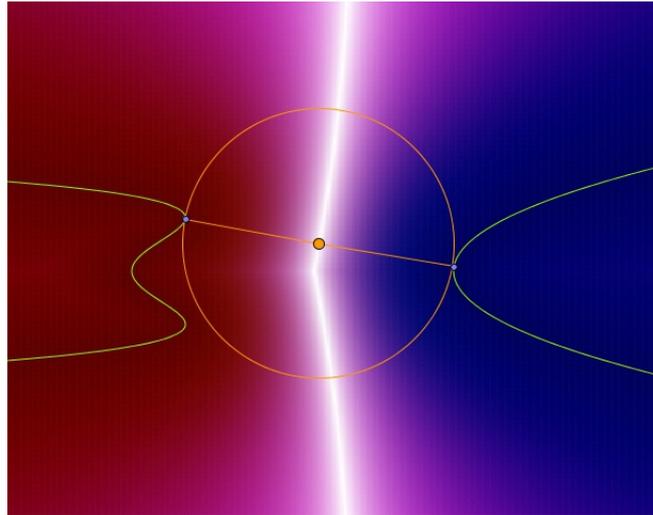


FIGURE 2.20 – La caractérisation géométrique de la médiatrice géométrique (blanche) de l'exemple 26.5.

- (b) Par contre en utilisant la méthode de couleur dynamique en GeoGebra, pour

$$x_0 = -1.54, y_0 = 6.12, n = 290, a \in [0, 13],$$

nous obtenons une caractérisation géométrique, simple et bien parfaite pour la médiatrice géométrique, telle que présentée à la figure 2.22. De plus l'exemple 27.4 nous donne une caractérisation numérique d'un certain nombre de points (suffisamment proche) de la médiatrice géométrique dont la trace est présentée à la figure 2.27

Nous allons procéder une étape supplémentaire pour une collecte de coordonnées de points situés sur la courbe médiatrice géométrique à une petite erreur près.

### 2.3.4 La collecte de coordonnées de points de la médiatrice géométrique

Le scanner permet également de collecter et stocker, dans une liste, les coordonnées des points scannés, qui sont suffisamment proches, que l'on veut, de la médiatrice géométrique. Ainsi pour deux objets géométriques  $O_1$  et  $O_2$ , dont on cherche à caractériser la médiatrice géométrique, on a à suivre la procédure supplémentaire suivante :

1. On va, tout d'abord, fixer une valeur prédéterminée  $\varepsilon$ , assez petite petit que l'on veut.
2. On initialise  $\mathcal{M}_{C_1, C_2}^\varepsilon$  par une liste vide :  $\mathcal{M}_{C_1, C_2}^\varepsilon = \{\}$ .
3. On crée une autre liste notée **cRGBpuro** qui à chaque moment de l'avancement du scanner, mémorise, au fur et à mesure, la position de tous les points du scanner qui sont situés sur la courbe médiatrice géométrique à  $\varepsilon$  près, à

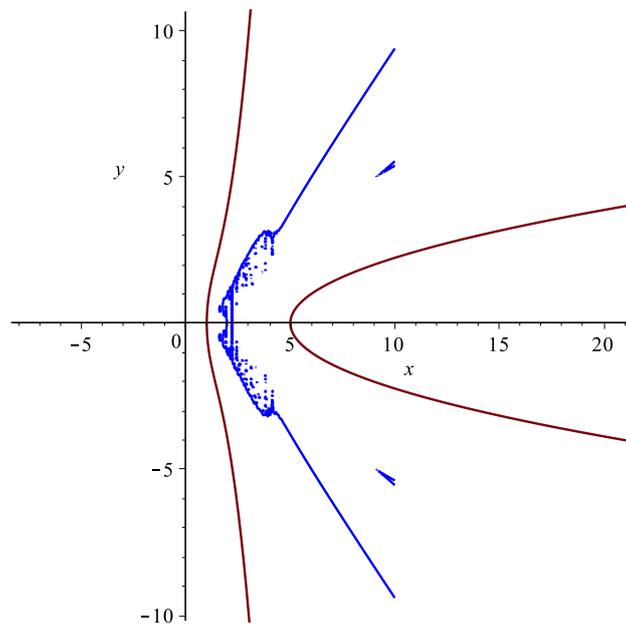


FIGURE 2.21 – La médiatrice algébrique (bleue) de la parabole (rouge) et de la quintique (rouge) obtenue dans l'exemple 26.6.

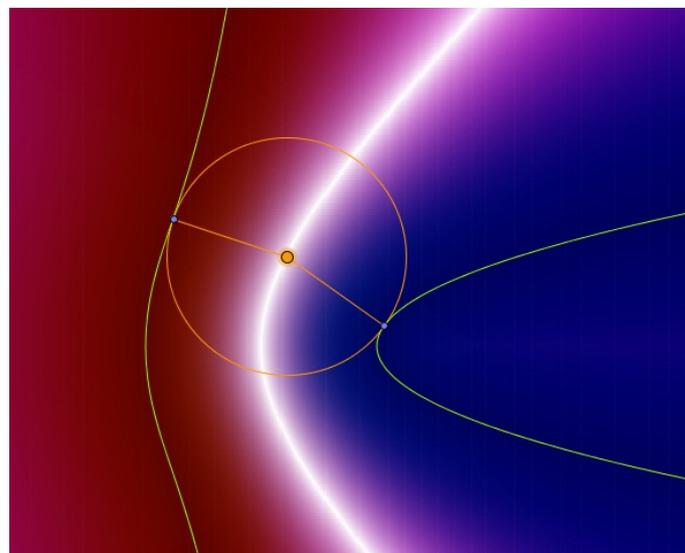


FIGURE 2.22 – La caractérisation géométrique de la médiatrice géométrique (blanche) 26.6.

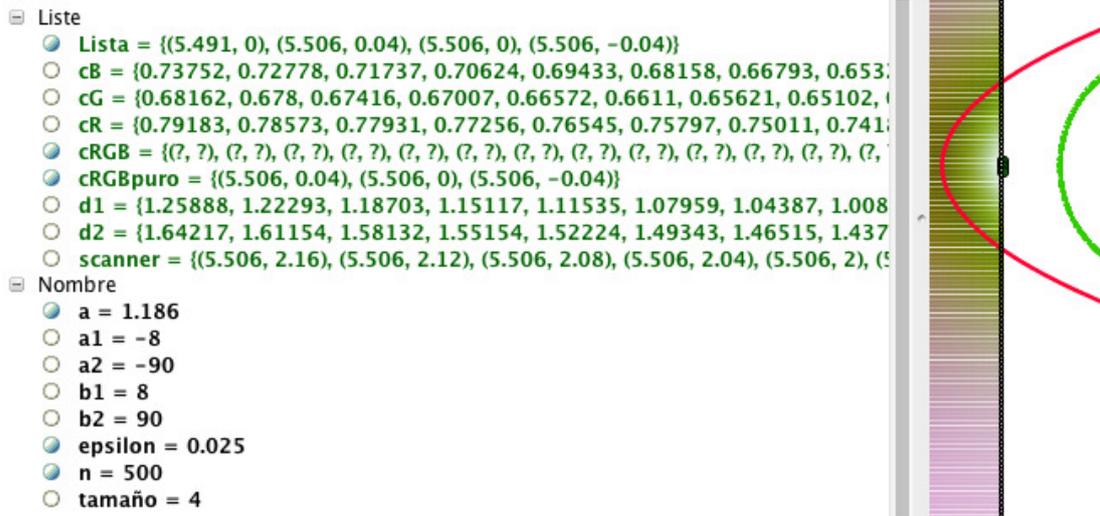


FIGURE 2.23 – Cette capture montre l' évolution de la liste finale **Lista**, pour  $\varepsilon = 0.025$  en fonction de l'avancement du scanner. La liste **Lista** qui, précédemment contenait les coordonnées d'un seul point  $(5.491, 0)$ , s'actualise avec les coordonnées de trois points  $(5.506, 0.04)$ ,  $(5.506, 0)$ ,  $(5.506, -0.04)$  de la liste **cRGBpuro** mémorisés à la position  $a = 1.186$  du scanner

savoir les de coordonnées de points du scanner  $B_i$  vérifiant la condition :

$$\left| d(B_i, O_1) - d(B_i, O_2) \right| < \varepsilon \quad (2.24)$$

4. L' utilisation d'un script qui se trouve dans les propriétés de la liste **cRGBpuro**, chaque fois que la liste **cRGBpuro** est mise à jour à raison de l'avancement du scanner, les coordonnées de points qu'elle (c-à-d la liste **cRGBpuro**) contient vont s'ajouter à la liste finale  $\mathcal{M}_{C_1, C_2}^\varepsilon$ . La figure 2.23 montre une capture illustrative de cette phase.

### Remarque 12.

1. Compte tenu de la remarque 11, on doit éviter les cas des points ou des courbes sont tangentes, ou d'autres cas où la méthode numérique produit des résultats incorrects.
2. Le nombre décimal de coordonnées visibles (initialement 5), peut être changé (jusqu' à 15) dans le menu "Options" puis "Arrondi" de GeoGebra. Dans tous les cas, ce nombre de décimales visibles influe sur la précision des calculs internes de GeoGebra, qui est toujours 16 chiffres significatifs.
3. La présence du script dans la collecte de coordonnées a ralenti, davantage, le processus. Cependant, ce ralentissement ne serait pas significatif si cette méthode a été, déjà, implementée dans le propre programme de GeoGebra, puisque l'augmentation de la taille de la liste de coordonnées affecte, à peine, la consommation de mémoire et de calcul.

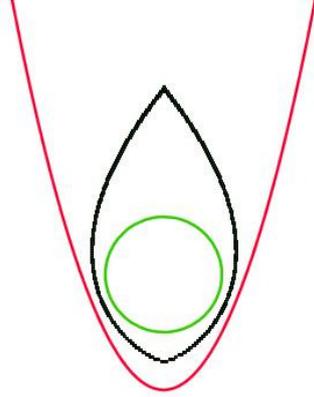


FIGURE 2.24 – La trace de points de (ou assez proche de) la médiatrice géométrique détectés par le scanner, pour l'exemple 27.1.

**Exemple 27.** Nous allons reprendre certain exemple déjà traités afin de pouvoir comparer les résultats.

1. Reprenons l'exemple 26.3, soient

$$\mathbf{c}_1(t) = (t, t^2 - 2)^T \text{ et } \mathbf{c}_2(t) = \left( \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \frac{2t}{1 + t^2} \right)^T$$

les paramétrisations respectives d'une parabole et d'un cercle. Pour  $n = 250, \varepsilon = 0.025$ , on obtient 426 points dont les coordonnées sont rangées dans une liste  $\mathcal{M}_{C_1, C_2}^\varepsilon$  qui sera présentée en annexe CD. La trace de points scannés est présentée à la figure 2.24.

2. Reprenons l'exemple 25.3, soient

$$\mathbf{c}_1(t) = \left( 2t^2 - 2, \frac{2}{\sqrt{3}}t(t^2 - 1) \right)^T \text{ et } \mathbf{c}_2(t) = (2t - 5, 8t - 1)^T,$$

les paramétrisations respectives de d'une PH-cubique et d'une droite. Pour  $n = 400, \varepsilon = 0.025$ , on obtient 631 points dont les coordonnées sont rangées dans une liste  $\mathcal{M}_{C_1, C_2}^\varepsilon$  qui sera présentée en annexe CD. La trace de points scannés est présentée à la figure 2.25.

3. Reprenons l'exemple 25.1, soient

$$\mathbf{c}_1(t) = \left( 2t^2 - 2, \frac{2}{\sqrt{3}}t(t^2 - 1) \right)^T \text{ et } \mathbf{c}_2(t) = \left( \frac{2t}{1 + t^2}, \frac{1 - t^2}{1 + t^2} + 4 \right)^T,$$

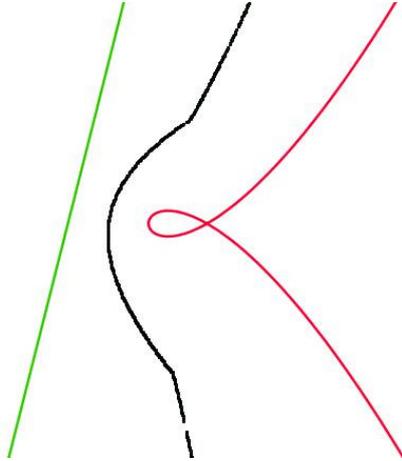


FIGURE 2.25 – La trace de points de (ou assez proche de) la médiatrice géométrique détectés par le scanner, pour l'exemple 27.2.

les paramétrisations respectives de la PH-cubique et d'un cercle. Pour  $n = 400, \varepsilon = 0.025$ , on obtient 442 points dont les coordonnées sont rangées dans une liste  $\mathcal{M}_{C_1, C_2}^\varepsilon$  qui sera présentée en annexe CD. La trace de points scannés est présentée à la figure 2.26.

4. Reprenons l'exemple 24 repris au 6, soient

$$\mathbf{c}_1(t) = (t^2 + 1, t^5 + 3t)^T \text{ et } \mathbf{c}_2(t) = (t^2 + 5, t)^T,$$

les paramétrisations respectives d'une parabole et d'une quintique. Pour  $n = 400, \varepsilon = 0.025$ , on obtient 293 points dont les coordonnées sont rangées dans une liste  $\mathcal{M}_{C_1, C_2}^\varepsilon$  qui sera présentée en annexe CD. La trace de points scannés est présentée à la figure 2.27.

**Remarque 13.** Il est à noter que durant le scannage, il se pourrait que pour une très petite portion de la médiatrice qu'aucun point ne soit scanné, car le scanner est constitué d'une liste de points discrets très proches les uns des autres (et non pas un segment de droite continu). Il peut donc y avoir de "saut" considérables lors du traçage de points scannés, comme on peut le constater sur les figures 2.25, 2.26 et 2.27.

## Conclusion

Au terme de ce chapitre, nous avons présenté des nouvelles approches pour la caractérisation d'une représentation algébrique et pour les caractérisations géométrique et numérique pour la courbe médiatrice de deux objets géométriques du plan.

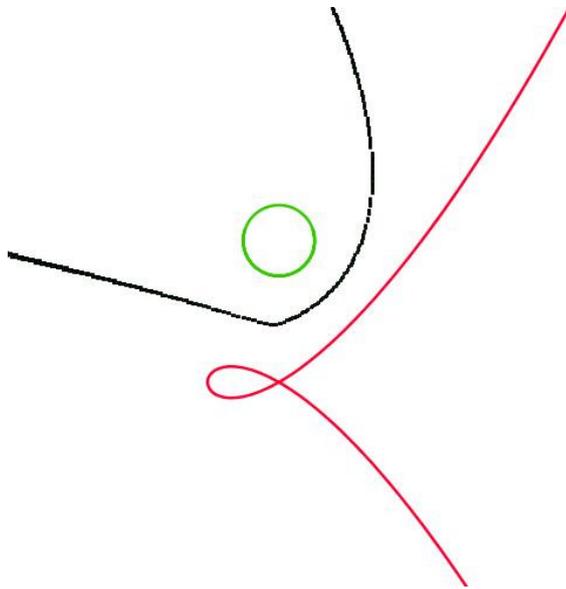


FIGURE 2.26 – La trace de points de (ou assez proche de) la médiatrice géométrique détectés par le scanneur, pour l'exemple 27.3.

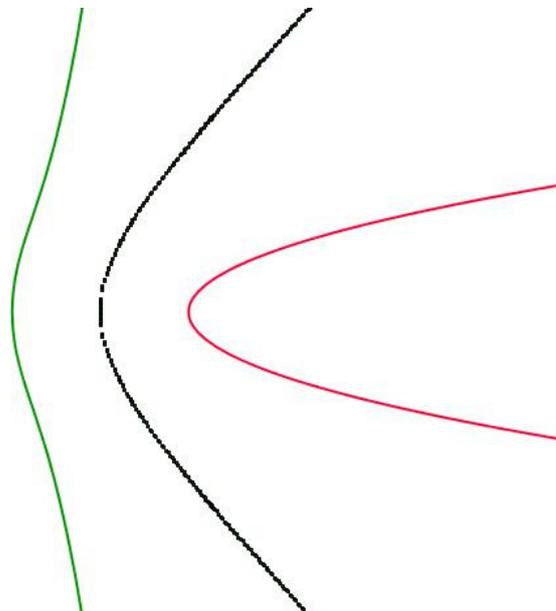


FIGURE 2.27 – La trace de points de (ou assez proche de) la médiatrice géométrique détectés par le scanneur, pour l'exemple 27.4.

- Par rapport à la représentation, nous avons présenté un algorithme pour calculer une paramétrisation algébrique exacte de la courbe médiatrice algébrique d'un cercle ou d'une droite et une courbe rationnelle régulière du plan. La paramétrisation ainsi calculée coïncide, dans le cas rationnel, avec le résultat de ([44, 103]) notamment pour la paramétrisation de la médiatrice algébrique respective d'une droite et une PH-courbe et d'un cercle et une PH-courbe. Même si la paramétrisation que nous obtenons dans les deux cas ci-cités, n'est pas rationnelle en générale, elle pourrait, non seulement, servir pour calculer une représentation rationnelle approximative (par exemple par approximation de racines carrées, ou par interpolation des points calculés à partir de la paramétrisation), mais aussi, être plus adaptée dans le processus d'"élagage", qui est un des véritable défi du thème, surtout dans le cas où la médiatrice est uniquement déterminée par un polynôme de très haut degré et qu'une paramétrisation rationnelle n'est pas disponible. De plus, cette l'approche a permis de montrer, explicitement, le lien étroite qui existe entre la rationalité de la courbe médiatrice et la rationalité des hodographes (la norme des vecteurs vitesses) des courbes d'entrées. Cette méthode qui est basée sur la règle de Cramer et de techniques d'éliminations très élémentaires, sera généralisée au chapitre 3 dans le cadre de calcul de la surface médiatrice algébrique de deux surfaces rationnelles.
- Pour les caractérisations géométrique et numérique, la théorie de couleur dynamique a été mise en oeuvre au logiciel GeoGebra pour scanner, afficher, en une couleur souhaitée (blanche dans dans notre cas) , et collecter, numériquement, les coordonées de points de (suffisamment proche que l'on veut de) la courbe médiatrice géométrique de deux objets géométriques, sauf dans certaines cas spéciales (comme courbes tangentes). Bien qu'elle ne fournit aucune représentation algébrique, cette méthode présente deux avantages majeurs qui sont :
  1. La mise en oeuvre numérique de la condition (2.1), qui était une problématique du thème, à cause de difficultés sur la fonction distance mentionnées en introduction, la médiatrice géométrique est ainsi caractérisée géométriquement.
  2. Une représentation approximative pour la médiatrice géométrique pourrait être calculée à partir de la liste de points collectés.

Il faut aussi noter que cette méthode est similaire à celle introduite par Shou et al. ([119]). Mais, l'avantage de notre méthode réside par le fait qu'elle permet de collecter une liste de coordonnées d'un certain nombre de points de la courbe médiatrice géométrique.

# Chapitre 3

## La médiatrice de deux surfaces de petit degré

Dans ce chapitre nous généralisons l'approche généralisée introduite au chapitre 2 dans le cas de deux courbes rationnelles planes, pour calculer une paramétrisation de la surface médiatrice de deux surfaces rationnelles de petit degré.

### Introduction

Les surfaces médiatrices sont des constructions géométriques qui sont fréquentes dans plusieurs domaines d'applications tels que la génération de chemins, la planification de mouvements, la machine-outil à commande numérique, l'axe médian, le calcul du diagramme de Voronoï, et beaucoup d'autres. Tout comme dans le cas de deux courbes rationnelles planes, le calcul d'une représentation algébrique exacte de la médiatrice de deux surfaces rationnelles reste une tâche très laborieuse. Il existe plusieurs méthodes sur le calcul de la représentation paramétrique de la surface médiatrice, mais en général, la description algébrique exacte n'est pas bien connue et son calcul n'est pas simple.

La plupart des méthodes connues pour le calcul d'une représentation paramétrique exacte des surfaces médiatrices sont conçues uniquement pour certains couples particuliers de surfaces rationnelles pour lesquels la médiatrice possède une paramétrisation rationnelle. Ainsi différentes approches ont été utilisées de manière appropriée dans des cas très spéciaux afin d'obtenir une représentation paramétrique rationnelle de la médiatrice (par exemple [40]). Dans d'autres cas, des considérations de symétrie réduisent le calcul de la paramétrisation de la médiatrice aux cas suivants : point-droite, point-surface ou courbe-surface (voir [43] et [44]), où la surface médiatrice est bien connue et à paramétrisation rationnelle. En utilisant la géométrie de Laguerre, Martin Peternell ([103], [104]) a montré la rationalité de la surface médiatrice entre : un plan et une PN-surface, deux PN-surfaces développables, deux surfaces canales et quelques autres cas.

Dans le cas de non-rationalité de la médiatrice, la description paramétrique (même non-rationnelle) exacte est très rare, la représentation implicite est de degré très élevé et son calcul, qui consiste à éliminer quatre paramètres d'un système de cinq équations non-linéaires, devient très souvent impraticable. Ainsi, des approxi-

mations par B-spline ou par d'autres moyens ont été proposées (voir par exemple [45]).

Notre apport à ce sujet porte sur la représentation exacte de la surface médiatrice. Plus précisément, en utilisant la "règle de Cramer généralisée" et certaines techniques d'élimination algébrique, nous présentons une nouvelle approche algorithmique pour calculer une paramétrisation algébrique (rationnelle ou non rationnelle) de la surface médiatrice de deux surfaces rationnelles de petit degré. Certains des résultats obtenus coïncident avec ceux mentionnés ci-dessus dans le cas rationnel. La méthode est bien adaptée à des fins approximatives, ce qui est particulièrement intéressant dans le cas non-rationnel. La nouvelle approche introduite permet d'obtenir facilement une paramétrisation des surfaces médiatrices de cas particuliers : plan-quadrique, plan-tore, cylindre circulaire-quadrique, cylindre circulaire-tore, cylindre-cylindre, cylindre-cône et cône-cône, qui sont rationnelles dans la plupart des cas. Dans les autres cas tels que : plan et non PN-quadrique, deux non PN-quadriques développables, etc, la paramétrisation contient des racines carrées des expressions polynomiales positives. Dans le cas du plan et quadrique ou plan et tore, l'équation implicite de la surface médiatrice peut être facilement calculée soit à partir des équations définissant la médiatrice, soit à partir de la paramétrisation calculée par la nouvelle approche introduite. Les résultats que nous obtenons pour le paramétrisation et pour l'équation implicite, en supposant que la quadrique est fournie avec sa PN-paramétrisation (si possible), sont résumés dans le tableau 3.1. Les résultats, relatifs à la rationalité, de la paramétrisation de la médiatrice coïncident avec ceux théoriquement prouvé par Peternell ([103]).

Quadrique /Tore	Paramétrisation	Deg. Impl.	Ref.
Cyl. Parabolique	rationnelle	6	exemple 3
Cyl. et Cône circulaires	rationnelle	4	exemples 1 et 9
Cyl./Cône non-circulaires	non-rationnelle	8	exemples 4 et 10
Sphere	rationnelle	4	exemple 3.7
Ellipsoïde	rationnelle	12	exemple 6
Paraboloïdes	rationnelle	10	exemples 7 et 8
Hyperboloïdes	rationnelle	12	exemples 11 et 12
Tore	rationnelle	8	exemple 13

TABLE 3.1 – La représentation algébrique de la médiatrice algébrique du Plan et de Quadrique/Tore.

Le reste du chapitre est organisé comme suit : nous donnons la définition et les équations de la médiatrice algébrique à la section 3.1. L'approche générale et le nouvel algorithme pour calculer une paramétrisation algébrique de la surface médiatrice seront présentés à la section 3.2. La sections 3.3 fera l'objet du calcul de la paramétrisation de la médiatrice algébrique du plan et de quadrique/tore, et du calcul de la représentation implicite correspondante à partir des équation définissant la médiatrice et à partir de la paramétrisation calculée. Nous étudions successivement les cas de cylindre circulaire-quadrique non développables et cylindre circulaire-tore, et le cas de deux quadriques développables, respectivement dans les sections 3.4 et

3.5. Nous terminons ce chapitre avec des conclusions.

## 3.1 Définitions et équations de la médiatrice algébrique

Dans cette section nous allons donner les définitions de la médiatrice et de leur traduction en équations permettant de caractériser leur représentations. Nous supposons que toutes les surfaces possèdent des paramétrisations régulières.

### 3.1.1 Définitions de la médiatrice

Dans cette sous-section, nous allons donner les définitions de la médiatrice algébrique et de la médiatrice géométrique

**Définition 37.** *La surface médiatrice algébrique de deux surfaces  $S_1$  et  $S_2$  est l'ensemble des centres des sphères qui sont simultanément tangentes à  $S_1$  et à  $S_2$ .*

La figure 3.1 donne une illustration de cette définition dans le cas de deux courbes planes. Cette définition ne suppose pas des distances minimales mesurées à partir des deux surfaces, ainsi comme le montre la figure 3.1, la médiatrice algébrique peut contenir des parties à éliminer pour obtenir la médiatrice *géométrique*, (c-à-d la vraie médiatrice) (voir [53] et [54] pour de plus d'ample explications sur ce sujet dans le cas de courbes planes). Notre objectif n'étant pas le calcul de la médiatrice géométrique, nous n'abordons pas profondément ce problème. Cependant, nous allons donner des conditions, basées sur le choix du sens de vecteurs normaux de deux surfaces d'entrées, vis à vis de leur position relatives, permettant d'obtenir la médiatrice géométrique pour des surfaces usuelles de petit degré (plan, quadrique et tore) à partir de la paramétrisation calculée.

Rappelons la définition d'une surface médiatrice géométrique de deux surfaces rationnelles.

**Définition 38.** *Soient*

$$\mathbf{S}_1(s, t), (s, t) \in \mathcal{D}_1 \subset \mathbb{R}^2 \text{ et } \mathbf{S}_2(u, v), (u, v) \in \mathcal{D}_2 \subset \mathbb{R}^2,$$

*les paramétrisations respectives des surfaces rationnelles  $S_1$  et  $S_2$ . La surface médiatrice géométrique  $\mathcal{B}(S_1, S_2)$  de  $S_1$  et  $S_2$  est définie comme le lieu de points qui sont équidistants de deux surfaces  $S_1$  et  $S_2$ , c-à-d :*

$$\mathcal{B}(S_1, S_2) = \left\{ B \in \mathbb{R}^3 : \inf_{(s,t) \in \mathcal{D}_1} (\|B - \mathbf{S}_1(s, t)\|) = \inf_{(u,v) \in \mathcal{D}_2} (\|B - \mathbf{S}_2(u, v)\|) \right\} \quad (3.1)$$

**Remarque 14.** Soit  $B_0 \in \mathcal{B}(S_1, S_2)$ , alors il existe  $(s_0, t_0) \in \mathcal{D}_1$  et  $(u_0, v_0) \in \mathcal{D}_2$  tels que :

$$P_1 = \mathbf{S}_1(s_0, t_0), P_2 = \mathbf{S}_2(u_0, v_0),$$

et

$$\|B_0 - P_1\| = \inf_{(s,t) \in \mathcal{D}_1} (\|B_0 - \mathbf{S}_1(s, t)\|) = \inf_{(u,v) \in \mathcal{D}_2} (\|B_0 - \mathbf{S}_2(u, v)\|) = \|B_0 - P_2\|.$$

Donc on a :

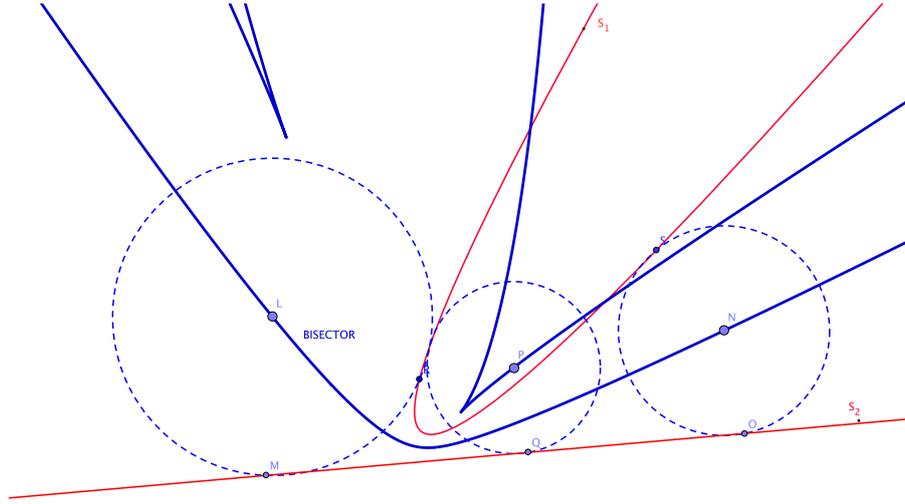


FIGURE 3.1 – Illustration schématique de la définition de la médiatrice algébrique (bleue) dans le cas de deux courbes planes (rouge)

- $\|B_0 - P_1\| = \|B_0 - P_2\|$  et
- les droites  $(B_0, P_1)$  et  $(B_0, P_2)$  sont respectivement orthogonale à  $S_1$  en  $P_1$  et à  $S_2$  en  $P_2$ .

Par conséquent le point  $B_0$  appartient à la médiatrice algébrique, et on peut conclure que la médiatrice géométrique est un sous ensemble de la médiatrice algébrique. Plus précisément, la médiatrice géométrique est constituée de points de la médiatrice algébrique qui sont, simultanément, situés à des distances minimales à partir de deux surfaces.

### 3.1.2 Equations de la médiatrice

Dans cette sous-section, nous allons caractériser la médiatrice algébrique.

Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux surfaces rationnelles de paramétrisations respectives  $\mathbf{S}_1(s, t)$  et  $\mathbf{S}_2(u, v)$ . En traduisant la définition 37, on dira qu'un point  $\mathbf{B} = (X, Y, Z)^T \in \mathbb{R}^3$  appartient à la médiatrice algébrique de surfaces  $S_1$  et  $S_2$  s'il vérifie le système des équations suivantes (voir [79]) :

- Le point  $\mathbf{B}$  appartient aux normales de  $S_1$  et de  $S_2$  en  $\mathbf{S}_1(s, t)$  et  $\mathbf{S}_2(u, v)$ , respectivement :

$$\begin{aligned}
 \langle (X, Y, Z) - \mathbf{S}_1(s, t), \partial_s \mathbf{S}_1(s, t) \rangle &= 0, \\
 \langle (X, Y, Z) - \mathbf{S}_1(s, t), \partial_t \mathbf{S}_1(s, t) \rangle &= 0, \\
 \langle (X, Y, Z) - \mathbf{S}_2(u, v), \partial_u \mathbf{S}_2(u, v) \rangle &= 0, \\
 \langle (X, Y, Z) - \mathbf{S}_2(u, v), \partial_v \mathbf{S}_2(u, v) \rangle &= 0,
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

- Le point  $\mathbf{B}$  est égal distances à partir de  $\mathbf{S}_1(s, t)$  et  $\mathbf{S}_2(u, v)$  :

$$\langle (X, Y, Z), 2(\mathbf{S}_2(u, v) - \mathbf{S}_1(s, t)) \rangle + \|\mathbf{S}_1(s, t)\|^2 - \|\mathbf{S}_2(u, v)\|^2 = 0. \tag{3.3}$$

Les équations (3.2) peuvent être écrites sous la forme matricielle suivante

$$\mathbf{A} \mathbf{B} = \mathbf{R}, \quad (3.4)$$

où

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \partial_s S_{1x} & \partial_s S_{1y} & \partial_s S_{1z} \\ \partial_t S_{1x} & \partial_t S_{1y} & \partial_t S_{1z} \\ \partial_u S_{2x} & \partial_u S_{2y} & \partial_u S_{2z} \\ \partial_v S_{2x} & \partial_v S_{2y} & \partial_v S_{2z} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \langle S_1, \partial_s S_1 \rangle \\ \langle S_1, \partial_t S_1 \rangle \\ \langle S_2, \partial_u S_2 \rangle \\ \langle S_2, \partial_v S_2 \rangle \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

**Proposition 3.** *Si  $S_1$  et  $S_2$  sont des surfaces régulières, alors la matrice  $\mathbf{A}(s, t, u, v)$  (3.5) est de rang 2 ou 3. De plus le rang de  $\mathbf{A}(s_0, t_0, u_0, v_0) = 2$  si et seulement si, les plans tangents à  $S_1$  au point  $\mathbf{S}_1(s_0, t_0)$  et à  $S_2$  au point  $\mathbf{S}_2(u_0, v_0)$ , sont confondus ou parallèles. Dans ce cas, les droites normales en ces points sont confondues ou parallèles.*

*Démonstration.* On a évidemment  $\text{rang}(\mathbf{A}(u, v, s, t)) \leq 3, \forall u, v, s, t \in \mathbb{R}$ . De plus, comme  $S_1$  est régulière, alors la sous-matrice  $[\partial_s \mathbf{S}_1, \partial_t \mathbf{S}_1]^T$  est de rang 2. Si  $\text{rang}(\mathbf{A}(u_0, v_0, s_0, t_0)) = 2$ , alors les espaces vectoriels engendrés par  $\{\partial_s \mathbf{S}_1(s_0, t_0), \partial_t \mathbf{S}_1(s_0, t_0)\}$  et  $\{\partial_u \mathbf{S}_2(u_0, v_0), \partial_v \mathbf{S}_2(u_0, v_0)\}$  sont égaux et les droites orthogonales sont égales. De ce fait, dans l'espace affine, les droites normales à  $S_1$  au point  $\mathbf{S}_1(s_0, t_0)$  et à  $S_2$  au point  $\mathbf{S}_2(u_0, v_0)$  sont confondues ou parallèles. □

**Corollaire 1.** *Si les droites normales à  $S_1$  au point  $\mathbf{S}_1(s_0, t_0)$  et à  $S_2$  au point  $\mathbf{S}_2(u_0, v_0)$  se coupent en un point  $(X, Y, Z)$  et  $\text{rang}(\mathbf{A}(u_0, v_0, s_0, t_0)) = 2$ , alors les droites normales se coïncident. Si  $(X, Y, Z)$  est un point de la médiatrice de  $S_1$  et  $S_2$ , alors  $(X, Y, Z)$  est le milieu du segment joignant  $\mathbf{S}_1(s_0, t_0)$  et  $\mathbf{S}_2(u_0, v_0)$ .*

**Remarque 15.** La situation décrite dans le corollaire 1 peut arriver, par exemple, quand les deux surfaces  $S_1$  et  $S_2$  sont tangentes en un point  $\mathbf{S}_1(s_0, t_0) = \mathbf{S}_2(u_0, v_0)$ . De même cela peut arriver quand la surface  $S_2$  est une offset de  $S_1$ . Par exemple, si  $S_1$  et  $S_2$  sont deux sphères concentriques, pour chaque point de  $S_1$  il existe un point de  $S_2$  avec la même droite normale.

## 3.2 Une approche générale pour le calcul d'une paramétrisation de la surface médiatrice

Dans cette section, nous allons tout d'abord présenter la nouvelle approche algorithmique qui permet de calculer paramétrisation de la surface médiatrice algébrique. Ensuite, nous donnons une caractérisation de la surface médiatrice géométrique à partir de la paramétrisation de la médiatrice algébrique pour le cas de surfaces disjointes et orientées de petit degré.

### 3.2.1 Approche générale pour calculer une paramétrisation de la surface médiatrice algébrique

Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux surfaces rationnelles de paramétrisations rationnelles respectives  $\mathbf{S}_1(s, t)$  et  $\mathbf{S}_2(u, v)$ . Notre but est de calculer une paramétrisation de la surface médiatrice algébrique de  $S_1$  et  $S_2$  en fonction de deux paramètres choisis à partir de  $u, v, s$  et  $t$ .

Si pour certaines valeurs des paramètres  $u, v, s$ , et  $t$ , le système linéaire (3.4) d'inconnue  $\mathbf{B}$  admet une solution, alors  $\text{rang}(|\mathbf{A}, \mathbf{R}|) \leq 3$ , et donc  $\det(|\mathbf{A}, \mathbf{R}|) = 0$ . Notre approche consiste :

1. Tout d'abord, à résoudre le système (3.4) pour  $\mathbf{B}$  en fonction de  $u, v, s, t$ , en utilisant la matrice inverse généralisée  $\mathbf{A}^\dagger$  de la matrice  $\mathbf{A}$  :

$$\mathbf{B}(u, v, s, t) = \mathbf{A}^\dagger \mathbf{V}, \quad (3.6)$$

et en substituant  $\mathbf{B}(u, v, s, t)$  dans (3.3) on obtient :

$$F(u, v, s, t) = \langle \mathbf{B}(u, v, s, t), 2(\mathbf{S}_2(u, v) - \mathbf{S}_1(s, t)) \rangle + \|\mathbf{S}_1(s, t)\|^2 - \|\mathbf{S}_2(u, v)\|^2 = 0. \quad (3.7)$$

2. Ensuite, éliminer deux des quatre paramètres  $u, v, s$  et  $t$  à partir de

$$G(u, v, s, t) = \det(|\mathbf{A}, \mathbf{R}|) = 0, \quad F(u, v, s, t) = 0,$$

le plus possiblement approprié comme suit :

- Nous exprimons l'un des paramètres, disons  $t$  (par exemple) en fonction de  $u, v$  et  $s$  à partir de

$$G(u, v, s, t) = 0,$$

soit

$$t = t(u, v, s),$$

et nous substituons dans (3.7), on obtient :

$$F_0(u, v, s) = F(u, v, t(u, v, s)) = 0.$$

- Puis nous exprimons  $s$  en fonction de  $u$  et  $v$  à partir de

$$F_0(u, v, s) = 0,$$

selon le degré de  $F_0$  en  $s$ , on peut obtenir  $m, m \geq 1$  expressions pour solutions des équations en  $s$  soient :

$$s_i = s_i(u, v), i = 1, \dots, m.$$

3. Enfin, en substituant successivement  $t$  par  $t(u, v, s)$  et puis  $s$  par  $s_i(u, v)$  dans  $\mathbf{B}(u, v, s, t)$ , nous obtenons plusieurs composantes de la paramétrisation de la surface médiatrice de la forme :

$$\mathbf{B}_i(u, v) = \mathbf{B}(u, v, t(u, v, s_i(u, v)), s_i(u, v)) = \begin{bmatrix} x_i(u, v) \\ y_i(u, v) \\ z_i(u, v) \end{bmatrix}, i = 1, \dots, m,$$

où,  $x_i(u, v), y_i(u, v), z_i(u, v)$  sont en générale des fonctions non rationnelles.

Le processus se résume dans l'algorithme suivant :

---

**Algorithme 4. La paramétrisation algébrique de la médiatrice algébrique**

---

**Input :**  $\mathbf{S}_1(s, t)$ ,  $\mathbf{S}_2(u, v)$  les paramétrisations rationnelles de deux surfaces

**Output :**  $\mathbf{B}_1(u, v), \dots, \mathbf{B}_m(u, v)$  les composantes de la paramétrisation algébrique de la médiatrice algébrique des surfaces  $S_1$  et  $S_2$ .

1. Calculons l'inverse généralisée de Moore-Penrose de  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A}^\dagger$  (voir [35]) :

$$\mathbf{A}^\dagger = -a_k^{-1} \mathbf{A}^T \left[ (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{k-1} + a_1(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{k-2} + \dots + a_{k-1}I_n \right],$$

où  $a_i$  et  $k$  sont tels que

$$\det(wI_n - \mathbf{A}\mathbf{A}^T) = a_0w^n + a_1w^{n-1} + \dots + a_{n-1}w + a_n,$$

avec  $a_0 = 1$ ; ( $k \neq 0$  est le plus grand indice tel que  $a_k \neq 0$ ) ou ( $k = 0$  et  $\mathbf{A}^\dagger = 0$ ).

2. Résolvons le système (3.4) pour  $\mathbf{B}$  en fonction de  $u, v, s$  et  $t$  :

$$\mathbf{B}(u, v, s, t) = \mathbf{A}^\dagger \mathbf{R}.$$

3. Trouvons l'expression de deux parmi les quatre paramètres (disons  $s$  et  $t$  par exemple) en fonction d'autres deux à partir de

$$G(u, v, s, t) = 0, \quad F(u, v, s, t) = 0 :$$

$$t = t(u, v, s)$$

$$s_i = s_i(u, v), i = 1, \dots, m.$$

4. Substituons successivement  $t$  par  $t(u, v, s)$  et  $s$  par  $s_i(u, v)$  dans  $\mathbf{B}(u, v, s, t)$  pour obtenir la paramétrisation de la médiatrice de la forme

$$\mathbf{B}_i(u, v) = [x_i(u, v), y_i(u, v), z_i(u, v)]^T, i = 1, \dots, m.$$

---

Grâce à cet algorithme, nous pouvons facilement traiter les cas de la médiatrice d'un plan et une quadrique, un plan et un tore, un cylindre circulaire et une quadrique non développable, un cylindre circulaire et un tore, et deux quadriques développables.

**Remarque 16.** En générale, la rationalité de la paramérisation de la médiatrice  $\mathbf{B}_i(u, v)$  dépend de la rationalité des normes de vecteurs normaux de deux surfaces,

$$\sigma_1(s, t) = \|\partial_s \mathbf{S}_1 \times \partial_t \mathbf{S}_1\| \text{ et } \sigma_2(u, v) = \|\partial_u \mathbf{S}_2 \times \partial_v \mathbf{S}_2\|.$$

Comme  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  peuvent être des fonctions rationnelles avec des coefficients irrationnels, c-à-d : il existe  $\delta_1, \delta_2 \notin \mathbb{Q}$ , tels que  $\sigma_1 \in \mathbb{Q}[\delta_1](s, t)$ ,  $\sigma_2 \in \mathbb{Q}[\delta_2](u, v)$ , donc la paramétrisation de la médiatrice  $\mathbf{B}(u, v)$  peut ainsi être rationnelle avec des coefficients irrationnels. Plus précisément, si  $\sigma_1 \in \mathbb{Q}[\delta_1](s, t)$  et  $\sigma_2 \in \mathbb{Q}[\delta_2](u, v)$ , alors

$$\mathbf{B} \in \mathbb{Q}[\delta_1 \cdot \delta_2](u, v).$$

**Exemple 28.** Soient

$$\mathbf{S}_1(s, t) = \begin{bmatrix} \frac{6s}{1+s^2+t^2} \\ \frac{6t}{1+s^2+t^2} \\ \frac{3(1-s^2-t^2)}{1+s^2+t^2} - 5 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{S}_2(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{4u}{1+u^2+v^2} \\ \frac{4v}{1+u^2+v^2} \\ \frac{2(1-u^2-v^2)}{1+u^2+v^2} + 1 \end{bmatrix}$$

les paramétrisations deux sphères disjointes

Le système correspondant de leur médiatrice est donné par :

$$\begin{bmatrix} -\frac{6(-1+s^2-t^2)}{\rho(s,t)^2} & -\frac{12st}{\rho(s,t)^2} & -\frac{12s}{\rho(s,t)^2} \\ -\frac{12st}{\rho(s,t)^2} & \frac{6(1+s^2-t^2)}{\rho(s,t)^2} & -\frac{12t}{\rho(s,t)^2} \\ -\frac{4(-1+u^2-v^2)}{\rho(u,v)^2} & -\frac{8uv}{\rho(u,v)^2} & -\frac{8u}{\rho(u,v)^2} \\ -\frac{8uv}{\rho(u,v)^2} & \frac{4(1+u^2-v^2)}{\rho(u,v)^2} & -\frac{8v}{\rho(u,v)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{60s}{\rho(s,t)^2} \\ \frac{60t}{\rho(s,t)^2} \\ -\frac{8u}{\rho(u,v)^2} \\ -\frac{8v}{\rho(u,v)^2} \end{bmatrix},$$

où

$$\rho(\mu, \nu) = 1 + \mu^2 + \nu^2$$

L'inverse généralisée  $\mathbf{A}^\dagger$  de la matrice  $\mathbf{A}$  et les points de la médiatrice  $\mathbf{B}(u, v, s, t)$  en fonction de  $u, v, s$  et  $t$  sont de très grande taille. La matrice associée  $|\mathbf{A}, \mathbf{R}|$  est donnée par :

$$|\mathbf{A}, \mathbf{R}| = \begin{bmatrix} -\frac{6(-1+s^2-t^2)}{\rho(s,t)^2} & -\frac{12st}{\rho(s,t)^2} & -\frac{12s}{\rho(s,t)^2} & \frac{60s}{\rho(s,t)^2} \\ -\frac{12st}{\rho(s,t)^2} & \frac{6(1+s^2-t^2)}{\rho(s,t)^2} & -\frac{12t}{\rho(s,t)^2} & \frac{60t}{\rho(s,t)^2} \\ -\frac{4(-1+u^2-v^2)}{\rho(u,v)^2} & -\frac{8uv}{\rho(u,v)^2} & -\frac{8u}{\rho(u,v)^2} & -\frac{8u}{\rho(u,v)^2} \\ -\frac{8uv}{\rho(u,v)^2} & \frac{4(1+u^2-v^2)}{\rho(u,v)^2} & -\frac{8v}{\rho(u,v)^2} & -\frac{8v}{\rho(u,v)^2} \end{bmatrix}$$

– A partir de

$$G(u, v, s, t) = \det(|\mathbf{A}, \mathbf{R}|) = 13824(ut - sv) = 0,$$

nous avons

$$t(u, v) = \frac{sv}{u}.$$

– En substituant  $t$  par  $\frac{sv}{u}$  dans

$$\begin{aligned} F(u, v, s, t) &= \langle \mathbf{B}(u, v, s, t), 2(S_1(u, v) - S_2(s, t)) \rangle + \|S_2(s, t)\|^2 - \|S_1(u, v)\|^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

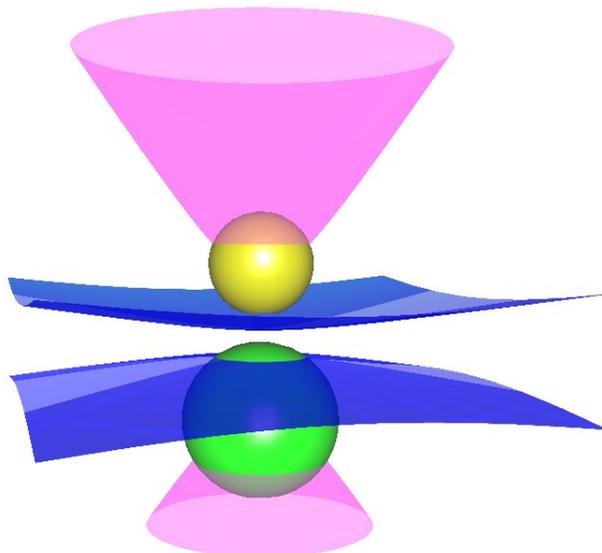


FIGURE 3.2 – La médiatrice algébrique de deux sphères donnée par les composantes  $\mathbf{B}_1$  et  $\mathbf{B}_2$  respectivement présentées en couleurs rose et bleue

nous obtenons :

$$F_0(u, v, s) = (11s + u)(7su^2 + 7sv^2 - 5u) = 0,$$

et par la suite, on a :

$$s_1(u, v) = \frac{-1}{11}u \text{ et } s_2(u, v) = \frac{5}{7} \frac{u}{u^2 + v^2}.$$

- Finalement en substituant successivement  $t$  par  $\frac{sv}{u}$  et puis  $s$  par  $s_1(u, v)$  et  $s_2(u, v)$  dans  $\mathbf{B}(u, v, s, t)$  nous obtenons deux composantes pour la paramétrisation de la médiatrice algébrique :

$$\mathbf{B}_1(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{11u}{-11+u^2+v^2} \\ \frac{11v}{-11+u^2+v^2} \\ -\frac{9u^2+9v^2+11}{2(-11+u^2+v^2)} \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{B}_2(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{35u}{-5+7u^2+7v^2} \\ \frac{35v}{-5+7u^2+7v^2} \\ -\frac{21u^2+21v^2-25}{2(-5+7u^2+7v^2)} \end{bmatrix}$$

La médiatrice algébrique est donnée par deux paraboloides à deux feuilles voir la figure 30.

### 3.2.2 Caractésation de la médiatrice géométrique à partir de la paramétrisation de médiatrice algébrique pour le cas de surfaces disjointes et orientées

Dans cette sous-section, nous allons établir des conditions supplémentaires sur la paramétrisation de la médiatrice algébrique permettant de réaliser la médiatrice

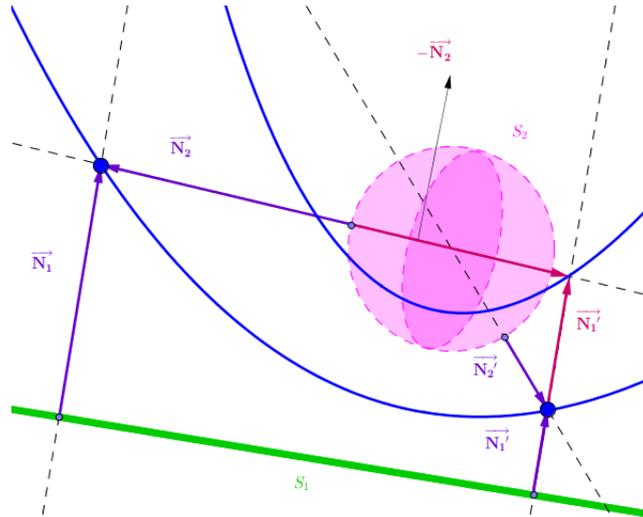


FIGURE 3.3 – Les deux vecteurs normaux  $(\vec{N}_1, \vec{N}_2)$  et  $(\vec{N}_1', \vec{N}_2')$  sont sortant vis à vis de faces opposées de surfaces  $S_1$  et  $S_2$ , tandis que  $(\vec{N}_1', -\vec{N}_2)$  ne le sont pas.

géométrique.

Comme indiquée à la remarque 14, les points de la médiatrice géométrique sont ceux de la algébrique qui sont à la même distance minimale de deux surfaces. Ainsi pour deux surfaces disjointes, une même distance minimale est atteinte au niveau de points de l'intersection de droites, engendrées par les vecteurs normaux, dans le sens sortant vis à vis de faces opposées de deux surfaces.

Pour deux surfaces rationnelles régulières et orientées, disjointes de paramétrisations respectives

$$\mathbf{S}_1(u, v), (u, v) \in \mathcal{D}_1 \text{ et } \mathbf{S}_2(s, t), (s, t) \in \mathcal{D}_2,$$

un sens approprié de leur vecteurs normaux

$$\mathbf{N}_1 = \partial_u \mathbf{S}_1 \times \partial_v \mathbf{S}_1 \text{ et } \mathbf{N}_2 = \partial_s \mathbf{S}_2 \times \partial_t \mathbf{S}_2,$$

sera bien choisi, c-à-d. : choisir  $\mathbf{N}_1(u, v)$  ou  $-\mathbf{N}_1(u, v)$  et  $\mathbf{N}_2(s, t)$  ou  $-\mathbf{N}_2(s, t)$  tels qu'ils soient sortant aux faces opposées de surfaces  $S_1$  et  $S_2$  comme le montre la figure 3.3 . Bien que le vecteur normal  $\mathbf{N}$  d'une surface paramétrique régulière  $S$  dépend de la paramétrisation  $\mathbf{S}(u, v)$ ,  $(u, v)$ , il possède un unique sens uniforme (sortant ou entrant à la surface) pour tout  $(u, v) \in \mathcal{D}$ . Donc pour toute valeur paramétrique choisie  $(u_0, v_0) \in \mathcal{D}$ , le sens du vecteur normal  $\mathbf{N}(u_0, v_0)$  au point  $P_0 = \mathbf{S}(u_0, v_0)$ , détermine le sens uniforme de  $\mathbf{N}(u, v)$ . Ainsi donc, pour déterminer le sens (sortant ou entrant) pour le vecteur normal, il suffit de le déterminer en point quelconque de la surface.

Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux surfaces (qui peuvent être : plan, quadrique ou tore) avec leur représentations paramétrique et implicite, et leur vecteurs normaux respectifs :

$$\mathbf{S}_1(u, v), F_1(x, y, z) = 0, \mathbf{N}_1(u, v) \text{ et } \mathbf{S}_2(s, t), F_2(x, y, z) = 0, \mathbf{N}_2(s, t).$$

Étant orientées, chacune des surfaces  $S_1$  et  $S_2$  partitionne (géométriquement) l'espace  $\mathbb{R}^3$  en deux ou trois parties disjointes selon que la surface est à une ou deux feuilles (ou nappes).

Soit  $\mathbf{N}_1(u_0, v_0)$  le vecteur normal en un point  $P_1 = \mathbf{S}_1(u_0, v_0)$  de la surface  $\mathbf{S}_1$ . La droite orthogonale à la surface  $S_1$  au point  $P_1$

$$\ell_1(\lambda) = P_1 + \lambda \mathbf{N}_1(u_0, v_0)$$

contient des points contenus dans les parties disjointes, partitionnées par la surface  $S_1$ , pour certaines valeurs du paramètre  $\lambda \in ] -\alpha_1, \alpha_2[$ ,  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ .

Nous sommes particulièrement intéressés par la détermination du sous-intervalle de valeurs paramétriques de  $\lambda$  du type

$$] -\alpha_1, 0[ \text{ ou } ]0, \alpha_2[$$

pour lequel un segment de la droite  $\ell_1(\lambda)$  est contenu dans une partie délimitée par deux surfaces  $S_1$  et  $S_2$ . Plus précisément on a

**Lemme 2.** *Soient  $S_1, S_2, P_1, \mathbf{N}_1$  et  $\ell_1$  comme ci-dessus. Si la droite normale  $\ell_1(\lambda)$  contient des points de la partie délimitée par les surfaces  $S_1$  et  $S_2$  pour  $\lambda \in ] -\alpha_1, 0[$  (resp.  $]0, \alpha_2[$ ), alors  $\mathbf{N}_1(u_0, v_0)$ , et par conséquent  $\mathbf{N}_1(u, v)$  est rentrant (reps. sortant) à la surface  $S_1$  au point  $P_1$  vis à vis de la face opposée de la surface  $S_2$ .*

*Démonstration.* La preuve de ce lemme est très élémentaire : Il suffit de remarquer qu'un point  $A_0$  de la droite paramétrique  $\ell_1(\lambda)$  ( $A_0 \notin S_1$  situé entre  $S_1$  et  $S_2$ ), est obtenu pour une valeur  $\lambda_0$  du paramètre  $\lambda$ , et que le signe de cette valeur donne le sens du vecteur directeur (à partir du point) qui est dans ce cas le vecteur normal à la surface  $S_1$ . Plus précisément, si  $\lambda_0 < 0$  (resp.  $\lambda_0 > 0$ ), le vecteur normal est rentrant à partir du point  $A_0$  (resp. sortant vers le point  $A_0$ ) à la surface.  $\square$

On obtient le même résultat pour la normale à la surface  $S_2$ . Suite à ce précédent lemme, nous dirons que, si une droite normale  $\ell_i(\lambda)$  à la surface  $S_i$ ,  $i = 1, 2$ , contient les points d'une partie délimitée par  $S_1$  et  $S_2$  pour  $\lambda \in ] -\alpha_1, 0[$  (reps.  $]0, \alpha_2[$ ), alors  $-\mathbf{N}_i$  (reps.  $\mathbf{N}_i$ ) est le choix approprié pour le vecteur normal à la surface  $S_i$  tels que les deux vecteurs normaux soient sortants vis à vis de faces opposées de deux surfaces. Pour compléter cette étape, nous aurons besoin du lemme suivant, qui va nous permettre de localiser les points de la normale contenus dans une partie délimitée par deux surfaces.

**Lemme 3.** *Soient*

$$S_1 \equiv \begin{cases} \mathbf{S}_1(u, v) = (S_{1x}(u, v), S_{1y}(u, v), S_{1z}(u, v)), (u, v) \in \mathcal{D}_1 \\ F_1(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

et

$$S_2 \equiv \begin{cases} \mathbf{S}_2(s, t) = (S_{2x}(s, t), S_{2y}(s, t), S_{2z}(s, t)), (s, t) \in \mathcal{D}_2 \\ F_2(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

*les représentations paramétriques et implicites respectivement de deux surfaces rationnelles orientées et disjointes.*

Un point  $M = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$  est strictement contenu dans la partie délimitée par les surfaces  $S_1$  et  $S_2$  si, est seulement si :

$$\begin{cases} F_1(x_0, y_0, z_0) \cdot F_1(S_{2_x}(s, t), S_{2_y}(s, t), S_{2_z}(s, t)) > 0 & \forall (s, t) \in \mathcal{D}_1 \text{ et} \\ F_2(x_0, y_0, z_0) \cdot F_2(S_{1_x}(u, v), S_{1_y}(u, v), S_{1_z}(u, v)) > 0 & \forall (u, v) \in \mathcal{D}_2 \end{cases} \quad (3.8)$$

Maintenant, nous sommes en mesure de vérifier les composantes de la paramétrisation de la médiatrice algébrique  $\mathbf{B}_i(u, v)$  et la condition que chacune d'elles doit accomplir, pour réaliser la médiatrice géométrique. Ainsi comme déjà annoncé, cette condition est réalisée aux points de la médiatrice algébrique correspondants aux vecteurs normaux sortant vis à vis de deux surfaces.

Soient  $B$  un point de la médiatrice géométrique et  $\mathbf{N}_1(u, v)$  et  $\mathbf{N}_2(s, t)$  les vecteurs normaux sortants aux surfaces  $S_1$  et  $S_2$  aux points  $P_1$  et  $P_2$ , vis à vis de leurs faces opposées tels que :

$$\|B - P_1\| = \inf_{(u,v) \in \mathcal{D}_1} (\|B - \mathbf{S}_1(u, v)\|) = \inf_{(s,t) \in \mathcal{D}_2} (\|B - \mathbf{S}_2(s, t)\|) = \|B - P_2\|.$$

Les points  $P_1, P_2$  et  $B$  forment ainsi un triangle isocèle de sommet  $B$  (voir figure 3.4), donc nous avons

$$\left( \widehat{\overrightarrow{P_1 B}, \overrightarrow{P_1 P_2}} \right) = \left( \widehat{\overrightarrow{P_2 B}, \overrightarrow{P_2 P_1}} \right) < \frac{\pi}{2},$$

ce qui implique

$$\langle \overrightarrow{P_1 B}, \overrightarrow{P_1 P_2} \rangle \geq 0 \text{ et } \langle \overrightarrow{P_2 B}, \overrightarrow{P_2 P_1} \rangle \geq 0. \quad (3.9)$$

Posons

$$\rho(u, v, s, t) = \overrightarrow{P_1 P_2} = -\overrightarrow{P_2 P_1}$$

et soient

$$t_0 = t(u, v, s), \quad s_i = s_i(u, v),$$

les expressions résultantes de l'élimination de  $t$  et  $s$  à partir

$$G(u, v, s, t) = 0, \quad F(u, v, s, t) = 0$$

dans l'algorithme 4. Suivant la condition (3.9), une composante de la paramétrisation  $B_{i_0}(u, v)$  qui contient les points de la médiatrice géométrique est celle obtenue pour les expressions paramétriques  $t_0$  et  $s_{i_0}$  vérifiant les conditions :

$$\begin{cases} \langle \mathbf{N}_1(u, v), \rho(u, v, s_{i_0}, t_0(s_{i_0})) \rangle \geq 0 \\ \langle \mathbf{N}_2(s_{i_0}, t_0(s_{i_0})), -\rho(u, v, s_{i_0}, t_0(s_{i_0})) \rangle \geq 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

**Exemple 29.** Reprenons l'exemple 28 de deux sphères disjointes. Soient

$$\mathbf{S}_1(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{4u}{1+u^2+v^2} \\ \frac{4v}{1+u^2+v^2} \\ \frac{2(1-u^2-v^2)}{1+u^2+v^2} + 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{S}_2(s, t) = \begin{bmatrix} \frac{6s}{1+s^2+t^2} \\ \frac{6t}{1+s^2+t^2} \\ \frac{3(1-s^2-t^2)}{1+s^2+t^2} - 5 \end{bmatrix},$$

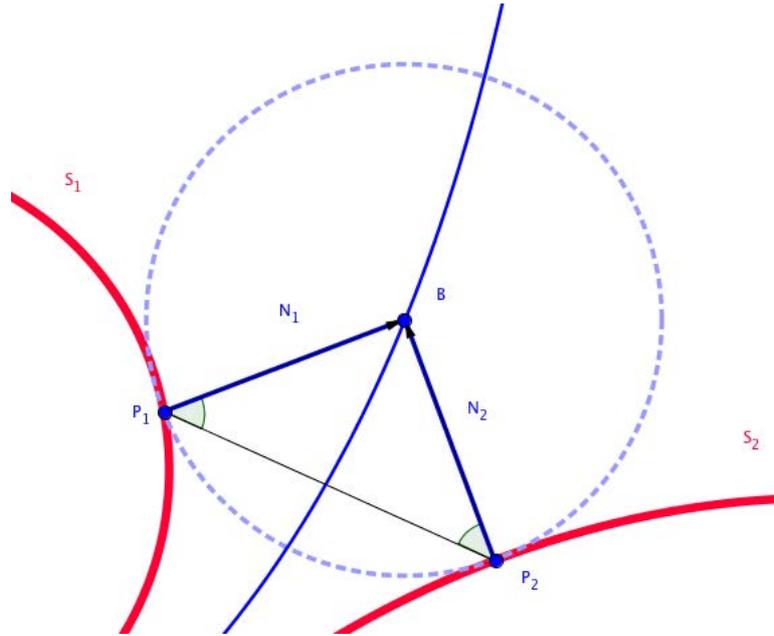


FIGURE 3.4 – Les vecteurs normaux  $\mathbf{N}_1$  et  $\mathbf{N}_2$  sont sortant vis à vis de faces opposées et les points  $P_1, P_2$  et  $B$  forment un triangle isocèle en  $B$

les deux paramétrisations.

Les deux vecteurs normaux correspondants sont donnés par

$$\mathbf{N}_1(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{32u}{(1+u^2+v^2)^3} \\ \frac{32v}{(1+u^2+v^2)^3} \\ \frac{-16(-1+u^2+v^2)}{(1+u^2+v^2)^3} \end{bmatrix} \quad \mathbf{N}_2(s, t) = \begin{bmatrix} \frac{72s}{(1+s^2+t^2)^3} \\ \frac{72t}{(1+s^2+t^2)^3} \\ \frac{-36(-1+s^2+t^2)}{(1+s^2+t^2)^3} \end{bmatrix}.$$

Aux points

$$P_1 = \mathbf{S}_1(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P_2 = \mathbf{S}_2(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix},$$

on a respectivement les vecteurs normaux et les droites normales, correspondants :

$$\mathbf{N}_1(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 16 \end{bmatrix}, \quad \ell_1(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 16\lambda + 3 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{N}_2(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 36 \end{bmatrix}, \quad \ell_2(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 36\lambda - 2 \end{bmatrix}.$$

- La normale  $\ell_1$  contient le point  $A = (0, 0, 4)$ , qui n'est ni à l'intérieur de la sphère  $S_1$  ni à l'intérieur de la sphère  $S_2$ , pour  $\lambda = \frac{1}{16} > 0$ , et
- la normale  $\ell_2$  contient le point  $B = (0, 0, -\frac{1}{2})$ , qui n'est ni à l'intérieur de la sphère  $S_1$  ni à l'intérieur de la sphère  $S_2$ , pour  $\lambda = \frac{1}{24} > 0$ ,

Les vecteurs  $\mathbf{N}_1(0, 0)$  et  $\mathbf{N}_2(0, 0)$  sont donc sortant vis à vis de faces de deux sphères, et par conséquent vecteurs normaux  $\mathbf{N}_1(u, v)$  et  $\mathbf{N}_2(s, t)$  sont sortant ( tandis que  $-\mathbf{N}_1(u, v)$  et  $-\mathbf{N}_2(s, t)$  sont entrants) vis à vis de faces de deux sphères. Ainsi donc, nous choisissons  $\mathbf{N}_1(u, v)$  et  $\mathbf{N}_2(u, v)$  comme le choix de sens approprié pour les deux vecteurs normaux correspondant aux paramétrisations  $\mathbf{S}_1(u, v)$  et  $\mathbf{S}_2(s, t)$ .

Les expressions résultantes de l' élimination sont données

$$\begin{aligned} t_0 &= \frac{sv}{u}, \\ s_1(u, v) &= -\frac{1}{11}u, \\ s_2(u, v) &= \frac{5}{7} \frac{u}{u^2 + v^2}, \end{aligned}$$

et les deux composantes de la paramétrisation de la surface médiatrice algébrique sont données par

$$\mathbf{B}_1(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{11u}{-11+u^2+v^2} \\ \frac{11v}{-11+u^2+v^2} \\ -\frac{9u^2+9v^2+11}{2(-11+u^2+v^2)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_2(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{35u}{-5+7u^2+7v^2} \\ \frac{35v}{-5+7u^2+7v^2} \\ -\frac{21u^2+21v^2-25}{2(-5+7u^2+7v^2)} \end{bmatrix}.$$

Posons

$$\rho(u, v, s, t) = \overrightarrow{P_1 P_2} = \begin{bmatrix} \frac{-2(-3s-3su^2-3sv^2+2u+2us^2+2t^2u)}{(1+s^2+t^2)(1+u^2+v^2)} \\ \frac{-2(-3t-3tu^2-3v^2t+2v+2vs^2+2t^2v)}{(1+s^2+t^2)(1+u^2+v^2)} \\ \frac{-(5+u^2+v^2+11s^2+11t^2+7s^2u^2+7s^2v^2+7t^2u^2+7t^2v^2)}{(1+s^2+t^2)(1+u^2+v^2)} \end{bmatrix}.$$

Les conditions (3.9) peuvent ainsi s'écrire comme suit :

1. Pour  $t = t_0 = \frac{sv}{u}$  et  $s = s_1(u, v) = -\frac{1}{11}u$ , on a
 
$$\begin{aligned} \beta_1 &= \langle \mathbf{N}_1(u, v), \rho(u, v, s_1, t_0) \rangle \\ &= 16 \frac{(55 + 7u^2 + 7v^2)(u^2 - 11 + v^2)}{(121 + u^2 + v^2)(1 + u^2 + v^2)^3} > 0 \\ \beta_2 &= \langle \mathbf{N}_2(s_1, t_0), -\rho(u, v, s_1, t_0) \rangle \\ &= -527076 \frac{(55 + 7u^2 + 7v^2)(u^2 - 11 + v^2)}{(1 + u^2 + v^2)(121 + u^2 + v^2)^3} < 0 \end{aligned}$$

$\beta_1$  et  $\beta_2$  étant de signes opposés, la composante  $\mathbf{B}_1$  qui correspond à l'expression  $s_1(u, v)$ , ne peut, donc représenter la médiatrice géométrique.

2. Pour  $t = t_0 = \frac{sv}{u}$  et  $s = s_2(u, v) = \frac{7u}{5(u^2 + v^2)}$ , on a

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \langle \mathbf{N}_1(u, v), \rho(u, v, s_2, t_0) \rangle \\ &= 16 \frac{(7u^2 - 5 + 7v^2)(55 + 7u^2 + 7v^2)}{(49u^2 + 25 + 49v^2)(1 + u^2 + v^2)^3} \\ \gamma_2 &= \langle \mathbf{N}_2(s_2, t_0), -\rho(u, v, s_2, t_0) \rangle \\ &= \frac{86436(7u^2 - 5 + 7v^2)(55 + 7u^2 + 7v^2)(u^2 + v^2)^2}{(1 + u^2 + v^2)(49u^2 + 25 + 49v^2)^3}\end{aligned}$$

$\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont du même signe, le signe de  $7u^2 - 5 + 7v^2$ , donc la composante  $\mathbf{B}_2$  correspondante à l'expression  $s_2(u, v)$  contient les points de la médiatrice géométrique. Plus précisément  $\mathbf{B}_2$  représente la médiatrice géométrique sous la condition

$$\gamma_1 > 0 \quad \gamma_2 > 0 \implies 7u^2 - 5 + 7v^2 > 0$$

c-à-d la médiatrice géométrique est représentée par :

$$\mathbf{B}_2(u, v) = \left[ \begin{array}{c} \frac{35u}{-5+7u^2+7v^2} \\ \frac{35v}{-5+7u^2+7v^2} \\ -\frac{21u^2+21v^2-25}{2(-5+7u^2+7v^2)} \end{array} \right], \quad 7u^2 - 5 + 7v^2 > 0. \quad (3.11)$$

Ainsi, comme le montre la figure 3.5, la médiatrice géométrique de ces deux sphères représentée par (3.11) est déterminée par l'unique nappe de l'hyperboloïde.

### 3.3 La paramétrisation de la médiatrice algébrique d'un plan et d'une surface quadrique ou d'un tore

Dans cette section, nous allons procéder au calcul d'une paramétrisation algébrique pour la médiatrice algébrique d'un plan et d'une surface quadrique ou un tore. Nous allons aussi calculer l'équation implicite de la médiatrice algébrique.

Considérons un plan paramétrisé par

$$\mathbf{P}(s, t) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ t \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

où les coefficients  $\alpha_i, \beta_i$  et  $\gamma_i$  sont constants, et  $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} \neq 0$ .

Soit

$$\mathbf{S}(u, v) = [S_x(u, v), S_y(u, v), S_z(u, v)]^T,$$

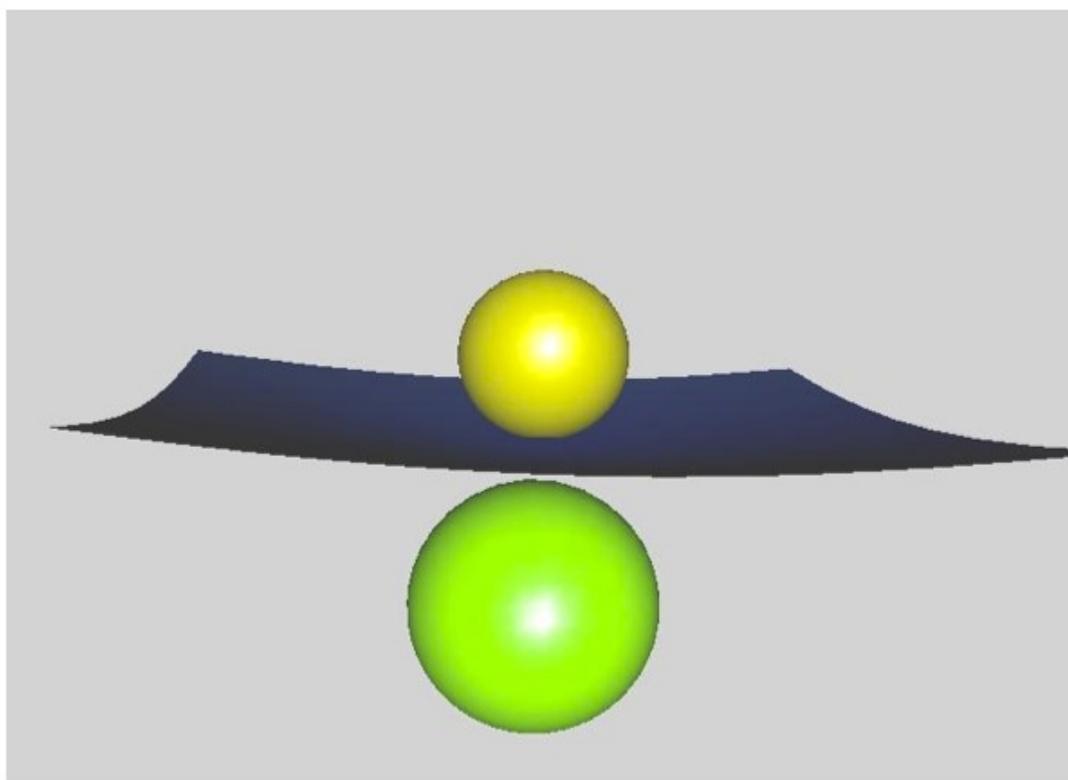


FIGURE 3.5 – La médiatrice géométrique de deux sphères disjointes

une paramétrisation d'une quadrique ou d'un tore. Pour ces deux surfaces, les équations (3.4) ont la forme

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \partial_u S_x & \partial_u S_y & \partial_u S_z \\ \partial_v S_x & \partial_v S_y & \partial_v S_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^3 \alpha_i (\alpha_i s + \beta_i t + \gamma_i) \\ \sum_{i=1}^3 \beta_i (\alpha_i s + \beta_i t + \gamma_i) \\ S \partial_u S \\ S \partial_v S \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

Dans ce cas, il faut noter que la matrice  $\mathbf{A}$  ne dépend pas de  $s$  et  $t$ , tandis que le vecteur  $\mathbf{R}$  est linéaire en  $s$  et  $t$ ,  $\mathbf{P}$  est linéaire en  $s$  et  $t$ , l'expression

$$\langle \mathbf{B}(u, v, s, t), 2(\mathbf{S}(u, v) - \mathbf{P}(s, t)) \rangle$$

est linéaire en  $s$  et  $t$ , et  $\|\mathbf{P}(s, t)\|^2$  est quadratique en  $s$  et  $t$ . Donc les équations

$$G(u, v, s, t) = \det(|\mathbf{A}, \mathbf{R}|) = 0 \text{ et } F(u, v, s, t) = 0 \quad (3.3)$$

sont respectivement linéaire et quadratique en  $s$  et  $t$ , et il sera facile d'éliminer ces deux derniers paramètres.

Ainsi

– nous exprimons  $s = s(u, v, t)$  (ou  $t = t(u, v, s)$ ) à partir de

$$G(u, v, s, t) = 0,$$

et

– en substituant  $s$  par  $s(u, v, t)$  dans

$$F(u, v, s, t) = 0,$$

nous avons

$$F_0(u, v, t) = F(u, v, s(u, v, t), t) = 0$$

et on obtient le théorème suivant :

**Théorème 3.1.** Soient  $\sigma_p = \|\partial_s \mathbf{P} \times \partial_t \mathbf{P}\|$  et  $\sigma_s(u, v) = \|\partial_u \mathbf{S} \times \partial_v \mathbf{S}\|$ .

1. L'équation  $F_0(u, v, t) = 0$  est quadratique en fonction de  $t$ , et par conséquent on obtient deux composantes de la paramétrisation pour la médiatrice algébrique qui pourrait contenir de racines carrées d'une expression polynomiale positive (provenant de  $\sigma_s$ ).
2. Si  $\sigma_s(u, v)$  est rationnelle, la paramétrisation de la médiatrice  $\mathbf{B}(u, v)$  est rationnelle. Si de plus  $\sigma_p \notin \mathbb{Q}$  et  $\sigma_s \in \mathbb{Q}[\delta](u, v)$  alors  $\mathbf{B} \in \mathbb{Q}[\sigma_p \cdot \delta](u, v)$

*Démonstration.* Exprimons  $s$  à partir de  $G(u, v, s, t) = 0$ , et soit  $s = s(u, v, t)$ , en substituant cette expression dans  $F(u, v, s, t) = 0$  nous obtenons

$$F_0(u, v, t) = F(u, v, s(u, v, t), t) = \omega_0 t^2 + \omega_1 t + \omega_2 = 0 \quad (3.14)$$

où  $\omega_0, \omega_1, \omega_2$  sont des expressions de grande taille qui dépendent de  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \partial_u \mathbf{S}, \partial_v \mathbf{S}, \mathbf{S}$ .

Le discriminant de l'équation (3.14) par rapport à  $t$  est donné par :

$$\begin{aligned} \Delta = & 4[(\alpha_1\beta_3 - \beta_1\alpha_3)^2 + (-\beta_1\alpha_2 + \alpha_1\beta_2)^2 + (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)^2] \\ & [(\partial_u S_y \partial_v S_z - \partial_u S_z \partial_v S_y)^2 + (\partial_u S_z \partial_v S_x - \partial_u S_x \partial_v S_z)^2 \\ & + (\partial_u S_x \partial_v S_y - \partial_u S_y \partial_v S_x)^2] [-(\beta_3\beta_2\alpha_3 - \alpha_2\beta_3^2 + \beta_2\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_1^2) \\ & (\partial_u S_x \partial_v S_z - \partial_u S_z \partial_v S_x) + (\alpha_2\beta_2\beta_3 - \alpha_3\beta_1^2 + \beta_3\alpha_1\beta_1 - \alpha_3\beta_2^2) \\ & (\partial_u S_x \partial_v S_y - \partial_u S_y \partial_v S_x) - (-\beta_3\beta_1\alpha_3 + \beta_3^2\alpha_1 - \alpha_2\beta_1\beta_2 + \alpha_1\beta_2^2) \\ & (\partial_u S_y \partial_v S_z - \partial_u S_z \partial_v S_y)]^2 [(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)(-\gamma_1 + S_x) \\ & - (\alpha_1\beta_3 - \beta_1\alpha_3)(S_y - \gamma_2) + (-\beta_1\alpha_2 + \alpha_1\beta_2)(S_z - \gamma_3)]^2. \end{aligned}$$

Après de très longs calculs et simplifications à l'aide du logiciel Maple, nous avons

$$\begin{aligned} \Delta = & 4 [(\Gamma, (\partial_s \mathbf{P} \times \partial_t \mathbf{P}))]^2 [((\partial_t \mathbf{P} \times (\partial_s \mathbf{P} \times \partial_t \mathbf{P})), (\partial_u \mathbf{S} \times \partial_v \mathbf{S}))]^2 \\ & \|(\partial_s \mathbf{P} \times \partial_t \mathbf{P})\|^2 \|(\partial_u \mathbf{S} \times \partial_v \mathbf{S})\|^2 \geq 0 \\ = & 4 [(\langle \Gamma, (\partial_s \mathbf{P} \times \partial_t \mathbf{P}) \rangle) \cdot \langle (\partial_t \mathbf{P} \times (\partial_s \mathbf{P} \times \partial_t \mathbf{P})), (\partial_u \mathbf{S} \times \partial_v \mathbf{S}) \rangle]^2 \sigma_p^2 \sigma_s^2(u, v) \geq 0 \end{aligned}$$

où

$$\Gamma = \begin{bmatrix} S_x - \gamma_1 \\ S_y - \gamma_2 \\ S_z - \gamma_3 \end{bmatrix}, \quad \sigma_p = \|\partial_s \mathbf{P} \times \partial_t \mathbf{P}\| \quad \text{et} \quad \sigma_s(u, v) = \|\partial_u \mathbf{S} \times \partial_v \mathbf{S}\|.$$

Donc l'équation (3.14) possède deux solutions :

$$\begin{aligned} t_1(u, v) &= \frac{-\omega_1 - \sqrt{\Delta}}{2\omega_0}, \\ t_2(u, v) &= \frac{-\omega_1 + \sqrt{\Delta}}{2\omega_0}, \end{aligned}$$

avec

$$\sqrt{\Delta} = 2 |(\langle \Gamma, (\partial_s P \times \partial_t P) \rangle) \cdot \langle (\partial_t P \times (\partial_s P \times \partial_t P)), (\partial_u S \times \partial_v S) \rangle| \sigma_p \sigma_s(u, v).$$

En substituant, successivement,  $s$  par  $s(u, v, t)$  et puis  $t$  par  $t_1(u, v)$  et  $t_2(u, v)$  dans  $\mathbf{B}(u, v, s, t)$  nous obtenons deux composantes pour la paramétrisation de la médiatrice algébrique données par :

$$\mathbf{B}_1(u, v) = \mathbf{B}(u, v, s(u, v, t_1), t_1) \quad \text{et} \quad \mathbf{B}_2(u, v) = \mathbf{B}(u, v, s(u, v, t_2), t_2).$$

Puisque la quantité

$$|(\langle \Gamma, (\partial_s \mathbf{P} \times \partial_t \mathbf{P}) \rangle) \langle (\partial_t \mathbf{P} \times (\partial_s \mathbf{P} \times \partial_t \mathbf{P})), (\partial_u \mathbf{S} \times \partial_v \mathbf{S}) \rangle|$$

est une expression rationnelle et la norme du vecteur normal du plan

$$\sigma_p = \|\partial_s \mathbf{P} \times \partial_t \mathbf{P}\|$$

est une constante réelle, donc la paramétrisation de la médiatrice algébrique est rationnelle si la norme du vecteur normal  $\sigma_s(u, v)$  est rationnelle. De plus, si la constante  $\sigma_p$  n'est pas un nombre rationnel (c-à-d  $\sigma_p \notin \mathbb{Q}$ ) et si la quantité  $\sigma_s(u, v)$  est rationnelle avec des coefficients non rationnels (c-à-d :  $\sigma_s(u, v) \in \mathbb{Q}[\delta](u, v)$ , pour un certain  $\delta \notin \mathbb{Q}$ ), alors la paramétrisation de la médiatrice sera rationnelle avec des coefficients non rationnels (c-à-d :  $\mathbf{B}_i \in \mathbb{Q}[\sigma_p, \delta](u, v), \in \sigma_p \cdot \delta n\mathbb{Q}$ ). Le théorème est ainsi démontré.  $\square$

**Exemple 30.** Soient

$$\mathbf{P}(s, t) = \begin{bmatrix} s \\ t \\ \frac{1}{3}(t + s) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{S}(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{2uv}{1+u^2} \\ \frac{v(1-u^2)}{u^2+1} \\ v \end{bmatrix}$$

les paramétrisations respectives d'un plan oblique et d'un cône circulaire. Les normes de leur vecteurs normaux respectifs sont :

$$\sigma_p = \frac{\sqrt{11}}{3} \in \mathbb{Q}[\sqrt{11}] \quad \text{et} \quad \sigma_s(u, v) = \frac{2\sqrt{2}v}{u^2+1} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}](u, v)$$

En appliquant l'algorithme 4 nous avons :

$$1. \mathbf{B}(u, v, s, t) = \begin{bmatrix} \frac{-6v+7s+4t+6uv-30u^2v+41su^2+14tu^2-7su+\dots+12vu^8+6vu^7+120u^3v^3}{6(15u^4-10u^5+4u^8+\dots-16uv^2-8u^3+24u^2v^2+18v^2u^4-4u^7-8u^3v^2+13u^6)} \\ \frac{-6v+s+10t+6uv-30u^2v-su^2+56tu^2+5su+\dots-60v^3u^4+6vu^7+72u^3v^3}{6(15u^4-10u^5+4u^8+\dots-16uv^2-8u^3+24u^2v^2+18v^2u^4-4u^7-8u^3v^2+13u^6)} \\ \frac{18v-s-10t-18uv+90u^2v+17su^2-28tu^2-19su+\dots+144v^3u^4-18vu^7-72u^3v^3}{6(15u^4-10u^5+4u^8+\dots-16uv^2-8u^3+24u^2v^2+18v^2u^4-4u^7-8u^3v^2+13u^6)} \end{bmatrix}$$

$$2. G(u, v, s, t) = 13su^2 - 2tu^2 - 6u^2v + 20tu + 2su - 12uv - 4t + 6v - 7 = 0,$$

à partir duquel nous exprimons  $t$  en fonction de  $s, u$  et  $v$

$$t = t(u, v, s) = \frac{13su^2 - 6u^2v + 2su - 12uv + 6v - 7s}{2(u^2 - 10u + 2)}.$$

En résolvant

$$F(u, v, s, t(u, v, s)) = 0$$

en fonction du paramètre  $s$  nous obtenons :

$$s_1(u, v) = \frac{k_1}{m},$$

$$s_2(u, v) = \frac{k_2}{m},$$

avec

$$k_1 = 2(-22u - 33u^2 + 44u^3 + 11 + 22u^4 + 2\sqrt{22} - 12\sqrt{22}u + 15\sqrt{22}u^2 - 21\sqrt{22}u^3 + 2\sqrt{22}u^4)v$$

$$k_2 = -2(22u + 33u^2 - 44u^3 - 11 - 22u^4 + 2\sqrt{22} - 12\sqrt{22}u + 15\sqrt{22}u^2 - 22\sqrt{22}u^3 + 2\sqrt{22}u^4)v$$

$$m = 11(-8u + 3 + 9u^4 - 4u^3 + 12u^2)$$

$$3. \text{ La substitution de } t \text{ par } t(u, v, s), \text{ puis de } s \text{ par } s_1(u, v) \text{ et } s_2(u, v) \text{ dans } \mathbf{B}(u, v, s, t) \text{ nous permet d'obtenir les deux composantes pour la paramétrisation de la médiatrice algébrique :}$$

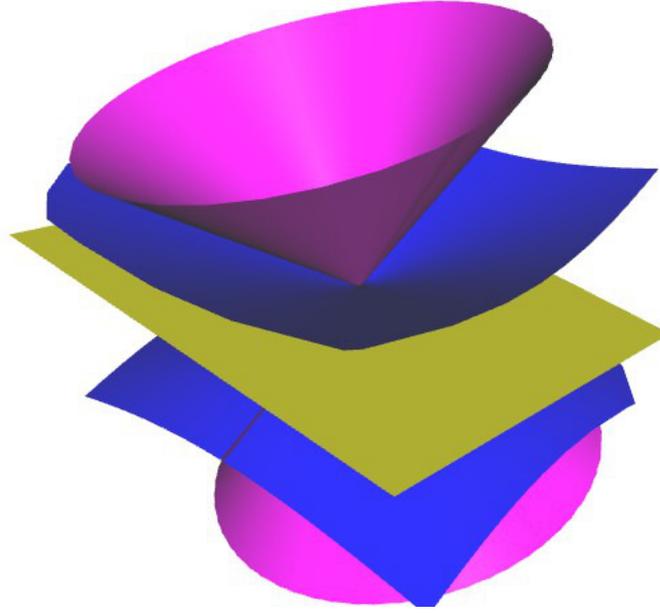


FIGURE 3.6 – La médiatrice géométrique (bleue) du plan oblique (jaune) et du cône circulaire (rose).

$$\mathbf{B}_1(u, v) = \left[ \begin{array}{c} \frac{2uv(2\sqrt{22}u^2 - 5u^2 - \sqrt{22}u + 6u + \sqrt{22} + 1)}{3 + 12u^2 + 9u^4 - 4u^3 - 8u} \\ \frac{v(2\sqrt{22}u^4 - 5u^4 - \sqrt{22}u^3 + 6u^3 - \sqrt{22}u^2 + 6u^2 + \sqrt{22}u - 6u - \sqrt{22} - 1)}{3 + 12u^2 + 9u^4 - 4u^3 - 8u} \\ \frac{v(2\sqrt{22}u^4 + 13u^4 - \sqrt{22}u^3 - 2u^3 + 3\sqrt{22}u^2 + 20u^2 - \sqrt{22}u - 10u + 7 + \sqrt{22})}{3 + 12u^2 + 9u^4 - 4u^3 - 8u} \end{array} \right],$$

$$\mathbf{B}_2(u, v) = \left[ \begin{array}{c} \frac{2uv(2\sqrt{22}u^2 + 5u^2 - \sqrt{22}u - 6u + \sqrt{22} - 1)}{3 + 12u^2 + 9u^4 - 4u^3 - 8u} \\ \frac{v(2\sqrt{22}u^4 + 5u^4 - \sqrt{22}u^3 - 6u^3 - \sqrt{22}u^2 - 6u^2 + \sqrt{22}u + 6u - \sqrt{22} + 1)}{3 + 12u^2 + 9u^4 - 4u^3 - 8u} \\ \frac{v(2\sqrt{22}u^4 - 13u^4 - \sqrt{22}u^3 + 2u^3 + 3\sqrt{22}u^2 - 20u^2 - \sqrt{22}u + 10u - 7 + \sqrt{22})}{3 + 12u^2 + 9u^4 - 4u^3 - 8u} \end{array} \right].$$

Dans ce cas on obtient une paramétrisation rationnelle mais coefficients dans le corps  $\mathbb{Q}[\sqrt{22}]$ , c-à-d :

$$\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2 \in \mathbb{Q}[\sqrt{22}](u, v).$$

Nous obtenons comme conséquence au théorème 3.1, le corollaire suivant qui coïncide avec un résultat prouvé par Peternell ([103])

**Corollaire 2.** *La médiatrice d'un plan et une PN-surface est rationnelle. En particulier la médiatrice du plan et de toute surface quadrique, à l'exception du cylindre et du cône non circulaires et la médiatrice du plan et de tore sont rationnelles.*

*Démonstration.* La preuve de ce corollaire est immédiate de part la définition de PN-surface. En particulier toutes les quadriques, à l'exception du cylindre et du cône non circulaires, sont des PN-surfaces (voir [91] et [93]).  $\square$

### 3.3.1 L'équation implicite de la médiatrice d'un plan et d'une surface rationnelle

L'équation implicite de la médiatrice algébrique d'un plan et d'une surface rationnelle de petit degré peut être calculée à partir de :

- des équations (3.2 - 3.3) définissant la médiatrice, ou
- de la paramétrisation de la médiatrice que nous avons calculée.

#### L'équation implicite à partir des équations de la médiatrice

Soient  $\mathbf{P}(s, t)$  et  $\mathbf{S}(u, v)$  les paramétrisations respectives d'un plan et d'une surface rationnelle. Le point de la médiatrice  $B = (x, y, z)^T$  vérifie les équations (3.2 - 3.3). En appliquant la règle de Cramer aux deux premières équations de (3.2), nous obtenons :

$$s = s_0 = \frac{\overrightarrow{\Gamma B} \cdot (\partial_t \mathbf{P} \times (\partial_s \mathbf{P} \times \partial_t \mathbf{P}))}{\|\partial_s \mathbf{P} \times \partial_t \mathbf{P}\|^2},$$

$$t = t_0 = \frac{\overrightarrow{\Gamma B} \cdot (\partial_s \mathbf{P} \times (\partial_t \mathbf{P} \times \partial_s \mathbf{P}))}{\|\partial_s \mathbf{P} \times \partial_t \mathbf{P}\|^2},$$

où

$$\overrightarrow{\Gamma B} = \begin{bmatrix} x - \gamma_1 \\ y - \gamma_2 \\ z - \gamma_3 \end{bmatrix}.$$

Substituons  $s$  et  $t$  respectivement par  $s_0$  and  $t_0$  dans les trois dernières équations de (3.2 - 3.3), et nous obtenons :

$$\begin{cases} F_1(u, v, x, y, z) = \langle B - S(u, v), \partial_u \mathbf{S}(u, v) \rangle = 0 \\ F_2(u, v, x, y, z) = \langle B - S(u, v), \partial_v \mathbf{S}(u, v) \rangle = 0 \\ F_3(u, v, x, y, z) = \langle B, 2(S(u, v) - \mathbf{P}(s_0, t_0)) \rangle + \|\mathbf{P}(s_0, t_0)\|^2 - \|\mathbf{S}(u, v)\|^2 = 0. \end{cases}$$

Ensuite, en éliminant les paramètres  $u$  et  $v$ , (en utilisant l'un des outils de la théorie d'élimination : base de Grobner, résultants, etc.) nous obtenons l'équation implicite de la médiatrice algébrique du plan  $P$  et de la surface  $S$ .

Le processus de l'implication se résume dans le l'algorithme 5 suivant :

#### Algorithme 5. Équation implicite de la médiatrice algébrique d'un plan et d'une surface à partir de la définition.

**Input :**  $\mathbf{P}(s, t)$ ,  $\mathbf{S}(u, v)$  les paramétrisations d'un plan et d'une surface rationnelle

**Output:**  $b(x, y, z) = 0$  l'équation implicite de médiatrice algébrique du plan  $P$  et et de la surface  $S$

1. On calcule :

$$- \overrightarrow{\Gamma B} = \begin{pmatrix} x - \gamma_1 \\ y - \gamma_2 \\ z - \gamma_3 \end{pmatrix}$$

$$- s_0 = \frac{\vec{\Gamma B} \cdot (\partial_t \mathbf{P} \times (\partial_s \mathbf{P} \times \partial_t \mathbf{P}))}{\|\partial_s \mathbf{P} \times \partial_t \mathbf{P}\|^2}$$

$$- t_0 = \frac{\vec{\Gamma B} \cdot (\partial_s \mathbf{P} \times (\partial_t \mathbf{P} \times \partial_s \mathbf{P}))}{\|\partial_s \mathbf{P} \times \partial_t \mathbf{P}\|^2}$$

2. On calcule :

$$- F_1(u, v, x, y, z) = (\langle \mathbf{B} - \mathbf{S}(u, v), \partial_u \mathbf{S}(u, v) \rangle)$$

$$- F_2(u, v, x, y, z) = (\langle \mathbf{B} - \mathbf{S}(u, v), \partial_v \mathbf{S}(u, v) \rangle)$$

$$- F_3(u, v, x, y, z) = (\langle \mathbf{B}, 2(\mathbf{S}(u, v) - \mathbf{P}(s_0, t_0)) \rangle + \|\mathbf{P}(s_0, t_0)\|^2 - \|\mathbf{S}(u, v)\|^2)$$

$$- \mathcal{I} = \langle F_1, F_2, F_3 \rangle$$

3. On calcule l'équation implicite de la médiatrice en éliminant les paramètres  $u$  et  $v$  :  $b(x, y, z) = \text{eliminate}^1(\mathcal{I}, u, v)$

Donnons un exemple pour illustrer cet algorithme.

**Exemple 31.** Considérons un plan et un cylindre circulaire de paramétrisations respectives

$$\mathbf{P}(s, t) = \begin{bmatrix} s \\ -4 \\ t \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{S}(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{1-u^2}{1+u^2} \\ \frac{2u}{1+u^2} \\ v \end{bmatrix}.$$

Dans ce cas, nous avons

$$1. \vec{\Gamma B} = \begin{bmatrix} x \\ y+4 \\ z \end{bmatrix}, \quad s_0 = x, \quad t_0 = z$$

$$2. - F_1(u, v, x, y, z) = -2(1+u^2)(yu^2 + 2ux - y) = 0$$

$$- F_2(u, v, x, y, z) = z - v = 0$$

$$- F_3(x, y, z, u, v) = -(1+u^2)(x^2u^2 + v^2u^2 - 15u^2 + z^2u^2 - 8yu^2$$

$$2xu^2 - 2zvu^2 - 4yu - 15 - 2x - 8y + x^2 + z^2 + v^2 - 2zv) = 0$$

$$- \mathcal{I} = \langle F_1(u, v, x, y, z), F_2(u, v, x, y, z), F_3(u, v, x, y, z) \rangle.$$

3. L'équation implicite de la médiatrice algébrique est obtenue en éliminant les paramètres  $u$  et  $v$  du système  $\mathcal{I}$  et est donnée par

$$b(x, y, z) = \text{eliminate}(\mathcal{I}, u, v) = (-6y - 9 + x^2)(-10y - 25 + x^2) = 0.$$

L'équation

$$b(x, y, z) = (-6y - 9 + x^2)(-10y - 25 + x^2) = 0$$

représente deux composantes de médiatrice algébriques.

1. **eliminate** : désigne l'opération qui consiste éliminer un groupe de variable parmi tant d'autres dans un système d'équations algébriques.

**L'équation implicite à partir de la paramétrisation de la médiatrice obtenue**

La paramétrisation de la médiatrice algébrique que nous obtenons est constituée de deux composantes qui, en générale, ne sont pas rationnelles. Pour déterminer la représentation implicite on va distinguer les deux cas possibles pour la paramétrisation obtenue.

1. Si la paramétrisation est rationnelle, alors l'équation implicite sera calculée par la méthode classique d'implication basée sur la méthode de résultante, procédé de base de Groebner ou la méthode de surfaces mobiles (voir [29, 30, 31, 68, 112, 110, 117]).
2. Si la paramétrisation n'est pas rationnelle, alors nous allons tout d'abord procéder à des techniques simples pour rélever (éliminer) les racines carrées, puis éliminer les deux paramètres de la paramétrisation.

Ainsi donc, dans le cas rationnel, la représentation implicite de la médiatrice algébrique est donnée par le produit des deux équations implicites de chacune des composantes  $\mathbf{B}_1$  et  $\mathbf{B}_2$ . Dans le cas non rationnel, comme les deux composantes sont conjuguées (dans leurs expressions), l'équation implicite est tout simplement donnée par la représentation implicite obtenue à partir de l'une (quelconque) des deux composantes de la paramétrisation.

Le processus de l'implication se résume dans le l'algorithme 6 suivant :

**Algorithme 6. Équation implicite de la médiatrice algébrique d'un plan et d'une surface à partir de la paramétrisation.**

**Input :**  $\mathbf{B}_1(u, v), \mathbf{B}_2(u, v)$  les deux composantes de la paramétrisation pour la médiatrice algébrique d'un plan  $P$  et d'une surface  $S$

**Output :**  $b(x, y, z) = 0$  l'équation implicite de la médiatrice algébrique  $P$  et  $S$ .

1. Si  $\mathbf{B}_i(u, v) = \begin{bmatrix} x_i(u, v) \\ y_i(u, v) \\ z_i(u, v) \end{bmatrix}$ ,  $i = 1, 2$  est rationnelle,  
on pose :

$$\begin{aligned} x &= x_i(u, v) = \frac{a_{1,i}}{b_{1,i}}, \\ y &= y_i(u, v) = \frac{a_{2,i}}{b_{2,i}}, \\ z &= z_i(u, v) = \frac{a_{3,i}}{b_{3,i}}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g_{1,i} &= x b_{1,i} - a_{1,i}, \\ g_{2,i} &= y b_{2,i} - a_{2,i}, \\ g_{3,i} &= z b_{3,i} - a_{3,i}, \end{aligned}$$

alors on obtient :

$$b_i(x, y, z) = \mathbf{eliminate}(\langle g_{1,i}, g_{2,i}, g_{3,i} \rangle, u, v).$$

L'équation implicite de la médiatrice algébrique est donnée par le produit :

$$b(x, y, z) = b_1(x, y, z) \cdot b_2(x, y, z)$$

2. Sinon, on pose :

$$\begin{aligned} x &= x_i(u, v) = \frac{\alpha_{1,i} + \beta_{1,i}\sqrt{\gamma_{1,i}}}{\delta_{1,i}}, \\ y &= y_i(u, v) = \frac{\alpha_{2,i} + \beta_{2,i}\sqrt{\gamma_{2,i}}}{\delta_{2,i}}, \\ z &= z_i(u, v) = \frac{\alpha_{3,i} + \beta_{3,i}\sqrt{\gamma_{3,i}}}{\delta_{3,i}}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g_{1,i} &= (x\delta_{1,i} - \alpha_{1,i})^2 - \beta_{1,i}^2\gamma_{1,i}, \\ g_{2,i} &= (y\delta_{2,i} - \alpha_{2,i})^2 - \beta_{2,i}^2\gamma_{2,i}, \\ g_{3,i} &= (z\delta_{3,i} - \alpha_{3,i})^2 - \beta_{3,i}^2\gamma_{3,i}, \end{aligned}$$

alors on obtient :

$$b_i(x, y, z) = \mathbf{eliminate}(\langle g_{1,i}, g_{2,i}, g_{3,i} \rangle, u, v)$$

L'équation implicite de la médiatrice algébrique est donnée par :

$$b(x, y, z) = b_1(x, y, z) = b_2(x, y, z)$$

Donnons quelques exemples pour illustrer cet algorithme.

### Exemple 32.

1. Pour

$$\mathbf{P}(s, t) = \begin{bmatrix} s \\ -4 \\ t \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{S}(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{1-u^2}{1+u^2} \\ \frac{2u}{1+u^2} \\ v \end{bmatrix},$$

les paramétrisations respectives d'un plan et d'un cylindre circulaire, la paramétrisation de la médiatrice algébrique est rationnelle et est donnée par

$$\mathbf{B}_1(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{-5(1+u)}{-1+u} \\ \frac{10u}{(-1+u)^2} \\ v \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{B}_2(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{3(-1+u)}{1+u} \\ \frac{6u}{(-1+u)^2} \\ v \end{bmatrix}.$$

– Avec la composante  $\mathbf{B}_1(u, v)$  on obtient :

$$\begin{aligned} g_{1,2} &= x + xu + 3 - 3u, \\ g_{2,2} &= y + 2yu + yu^2 + 6u, \\ g_{3,2} &= z - v, \end{aligned}$$

et

$$b_1(x, y, z) = \mathbf{eliminate}(\langle g_1, g_2, g_3 \rangle, u, v) = 36y - 6x^2 + 54 = 0.$$

– Avec la composante  $\mathbf{B}_2(u, v)$  on obtient :

$$b_2(x, y, z) = -10y - 25 + x^2 = 0.$$

Ainsi donc, l'équation implicite de la médiatrice algébrique donnée par

$$b(x, y, z) = b_1(x, y, z) b_2(x, y, z) = (-10y - 25 + x^2)(36y - 6x^2 + 54) = 0.$$

-

2. Pour

$$\mathbf{P}(s, t) = \begin{bmatrix} s \\ -4 \\ t \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{S}(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{1-u^2}{1+u^2} \\ \frac{u}{1+u^2} \\ v \end{bmatrix},$$

les paramétrisations respectives d'un plan et d'un cylindre elliptique, la paramétrisation de la médiatrice algébrique n'est pas rationnelle et est donnée par

$$\mathbf{B}_1(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{-u^4 - 16u^3 - 2u^2 - 16u - 1 - (4 + 4u^2 + u)\sqrt{1 + 14u^2 + u^4}}{-1 + u^4}}{\frac{u(u^4 + 64u^3 + 14u^2 + 64u + 1 + 4(4 + 4u^2 + u)\sqrt{1 + 14u^2 + u^4})}{(-1 + u^2)^2(1 + u^2)}}} \\ v \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_2(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{-u^4 - 16u^3 - 2u^2 - 16u - 1 + (4 + 4u^2 + u)\sqrt{1 + 14u^2 + u^4}}{-1 + u^4}}{\frac{u(u^4 + 64u^3 + 14u^2 + 64u + 1 - 4(4 + 4u^2 + u)\sqrt{1 + 14u^2 + u^4})}{(-1 + u^2)^2(1 + u^2)}}} \\ v \end{bmatrix}.$$

Avec  $\mathbf{B}_2$  on a :

$$\begin{aligned} x &= \frac{-u^4 - 16u^3 - 2u^2 - 16u - 1 - (4 + 4u^2 + u)\sqrt{1 + 14u^2 + u^4}}{-1 + u^4} \\ y &= \frac{u(u^4 + 64u^3 + 14u^2 + 64u + 1 + 4(4 + 4u^2 + u)\sqrt{1 + 14u^2 + u^4})}{(-1 + u^2)^2(1 + u^2)} \\ z &= v \end{aligned}$$

et on a

$$\begin{aligned}
g_{1,2} &= (-1+u)(1+u)(-15u^6 + 2xu^6 + u^6x^2 + 32xu^5 + 24u^5 \\
&\quad + 6xu^4 - 12u^4 + x^2u^4 + 64xu^3 + 12u^2 - u^2x^2 + 6xu^2 \\
&\quad + 32xu - 24u + 15 + 2x - x^2), \\
g_{2,2} &= (-1+u)^2(1+u)^2(y^2u^8 - 2yu^7 - 255u^6 - 128yu^6 - 30yu^5 \\
&\quad - 498u^4 - 2y^2u^4 - 256yu^4 - 30yu^3 - 255u^2 - 128yu^2 - \\
&\quad 2yu + y^2), \\
g_{3,2} &= z - v.
\end{aligned}$$

L'équation implicite de la médiatrice algébrique est donnée par

$$\begin{aligned}
b(x, y, z) &= \text{eliminate}(\langle g_{1,2}, g_{2,2}, g_{3,2} \rangle, u, v) \\
&= 8037225 + 16737840y - 874314x^2 + 12679254y^2 \\
&\quad - 256x^2y^5 + 25832x^2y^4 + 6912x^2y^3 - 508410x^2y^2 \\
&\quad - 1269648x^2y + 16x^4y^4 - 4352x^4y^3 - 11360x^4y^2 \\
&\quad - 10176x^4y + 224x^6y^2 + 512x^6y + 3946320y^3 \\
&\quad + 300321y^4 - 44352y^5 + 1008y^6 - 12087x^4 \\
&\quad + 968x^6 + 16x^8 = 0.
\end{aligned}$$

On obtient le même résultat avec la composante  $\mathbf{B}_1$ .

### 3.3.2 Les représentations algébriques de la médiatrice algébrique, d'un Plan et d'une Quadrique/Tore

Dans cette sous-section, nous allons procéder au calcul des représentations algébriques (paramétrique et implicite) de la médiatrice algébrique d'un plan et d'une surface quadrique et d'un plan et du tore. Pour des raisons de simplicité des calculs, nous allons considérer que des cas générique proche du cas général pour les PN-paramétrisations d'ellipsoïde, de paraboloidé et d'hyperboloidé. De même que pour l'équation implicite, vu la complication dans le calcul, nous allons étudier que des cas bien choisis, qui, sans perdre la généralité, nous permettent d'obtenir, expérimentalement, le degré maximal de la représentation implicite.

#### 1. Plan et Cylindre Circulaire Soient

$$\mathbf{S}(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{r(1-u^2)}{1+u^2} \\ \frac{2ru}{1+u^2} \\ v \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}(s, t) = \begin{bmatrix} s \\ s + a + t \\ t \end{bmatrix},$$

les paramétrisations respectives d'un cylindre circulaire et d'un plan. La norme du vecteur normal de la surface  $S$

$$\|\partial_u \mathbf{S} \times \partial_v \mathbf{S}\| = \frac{2r}{(1+u^2)} \in \mathbb{R}(u, v)$$

est rationnelle, donc la paramétrisation de la médiatrice algébrique obtenue par application de l'algorithme 4 aux paramétrisations  $\mathbf{S}(u, v)$  et  $\mathbf{P}(s, t)$  est rationnelle, et est donnée par :

$$\mathbf{B}_1(u, v) = \left[ \begin{array}{c} \frac{-3ru^4 - \sqrt{3}ru^4 - 2\sqrt{3}ru^3 + \dots + 2vu - 2ua - 2vu + a + v - \sqrt{3}v - \sqrt{3}a}{2(u^4 + 2u + 2u^2 + 1 - 2u^3)} \\ \frac{-u(-3ru^2 - \sqrt{3}ru^2 - 2\sqrt{3}ru - 3r + \dots + 2vu + 2ua - a - v + \sqrt{3}v + \sqrt{3}a)}{u^4 + 2u + 2u^2 + 1 - 2u^3} \\ v \end{array} \right]$$

$$\mathbf{B}_2(u, v) = \left[ \begin{array}{c} \frac{-3ru^4 - \sqrt{3}ru^4 - 2\sqrt{3}ru^3 + \dots + 2vu + 2ua - a - v - \sqrt{3}v - \sqrt{3}a}{2(u^4 + 2u + 2u^2 + 1 - 2u^3)} \\ \frac{u(3ru^2 - \sqrt{3}ru^2 - 2\sqrt{3}ru + 3r + \dots - 2vu - 2ua + a + v + \sqrt{3}v + \sqrt{3}a)}{u^4 + 2u + 2u^2 + 1 - 2u^3} \\ v \end{array} \right].$$

L'équation implicite calculée à partir de l'un des deux algorithmes 5 et 6 est donnée par :

$$b(x, y, z) = (-z^2 + 2yz + 2y^2 + 2z\sqrt{3}r - 2y\sqrt{3}r - 3r^2 - 2za + 2ya + 2\sqrt{3}ra - a^2 - 2zx + 2yx + 2\sqrt{3}rx - 2ax + 2x^2)(z^2 - 2yz - 2y^2 + 2z\sqrt{3}r - 2y\sqrt{3}r + 3r^2 + 2za - 2ya + 2\sqrt{3}ra + a^2 + 2zx - 2yx + 2\sqrt{3}rx + 2ax - 2x^2) = 0,$$

et son degré est 4.

Pour  $a = 1$  et  $r = 2$ , on a :

$$\mathbf{B}_1(u, v) = \left[ \begin{array}{c} \frac{\sqrt{3}vu^4 - 5u^4 - \sqrt{3}u^4 + vu^4 + 2u^3 + \dots + 4\sqrt{3}u - 2vu - \sqrt{3}v + 7 - 3\sqrt{3} + v}{2(2u^2 + 1 + u^4 + 2u - 2u^3)} \\ \frac{u(\sqrt{3}vu^2 - 5u^2 - \sqrt{3}u^2 + vu^2 + 2u - 4\sqrt{3}u + 2vu + \sqrt{3}v - 7 + 3\sqrt{3} - v)}{2u^2 + 1 + u^4 + 2u - 2u^3} \\ v \end{array} \right]$$

$$\mathbf{B}_2(u, v) = \left[ \begin{array}{c} \frac{-\sqrt{3}vu^4 + 5u^4 - \sqrt{3}u^4 - vu^4 - 2u^3 + \dots + 4\sqrt{3}u + 2vu - \sqrt{3}v - 7 - 3\sqrt{3} - v}{2(2u^2 + 1 + u^4 + 2u - 2u^3)} \\ \frac{u(\sqrt{3}vu^2 + 5u^2 - \sqrt{3}u^2 - vu^2 - 2u - 4\sqrt{3}u - 2vu + \sqrt{3}v + 7 + 3\sqrt{3} + v)}{2u^2 + 1 + u^4 + 2u - 2u^3} \\ v \end{array} \right]$$

L'équation implicite est alors donnée par :

$$b(x, y, z) = (-13 - 2x - 2z + 2y + 2yz - 2xz + 2yx + 4\sqrt{3} - z^2 + 4\sqrt{3}z - 4y\sqrt{3} + 4x\sqrt{3} + 2y^2 + 2x^2)(13 + 2x + 2z - 2y + 2xz + z^2 - 2yx - 2yz - 2y^2 - 2x^2 + 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3}z - 4y\sqrt{3} + 4x\sqrt{3}) = 0$$

## 2. Plan et Cylindre elliptique

Soient

$$\mathbf{S}(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{r(1-u^2)}{1+u^2} \\ \frac{2Ru}{1+u^2} \\ v \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad , \quad \mathbf{P}(s, t) = \begin{bmatrix} s \\ s + a + t \\ t \end{bmatrix} ,$$

les paramétrisations respectives d'un cylindre elliptique et d'un plan.

La norme du vecteur normal de la surface

$$\|\partial_u \mathbf{S} \times \partial_v \mathbf{S}\| = \frac{2\sqrt{R^2 - 2R^2u^2 + R^2u^4 + 4r^2u^2}}{(1+u^2)^2} \notin \mathbb{R}(u, v)$$

n'est pas rationnelle et que  $S$  n'est une PN-surface, donc la paramétrisation de la médiatrice algébrique obtenue par application de l'algorithme 4 aux paramétrisations  $\mathbf{S}(u, v)$  et  $\mathbf{P}(s, t)$  n'est pas rationnelle, et est donnée par :

$$\mathbf{B}_1(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{-2r^2u^6Ra + \dots + u^2R\sqrt{3}(Rv + \dots + u^4Rr)\sqrt{R^2 - 2R^2u^2 + R^2u^4 + 4r^2u^2}}{2(u^4R - R - ru - u^3r)(R^2u^4 - 2Ru^3r - 2R^2u^2 + 4r^2u^2 + 2Rru + R^2)} \\ \frac{u(11R^2r^2u^2 + \dots + r\sqrt{3}(Rv + \dots + u^4Rr)\sqrt{R^2 - 2R^2u^2 + R^2u^4 + 4r^2u^2})}{(u^4R - R - ru - u^3r)(R^2u^4 - 2Ru^3r - 2R^2u^2 + 4r^2u^2 + 2Rru + R^2)} \\ v \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_2(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{-2r^2u^6Ra + \dots - u^2R\sqrt{3}(Rv + \dots + u^4Rr)\sqrt{R^2 - 2R^2u^2 + R^2u^4 + 4r^2u^2}}{2(u^4R - R - ru - u^3r)(R^2u^4 - 2Ru^3r - 2R^2u^2 + 4r^2u^2 + 2Rru + R^2)} \\ \frac{u(11R^2r^2u^2 + \dots - r\sqrt{3}(Rv + \dots + u^4Rr)\sqrt{R^2 - 2R^2u^2 + R^2u^4 + 4r^2u^2})}{(u^4R - R - ru - u^3r)(R^2u^4 - 2Ru^3r - 2R^2u^2 + 4r^2u^2 + 2Rru + R^2)} \\ v \end{bmatrix} .$$

L'équation implicite de la médiatrice algébrique calculée à partir de l'un des deux algorithmes 5 et 6 est donnée par :

$$\begin{aligned} b(x, y, z) = & 9r^8a^4 - 6r^6a^6 + r^4a^8 - 162R^6r^6 + 81R^4r^8 + 81R^8r^4 \\ & + (-180r^4a^4R^2 - 108R^8a^2 - 56r^4a^6 + 180r^6a^4 \\ & - 216R^6r^2a^2 + 108R^8r^2 - 108r^6R^4 - 216r^6R^2a^2 \\ & - 108r^8a^2 - 180R^4a^4r^2 - 108R^6r^4 + 112a^6r^2R^2 \\ & + 648r^4R^4a^2 - 56R^4a^6 + 108r^8R^2 + 180R^6a^4)xy + \dots \\ & + (-64R^4 - 16R^2r^2 + 8r^4)z + (16R^2r^2 - 8r^4 + 64R^4)y \\ & + 8r^4a - 64R^4a - 16R^2r^2x^7 + \dots \\ & + (-228R \dots + 360R^6a^3 + 648R^4ar^4)z^2y \\ & + 9R^8a^4 - 6R^6a^6 + R^4a^8 - 54R^8a^2r^2 + 54R^6r^4a^2 \\ & + 18R^6a^4r^2 + 6R^4r^2a^6 - 54R^4a^4r^4 + 54R^4a^2r^6 \\ & + 6R^2r^4a^6 - 2R^2a^8r^2 + 18R^2r^6a^4 - 54R^2r^8a^2 = 0, \end{aligned}$$

et son degré est 8.

Pour  $r = 1$  et  $R = 2$ ,  $a = 4$ , on a :

$$\mathbf{B}_1(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{2vu^8 + \dots + (\sqrt{3}u^2 - \sqrt{3})(-10 + 3u + 8u^2 - 11u^3 + 6u^4 - 2v - vu - vu^3 + 2vu^4)\sqrt{1-u^2+u^4}}{2(2u^4 - u^3 - u - 2)(u^4 - u^3 - u^2 + u + 1)} \\ \frac{-u(-10u^6 + \dots + \sqrt{3}(-10 + 3u + 8u^2 - 11u^3 + 6u^4 - 2v - vu - vu^3 + 2vu^4)\sqrt{1-u^2+u^4})}{2(2u^4 - u^3 - u - 2)(u^4 - u^3 - u^2 + u + 1)} \\ v \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_2(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{2vu^8 + \dots - (u^2\sqrt{3} - \sqrt{3})(-10 + 3u + 8u^2 - 11u^3 + 6u^4 - 2v - vu - vu^3 + 2vu^4)\sqrt{1-u^2+u^4}}{2(2u^4 - u^3 - u - 2)(u^4 - u^3 - u^2 + u + 1)} \\ \frac{-u(-10u^6 + \dots - \sqrt{3}(-10 + 3u + 8u^2 - 11u^3 + 6u^4 - 2v - vu - vu^3 + 2vu^4)\sqrt{1-u^2+u^4})}{2(2u^4 - u^3 - u - 2)(u^4 - u^3 - u^2 + u + 1)} \\ v \end{bmatrix},$$

et l'équation implicite est alors donnée par :

$$\begin{aligned} b(x, y, z) = & 24336 + 213264 z^3 + 127296 x + 127296 z - 127296 y \\ & + 3762 z^6 + 177192 x^2 - 484560 xy + 484560 xz \\ & - 9504 y^2 - 484560 yz + 242280 z^2 + 99153 z^4 \\ & + 51264 y^5 - 1080 zx^7 + 792 z^2 x^6 - 603 z^4 x^4 \\ & + 432 y^5 x^3 - 252 z^5 x^3 + 144 y^6 x^2 + 72 z^7 x + 288 z^3 y^5 \\ & + 72 z^4 y^4 - 288 z^5 y^3 + 216 z^6 y^2 - 72 z^7 y + 2124 y^2 x^6 \\ & + 2232 y^3 x^5 + 612 z^3 x^5 + 1620 y^4 x^4 + 126 z^6 x^2 \\ & - 288 z^2 y^6 - 6336 yx^6 + 6336 y^4 x^3 - 24084 yx^5 \\ & + 386208 z^2 y^2 - 54756 y^2 x^4 - 5760 z^4 y^3 \\ & + 46980 z^4 y^2 + 4032 y^5 x^2 + 2016 z^6 x \\ & - 396612 z^3 y + 7344 z^2 x^5 - 3672 z^2 y^4 \\ & - 54054 z^2 x^4 + 6624 y^3 x^4 + 3456 z^2 y^5 - 9648 z^3 x^4 \\ & + 24084 zx^5 + 1152 z^3 y^4 + 3024 z^5 x^2 - 40896 y^3 x^3 \\ & - 36000 z^3 x^3 + 5616 y^4 x^2 + 28620 z^4 x^2 + 22032 y^5 x \\ & + 22572 z^5 x + 22032 zy^5 - 37440 z^3 y^3 - 22572 z^5 y \\ & - 123696 zx^4 + 4608 y^2 x^3 + 40 z^2 x^3 + 135360 z^3 x^2 \\ & - 80640 z^2 y^3 + 198720 z^3 y^2 + 123948 yx^3 - 123948 zx^3 \\ & + 334638 z^2 x^2 + 639792 z^2 x - 409968 yx^2 + 409968 zx^2 \\ & + 269568 y^2 x + 6336 zx^6 - 4032 y^2 x^5 - 5040 z^4 x^3 \\ & - 2304 y^6 x - 2304 zy^6 + 5184 z^5 y^2 - 131328 y^3 x^2 \\ & + 128880 z^4 x - 128880 z^4 y + 349344 y^2 x^2 - 66240 y^4 x \\ & + 20808 zy^3 + 269568 zy^2 - 639792 z^2 y + 9 z^8 + 18000 x^5 \\ & - 12096 z^5 yx - 161280 zy^3 x - 406080 z^2 yx^2 - 2016 z^2 y^3 x^3 \\ & + 25776 z^5 - 2016 z^6 y + 20808 y^3 x + 396612 z^3 x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+1260 z^4 y x^3 + 1008 z y^5 x^2 + 1908 z^4 y^2 x^2 - 1008 z^3 y^2 x^3 \\
&-756 z^5 y x^2 - 576 z y^6 x + 288 z^3 y^4 x - 1440 z^4 y^3 x \\
&+1296 z^5 y^2 x + 1584 z y^4 x^3 + 1080 z^2 y^4 x^2 \\
&-2592 z^3 y^3 x^2 + 864 z^2 y^5 x - 504 z^6 y x - 112320 z^2 y^3 x \\
&+402048 z y^2 x^2 + 596160 z^2 y^2 x + 772416 z y^2 x \\
&+3456 z^2 y^4 x - 16128 z y^3 x^3 - 25920 z y^2 x^4 - 1008 z y^2 x^5 \\
&-1836 z^2 y x^5 + 1656 z y^3 x^4 - 3240 z^2 y^2 x^4 + -1584 z y x^6 \\
&+156960 y^3 + 144 y^8 + 288 z^7 - 4320 x^7 + 2412 z^3 y x^4 \\
&-135036 y^4 - 16560 x^3 - 102663 x^4 - 8496 y^6 \\
&+324 x^8 + 13320 x^6 + 218880 z y x^3 - 112860 z^4 y x \\
&-669276 z y x^2 - 515520 z^3 y x - 1279584 z y x \\
&-66240 z y^4 + 123696 y x^4 + 30528 z^3 y^2 x^2 + 108000 z^2 y x^3 \\
&-14688 z y x^5 - 115776 z y^3 x^2 + 172368 z^2 y^2 x^2 \\
&+187920 z^3 y^2 x - 1189836 z^2 y x + 28944 z^2 y x^4 \\
&-12096 z^2 y^2 x^3 + 20160 z^3 y x^3 + 8640 z y^4 x^2 \\
&-31104 z^2 y^3 x^2 - 15120 z^4 y x^2 + 6912 z y^5 x \\
&-23040 z^3 y^3 x + 25920 z^4 y^2 x + 108108 z y x^4 \\
&-31104 z y^2 x^3 - 114480 z^3 y x^2 + 7344 z y^4 x + 1080 x^7 y = 0.
\end{aligned}$$

### 3. Plan et Cylindre parabolique

Soient

$$\mathbf{S}(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{u^2 - 64b^2}{64b^2u} \\ \frac{(u^2 - 64b^2)^2}{2048b^3u^2} + c \\ v \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(s, t) = \begin{bmatrix} s \\ s + a + t \\ t \end{bmatrix},$$

la PN-paramétrisation d'un cylindre parabolique et la paramétrisation d'un plan. La norme du vecteur normal

$$\|\partial_u \mathbf{S} \times \partial_v \mathbf{S}\| = \frac{1}{1024} \frac{(u^2 + 64b^2)^2}{b^3u^3} \in \mathbb{R}(u, v)$$

est rationnelle, donc la paramétrisation de la médiatrice algébrique obtenue par application de l'algorithme 4 aux paramétrisations  $\mathbf{S}(u, v)$  et  $\mathbf{P}(s, t)$  est rationnelle, et est donnée par :

$$\mathbf{B}_1(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{40960b^4u^4 - u^8 + \dots - 1048576u^2b^6 + 2048\sqrt{3}vb^3u^6}{4096u^2b^3(4096b^4 + 1024b^3u + 128b^2u^2 - 16bu^3 + u^4)} \\ \frac{8192b^4u^4 + u^8 + \dots - 1048576\sqrt{3}b^6u^3v - 16384\sqrt{3}b^4u^5v}{2048u^2b^3(4096b^4 + 1024b^3u + 128b^2u^2 - 16bu^3 + u^4)} \\ v \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_2(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{40960b^4u^4 - u^8 + \dots + 8388608\sqrt{3}vb^7u^2 - 2048\sqrt{3}vb^3u^6}{4096u^2b^3(4096b^4 + 1024b^3u + 128b^2u^2 - 16bu^3 + u^4)} \\ \frac{8192b^4u^4 + u^8 + \dots + 1048576\sqrt{3}b^6u^3v + 16384\sqrt{3}b^4u^5v}{2048u^2b^3(4096b^4 + 1024b^3u + 128b^2u^2 - 16bu^3 + u^4)} \\ v \end{bmatrix}.$$

L'équation implicite de la médiatrice algébrique calculée à partir de l'un des deux algorithmes 5 et 6 est donnée par :

$$\begin{aligned} b(x, y, z) = & 9a^2 - 27c^2 + 96b^2a^4 + 432bc^3 - 2048b^4x^6 - 512b^4y^6 \\ & + 256b^4a^6 + 256b^4z^6 - 1728b^2c^4 + 288b^2a^2c^2 \\ & - 144bca^2 + 6144b^4ax^5 + 1536b^4x^2y^4 + 1536b^4x^2z^4 \\ & - 6144b^4x^5y + 6144b^4x^5z - 6144b^4x^4y^2 - 2048b^4x^3y^3 \\ & - 4096b^4x^3z^3 + 1536b^4xy^5 + 1536b^4y^5z - 1536b^4yz^5 \\ & - 2048b^4y^3z^3 - 768b^4y^4z^2 + 3072b^4y^2z^4 + 1536b^4xz^5 \\ & - 3072b^4x^4z^2 + 2304b^3a^2c^3 - 768b^4a^4c^2 - 768b^3a^4c \\ & + \dots + (4608b^3a + 3072b^4c^2 - 10752b^3c - 960b^2 \\ & + 18432b^4ac - 6144b^4a^2)y^3z + \dots + (-1536b^3 + \\ & 1536b^4a + 1536b^4c)y^5 + (-3072b^4ac^2 \\ & + 384b^2a - 3072b^3ac + 5120b^4a^3)z^3 = 0, \end{aligned}$$

et son degré est 6.

Pour  $a = 4$  et  $b = -2$ ,  $c = 1$ , nous avons :

$$\mathbf{B}_1(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{u^8 + \sqrt{3}u^8 + 160u^7 + \dots + 1073741824\sqrt{3}u - 4294967296\sqrt{3} + 4294967296}{32768u^2(u^4 + 32u^3 + 512u^2 - 8192u + 65536)} \\ \frac{-u^8 + 16\sqrt{3}u^7 - 16u^7 + \dots + 268435456\sqrt{3}u + 268435456u - 4294967296}{16384u^2(u^4 + 32u^3 + 512u^2 - 8192u + 65536)} \\ v \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_2(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{u^8 - \sqrt{3}u^8 + 160u^7 + \dots + 2684354560u + 4294967296 + 4294967296\sqrt{3}}{32768u^2(u^4 + 32u^3 + 512u^2 - 8192u + 65536)} \\ \frac{-u^8 - 16\sqrt{3}u^7 - 16u^7 + \dots + 268435456\sqrt{3}u + 268435456u - 4294967296}{16384u^2(u^4 + 32u^3 + 512u^2 - 8192u + 65536)} \\ v \end{bmatrix}$$

et l'équation implicite est alors donnée par :

$$\begin{aligned} b(x, y, z) = & -32768x^6 - 98304x^5y + 98304x^5z - 98304x^4y^2 \\ & + 98304x^4yz - 49152x^4z^2 - 32768x^3y^3 - 98304x^3y^2z \\ & + 196608x^3yz^2 - 65536x^3z^3 + 24576x^2y^4 - 98304x^2y^3z \\ & + 147456x^2y^2z^2 - 98304x^2yz^3 + 24576x^2z^4 \\ & + 24576xy^5 - 24576xy^4z - 98304xy^3z^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +196608 xy^2 z^3 - 122880 xyz^4 + 24576 xz^5 \\
& -8192 y^6 + 24576 y^5 z - 12288 y^4 z^2 - 32768 y^3 z^3 \\
& +49152 y^2 z^4 - 24576 yz^5 + \cdots + 4328046 y^2 \\
& -20624850 yz + 14015337 z^2 + 20699976 x - 13727538 y \\
& +20699976 z + 12459733 = 0
\end{aligned}$$

#### 4. Plan et Cylindre hyperbolique Soient

$$\mathbf{S}_1(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{c(1+u^2)}{1-u^2} \\ 2 \frac{du}{1-u^2} \\ v \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(s, t) = \begin{bmatrix} s \\ s + a + t \\ t \end{bmatrix},$$

les paramétrisations respectives d'un cylindre hyperbolique et d'un plan. La norme du vecteur normal de  $\mathbf{S}$

$$\|\partial_u \mathbf{S} \times \partial_v \mathbf{S}\| = 2 \frac{\sqrt{d^2 + 2d^2 u^2 + d^2 u^4 + 4c^2 u^2}}{(-1 + u^2)^2} \notin \mathbb{R}(u, v)$$

n'est pas rationnelle et  $S$  n'est pas une PN-surface. La paramétrisation de la médiatrice algébrique obtenue par application de l'algorithme 4 aux paramétrisations  $\mathbf{S}(u, v)$  et  $\mathbf{P}(s, t)$  n'est, donc, pas rationnelle algébrique et est donnée par :

$$\mathbf{B}_1(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{-u^7 d^2 ac + \cdots - R\sqrt{3}(d+u^2 d)\sqrt{d^2 + 2d^2 u^2 + d^2 u^4 + 4c^2 u^2}}{2(-1+u^2)(cu-du^2-d)(d^2 u^4 - 2du^3 c + 4c^2 u^2 + 2d^2 u^2 - 2dcu + d^2)} \\ \frac{u(d^2 u^4 ac + \cdots + c\sqrt{3}R\sqrt{d^2 + 2d^2 u^2 + d^2 u^4 + 4c^2 u^2})}{(-1+u^2)(cu-du^2-d)(d^2 u^4 - 2du^3 c + 4c^2 u^2 + 2d^2 u^2 - 2dcu + d^2)} \\ v \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_2(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{-u^7 d^2 ac + \cdots + dR\sqrt{3}(u^2+1)\sqrt{d^2 + 2d^2 u^2 + d^2 u^4 + 4c^2 u^2}}{2(-1+u^2)(cu-du^2-d)(d^2 u^4 - 2du^3 c + 4c^2 u^2 + 2d^2 u^2 - 2dcu + d^2)} \\ \frac{-u(-d^2 u^4 ac + \cdots + cR\sqrt{3}\sqrt{d^2 + 2d^2 u^2 + d^2 u^4 + 4c^2 u^2})}{(-1+u^2)(cu-du^2-d)(d^2 u^4 - 2du^3 c + 4c^2 u^2 + 2d^2 u^2 - 2dcu + d^2)} \\ v \end{bmatrix},$$

avec

$$R = (cu - du^2 - d) (-v - a - c + vu^2 + 2ud + u^2 a - cu^2).$$

L'équation implicite de la médiatrice algébrique calculée à partir de l'un des deux algorithmes 5 et 6 est donnée par :

$$\begin{aligned}
b(x, y, z) = & 905969664 c^4 a^2 - 301989888 a^4 c^2 + 38654705664 a^4 \\
& -393216 a^6 c^2 - 3538944 a^4 c^4 - 3538944 c^6 a^2 \\
& -4608 c^6 a^4 + 347892350976 c^4 + 2717908992 c^6 \\
& +(-73728 c^4 + 132 c^4 a^2 - 9437184 c^2 - 2415919104) + \\
& \cdots + (14336 c^2 + 64 c^4 - 524288) z^2 y^6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ \left(-32c^4 + 8192c^2 + 1835008\right)z^3y^5 + (-8c^4 - 524288 \\
 &- 4096c^2)z^7y + (-100663296 + 6c^6 + 28c^4a^2 + 1536c^4 \\
 &+ 14336c^2a^2 - 393216c^2 + \dots + 72c^8a + 16c^4a^5 \\
 &+ 3221225472a^3 + 73728c^6a - 154618822656a \\
 &+ 43008c^4a^3 - 1310720a^5 + 42467328c^4a - 1024c^2a^5, \\
 &+ 96c^6a^3)y^3 = 0
 \end{aligned}$$

et son degré est 8.

Pour  $a = 4$  et  $d = 1$ ,  $c = 1$ , nous avons :

$$\mathbf{B}_1(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{u^8 + vu^8 + 11u^7 + \dots + \sqrt{3}(u^2 + 1)R\sqrt{(1 + 6u^2 + u^4)} +}{2(-1 + u^2)(u^2 - u + 1)(u^4 - 2u^3 + 6u^2 - 2u + 1)} \\ \frac{-(vu^6 + \dots + R\sqrt{3}\sqrt{(1 + 6u^2 + u^4)})u}{(u^4 - u^3 + u - 1)(u^4 - 2u^3 + 6u^2 - 2u + 1)} \\ v \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_2(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{vu^8 + u^8 + 11u^7 + \dots - \sqrt{3}(u^2 + 1)R\sqrt{(1 + 6u^2 + u^4)}}{2(-1 + u^2)(u^2 - u + 1)(u^4 - 2u^3 + 6u^2 - 2u + 1)} \\ \frac{(-vu^6 - 5u^6 + u^5 + \dots + \sqrt{3}R\sqrt{(1 + 6u^2 + u^4)})u}{(u^4 - u^3 + u - 1)(u^4 - 2u^3 + 6u^2 - 2u + 1)} \\ v \end{bmatrix}$$

avec

$$R = \left(-5 + 7u - 4u^2 - u^3 + 3u^4 - v + vu - vu^3 + vu^4\right),$$

et l'équation implicite est alors donnée par :

$$\begin{aligned}
 b(x, y, z) = & 144400 + 58128x^4yz^2 - 18688x^3y^3z - 8256x^3y^2z^2 \\
 & + 17600x^3yz^3 - 6720x^2y^4z - 34944x^2y^3z^2 - 1400xyz^6 \\
 & - 8544x^5yz - 41280x^4y^2z + 699200x - 699200y \\
 & + 699200z - 2144xy^4z^3 - 1600xy^3z^4 + 3120xy^2z^5 \\
 & - 2580x^2yz^5 + 320xy^6z + 1632xy^5z^2 - 840x^2y^4z^2 \\
 & - 2912x^2y^3z^3 + \dots + 80448x^2y^2z^3 - 51600x^2yz^4 \\
 & + 13056xy^5z - 25728xy^4z^2 - 25600xy^3z^3 \\
 & + 62400xy^2z^4 = 0.
 \end{aligned}$$

## 5. Plan et Sphere

Soient

$$\mathbf{S}(u, v) = \begin{bmatrix} 2\frac{ur}{u^2 + v^2 + 1} \\ 2\frac{vr}{u^2 + v^2 + 1} \\ \frac{r(u^2 + v^2 - 1)}{u^2 + v^2 + 1} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(s, t) = \begin{bmatrix} s \\ t + s + a \\ t \end{bmatrix},$$

les paramétrisations respectives d'une sphère et d'un plan. La norme du vecteur normal de la surface  $S$

$$\|\partial_u \mathbf{S} \times \partial_v \mathbf{S}\| = 4 \frac{r^2}{(u^2 + v^2 + 1)^2} \in \mathbb{R}(u, v)$$

est rationnelle, donc la paramétrisation de la médiatrice algébrique obtenue par application de l'algorithme 4 aux paramétrisations  $\mathbf{S}(u, v)$  et  $\mathbf{P}(s, t)$  est rationnelle, et est donnée par :

$$\mathbf{B}_1(u, v) = \begin{bmatrix} -\frac{u(-3u^2r-3v^2r-3r-u^2a-2ua+\dots+u^2\sqrt{3}a+\sqrt{3}v^2a+\sqrt{3}a)}{u^4-2u^3+2u^2+2v^2u^2+2vu^2+4vu+2u-2uv^2+1+2v^2-2v+v^4+2v^3} \\ -\frac{v(-3u^2r-3v^2r-3r-u^2a-2ua+\dots+\sqrt{3}v^2r+u^2\sqrt{3}a+\sqrt{3}v^2a+\sqrt{3}a)}{u^4-2u^3+2u^2+2v^2u^2+2vu^2+4vu+2u-2uv^2+1+2v^2-2v+v^4+2v^3} \\ -\frac{-a+3r-2uv^2a-2u^2v^2a-2va+2u^2a+\dots+\sqrt{3}v^4a+\sqrt{3}rv^4-\sqrt{3}a+\sqrt{3}r}{2(u^4-2u^3+2u^2+2v^2u^2+2vu^2+4vu+2u-2uv^2+1+2v^2-2v+v^4+2v^3)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_2(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{u(3u^2r+3v^2r+3r+u^2a+2ua-a+\dots+\sqrt{3}v^2r+u^2\sqrt{3}a+\sqrt{3}v^2a+\sqrt{3}a)}{u^4-2u^3+2u^2+2v^2u^2+2vu^2+4vu+2u-2uv^2+1+2v^2-2v+v^4+2v^3} \\ \frac{v(3u^2r+3v^2r+3r+u^2a+2ua-a+\dots+\sqrt{3}v^2r+u^2\sqrt{3}a+\sqrt{3}v^2a+\sqrt{3}a)}{u^4-2u^3+2u^2+2v^2u^2+2vu^2+4vu+2u-2uv^2+1+2v^2-2v+v^4+2v^3} \\ \frac{a-3r+2uv^2a+2u^2v^2a+2va-2u^2a+\dots+\sqrt{3}v^4a+\sqrt{3}rv^4-\sqrt{3}a+\sqrt{3}r}{2(u^4-2u^3+2u^2+2v^2u^2+2vu^2+4vu+2u-2uv^2+1+2v^2-2v+v^4+2v^3)} \end{bmatrix}.$$

L'équation implicite de la médiatrice algébrique calculée à partir de l'un des deux algorithmes 5 et 6 est donnée par :

$$\begin{aligned} b(x, y, z) = & -12x^2y^2z^2 - 12x^4z^2 - 12x^4y^2 - 4x^2z^4 - 4x^2y^4 - 4x^6 \\ & + 24r^2x^2y^2 + 24r^2x^4 + 24r^2x^2z^2 - 8y^3z^2 - 8x^2z^3y \\ & + 8x^3z^3 - 8x^3y^3 - 8x^5y + 8x^5z + 24ayzx^3 \\ & + (-12r^2 + 12a^2)yzx^2 + 8ax^5 + (-12a^2 + 12r^2)zx^3 \\ & + (-12r^2 + 12a^2)yx^3 + (6a^2r^2 - 9r^4 - a^4)x^2 \\ & + (12ar^2 - 4a^3)zx^2 + (4a^3 - 12ar^2)yx^2 + 8az^3x^2 \\ & - 8ay^3x^2 + (12ar^2 - 4a^3)x^3 = 0, \end{aligned}$$

et son degré est 6.

Pour  $a = 4$  et  $r = 3$ , les deux composantes de la paramétrisation sont données par :

$$\mathbf{B}_1(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{u(\sqrt{3}u^2+\sqrt{3}v^2+6\sqrt{3}u-6\sqrt{3}v+5u^2+5v^2+7\sqrt{3}+8u-8v+13)}{u^4+2v^2u^2+v^4+2u^3-2u^2v+2v^2u-2v^3+2u^2+4vu+2v^2-2u+2v+1} \\ -\frac{v(\sqrt{3}u^2+\sqrt{3}v^2+6\sqrt{3}u-6\sqrt{3}v+5u^2+5v^2+7\sqrt{3}+8u-8v+13)}{u^4+2v^2u^2+v^4+2u^3-2u^2v+2v^2u-2v^3+2u^2+4vu+2v^2-2u+2v+1} \\ -\frac{\sqrt{3}u^4+2\sqrt{3}u^2v^2+\sqrt{3}v^4+6\sqrt{3}u^3-\dots+6\sqrt{3}v+8u^2+8v^2-7\sqrt{3}-8u+8v-13}{2(u^4+2v^2u^2+v^4+2u^3-2u^2v+2v^2u-2v^3+2u^2+4vu+2v^2-2u+2v+1)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_2(u, v) = \begin{bmatrix} -\frac{u(\sqrt{3}u^2+\sqrt{3}v^2+6\sqrt{3}u-6\sqrt{3}v-5u^2-5v^2+7\sqrt{3}-8u+8v-13)}{u^4+2v^2u^2+v^4+2u^3-2u^2v+2v^2u-2v^3+2u^2+4vu+2v^2-2u+2v+1} \\ -\frac{v(\sqrt{3}u^2+\sqrt{3}v^2+6\sqrt{3}u-6\sqrt{3}v-5u^2-5v^2+7\sqrt{3}-8u+8v-13)}{u^4+2v^2u^2+v^4+2u^3-2u^2v+2v^2u-2v^3+2u^2+4vu+2v^2-2u+2v+1} \\ \frac{\sqrt{3}u^4+2\sqrt{3}u^2v^2+\sqrt{3}v^4+6\sqrt{3}u^3-\dots+6\sqrt{3}v-8u^2-8v^2-7\sqrt{3}+8u-8v+13}{2(u^4+2v^2u^2+v^4+2u^3-2u^2v+2v^2u-2v^3+2u^2+4vu+2v^2-2u+2v+1)} \end{bmatrix}.$$

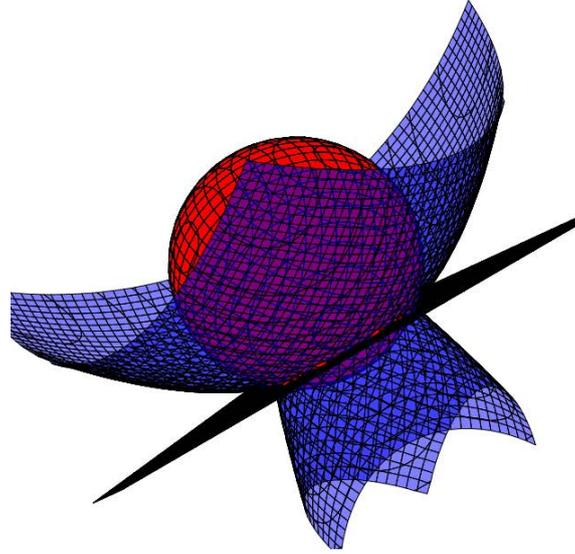


FIGURE 3.7 – La médiatrice algébrique (bleue) d'une sphère et d'un plan sécants, en couleur .

Le graphique correspondant est présenté à la figure 3.7 et l'équation implicite est alors donnée par :

$$\begin{aligned}
 b(x, y, z) = & -121 - 84xz - 176xy + 216x^2 + 176x + 216z^2 + 216y^2 \\
 & + 176z - 12y^2z^2 - 12x^2z^2 - 12x^2y^2 - 4z^4 - 4y^4 - 4x^4 \\
 & + 32x^3 + 84xy + 96xzy + 84yz - 8y^3z - 8z^3y + 8xz^3 \\
 & - 8xy^3 + 32z^3 - 32y^3 - 8x^3y + 8x^3z = 0.
 \end{aligned}$$

## 6. Plan et Ellipsoïde

Soient

$$\mathbf{S}(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{2r_1u}{u^2+v^2+1} \\ \frac{2r_2v}{u^2+v^2+1} \\ \frac{r_3(u^2+v^2-1)}{u^2+v^2+1} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(s, t) = \begin{bmatrix} s \\ t + s + a \\ 2 \end{bmatrix},$$

les paramétrisations respectives d'un ellipsoïde et d'un plan. Pour cette paramétrisation, la norme du vecteur normal de l'ellipsoïde  $S$

$$\|\partial_u \mathbf{S} \times \partial_v \mathbf{S}\| = \frac{4 \sqrt{\left( (u^2 + v^2 - 1)^2 r_2^2 + 4v^2 r_3^2 \left( u^2 + \frac{1}{2} \right)^2 \right) r_1^2 + 4 \left( v^2 - \frac{3}{2} \right)^2 r_3^2 u^2 r_2^2}}{(1 + u^2 + v^2)^3}$$

n'est pas rationnelle. Mais comme  $S$  est une PN-surface et que le processus du calcul de sa PN-paramétrisation dans le cas général (c-à-d pour quelconque  $r_1$ ,  $r_2$  et  $r_3$ ) de l'ellipsoïde (voir [91]) est très long et un peu difficile, nous

études qu'un cas de valeur numérique de  $r_1$ ,  $r_2$  et  $r_3$ . Ainsi, pour  $r_1 = 1$ ,  $r_2 = \frac{1}{4}$ ,  $r_3 = 2$ , la PN-paramétrisation est donnée par :

$$\tilde{\mathbf{S}}(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{50176 v^2 - 774144 u^2 v^4 + 336 u^2 + \dots + 1835008 u^2 v^6 - 34944 u^2 v^2 + 3136}{50176 v^2 + 28672 u^2 v^4 + \dots + 1835008 u^2 v^6 + 65408 u^2 v^2 + 3136} \\ \frac{-896 (2048 u^2 v^4 - 160 u^2 v^2 - 3 u^2 - 448 v^2 - 56) uv}{50176 v^2 + 28672 u^2 v^4 + \dots + 13312 u^4 v^4 + 1835008 u^2 v^6 + 65408 u^2 v^2 + 3136} \\ \frac{-896 (2048 u^2 v^4 - 160 u^2 v^2 - 3 u^2 + 448 v^2 + 56) uv^2}{50176 v^2 + 28672 u^2 v^4 + \dots + 13312 u^4 v^4 + 1835008 u^2 v^6 + 65408 u^2 v^2 + 3136} \end{bmatrix},$$

et la norme du vecteur normal correspondant

$$\|\partial_u \tilde{\mathbf{S}} \times \partial_v \tilde{\mathbf{S}}\| = \frac{802816 uv^2 (9 u^4 + 13312 u^4 v^4 + \dots + 1835008 u^2 v^6)^2}{(50176 v^2 + 28672 u^2 v^4 + \dots + 65408 u^2 v^2 + 3136)^3} \in \mathbb{R}(u, v)$$

est rationnelle. Par application de l'algorithme 4 aux paramétrisations  $\mathbf{S}(u, v)$  et  $\mathbf{P}(s, t)$ , pour  $a = 4$ , la paramétrisation de la médiatrice algébrique obtenue est donnée par :

$$\mathbf{B}_1(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{u(36 u^4 + 72 v^2 u^2 + \dots + 36 v^4 + (9 v^2 + 7 + 9 u^2) \sqrt{16 u^4 + 32 v^2 u^2 - 28 u^2 - 31 v^2 + 16 + 16 v^4})}{2(1 + u^2 + v^2)(4 u^2 + v^2)} \\ \frac{v(36 u^4 + 72 v^2 u^2 + \dots - 28 + (9 v^2 + 7 + 9 u^2) \sqrt{16 u^4 + 32 v^2 u^2 - 28 u^2 - 31 v^2 + 16 + 16 v^4})}{4(1 + u^2 + v^2)(4 u^2 + v^2)} \\ \frac{-(-1 + u^2 + v^2)(144 u^4 + \dots - 4(9 v^2 + 7 + 9 u^2) \sqrt{16 u^4 + 32 v^2 u^2 - 28 u^2 - 31 v^2 + 16 + 16 v^4})}{4(1 + u^2 + v^2)(4 u^2 + v^2)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_2(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{-u(-36 u^4 - 72 v^2 u^2 - \dots - 36 v^4 + (9 v^2 + 7 + 9 u^2) \sqrt{16 u^4 + 32 v^2 u^2 - 28 u^2 - 31 v^2 + 16 + 16 v^4})}{2(1 + u^2 + v^2)(4 u^2 + v^2)} \\ \frac{-v(-36 u^4 - 72 v^2 u^2 - \dots + 28 + (9 v^2 + 7 + 9 u^2) \sqrt{16 u^4 + 32 v^2 u^2 - 28 u^2 - 31 v^2 + 16 + 16 v^4})}{4(1 + u^2 + v^2)(4 u^2 + v^2)} \\ \frac{(-1 + u^2 + v^2)(-144 u^4 - \dots + 4(9 v^2 + 7 + 9 u^2) \sqrt{16 u^4 + 32 v^2 u^2 - 28 u^2 - 31 v^2 + 16 + 16 v^4})}{4(1 + u^2 + v^2)(4 u^2 + v^2)} \end{bmatrix}.$$

Tandis que la paramétrisation de la même médiatrice algébrique obtenue par application de l'algorithme 4 aux paramétrisations  $\tilde{\mathbf{S}}(u, v)$  et  $\mathbf{P}(s, t)$ , pour  $a = 4$ , est donnée par :

$$\mathbf{B}_1(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{9834496 + 2107392 u^2 + 169344 u^4 + \dots + 24192 u^7 v^2 - 80564191232 v^8 u}{(50176 v^2 + 28672 u^2 v^4 + \dots + 65408 u^2 v^2 + 3136)(9 u^4 + 13312 u^4 v^4 + \dots + 200704 v^4 + 3136)} \\ \frac{-448 (-175616 - 28224 u^2 - 1512 u^4 - 4214784 v^2 + \dots + 28224 u^5 v^2) uv}{(50176 v^2 + 28672 u^2 v^4 + \dots + 3136)(9 u^4 + 13312 u^4 v^4 + \dots + 200704 v^4 + 3136)} \\ \frac{896 (25769803776 u^6 v^{12} - 6039797760 u^6 v^{10} + \dots + 12644352 v^2 + 526848) uv^2}{(50176 v^2 + 28672 u^2 v^4 + \dots + 65408 u^2 v^2 + 3136)(9 u^4 + 13312 u^4 v^4 + \dots + 200704 v^4 + 3136)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_2(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{29503488 + 6322176 u^2 + 508032 u^4 + \dots + 24192 u^7 v^2 - 80564191232 v^8 u}{(50176 v^2 + 28672 u^2 v^4 + \dots + 65408 u^2 v^2 + 3136)(9 u^4 + 13312 u^4 v^4 + \dots + 200704 v^4 + 3136)} \\ \frac{-448 (-526848 - 84672 u^2 - 4536 u^4 - 12644352 v^2 + \dots - 28224 u^5 v^2) uv}{(50176 v^2 + 28672 u^2 v^4 + \dots + 65408 u^2 v^2 + 3136)(9 u^4 + 13312 u^4 v^4 + \dots + 200704 v^4 + 3136)} \\ \frac{-896 (42949672960 u^6 v^{12} - 10066329600 u^6 v^{10} + \dots + 21073920 v^2 + 878080) uv^2}{(50176 v^2 + 28672 u^2 v^4 + \dots + 65408 u^2 v^2 + 3136)(9 u^4 + 13312 u^4 v^4 + \dots + 200704 v^4 + 3136)} \end{bmatrix}.$$

L'équation implicite de la médiatrice algébrique calculée à partir de l'un des

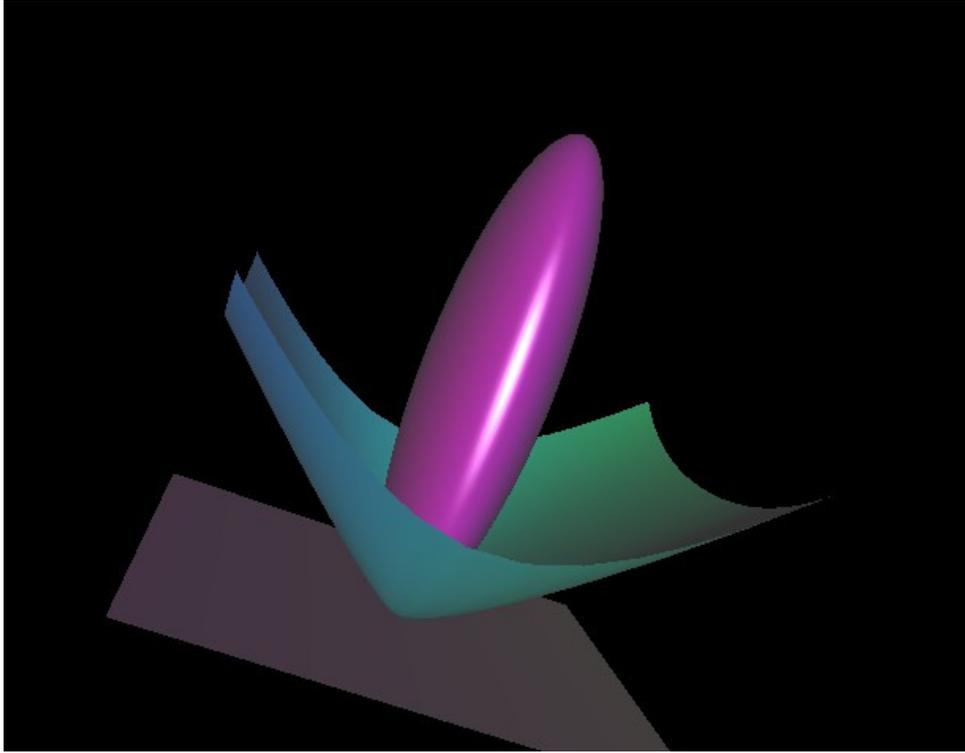


FIGURE 3.8 – La surface médiatrice géométrique d'un plan et d'un ellipsoïde

deux algorithmes 5 et 6 est donnée par :

$$\begin{aligned}
 b(x, y, z) = & 112896 x^{12} + 4010496 x^{10} y^2 + 3327744 x^{10} z^2 \\
 & + 42154240 x^8 y^4 - 45253120 x^8 y^2 z^2 \\
 & + 22886656 x^8 z^4 + 118865920 x^6 y^6 - 214718720 x^6 y^4 z^2 \\
 & + 138228224 x^6 y^2 z^4 - 22773760 x^6 z^6 \\
 & + 143523840 x^4 y^8 - 354816000 x^4 y^6 z^2 \\
 & + 332052736 x^4 y^4 z^4 - 138280960 x^4 y^2 z^6 \\
 & + 26214400 x^4 z^8 + 79691776 x^2 y^{10} \\
 & - 263127040 x^2 y^8 z^2 + 340967424 x^2 y^6 z^4 \\
 & - 208240640 x^2 y^4 z^6 + 52428800 x^2 y^2 z^8 \\
 & + \dots + 190562604750 x^2 z^3 - 29680680960 y^4 z \\
 & + 155539440000 y^2 z^3 + 3544416225 x^4 \\
 & + 5401015200 x^2 y^2 - 96374364975 x^2 z^2 \\
 & + 2057529600 y^4 - 75999999600 y^2 z^2 \\
 & + 21266497350 x^2 z + 16203045600 y^2 z = 0,
 \end{aligned}$$

et son degré est 12.

## 7. Plan et Paraboloïde elliptique

Soient

$$\mathbf{S}(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{u(1-v^2)}{r_1^2(1-u^2)(1+v^2)} \\ \frac{2vu}{r_2^2(1-u^2)(1+v^2)} \\ \frac{u^2r_2^2-2u^2r_2^2v^2+\dots+r_3r_1^2r_2^2u^4v^4}{r_1^2r_2^2(-1+u)^2(u+1)^2(1+v^2)^2} + r_3 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{P}(s, t) = \begin{bmatrix} s \\ t+a \\ t \end{bmatrix},$$

respectivement la PN-paramétrisation d'un parabolôide elliptique et la paramétrisation d'un plan. La norme du vecteur normal de la surface  $S$

$$\|\partial_u \mathbf{S} \times \partial_v \mathbf{S}\| = \frac{2u(1+u^2)^2}{r_1^2(-1+u)^4(u+1)^4r_2^2(1+v^2)} \in \mathbb{R}(u, v)$$

est rationnelle. La paramétrisation de la médiatrice algébrique obtenue par application de l'algorithme 4 aux paramétrisations  $\mathbf{S}(u, v)$  et  $\mathbf{P}(s, t)$  est donc rationnelle, et pour  $r_1 = 2$ ,  $r_2 = 3$ ,  $r_3 = -4$ ,  $a = 3$ , elle est donnée par :

$$\mathbf{B}_1(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{(513-3010u^2v^2+3010u^4v^2+\dots+504\sqrt{2}v^8u^6+16\sqrt{2}v^7u)u}{36(u^4v^4-2u^2v^4+v^4+2u^4v^2-4u^2v^2+2v^2+u^4-2u^2+1)(u^4v^4+2u^4v^2+\dots+2v^2+1)} \\ \frac{-(-254+2245u^2v^2+2245u^2v^4+\dots+252\sqrt{2}u^6+756\sqrt{2}v^2+756\sqrt{2}v^4)uv}{9(u^4v^4-2u^2v^4+v^4+2u^4v^2-4u^2v^2+2v^2+u^4-2u^2+1)(u^4v^4+2u^4v^2+\dots+2v^2+1)} \\ \frac{-(-396-4032u^2v^2-7164u^2v^4+4912u^4v^2+\dots+8u^3v\sqrt{2}+24u^3v^3\sqrt{2}+24u^3v^5\sqrt{2})}{36(u^4v^4-2u^2v^4+v^4+2u^4v^2-4u^2v^2+2v^2+u^4-2u^2+1)(u^4v^4+2u^4v^2+\dots+2v^2+1)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_2(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{-(-513+3010u^2v^2-3010u^4v^2+\dots+504\sqrt{2}v^8u^6+16\sqrt{2}v^7u)u}{36(u^4v^4-2u^2v^4+v^4+2u^4v^2-4u^2v^2+2v^2+u^4-2u^2+1)(u^4v^4+2u^4v^2+\dots+2v^2+1)} \\ \frac{(254-2245u^2v^2-2245u^2v^4+\dots+252\sqrt{2}u^6+756\sqrt{2}v^2+756\sqrt{2}v^4)uv}{9(u^4v^4-2u^2v^4+v^4+2u^4v^2-4u^2v^2+2v^2+u^4-2u^2+1)(u^4v^4+2u^4v^2+\dots+2v^2+1)} \\ \frac{-396+4032u^2v^2+7164u^2v^4-4912u^4v^2+\dots+8u^3v\sqrt{2}+24u^3v^3\sqrt{2}+24u^3v^5\sqrt{2}}{36(u^4v^4-2u^2v^4+v^4+2u^4v^2-4u^2v^2+2v^2+u^4-2u^2+1)(u^4v^4+2u^4v^2+\dots+2v^2+1)} \end{bmatrix}$$

L'équation implicite de la médiatrice algébrique calculée à partir de l'un des deux algorithmes 5 et 6 est donnée par :

$$\begin{aligned} b(x, y, z) = & -122088898406250 z + 147190637531250 y \\ & -60746220429500 zy^2 - 19807532904000 x^2y \\ & +30072130984000 z^2y + 41237005517200 y^2x^2 \\ & -1039571954000 zx^2 + 35667677199200 z^2x^2 \\ & -171493695219500 z^2y^2 + 106079176641400 zy^3 \\ & +229275543306800 z^3y - 30096725616960 z^3x^2 \\ & + \dots + 3297862750464 y^6x^2 + 452709077760 z^6x^2 \\ & +115557580800 x^4y^6 - 617883697152 y^7x^2 \\ & -1244152037376 y^5x^4 + 37139668992 y^8x^2 \\ & + \dots - 102711877632 y^9 - 2314137600 z^9 \\ & -42328508632450 y^4 - 82083941363800 z^4 \\ & +18497254899960 y^5 + 50638830096600 z^5 \\ & +4541681664 y^{10} + 671846400 z^{10} + 50336658984375 = 0 \end{aligned}$$

et son degré est 10.

### 8. Plan et Paraboloïde hyperbolique

Soient

$$\mathbf{S}(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{u(-1+v^2)}{r_1^2(-1+u^2)(1+v^2)} \\ \frac{-2uv}{r_2^2(-1+u^2)(1+v^2)} \\ \frac{u^2r_2^2-2u^2r_2^2v^2+\dots+r_3r_1^2r_2^2u^4v^4}{r_1^2(-1+u)^2(u+1)^2(1+v^2)^2r_2^2} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(s, t) = \begin{bmatrix} s \\ s+a \\ t \end{bmatrix}$$

respectivement la PN-paramétrisation d'un paraboloïde hyperbolique et la paramétrisation d'un plan. La norme du vecteur normal de  $\mathbf{S}$

$$\|\partial_u \mathbf{S} \times \partial_v \mathbf{S}\| = \frac{2u(1+u^2)^2}{r_1^2(-1+u)^4(u+1)^4r_2^2(1+v^2)} \in \mathbb{R}(u, v)$$

est rationnelle, donc la paramétrisation de la médiatrice algébrique obtenue par application de l'algorithme 4 aux paramétrisations  $\mathbf{S}(u, v)$  et  $\mathbf{P}(s, t)$  est rationnelle, et pour  $r_1 = 2$ ,  $r_2 = 3$ ,  $r_3 = -1$ ,  $a = 3$ , elle est donnée par :

$$\mathbf{B}_1(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{(-9-216u+86u^2v^2-86u^2v^4-\dots+9u^3\sqrt{2}v^6-8u^3\sqrt{2}v+8u^3\sqrt{2}v^5)u}{36(-1+u^2)(1+v^2)(u^4v^4+2u^4v^2+u^4+8u^2v^3-8u^2v+v^4+2v^2+1)} \\ \frac{(-4+216u-68u^2v^2+18u^2v^4-\dots+9u^3\sqrt{2}v^4+8u^3\sqrt{2}v+8u^3\sqrt{2}v^3)uv}{18(-1+u^2)(1+v^2)(u^4v^4+2u^4v^2+u^4+8u^2v^3-8u^2v+v^4+2v^2+1)} \\ -\frac{72+216u-576u^2v^2-864u^2v^4+\dots+108u^8\sqrt{2}-108v^8\sqrt{2}-24u^3\sqrt{2}v^3}{72(v^4+u^4v^4+\dots+1+u^4-2u^2)(u^4v^4+2u^4v^2+u^4+8u^2v^3-8u^2v+v^4+2v^2+1)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_2(u, v) = \begin{bmatrix} -\frac{(9+216u-86u^2v^2+86u^2v^4+\dots+9u^3\sqrt{2}v^6-8u^3\sqrt{2}v+8u^3\sqrt{2}v^5)u}{36(-1+u^2)(1+v^2)(u^4v^4+2u^4v^2+u^4+8u^2v^3-8u^2v+v^4+2v^2+1)} \\ -\frac{(4-216u+68u^2v^2-18u^2v^4+\dots+9u^3\sqrt{2}v^4+8u^3\sqrt{2}v+8u^3\sqrt{2}v^3)uv}{18(-1+u^2)(1+v^2)(u^4v^4+2u^4v^2+u^4+8u^2v^3-8u^2v+v^4+2v^2+1)} \\ \frac{-72-216u+576u^2v^2+864u^2v^4-\dots+108u^8\sqrt{2}-108v^8\sqrt{2}-24u^3\sqrt{2}v^3}{72(v^4+u^4v^4+\dots+1+u^4-2u^2)(u^4v^4+2u^4v^2+u^4+8u^2v^3-8u^2v+v^4+2v^2+1)} \end{bmatrix}.$$

L'équation implicite de la médiatrice algébrique calculée à partir de l'un des deux algorithmes 5 et 6 est donnée par :

$$\begin{aligned} b(x, y, z) = & -197057252840175 - 702325983414510 x \\ & +126212047781820 z + 702325983414510 y \\ & -5708532151426 y^4 + 467618334595464 y^3 \\ & +343236212238192 xz + 339304362489560 x^2z \\ & -2548813143723912 xy^2 + 307308240353764 zy^2 \\ & -2597250534133580 y^2x^2 + 1281948563653472 yx^3 \\ & +1111479700000696 xy^3 - 343236212238192 zy \\ & +2605152931208256 x^2y - 71838593523112 x^4 \\ & -523958122079808 x^3 + \dots + 5711367168 z^5 \\ & +375857750016 xy^8 + 33054842880 y^9 \\ & +11018280960 xy^9 + 671846400 y^{10} \\ & +1667719839744 xy^6z + 2970684730368 xy^5z^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +587247501312xy^4z^3 + 30890336256xy^3z^4 \\
& + \cdots + 143535244944000x^3z + 137853779037936z^2x \\
& + 127269087303176z^2x^2 + 155133329286312x^4y \\
& + 2740434943896xy^4 - 139793550566436x^4y^2 = 0
\end{aligned}$$

et son degré est 10.

### 9. Plan et Cône circulaire

Soient

$$\mathbf{S}(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{r_1 u(1-v^2)}{v^2+1} \\ 2 \frac{r_1 v u}{v^2+1} \\ u \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(s, t) = \begin{bmatrix} s \\ s + a + t \\ t \end{bmatrix}$$

respectivement les paramétrisations d'un cône circulaire et du plan. La norme du vecteur normal de  $S$

$$\|\partial_u \mathbf{S} \times \partial_v \mathbf{S}\| = \frac{2r_1 \sqrt{r_1^2 + 1} u}{v^2 + 1} \in \mathbb{Q} \left[ \sqrt{r_1^2 + 1} \right] (u, v)$$

est rationnelle mais à coefficients dans le corps  $\mathbb{Q} \left[ \sqrt{r_1^2 + 1} \right]$ . La paramétrisation de la médiatrice algébrique obtenue par application de l'algorithme 4 aux paramétrisations  $\mathbf{S}(u, v)$  et  $\mathbf{P}(s, t)$  est, donc, rationnelle et à coefficients dans le  $\mathbb{Q} \left[ \sqrt{r_1^2 + 1} \right]$ , elle est donnée par :

$$\mathbf{B}_1(u, v) = \begin{bmatrix} -\frac{-74r_1^2v^2u + \cdots + 36r_1^2uv^5 + (3r_1^2v^2u + \cdots + 6r_1^2uv - 6r_1^2uv^5)\sqrt{r^2+1}}{2(-2v^2+r_1v^2+2v+r_1+2)} \\ \frac{-(-6v^4a + \cdots + 9r_1v^4u)v\sqrt{r^2+1} - (72r_1^2v^2u + \cdots - 36r_1^2uv^3)v}{-2v^2+r_1v^2+2v+r_1+2} \\ -\frac{-22r_1^2v^2u + 4u + \cdots + 18v^4r_1^4u + (-9r_1^2v^2u + \cdots - 6r_1^2uv + 6r_1^2uv^5)\sqrt{r^2+1}}{2(-2v^2+r_1v^2+2v+r_1+2)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_2(u, v) = \begin{bmatrix} -\frac{-74r_1^2v^2u + \cdots + 72r_1^2uv^3 - 36r_1^2uv^5 + (-3r_1^2v^2u + \cdots + 6r_1^2uv^5)\sqrt{r^2+1}}{2(-2v^2+r_1v^2+2v+r_1+2)} \\ \frac{(-6v^4a + \cdots + 9r_1v^4u)v\sqrt{r^2+1} + (-72r_1^2v^2u + \cdots + 36r_1^2uv^3)v}{-2v^2+r_1v^2+2v+r_1+2} \\ -\frac{-22r_1^2v^2u + 4u + \cdots + 18v^4r_1^4u + (9r_1^2v^2u + \cdots + 6r_1^2uv - 6r_1^2uv^5)\sqrt{r^2+1}}{2(-2v^2+r_1v^2+2v+r_1+2)} \end{bmatrix}$$

L'équation implicite de la médiatrice algébrique calculée à partir de l'un des deux algorithmes 5 et 6 est donnée par :

$$\begin{aligned}
b(x, y, z) & = 18r_1^2x^2z^2 - 18r_1^2y^2z^2 + a^4 + 2a^4r_1^2 + a^4r_1^4 \\
& + (-24a^2r_1^2 - 12a^2 - 12a^2r_1^4)xy \\
& + (12a^2r_1^4 + 24a^2r_1^2 + 12a^2)xz +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (-24a^2r_1^2 - 12a^2 - 12a^2r_1^4)yz - (12ar_1^2 + 12ar_1^4)yx^2 \\
& + (12ar_1^2 + 12ar_1^4)xy^2 + (12ar_1^2 + 12ar_1^4)y^2z \\
& + (-12a - 12ar_1^2)yz^2 + (12ar_1^2 + 12ar_1^4)x^2z \\
& + (12ar_1^2 + 12a)z^2x + (6r_1^4 + 12)x^2y^2 \\
& + (4r_1^2 + 8 - 4r_1^4)xy^3 + (4r_1^2 + 8 - 4r_1^4)y^3z \\
& + (4r_1^2 + 8 - 4r_1^4)x^3y \\
& + (4r_1^4 - 8 - 4r_1^2)x^3z \\
& + (4r_1^2 - 4 + 8r_1^4)yz^3 + (-8r_1^4 - 4r_1^2 + 4)xz^3 \\
& + (-24ar_1^4 - 24a - 48ar_1^2)yxz + (-12r_1^2 - 12r_1^4)yx^2z \\
& + (12r_1^4 + 12r_1^2)y^2xz + (-12r_1^2 - 12)xyz^2 \\
& + (4a^3 + 8a^3r_1^2 + 4a^3r_1^4)x + (-8ar_1^4 - 4ar_1^2 + 4a)z^3 \\
& + (4a^3 + 8a^3r_1^2 + 4a^3r_1^4)z + (-4a^3r_1^4 - 4a^3 - 8a^3r_1^2)y \\
& + (6a^2r_1^2 + 6a^2r_1^4)x^2 + (6a^2r_1^2 + 6a^2r_1^4)y^2 \\
& + (6a^2 + 6a^2r_1^2)z^2 + (8a - 4ar_1^4 + 4ar_1^2)y^3 \\
& + (-4r_1^2 + 4 + r_1^4)y^4 + (-4ar_1^2 + 4ar_1^4 - 8a)x^3 \\
& + (-4r_1^2 + 4 + r_1^4)x^4 + (1 + 4r_1^4 - 4r_1^2)z^4 = 0,
\end{aligned}$$

et son degré est 4.

Pour  $r_1 = 2$  et  $a = -3$ , on a :

$$\mathbf{B}_1(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{45uv^6 - 135uv^5 + 3v^5\sqrt{15}u + 45uv^4 + \dots - 54v^3 + 84v^2 + 27v - 9\sqrt{15}v + 78 - 18\sqrt{15}}{2(v+2)} \\ -\frac{(45uv^4 - 135uv^3 + 3\sqrt{15}uv^3 + \dots + 27v^3 - 162v^2 + 18\sqrt{15}v^2 - 27v + 9\sqrt{15}v - 78 + 18\sqrt{15})v}{v+2} \\ \frac{45uv^6 - 135uv^5 + 3v^5\sqrt{15}u + \dots + 18\sqrt{15}v^3 + 36\sqrt{15}v^2 - 240v^2 - 27v + 9\sqrt{15}v - 78 + 18\sqrt{15}}{v+2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_2(u, v) = \begin{bmatrix} -\frac{45uv^6 + 135uv^5 + 3v^5\sqrt{15}u - 45uv^4 + \dots + 135v^4 + 54v^3 - 84v^2 - 9\sqrt{15}v - 27v - 78 - 18\sqrt{15}}{2(v+2)} \\ \frac{(-45uv^4 + 135uv^3 + 3\sqrt{15}uv^3 + \dots + 162v^2 + 18\sqrt{15}v^2 + 9\sqrt{15}v + 27v + 78 + 18\sqrt{15})v}{v+2} \\ -\frac{45uv^6 + 135uv^5 + 3v^5\sqrt{15}u + \dots + 18\sqrt{15}v^3 + 36\sqrt{15}v^2 + 240v^2 + 9\sqrt{15}v + 27v + 78 + 18\sqrt{15}}{v+2} \end{bmatrix}$$

et l'équation implicite est alors donnée par

$$\begin{aligned}
b(x, y, z) = & 4x^4 - 40x^3y + 40x^3z + 108x^2y^2 - 240x^2yz \\
& - 72x^2z^2 - 40xy^3 + 240xy^2z - 60xyz^2 - 140xz^3 \\
& + 4y^4 - 40y^3z - 72y^2z^2 + 140yz^3 + 49z^4 \\
& - 720xy^2 + 1800xyz - 180xz^2 + 120y^3 - 720y^2z \\
& - 120x^3 + 720x^2y - 720x^2z + 180yz^2 + 420z^3 \\
& + 1080x^2 - 2700xy + 2700xz + 1080y^2 - 2700yz \\
& + 270z^2 - 2700x + 2700y - 2700z + 2025 = 0.
\end{aligned}$$

## 10. Plan et cône elliptique

Soient

$$\mathbf{S}(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{r_1 u(1-v^2)}{v^2+1} \\ 2 \frac{r_2 v u}{v^2+1} \\ u \end{bmatrix}, \quad r_1 \neq r_2 \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(s, t) = \begin{bmatrix} s \\ s + a + t \\ t \end{bmatrix}$$

respectivement les paramétrisations d'un cône elliptique et d'un plan. La norme du vecteur normal de  $S$

$$\|\partial_u \mathbf{S} \times \partial_v \mathbf{S}\| = \frac{2u \sqrt{\left((v^2+1)^2 r_2^2 + 4v^2\right) r_1^2 + r_2^2 (v-1)^2 (v+1)^2}}{(v^2+1)^2}$$

n'est pas rationnelle et  $S$  n'est pas une PN-surface. La paramétrisation de la médiatrice algébrique obtenue par application de l'algorithme 4 aux paramétrisations  $\mathbf{S}(u, v)$  et  $\mathbf{P}(s, t)$  n'est, donc, pas rationnelle et est donnée :

$$\mathbf{B}_1(u, v) = \begin{bmatrix} -\frac{(6v^{10}r_2^2\sqrt{3}a + \dots - 6\sqrt{3}r_2^2a)R - 18v^{11}r_1^2r_2^2u + \dots + 9r_1v^8r_2^3a}{(v^2+1)(-2r_2v^2+v^2r_1r_2+2r_1v+2r_2+r_1r_2)} \\ \frac{-4v(3r_1^2\sqrt{3}r_2a + \dots + 18v^4r_1^2r_2\sqrt{3}a)R - 2v(-18v^9r_1^3r_2u + \dots + 9r_1^3v^{10}r_2^2a)}{(v^2+1)(-2r_2v^2+v^2r_1r_2+2r_1v+2r_2+r_1r_2)} \\ -\frac{(-18v^4r_1^2r_2^2\sqrt{3}u + \dots + 3r_1^2r_2^2\sqrt{3}a + 3r_1^3r_2^2\sqrt{3}u)R + \dots + 18r_1^2r_2^4uv}{-2r_2v^2+v^2r_1r_2+2r_1v+2r_2+r_1r_2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_2(u, v) = \begin{bmatrix} -\frac{(6v^{10}r_2^2\sqrt{3}a + \dots + 6\sqrt{3}r_2^2a)R - 18v^{11}r_1^2r_2^2u + \dots + 9r_1v^8r_2^3a}{(v^2+1)(-2r_2v^2+v^2r_1r_2+2r_1v+2r_2+r_1r_2)} \\ \frac{4v(3r_1^2\sqrt{3}r_2a + \dots + 18v^4r_1^2r_2\sqrt{3}a)R + 2v(18v^9r_1^3r_2u + \dots - 9r_1^3v^{10}r_2^2a)}{(v^2+1)(-2r_2v^2+v^2r_1r_2+2r_1v+2r_2+r_1r_2)} \\ -\frac{(18v^4r_1^2r_2^2\sqrt{3}u + \dots - 3r_1^2r_2^2\sqrt{3}a - 3r_1^3r_2^2\sqrt{3}u)R + \dots + 18r_1^2r_2^4uv}{-2r_2v^2+v^2r_1r_2+2r_1v+2r_2+r_1r_2} \end{bmatrix},$$

avec

$$R = \sqrt{\left((v^2+1)^2 r_2^2 + 4v^2\right) r_1^2 + r_2^2 (v-1)^2 (v+1)^2}.$$

L'équation implicite est alors donnée par

$$\begin{aligned} b(x, y, z) = & \left(8a^7r_2^8r_1^4 + \dots + 16a^7r_1^4r_2^2\right) x \\ & + \left(-44a^6r_2^4r_1^6 + \dots + 32a^6r_1^6\right) y^2 \\ & + \dots + \left(-16a^7r_2^8r_1^2 + \dots + 8a^7r_1^8\right) y + \\ & \left(28a^6r_2^4r_1^8 + \dots + 32a^6r_2^6\right) x^2 \\ & + \left(-34a^2r_2^6 + \dots + 56a^2r_2^6r_1^4\right) z^6 \\ & + \left(192r_2^4r_1^4 + \dots + 64r_1^6\right) y^3x^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( -88 r_1^4 r_2^2 + \dots + 32 r_1^2 r_2^2 \right) z^3 x^5 \\
& + \left( 56 a^3 r_1^4 r_2^2 + \dots + 8 a^3 r_2^2 r_1^6 \right) x^5 \\
& + \left( 22 a^4 r_2^4 r_1^6 + \dots + 70 a^4 r_2^8 \right) y^4 \\
& + \left( -8 a r_2^8 r_1^4 + \dots + 20 a r_2^6 r_1^2 - 8 a r_2^4 \right) y^7 \\
& + \left( -16 a^5 r_2^4 + \dots + 76 a^5 r_1^6 \right) x^3 \\
& + \left( 128 a^2 r_2^6 + \dots + 34 a^2 r_2^4 r_1^6 \right) x^6 \\
& + 2 a^8 r_1^6 + a^8 r_1^4 + a^8 r_2^8 + 2 a^8 r_2^6 + a^8 r_2^4 + a^8 r_1^8 \\
& + \left( -50 a^4 r_1^2 r_2^4 + \dots + 22 a^4 r_2^6 r_1^2 \right) z^4 \\
& + \left( 32 a^3 r_2^4 r_1^6 + \dots + 28 a^3 r_2^8 \right) z^5 = 0.
\end{aligned}$$

et son degré est 8.

Si  $r_1 = r_2$ , nous obtenons exactement le résultat du cas Plan-Cône circulaire.

### 11. Plane et Hyperboloïde à une nappe

Soient

$$\mathbf{S}(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{a(1+u^2)(1-v^2)}{(1+v^2)(1-u^2)} \\ 2 \frac{bu}{1-u^2} \\ 2 \frac{cv(1+u^2)}{(1+v^2)(1-u^2)} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(s, t) = \begin{bmatrix} s \\ s + t + d \\ t \end{bmatrix}$$

respectivement les paramétrisation d'un hyperboloïde à une nappe et d'un plan. La norme du vecteur normal de  $S$  pour cette paramétrisation

$$\|\partial_u \mathbf{S} \times \partial_v \mathbf{S}\| = \frac{4 \sqrt{b^2 c^2 v^4 + 2 b^2 c^2 u^2 v^4 + b^2 c^2 u^4 v^4 + \dots + b^2 c^2 + 2 b^2 c^2 u^2 + b^2 c^2 u^4 + 4 c^2 u^2 a^2} (1+u^2)}{(1+v^2)^2 (-1+u^2)^3}$$

n'est pas rationnelle. La paramétrisation de la médiatrice algébrique obtenue par application de l'algorithme 4 aux paramétrisations  $\mathbf{S}(u, v)$  et  $\mathbf{P}(s, t)$  n'est, donc, pas rationnelle et est donnée par :

$$\mathbf{B}_1(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{3 b^3 c^3 a + \dots + a c \sqrt{3} b c u^2 (a u^4 v^4 b c + \dots - 2 a u v^2 c d) \sqrt{b^2 c^2 v^4 + \dots + 4 c^2 a^2 u^2}}{2 (a u^3 v^2 c + u^4 v^2 b c + \dots + a u^3 c - u^4 b c) (4 c^2 a^2 u^2 + \dots + 2 c v^3 b^2 a - 2 c v a b^2)} \\ \frac{(6 b^4 u^4 c^3 + \dots + a c \sqrt{3} (a u^4 v^4 b c + \dots - 2 a u v^2 c d) \sqrt{b^2 c^2 v^4 + \dots + 4 c^2 a^2 u^2}) u}{(a u^3 v^2 c + u^4 v^2 b c + \dots + a u^3 c - u^4 b c) (4 c^2 a^2 u^2 + b^2 c^2 + \dots + 2 c v^3 b^2 a - 2 c v a b^2)} \\ \frac{-v (2 a^4 b^3 v^2 + \dots + \sqrt{3} a b u^2 (a u^4 v^4 b c + \dots - 2 a u v^2 c d) \sqrt{b^2 c^2 v^4 + \dots + 4 c^2 a^2 u^2})}{(a u^3 v^2 c + u^4 v^2 b c + \dots + a u^3 c - u^4 b c) (4 c^2 a^2 u^2 + b^2 c^2 + \dots + 2 c v^3 b^2 a - 2 c v a b^2)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_2(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{3 b^3 c^3 a - \dots - \sqrt{3} b c u^2 v^2 (a u^4 v^4 b c + \dots - 2 a u v^2 c d) \sqrt{b^2 c^2 v^4 + \dots + 4 c^2 a^2 u^2}}{2 (a u^3 v^2 c + u^4 v^2 b c + \dots + a u^3 c - u^4 b c) (4 c^2 a^2 u^2 + b^2 c^2 + \dots + 2 c v^3 b^2 a - 2 c v a b^2)} \\ \frac{-(-6 b^4 u^4 c^3 + \dots + a c \sqrt{3} (a u^4 v^4 b c + \dots - 2 a u v^2 c d) \sqrt{b^2 c^2 v^4 + \dots + 4 c^2 a^2 u^2}) u}{(a u^3 v^2 c + u^4 v^2 b c + \dots + a u^3 c - u^4 b c) (4 c^2 a^2 u^2 + b^2 c^2 + \dots + 2 c v^3 b^2 a - 2 c v a b^2)} \\ \frac{v (-2 a^4 b^3 v^2 + \dots + \sqrt{3} a b u^2 (a u^4 v^4 b c + \dots - 2 a u v^2 c d) \sqrt{b^2 c^2 v^4 + \dots + 4 c^2 a^2 u^2})}{(a u^3 v^2 c + u^4 v^2 b c + \dots + a u^3 c - u^4 b c) (4 c^2 a^2 u^2 + b^2 c^2 + \dots + 2 c v^3 b^2 a - 2 c v a b^2)} \end{bmatrix}$$

Mais la surface  $S$  est une PN-surface, sa PN-paramétrisation pour  $a = 1$ ,  $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $c = \frac{1}{2}$  est donnée par

$$\tilde{\mathbf{S}}(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{-4-8u-4v-8uv-3v^2+4u^2v^2}{-3-4u-4u^2-8v-8uv-v^2+4u^2v^2} \\ \frac{-2-4u+v+4u^2v+2v^2}{-3-4u-4u^2-8v-8uv-v^2+4u^2v^2} \\ -\frac{4uv^2-4v-1+4u+4u^2}{2(-3-4u-4u^2-8v-8uv-v^2+4u^2v^2)} \end{bmatrix},$$

et la norme du vecteur normal correspondant

$$\|\partial_u \tilde{\mathbf{S}} \times \partial_v \tilde{\mathbf{S}}\| = \frac{2(4u^2v^2 + 8u^2 + 8u - 8uv + 5v^2 + 4v + 6)^2}{(-3 - 4u - 4u^2 - 8v - 8uv - v^2 + 4u^2v^2)^3} \in \mathbb{R}(u, v)$$

est rationnelle. La paramétrisation de la médiatrice algébrique obtenue par application de l'algorithme 4 aux paramétrisations  $\tilde{\mathbf{S}}(u, v)$  et  $\mathbf{P}(s, t)$ , est, donc, rationnelle et est donnée par :

$$\mathbf{B}_1(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{-600-4272u-1056v-6528uv+\dots+128\sqrt{3}v^5u^6-64\sqrt{3}v^6u^5}{4(52+160u+\dots+16u^4v^4)(-3-4u-4u^2-8v-8uv-v^2+4u^2v^2)} \\ -\frac{324+1032u+426v+120uv+\dots+128\sqrt{3}v^4u^6+512\sqrt{3}v^5u^6}{2(52+160u+\dots+16u^4v^4)(-3-4u-4u^2-8v-8uv-v^2+4u^2v^2)} \\ -\frac{6-312u+114v-1896uv+\dots+512\sqrt{3}v^4u^6+512\sqrt{3}v^6u^5}{2(52+160u+\dots+16u^4v^4)(-3-4u-4u^2-8v-8uv-v^2+4u^2v^2)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_2(u, v) = \begin{bmatrix} -\frac{600+4272u+1056v+6528uv+\dots+128\sqrt{3}v^5u^6-64\sqrt{3}v^6u^5}{4(52+160u+\dots+16u^4v^4)(-3-4u-4u^2-8v-8uv-v^2+4u^2v^2)} \\ \frac{-324-1032u-426v-120uv+\dots+128\sqrt{3}v^4u^6+512\sqrt{3}v^5u^6}{2(52+160u+\dots+16u^4v^4)(-3-4u-4u^2-8v-8uv-v^2+4u^2v^2)} \\ \frac{-6+312u-114v+\dots+512\sqrt{3}v^4u^6+512\sqrt{3}v^6u^5}{2(52+160u+\dots+16u^4v^4)(-3-4u-4u^2-8v-8uv-v^2+4u^2v^2)} \end{bmatrix}$$

L'équation implicite de la médiatrice algébrique calculée à partir de l'un des deux algorithmes 5 et 6 est donnée par :

$$\begin{aligned} b(x, y, z) = & -17288964 - 79484328x + 5120xy^9z^2 + 15360y^9z^2 \\ & - 5120y^9z^3 - 246912y^8z^2 - 64512y^8z^3 + 15104y^8z^4 \\ & - 4096x^{10}z^2 - 79484328z - 21504xy^8z^3 - 168960xy^8z^2 \\ & - 79484328y - 15930108z^6 - 8574336z^7 - 9216y^{10} \\ & - 101472768x^4y^2z^3 - 40960x^4z^7y + 11264x^4z^5y^3 \\ & + 315904x^4z^6y^2 + 9984x^4z^4y^4 + 347904x^4y^4z \\ & + 1294848x^4y^4z^2 - 40960x^7y^4z - 4096x^7y^3z^2 \\ & + 32768x^7y^4z^4 - 10543104x^2z^7y - 1490400y^7 \\ & - 473616y^8 + \dots + 122112x^4y^6 - 104448x^4y^7 \\ & - 34816x^4y^7z + 30720x^4y^6z - 7168x^4y^6z^2 \\ & + 2048x^5y^6z - 4096x^6y^5z - 62584488xy^4 \\ & + 40861800xy^5 + 12498624xy^6 - 3081888xy^7 = 0, \end{aligned}$$

et son degré est 12.

## 12. Plan et Hyperboloïde à deux feuilles

Soient

$$\mathbf{S}(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{b(1+u^2)}{1-u^2} \\ \frac{4cuv}{(1-u^2)(1+v^2)} \\ \frac{2du(1-v^2)}{(1-u^2)(1+v^2)} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(s, t) = \begin{bmatrix} s \\ s + t + a \\ t \end{bmatrix},$$

respectivement les paramétrisations d'un Hyperboloïde à deux nappes et du plan. La norme du vecteur normal de  $S$

$$\|\partial_u \mathbf{S} \times \partial_v \mathbf{S}\| = \frac{8u\sqrt{c^2 d^2 u^4 v^4 + \dots + 4b^2 u^2 c^2 + c^2 d^2 + 2c^2 d^2 u^2}}{(-1 + u^2)^3 (1 + v^2)^2},$$

n'est pas rationnelle, mais  $S$  est une PN-surface. La PN-paramétrisation pour  $b = 1$ ,  $c = \frac{1}{3}$ ,  $d = \frac{1}{2}$ , est donnée par :

$$\tilde{\mathbf{S}}(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{3125+6400 u^2 v^2+119680 u^2 v^4+\dots+3125 v^{16}+693550 v^8+200500 v^{12}}{-3125+32000 u^2 v^2+\dots-1280 u^4-3125 v^{16}+724050 v^8+191500 v^{12}} \\ \frac{(200-240 v^2+200 v^4+\dots-32\sqrt{30}uv+32\sqrt{30}uv^3-16 u^2+32 u^2 v^2-16 u^2 v^4)}{-3125+32000 u^2 v^2+\dots-1280 u^4-3125 v^{16}+724050 v^8+191500 v^{12}} \\ \frac{(400u+\dots-200\sqrt{30}v^5)v(25-30v^2+25v^4+16u^2-32u^2v^2+16u^2v^4)(-1+v^4)}{-3125+32000 u^2 v^2+\dots-1280 u^4-3125 v^{16}+724050 v^8+191500 v^{12}} \end{bmatrix}$$

et la norme du vecteur normal correspondant est donnée par

$$\|\partial_u \tilde{\mathbf{S}} \times \partial_v \tilde{\mathbf{S}}\| = \frac{v^2(1+v^2)|(-1+v^2)^3|(25-30v^2+25v^4+16u^2-32u^2v^2+16u^2v^4)(3125+\dots+447900v^6)^2}{(-3125+\dots-1280\sqrt{30}uv^5+1280v^{11}\sqrt{30}u-491100v^{10}-491100v^6)^3}.$$

est rationnelle. Ainsi pour  $a = 0$ , la paramétrisation de la médiatrice algébrique obtenue par application de l'algorithme 4 aux paramétrisations  $\tilde{\mathbf{S}}(u, v)$  et  $\mathbf{P}(s, t)$  est rationnelle, et est donnée par :

$$\mathbf{B}_1(u, v) = \mathbf{B}(u, v, s_1(u, v), t(u, v, s_1(u, v))),$$

$$\mathbf{B}_2(u, v) = \mathbf{B}(u, v, s_2(u, v), t(u, v, s_2(u, v))),$$

où  $\mathbf{B}(u, v, s, t)$ ,  $t(u, v, s)$ ,  $s_1(u, v)$  et  $s_2(u, v)$  ont des très longues expressions.

L'équation implicite de la médiatrice algébrique calculée à partir de l'un des

deux algorithmes 5 et 6 est donnée par :

$$\begin{aligned}
b(x, y, z) = & 202500 + 120089088 yz^{11} + 400003392 yz^9 \\
& + 175468000 yz^7 - 308563200 yz^5 - 64620000 yz^3 \\
& + 316859904 y^2 z^{10} + 1178079168 zy^9 + 103720500 z^2 y^2 \\
& + 2326734720 y^5 z^7 + 5113967184 y^5 z^5 + 1309359168 y^4 z^8 \\
& + 3526164000 y^4 z^6 + 5993960976 y^6 z^4 + 4114965888 y^7 z^5 \\
& + 4855385088 y^7 z^3 + 2573777664 y^9 z^3 + 947968704 y^2 z^8 \\
& + 1049304172 y^2 z^6 + 863943300 y^2 z^4 + 648709632 y^3 z^9 \\
& + 1718686656 y^3 z^7 + 3500494272 y^6 z^6 - 26044416 y^4 x^8 \\
& - 26770752 z^2 x^8 - 23156928 z^4 x^8 - 25344 z^3 x^9 \\
& + \dots + 72487800 z^4 + 34065720 y^6 + 310605504 y^{10} \\
& + 195167616 z^{10} + 112896 x^{12} + 401477764 z^8 \\
& - 146496 x^{10} - 2105564 x^8 + 32626944 z^{12} \\
& + 80568576 y^{12} + 3768628032 y^8 z^4 = 0,
\end{aligned}$$

et son degré est 12. Le graphique correspondant est présenté à la figure 3.9.

### 13. Plan et Tore

Soient

$$\mathbf{S}(u, v) = \begin{bmatrix} -\frac{(r_1+r_1u^2+r_2-r_2u^2)(-1+v^2)}{(1+u^2)(1+v^2)} \\ \frac{2(r_1+r_1u^2+r_2-r_2u^2)v}{(1+u^2)(1+v^2)} \\ \frac{2r_2u}{1+u^2} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(s, t) = \begin{bmatrix} s \\ s+c+t \\ t \end{bmatrix}$$

respectivement les paramétrisations d'un tore et d'un plan.

La norme du vecteur normal de la surface  $\mathbf{S}$

$$\|\partial_u \mathbf{S} \times \partial_v \mathbf{S}\| = \frac{4r_2(r_1+r_1u^2+r_2-r_2u^2)}{(1+u^2)^2(1+v^2)} \in \mathbb{R}(u, v)$$

est rationnelle. La paramétrisation de la médiatrice algébrique obtenue par application de l'algorithme 4 aux paramétrisations  $\tilde{\mathbf{S}}(u, v)$  et  $\mathbf{P}(s, t)$  est donc rationnelle, et est donnée par :

$$\mathbf{B}_1(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{c+2r_1u^2-2r_1u+3r_1+\dots+\sqrt{3}r_2+3u^4v^4r_2}{2(2u^4v+1+u^4v^4-2u^4v^3+\dots+2u^2v^4+2uv^4+4uv^3+4uv)} \\ -\frac{v(-c-2r_1u^2+\dots+2\sqrt{3}u^3v^2r_2-2uv^2\sqrt{3}r_2)}{2u^4v+1+u^4v^4-2u^4v^3+\dots+2u^2v^4+2uv^4+4uv^3+4uv} \\ \frac{u(c-r_1u^2+3r_2u^2+\dots+u^2v^4\sqrt{3}c-2u^2v\sqrt{3}r_1+4u^2v^2\sqrt{3}r_2)}{2u^4v+1+u^4v^4-2u^4v^3+\dots+2u^2v^4+2uv^4+4uv^3+4uv} \end{bmatrix}$$

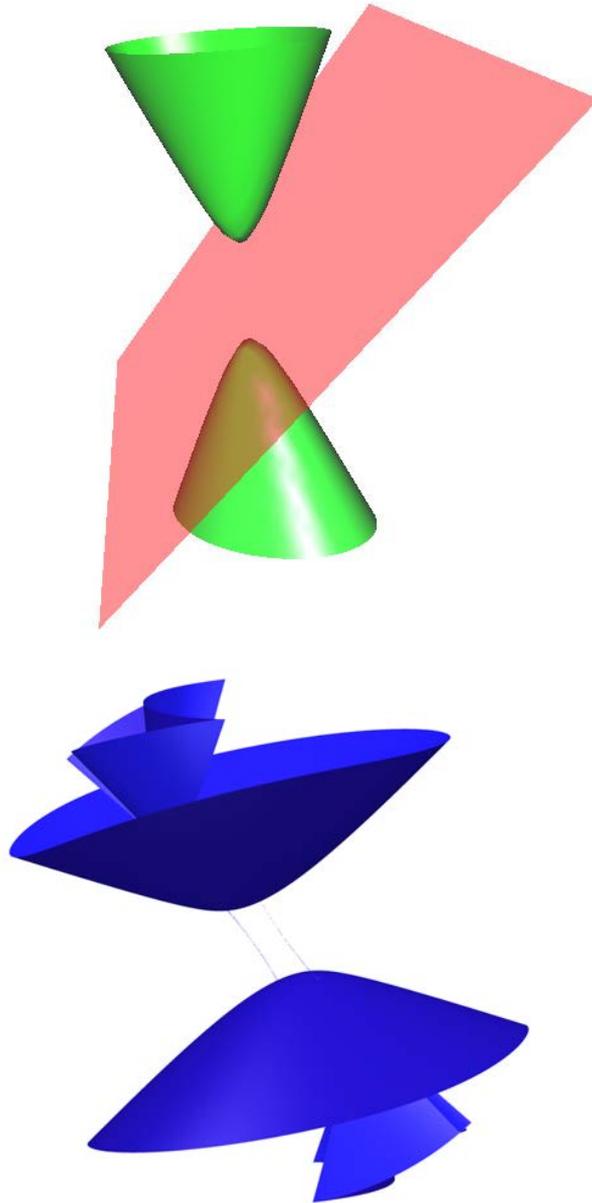


FIGURE 3.9 – Du haut en bas on a respectivement : le plan (en rouge) et Hyperboloïde à deux nappes (vert), et leur médiatrice algébrique (bleue).

$$\mathbf{B}_2(u, v) = \left[ \begin{array}{c} \frac{c+2r_1u^2-2r_1u+3r_1+\dots+\sqrt{3}r_2+3u^4v^4r_2}{2(2u^4v+1+u^4v^4-2u^4v^3+\dots+2u^2v^4+2uv^4+4uv^3+4uv)} \\ -\frac{v(-c-2r_1u^2+\dots+\sqrt{3}u^4v^2c+2\sqrt{3}u^3v^2r_2-2uv^2\sqrt{3}r_2)}{2u^4v+1+u^4v^4-2u^4v^3+\dots+2u^2v^4+2uv^4+4uv^3+4uv} \\ \frac{u(c-r_1u^2+3r_2u^2+\dots+u^2v^4\sqrt{3}c-2u^2v\sqrt{3}r_1+4uv^2\sqrt{3}r_2)}{2u^4v+1+u^4v^4-2u^4v^3+\dots+2u^2v^4+2uv^4+4uv^3+4uv} \end{array} \right].$$

L'équation implicite de la médiatrice algébrique calculée à partir de l'un des deux algorithmes 5 et 6 est donnée par :

$$\begin{aligned} b(x, y, z) = & -64xy^3z^4 - 64cy^3z^4 + \dots - 128cx^6y \\ & + (-720r_2^2r_1^2 + \dots + 648r_2^4)z^4 \\ & + \dots + 64cy^7 - 12c^6r_2^2 + 54c^4r_2^4 - 108r_2^6c^2 \\ & + (64c^2 - 192r_2^2 - 192r_1^2)y^6 + 256x^3y^3z^2 \\ & - 192cy^2z^5 - 192xy^2z^5 + 192xy^5z^2 + 192cy^5z^2 = 0, \end{aligned}$$

et son degré est 8. Pour  $r_1 = 3, r_2 = 1$  et  $c = 1$  on a :

$$\mathbf{B}_1(u, v) = \left[ \begin{array}{c} \frac{13-4\sqrt{3}u^4v+4\sqrt{3}u^2v^3+\dots+2\sqrt{3}u^2v^4-4\sqrt{3}u^4v^2+\sqrt{3}u^4v^4}{2(u^4v^4-2u^4v^3+2u^4v^2+2u^4v+u^4+\dots-2v^3+2v^2+2v+1)} \\ -\frac{v(-13+4\sqrt{3}u^4v+\dots-2\sqrt{3}u^3+2\sqrt{3}u+2\sqrt{3}u^2v^2+\sqrt{3}u^4v^2)}{u^4v^4-2u^4v^3+2u^4v^2+2u^4v+u^4+\dots-2v^3+2v^2+2v+1} \\ \frac{u(7+4\sqrt{3}u^2v^3-4\sqrt{3}uv^2-\dots-2\sqrt{3}u-2\sqrt{3}u^2v^2+\sqrt{3}u^2v^4)}{u^4v^4-2u^4v^3+2u^4v^2+2u^4v+u^4+\dots-2v^3+2v^2+2v+1} \end{array} \right]$$

$$\mathbf{B}_2(u, v) = \left[ \begin{array}{c} \frac{13-4\sqrt{3}u^4v+4\sqrt{3}u^2v^3+\dots+2\sqrt{3}u^2v^4-4\sqrt{3}u^4v^2+\sqrt{3}u^4v^4}{2(u^4v^4-2u^4v^3+2u^4v^2+2u^4v+u^4+\dots-2v^3+2v^2+2v+1)} \\ -\frac{v(-13+4\sqrt{3}u^4v+\dots+2\sqrt{3}u^3+2\sqrt{3}u+2\sqrt{3}u^2v^2+\sqrt{3}u^4v^2)}{u^4v^4-2u^4v^3+2u^4v^2+2u^4v+u^4+\dots-2v^3+2v^2+2v+1} \\ \frac{u(7+4\sqrt{3}u^2v^3-4\sqrt{3}uv^2-\dots-2\sqrt{3}u^2v^2+\sqrt{3}u^2v^4)}{u^4v^4-2u^4v^3+2u^4v^2+2u^4v+u^4+\dots-2v^3+2v^2+2v+1} \end{array} \right]$$

L' équation implicite est alors donnée par :

$$\begin{aligned} b(x, y, z) = & 267289 - 49632x^2y + 49632x^2z + 49632xy^2 \\ & + 5568xz^2 + 49632zy^2 - 5568yz^2 - 99984xyz \\ & + 16304x^3 - 27760z^3 - 119944x - 119944z \\ & - 64xy^3z^4 - 256x^5z^3 - 64x^7z - 64x^4y^3z \\ & - 192x^5y^2z + 192x^2y^5z + 128xy^6z + 64x^3y^4z \\ & + 38496zxy^2 - 64xz^7 - 256x^3z^5 + 119944y \\ & - 128xyz^6 - 64x^3yz^4 + 192x^2yz^5 + 64xy^4z^3 \\ & - 256x^3y^2z^3 + 256x^2y^3z^3 - 64x^4yz^3 + 192x^5yz^2 \\ & - 64x^7 - 192y^2x^5 + 2208xy^4z - 38496zx^2y \\ & - 192z^5y^2 + \dots + 256y^3z^5 + 64yz^7 \\ & + 256y^5z^3 + 304x^4y^4 + 256x^5y^3 + 256x^3y^5 \\ & + 160y^6z^2 + 160x^2y^6 + 64xy^7 + 64y^7z + 384x^4z^2y \\ & - 192x^5zy + 384z^4x^2y - 832x^3z^3y - 16304y^3 \\ & + 256x^3y^3z^2 - 192xy^2z^5 + 192xy^5z^2 = 0 \end{aligned}$$

### 3.4 La paramétrisation de la médiatrice d'un cylindre circulaire et une quadrique non développable ou un tore

Dans cette sous-section nous allons procéder au calcul d'une paramétrisation algébrique de la médiatrice algébrique d'un cylindre circulaire et une surface quadrique non développable et de la médiatrice algébrique d'un cylindre circulaire et un tore.

Soient

$$\mathbf{C}(s, t) = \begin{bmatrix} \frac{2rs}{1+s^2} \\ \frac{r(1-s^2)}{1+s^2} \\ t \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{S}(u, v) = \begin{bmatrix} S_x(u, v) \\ S_y(u, v) \\ S_z(u, v) \end{bmatrix}$$

respectivement les paramétrisations d'un cylindre circulaire et d'une surface quadrique non développable ou d'un tore.

En appliquant l'algorithme 4 aux surfaces  $\mathbf{C}(s, t)$  et  $\mathbf{S}(u, v)$ , l'équation

$$G(u, v, s, t) = \det(|\mathbf{A}, \mathbf{R}|) = 0$$

est linéaire en  $t$  et quadratique en  $s$ . Plus précisément on a :

$$G(u, v, s, t) = \Theta_0(t) (s^2 - 1) + \Theta_1(t) s = 0, \quad (3.15)$$

où

$$\begin{aligned} \Theta_0(t) &= -2a(\partial_u S_y \partial_v S_z - \partial_u S_z \partial_v S_y)t - 2a(\partial_v S_y S_z \partial_u S_x - \partial_u S_y S_x \partial_v S_x \\ &\quad - \partial_u S_y S_z \partial_v S_x + \partial_v S_y S_x \partial_u S_x), \\ \Theta_1(t) &= -2a(-2\partial_u S_x \partial_v S_z + 2\partial_u S_z \partial_v S_x)t - 2a(2\partial_u S_x S_y \partial_v S_y \\ &\quad - 2\partial_v S_x S_y \partial_u S_y + 2\partial_u S_x S_z \partial_v S_z - 2\partial_v S_x S_z \partial_u S_z). \end{aligned}$$

Dans ce cas, deux configurations possibles pour les surfaces d'entrée, sont à distinguer :

1. La surface  $S$  est de révolution et partageant le même axe que le cylindre  $C$ .

En paramétrisant la surface de révolution comme suit

$$\mathbf{S}(u, v) = \begin{bmatrix} A(u) \frac{1-v^2}{1+v^2} \\ A(u) \frac{2v}{1+v^2} \\ B(u) \end{bmatrix}, \quad A, B \in \mathbb{R}(u),$$

le paramètre  $s$  peut être exprimé en fonction  $v$  à partir de  $G(u, v, s, t) = 0$ , comme suit :

$$\begin{aligned} s_1(v) &= \frac{1-v}{1+v} \\ s_2(v) &= -\frac{1+v}{1-v}. \end{aligned}$$

En substituant  $s$  par  $s_1(v)$  et  $s_2(v)$  dans  $F(u, v, s, t) = 0$ , nous obtenons le théorème suivant :

**Théorème 3.2.** Soit  $\sigma_s(u, v) = \|\partial_u \mathbf{S} \times \partial_v \mathbf{S}\|$ .

(a) Les équations résultantes

$$F_1(u, v, t) = F(u, v, s_1(v), t) = 0 \text{ et } F_2(u, v, t) = F(u, v, s_2(v), t) = 0,$$

sont quadratiques en  $t$  et de discriminants positifs. Ainsi donc, on obtient quatre composantes  $\mathbf{B}_i(u, v)$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , pour la paramétrisation de la médiatrice algébrique sont obtenues, qui, pourraient contenir de racines carrées d'une expression positive (provenant de  $\sigma_s$ ).

(b) Si  $\sigma_s$  est rationnelle, la paramétrisation de médiatrice  $\mathbf{B}(u, v)$  est rationnelle. Si de plus  $\sigma_s \in \mathbb{Q}[\delta](u, v)$  alors  $\mathbf{B}_i \in \mathbb{Q}[\delta](u, v)$ ,  $i = 1, \dots, 4$ .

*Démonstration.* En substituant  $s$  par  $s_1(v)$  et  $s_2(v)$  dans l'équation

$$F(u, v, s, t) = 0,$$

nous obtenons respectivement :

$$\begin{aligned} F_1(u, v, t) &= F(u, v, s_1(v), t) \\ &= 64(1+v^2)^4(r^2v^4 + (A(u))^2v^4 + 4r^2v^3 + 6r^2v^2 \\ &\quad + 2(A(u))^2v^2 + 4r^2v + r^2 \\ &\quad + (A(u))^2(2A(u)B(u)\frac{d}{du}B(u) \\ &\quad - 2A(u)\left(\frac{d}{du}B(u)\right)t - 2B(u)\left(\frac{d}{du}B(u)\right)r \\ &\quad + 2\left(\frac{d}{du}B(u)\right)tr + (A(u))^2\frac{d}{du}A(u) \\ &\quad - 2\left(\frac{d}{du}A(u)\right)rA(u) - \left(\frac{d}{du}r(u)\right)(B(u))^2 \\ &\quad + 2\left(\frac{d}{du}A(u)\right)tB(u) + r^2\frac{d}{du}A(u) \\ &\quad - \left(\frac{d}{du}A(u)\right)t^2)\frac{d}{du}A(u) = 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} F_2(u, v, t) &= F(u, v, s_2(v), t) \\ &= 64(1+v^2)^4(r^2v^4 + (A(u))^2v^4 - 4r^2v^3 \\ &\quad + 6r^2v^2 + 2(A(u))^2v^2 - 4r^2v + r^2 \\ &\quad + (A(u))^2(2A(u)B(u)\frac{d}{du}B(u) \\ &\quad - 2A(u)\left(\frac{d}{du}B(u)\right)t + 2B(u)\left(\frac{d}{du}B(u)\right)r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -2 \left( \frac{d}{du} B(u) \right) tr + (A(u))^2 \frac{d}{du} r(u) \\
 & + 2 \left( \frac{d}{du} A(u) \right) r A(u) - \left( \frac{d}{du} r(u) \right) (B(u))^2 \\
 & + 2 \left( \frac{d}{du} A(u) \right) t B(u) + r^2 \frac{d}{du} A(u) \\
 & - \left( \frac{d}{du} A(u) \right) t^2 \frac{d}{du} A(u) = 0.
 \end{aligned}$$

Leur discriminants respectifs par rapport à  $t$  sont donnés par :

$$\begin{aligned}
 \Delta_1 &= 4 (A(u) - r)^2 \left( (B'(u))^2 + (A'(u))^2 \right) \\
 &= 4 \left( 1 - \frac{r}{A(u)} \right)^2 \sigma_s^2(u, v) \geq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_2 &= 4 (A(u) + r)^2 \left( (B'(u))^2 + (A'(u))^2 \right) \\
 &= 4 \left( 1 + \frac{r}{A(u)} \right)^2 \sigma_s^2(u, v) \geq 0
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \sqrt{\Delta_1} &= 2 \left( 1 - \frac{r}{A(u)} \right) \sigma_s(u, v) \\
 \sqrt{\Delta_2} &= 2 \left( 1 + \frac{r}{A(u)} \right) \sigma_s(u, v),
 \end{aligned}$$

où

$$\sigma_s(u, v) = \|\partial_u \mathbf{S} \times \partial_v \mathbf{S}\| = A(u) \sqrt{(A'(u))^2 + (B'(u))^2},$$

avec

$$A' = \frac{d}{du} A \text{ et } B' = \frac{d}{du} B.$$

Ainsi donc, on obtient quatre expressions de  $t$  en fonction de  $u$  et  $v$  :

$$\begin{aligned}
 t_i^1(u, v) &= \frac{(B'(u))(A(u) - r) - (A'(u))B(u) + (-1)^i \left( 1 - \frac{r}{A(u)} \right) \sigma(u, v)}{A'(u)}, i = 1, 2, \\
 t_i^2(u, v) &= \frac{(B'(u))(A(u) + r) - (A'(u))B(u) + (-1)^i \left( 1 + \frac{r}{A(u)} \right) \sigma(u, v)}{A'(u)}, i = 1, 2.
 \end{aligned}$$

En substituant successivement  $(s, t)$  par  $(s_1(v), t_1^1(u))$  et  $(s_2(v), t_1^2(u))$  dans  $\mathbf{B}(u, v, s, t)$ , nous obtenons quatre composantes pour la paramétrisation de la médiatrice algébrique de  $C$  et  $S$  :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}_1(u, v) &= \mathbf{B}(u, v, s_1(v), t_1^1(u, v)), \\
 \mathbf{B}_2(u, v) &= \mathbf{B}(u, v, s_1(v), t_2^1(u, v)) \\
 \mathbf{B}_3(u, v) &= \mathbf{B}(u, v, s_2(v), t_1^2(u, v)), \\
 \mathbf{B}_4(u, v) &= \mathbf{B}(u, v, s_2(v), t_2^2(u, v)).
 \end{aligned}$$

Si  $\sigma_s$  est rationnel alors  $t_i^1$  et  $t_i^2$ , sont rationnels, et par conséquent les quatre composantes de la paramétrisation de médiatrice algébrique seront rationnelles. Le théorème est ainsi démontré.  $\square$

Puisque toutes les surfaces quadriques de révolutions et le tore sont des PN-surfaces, nous obtenons le corollaire suivant qui coïncide avec les résultats de Dutta et Hoffman ([40]).

**Corollaire 3.** *La médiatrice d'un cylindre circulaire et d'une quadrique de révolution, ou d'un tore partageant le même axe, est rationnelle.*

**Exemple 33.** Soient

$$\mathbf{C}(s, t) = \begin{bmatrix} \frac{10s}{1+s^2} \\ \frac{5(1-s^2)}{1+s^2} \\ t \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{S}(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{u(-1+v^2)}{(-1+u^2)(1+v^2)} \\ \frac{-2uv}{(-1+u^2)(1+v^2)} \\ \frac{-u^2+u^4+1}{(-1+u)^2(u+1)^2} \end{bmatrix},$$

les paramétrisations respectives d'un cylindre circulaire et d'un paraboloïde elliptique de révolution (avec sa PN-paramétrisation) de même axe. Les quatre composantes de la paramétrisation de leur médiatrice algébrique sont données par (voir le graphique correspondant à la figure 3.10) :

$$\mathbf{B}_1(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{(11u^2-9)u(-1+v^2)}{(-1+u^2)(u^2+v^2u^2-2uv^2-2u+1+v^2)} \\ \frac{-2(11u^2-9)uv}{(-1+u^2)(u^2+v^2u^2-2uv^2-2u+1+v^2)} \\ \frac{-4u^4+11u^3+3u^2-9u-6}{(-1+u)^2(u+1)^2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_2(u, v) = \begin{bmatrix} -\frac{(9u^2-11)u(-1+v^2)}{(-1+u^2)(u^2+v^2u^2+2u+2uv^2+1+v^2)} \\ \frac{2(9u^2-11)uv}{(-1+u^2)(u^2+v^2u^2+2u+2uv^2+1+v^2)} \\ \frac{6u^4-9u^3-3u^2+11u-4}{(-1+u)^2(u+1)^2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_3(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{(11u^2-9)u(-1+v^2)}{(-1+u^2)(u^2+v^2u^2+2u+2uv^2+1+v^2)} \\ \frac{-2(11u^2-9)uv}{(-1+u^2)(u^2+v^2u^2+2u+2uv^2+1+v^2)} \\ \frac{-4u^4-11u^3+3u^2+9u-6}{(-1+u)^2(u+1)^2} \end{bmatrix}$$



FIGURE 3.10 – Une composante contenant la médiatrice géométrique (bleue) du cylindre circulaire (rose) et du parabolôide elliptique (vert).

et

$$\mathbf{B}_4(u, v) = \begin{bmatrix} -\frac{(9u^2-11)u(-1+v^2)}{(-1+u^2)(u^2+v^2u^2-2uv^2-2u+1+v^2)} \\ \frac{-2(9u^2-11)uv}{(-1+u^2)(u^2+v^2u^2-2uv^2-2u+1+v^2)} \\ \frac{6u^4+9u^3-3u^2-11u-4}{(-1+u)^2(u+1)^2} \end{bmatrix}.$$

2. La surface  $S$  n'est de révolution ou ne partage pas le même axe avec le cylindre  $C$ .

Après avoir exprimé le paramètre  $t$  de l'équation (3.15), soit  $t = t(u, v, s)$ , et substitué dans

$$F(u, v, s, t) = 0,$$

nous obtenons le théorème

**Théorème 3.3.** Soit  $\sigma_s(u, v) = \|\partial_u \mathbf{S} \times \partial_v \mathbf{S}\|$ . L'équation résultante

$$F_0(u, v, s) = F(u, v, s, t(u, v, s)) = 0,$$

est quartique en  $s$ , et peut être factorisée comme suit :

$$F_0(u, v, s) = f_1(u, v, \sigma_s, s) f_2(u, v, \sigma_s, s) = 0$$

où  $f_1(u, v, \sigma_s, s)$  et  $f_2(u, v, \sigma_s, s)$  sont quadratique en  $s$ . Ainsi donc on obtient quatre composantes  $\mathbf{B}_i(u, v), i = 1, \dots, 4$ , pour la paramétrisation de la médiatrice algébrique qui, en générale, contiennent de racines carrées.

*Démonstration.* Puisque l'équation (3.15) est linéaire en  $t$ , on peut exprimer  $t$  en fonction de paramètres  $s, u$  et  $v$  :

$$t(s, u, v) = \frac{A_0}{B_0},$$

où

$$\begin{aligned} A_0 &= 2 \partial_u Sx Sy \partial_v Sy s + 2 \partial_u Sx Sz \partial_v Sz s - 2 \partial_v Sx Sy \partial_u Sy s \\ &\quad - 2 \partial_v Sx Sz \partial_u Sz s + \partial_u Sy Sx \partial_v Sx + \partial_u Sy Sz \partial_v Sz \\ &\quad - \partial_v Sy Sx \partial_u Sx - \partial_v Sy Sz \partial_u Sz - \partial_u Sy Sx \partial_v Sx s^2 \\ &\quad - \partial_u Sy Sz \partial_v Sz s^2 + \partial_v Sy Sx \partial_u Sx s^2 + \partial_v Sy Sz \partial_u Sz s^2, \\ B_0 &= 2 \partial_u Sx s \partial_v Sz - 2 \partial_v Sx s \partial_u Sz + \partial_u Sy \partial_v Sz - \partial_u Sz \partial_v Sy \\ &\quad - s^2 \partial_u Sy \partial_v Sz + s^2 \partial_v Sy \partial_u Sz. \end{aligned}$$

En substituant  $t$  par  $t(s, u, v)$  dans l'équation  $F(u, v, s, t) = 0$ , et en factorisant dans  $\mathbb{R}[\sigma_s](u, v, s)$ , à l'aide du logiciel Maple :

$$F_0(u, v, s) = \mathbf{factor}(F(u, v, s, t(u, v, s)), \sigma_s);$$

on obtient

$$F_0(u, v, s) = \frac{K}{\sigma_s} f_1(u, s, \sigma_s) f_2(u, s, t, \sigma_s) \quad (3.16)$$

où

$$\begin{aligned} f_1(s, u, v, \sigma_s) &= \partial_v Sy \partial_u Sz^2 \partial_v Sx a + \partial_u Sy \partial_v Sz^2 \partial_u Sx a + \dots \\ &\quad - \partial_u Sx^2 \partial_v Sy^2 Sx - \partial_v Sx^2 \partial_u Sy^2 Sx - \\ &\quad 2 Sx \partial_v Sx^2 \partial_u Sz^2 + (-4 \partial_u Sz \partial_v Sx \partial_u Sx \partial_v Sz a \\ &\quad + \dots + 2 \partial_u Sy^2 \partial_v Sx^2 Sy) s - (\partial_u Sx Sy \partial_u Sy \partial_v Sz^2 \\ &\quad + \partial_v Sx^2 \partial_u Sy^2 Sx + Sx \partial_u Sy^2 \partial_v Sz^2 \\ &\quad - \partial_v Sx Sy \partial_v Sy \partial_u Sz^2 + \dots + \partial_u Sy \sigma \partial_v Sz a) s^2, \\ f_2(s, u, v, \sigma_s) &= -\partial_v Sy \partial_u Sz^2 \partial_v Sx a - \partial_u Sy \partial_v Sz^2 \partial_u Sx a + \dots \\ &\quad + (4 \partial_u Sz \partial_v Sx \partial_u Sx \partial_v Sz a - \dots \\ &\quad - 2 \partial_u Sy^2 \partial_v Sx^2 Sy) s + (\partial_u Sx Sy \partial_u Sy \partial_v Sz^2 \\ &\quad - \sigma \partial_v Sy \partial_u Sz a + \dots + 2 \partial_v Sy \partial_u Sy \partial_v Sx Sx \partial_u Sx \\ &\quad - \sigma \partial_v Sy \partial_u Sz Sy - Sx \partial_v Sy^2 \partial_u Sz^2 \\ &\quad + \partial_u Sy \sigma \partial_v Sz a) s^2, \\ K &= (1 + s^2)^2 (-2 \partial_u Sx \partial_v Sy \partial_u Sy \partial_v Sx \\ &\quad + 4 \partial_v Sy^2 \partial_u Sx^2 s^2 + 4 \partial_v Sx^2 \partial_u Sy^2 s^2 \\ &\quad + \partial_u Sy^2 \partial_v Sx^2 s^8 + 16 \partial_u Sx^2 a^2 s^2 + 4 \partial_u Sz^2 \partial_v Sy^2 a^2 \\ &\quad + 4 \partial_u Sx^2 \partial_v Sy^2 s^6 - 8 \partial_v Sy^2 a^2 s^2 + 16 \partial_v Sx^2 a^2 s^2 \\ &\quad + 4 \partial_u Sy^2 a^2 s^4 + 4 \partial_u Sy^2 \partial_v Sz^2 a^2 + 6 \partial_u Sx^2 s^4 \partial_v Sy^2 \\ &\quad + 4 \partial_v Sy^2 a^2 s^4 - 8 \partial_u Sy^2 a^2 s^2 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -8 \partial_u Sx \partial_v Sy \partial_u Sy \partial_v Sx s^6 \partial_u Sx \partial_v Sy \partial_u Sy \partial_v Sx s^8 \\
 & +16 a^2 \partial_u Sx \partial_v Sz^2 \partial_u Sy s - 16 a^2 \partial_u Sx s^3 \partial_v Sz^2 \partial_u Sy \\
 & + \partial_u Sx^2 \partial_v Sy^2 + \partial_u Sy^2 \partial_v Sx^2), \\
 \sigma_s(u, v) & = \|\partial_u \mathbf{S} \times \partial_v \mathbf{S}\|.
 \end{aligned}$$

Les polynômes  $f_1(s, u, v, \sigma_s)$  et  $f_2(s, u, v, \sigma_s)$  sont quadratiques en  $s$ . On peut vérifier (expérimentalement) que pour toute surface quadrique ou tore de paramétrisation  $\mathbf{S}(u, v)$  le polynôme  $K$  n'admet pas de solution en fonction de  $s$ . Si  $\sigma_s$  est rationnel, la factorisation (3.16) sera dans le l'anneau  $\mathbb{R}[u, v, s]$ . En général, le discriminant de chacun des polynômes quadratiques  $f_1$  et  $f_2$ , en fonction de  $s$ , n'est pas strictement positif.  $\square$

Comme en général le discriminant de chacun de facteur n'est pas positifs, alors la paramétrisation de surface médiatrice peut contenir de racine carrée d'une expression qui n'est pas positive comme le montre l'exemple 34 suivant.

**Exemple 34.** Soient

$$\mathbf{C}(s, t) = \begin{bmatrix} \frac{2s}{1+s^2} + 4 \\ t \\ \frac{1-s^2}{1+s^2} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{S}_2(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{2u}{1+u^2+v^2} \\ \frac{v}{1+u^2+v^2} \\ \frac{2(1-u^2-v^2)}{1+u^2+v^2} \end{bmatrix},$$

respectivement les paramétrisations d'un cylindre circulaire et d'un ellipsoïde. Les quatre composantes de la paramétrisation de leur médiatrice algébrique sont données par :

$$\mathbf{B}_i(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{-2u(4(s_i(1+u^2+v^2))^2 - 4 + 3s_i(u^2 - 1 + v^2))}{(1+u^2+v^2)(s_i u^2 - 2us_i^2 + 2u + s_i v^2 - s_i)} \\ \frac{v((s_i(16u^2 - 6u + 16v^2 + 16))^2 - 1 + 15u_i(u^2 - 1 + v^2))}{(1+u^2+v^2)(s_i u^2 - 2us_i^2 + 2u + s_i v^2 - s_i)} \\ \frac{((u_i(u^2 - 1 + v^2))^2 - 1)(2u^2 + 3u + 2 + 2v^2)}{(1+u^2+v^2)(s_i u^2 - 2us_i^2 + 2u + s_i v^2 - s_i)} \end{bmatrix},$$

$i = 1, 2, 3, 4$

où

$$s_1 = \frac{a_1 + b_1 \sigma + r_1}{16c}, s_2 = -\frac{a_2 + b_2 \sigma + r_1}{16c}, s_3 = \frac{a_3 + b_3 \sigma + r_2}{16c}, s_4 = -\frac{a_4 + b_4 \sigma + r_2}{16c},$$

$$r_1 = \sqrt{\alpha_1 + \beta_1 \sigma}, r_2 = \sqrt{\alpha_2 + \beta_2 \sigma}, \sigma = \sqrt{u^4 + 14u^2 + 2u^2 v^2 + 62v^2 + 1 + v^4},$$

et  $a_i, b_i, c, \alpha_i, \beta_i \in f(u, v, \sigma)$ , ont des très longues expressions. La figure 3.11 montre le graphique correspondant à la médiatrice géométrique.

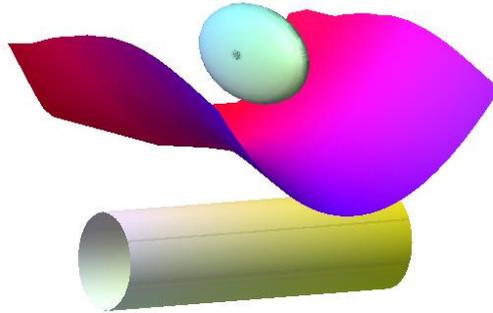


FIGURE 3.11 – La médiatrice géométrique (bleue-violet) d'un cylindre circulaire (jaune-claire) et d'un ellipsoïde (vert-claire).

### 3.5 La paramétrisation de la médiatrice de deux quadriques développables

Cette section est consacrée au calcul d'une paramétrisation de la médiatrice algébrique de deux surfaces développables particulières qui sont le cylindre et le cône. Rappelons que les paramétrisations de surfaces cylindrique et conique sont respectivement de la forme :

$$\mathbf{C}(s, t) = \begin{bmatrix} f_1(s) + k_1 t \\ f_2(s) + k_2 t \\ f_3(s) + k_3 t \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{C}'(s, t) = \begin{bmatrix} t f_1(s) \\ t f_2(s) \\ t f_3(s) \end{bmatrix},$$

où  $f_i$  et  $k_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , sont respectivement des fonctions rationnelles et sont des constantes réelles.

En appliquant l'algorithme 4 à un couple de paramétrisations  $\mathbf{S}_1(s, t)$  et  $\mathbf{S}_2(u, v)$  qui peut respectivement correspondre à :

- deux cylindres,
- un cylindre et un cône, ou
- deux cônes,

nous obtenons respectivement

$$G(u, v, s, t) = G_0(u, v, s, t) = 0,$$

$$G(u, v, s, t) = v G_0(u, v, s, t) = 0,$$

ou

$$G(u, v, s, t) = t v G_0(u, v, s, t) = 0,$$

où  $G_0(u, v, s, t) = 0$  est linéaire en des paramètres  $t$  et  $v$  et les solutions  $v = 0$  ou  $t = 0$  ne génère aucun point de la médiatrice. Après avoir exprimé  $t = t(u, v, s)$  (par exemple) à partir de

$$G_0(u, v, s, t) = 0$$

et substitué dans

$$F(u, v, s, t) = 0,$$

nous avons le théorème suivant.

**Théorème 3.4.** Soient  $\sigma_1(s, t) = \|\partial_s \mathbf{S}_1 \times \partial_t \mathbf{S}_1\|$  et  $\sigma_2(u, v) = \|\partial_u \mathbf{S}_2 \times \partial_v \mathbf{S}_2\|$ .

1. L'équation résultante  $F_0(u, v, s) = F(u, v, s, t(u, v, s)) = 0$  est quadratique en  $v$ , ainsi donc, nous obtenons deux composantes  $\mathbf{B}_1$  et  $\mathbf{B}_2$  pour la paramétrisation de la médiatrice algébrique, qui pourraient contenir des racines carrées des expressions positives (provenant de  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ ).
2. Si  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont rationnelles alors la paramétrisation de la médiatrice algébrique est rationnelle. Si de plus

$$\sigma_1 \in \mathbb{Q}[\delta_1](s, t) \text{ et } \sigma_2 \in \mathbb{Q}[\delta_2](u, v), \text{ pour certains } \delta_1, \delta_2 \notin \mathbb{Q},$$

alors

$$\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2 \in \mathbb{Q}[\delta_1 \cdot \delta_2](s, u).$$

*Démonstration.* Exprimons  $t$  (ou  $v$ ) à partir de  $G_0(u, v, s, t) = 0$ . Soit  $t = t(u, v, s)$  (ou respectivement  $v(u, s, t)$ ) et substituons la dans  $F(u, v, s, t) = 0$ . Nous avons :

$$F_0(u, v, s) = F(u, v, s, t(u, v, s)) = \omega_0 v^2 + \omega_1 v + \omega_2 = 0,$$

où  $\omega_0, \omega_1$  et  $\omega_2$  sont des fonctions rationnelles dépendant de  $\partial f_i, f_i, k_i, i = 1, 2, 3$ . En calculant le discriminant de  $F_0(u, v, s) = 0$  en fonction de  $v$ , nous avons :

$$\Delta = \omega_1^2 - 4\omega_0\omega_2 = 4\sigma_1^2\sigma_2^2\tilde{G}^2, \text{ et } \sqrt{\Delta} = 2\sigma_1\sigma_2\tilde{G}$$

où  $\tilde{G}$  est une fonction rationnelle, de très longue expression dépendant de  $\partial f_i, f_i$ , et  $k_i$ . Nous obtenons ainsi les solutions suivantes

$$v_1(u, s) = \frac{-\omega_1 - 2\sigma_1\sigma_2\tilde{G}}{2\omega_0}, \quad v_2(u, s) = \frac{-\omega_1 + 2\sigma_1\sigma_2\tilde{G}}{2\omega_0}.$$

En substituant  $t$  par  $t(u, v, s)$ , et puis  $v$  par  $v_1(u, s)$  et  $v_2(u, s)$  dans  $\mathbf{B}(u, v, s, t)$  nous obtenons deux composantes pour la paramétrisation de la médiatrice de la médiatrice algébrique :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1(s, u) &= \mathbf{B}(u, v_1(u, s), s, t(u, v_1(u, s))) \\ \mathbf{B}_2(s, u) &= \mathbf{B}(u, v_2(u, s), s, t(u, v_2(u, s))). \end{aligned}$$

Si  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont rationnelles, alors les expressions  $v_1(u, s)$  et  $v_2(u, s)$  sont rationnelles, et par conséquent les deux composantes de la paramétrisation de la médiatrice algébrique sont rationnelles. De plus, si  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont rationnelles et à coefficients respectivement dans des corps  $\mathbb{Q}[\delta_1]$  et  $\mathbb{Q}[\delta_2]$ ,  $\delta_1 \neq \delta_2$  et  $\delta_1 \delta_2 \notin \mathbb{Q}$ , alors la paramétrisation de la médiatrice algébrique sont rationnelles et à coefficients dans  $\mathbb{Q}[\delta_1 \delta_2]$ .  $\square$

**Exemple 35.**

1. Soient

$$\mathbf{C}_1(s, t) = \left[ s^2 + 2, t, s \right]^T \quad \text{et} \quad \mathbf{C}_2(u, v) = \left[ \frac{u}{u^2+1}, \frac{1-u^2}{u^2+1}, v \right]^T,$$

respectivement les paramétrisations d'un cylindre parabolique et d'un cylindre elliptique. Les normes de deux vecteurs normaux correspondant sont données par

$$\begin{aligned} \sigma_1(s, t) &= \sqrt{1 + 4s^2} \\ \sigma_2(u, v) &= \frac{\sqrt{14u^2 + 1 + u^4}}{(u^2 + 1)^2}. \end{aligned}$$

Les deux composantes de la paramétrisation de la médiatrice algébrique (voir le graphique correspondant à la figure 3.12) sont données par

$$\mathbf{B}_1(u, s) = \begin{bmatrix} \frac{u(-16u(u^2+1)(1+4s^2)(s^2+2)+14u^2+1+u^4+4R)}{(u^2+8su-1)(-u^2+8su+1)(u^2+1)} \\ \frac{-(u^2-1)(-4u(u^2+1)(1+4s^2)(s^2+2)-2u^2(-1+24s^2)+u^4+1+R)}{(u^2+8su-1)(-u^2+8su+1)(u^2+1)} \\ \frac{-s(-(u^2+1)((u^4+1)(5+2s^2)+9u^2(6-4s^2))+2u(14u^2+1+u^4)+8uR)}{(u^2+8su-1)(-u^2+8su+1)(u^2+1)} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_2(u, s) = \begin{bmatrix} -\frac{u(16u(u^2+1)(1+4s^2)(s^2+2)+u^4-14u^2-1+4R)}{(u^2+8su-1)(-u^2+8su+1)(u^2+1)} \\ \frac{(u^2-1)(4u(u^2+1)(1+4s^2)(s^2+2)-2u^2+48s^2u^2-u^4-1+R)}{(u^2+8su-1)(-u^2+8su+1)(u^2+1)} \\ \frac{s(u^2+1)(2u^4s^2+5u^4+32s^2u^2+54u^2-32s^2+5)+8uR}{(u^2+8su-1)(-u^2+8su+1)(u^2+1)} \end{bmatrix},$$

avec

$$R = (s^2u^2 + s^2 + 2u^2 + 2 - u) \sqrt{(14u^2 + 1 + u^4)(1 + 4s^2)}.$$

2. Soient

$$\mathbf{C}_1(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{1}{64} \frac{u^2-64a^2}{a^2u} \\ \frac{1}{2048} \frac{(u^2-64a^2)^2}{a^3u^2} \\ v \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{C}_2(s, t) = \begin{bmatrix} s \\ \frac{1}{2048} \frac{(t^2-64b^2)^2}{b^3t^2} + c \\ \frac{1}{64} \frac{t^2-64b^2}{b^2t} \end{bmatrix},$$

les paramétrisations respectives de deux cylindres paraboliques (avec leur PN-paramétrisation) Les deux composantes pour leur médiatrice algébrique sont donnée par

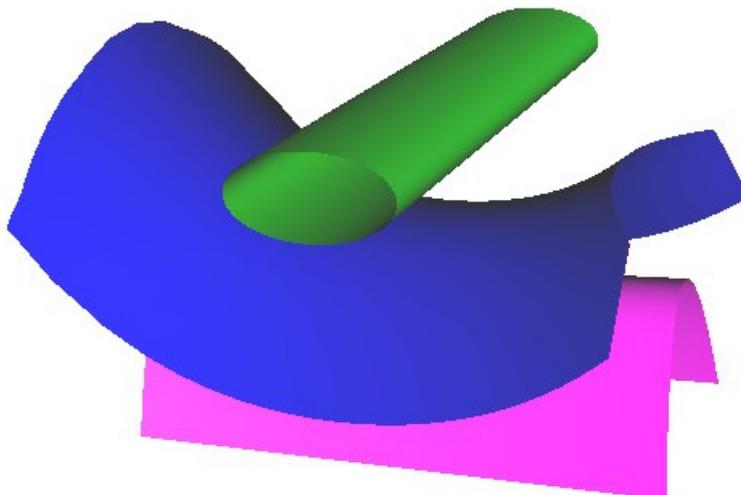


FIGURE 3.12 – La médiatrice géométrique (bleue) du cylindre elliptique (vert) et du cylindre parabolique (rose)

$$\mathbf{B}_1(u, t) = \begin{bmatrix} \frac{16777216 a^6 t^2 b^5 + \dots - 320 a^2 b^3 t^4 u^4 + 512 t^3 u^5 b^4 a - 64 b^5 t^2 u^6 - b^3 t^4 u^6}{32768 a^3 b^3 t^2 u^2 (-u t^2 a - 64 u b^2 a + 64 t b a^2 + u^2 t b)} \\ \frac{262144 a^6 b^4 t^3 - 262144 a^4 b^6 u^3 + \dots - a^4 t^6 u^3 - 64 b^4 t^3 u^4 a^2 + t^3 u^6 b^4}{2048 a^3 b^3 t^2 u^2 (-u t^2 a - 64 u b^2 a + 64 t b a^2 + u^2 t b)} \\ \frac{-8388608 a^5 c b^5 t^2 u^2 + \dots + 64 a^2 b^3 t^4 u^4 + 2097152 a^4 b^5 t u^3 - 512 a^4 b t^5 u^3}{32768 a^3 b^3 t^2 u^2 (-u t^2 a - 64 u b^2 a + 64 t b a^2 + u^2 t b)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_2(u, t) = \begin{bmatrix} -\frac{16777216 a^6 t^2 b^5 + \dots - 320 a^2 b^3 t^4 u^4 - 512 t^3 u^5 b^4 a - 64 b^5 t^2 u^6 - b^3 t^4 u^6}{32768 a^3 b^3 t^2 u^2 (u t^2 a + 64 u b^2 a + 64 t b a^2 + u^2 t b)} \\ \frac{262144 a^6 b^4 t^3 + 262144 a^4 b^6 u^3 + \dots + a^4 t^6 u^3 - 64 b^4 t^3 u^4 a^2 + t^3 u^6 b^4}{2048 a^3 b^3 t^2 u^2 (u t^2 a + 64 u b^2 a + 64 t b a^2 + u^2 t b)} \\ \frac{-8388608 a^5 c b^5 t^2 u^2 + \dots + 64 a^2 b^3 t^4 u^4 - 2097152 a^4 b^5 t u^3 + 512 a^4 b t^5 u^3}{32768 a^3 b^3 t^2 u^2 (u t^2 a + 64 u b^2 a + 64 t b a^2 + u^2 t b)} \end{bmatrix}$$

Pour  $a = -1$ ,  $b = 2$ ,  $c = 3$  nous avons le graphique correspondant à la figure 3.13.

3. Soient

$$\mathbf{C}_1(u, v) = \begin{bmatrix} 2 \frac{au}{1+u^2} \\ \frac{a(1-u^2)}{1+u^2} \\ v \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_2(s, t) = \begin{bmatrix} s \\ \frac{b(1-t^2)}{1+t^2} + d \\ 2 \frac{bt}{1+t^2} \end{bmatrix},$$

les paramétrisations respectives de deux cylindres circulaires. Les deux composantes pour la paramétrisation de leur médiatrice algébrique sont données

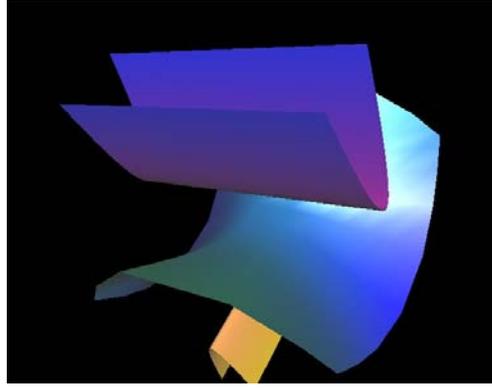


FIGURE 3.13 – La médiatrice géométrique de deux cylindres paraboliques

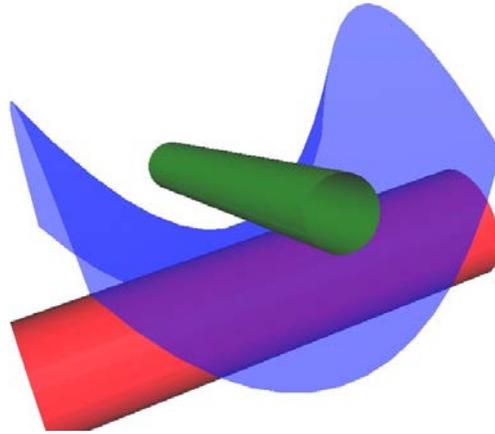


FIGURE 3.14 – La médiatrice géométrique de deux cylindres circulaires

par

$$\mathbf{B}_1(u, t) = \begin{bmatrix} \frac{u(-a+t^2a-b+bt^2-d-dt^2)}{-1+t^2u^2} \\ -\frac{-t^2a+t^2au^2-bt^2+dt^2+bu^2t^2-t^2du^2+d+a-au^2+b-u^2b-du^2}{2(-1+t^2u^2)} \\ \frac{t(-a+au^2-b+d+u^2b+du^2)}{-1+t^2u^2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_2(u, t) = \begin{bmatrix} \frac{u(-a+t^2a+b-bt^2+d+dt^2)}{t^2-u^2} \\ -\frac{-t^2a+t^2au^2+bt^2-dt^2-bu^2t^2+t^2du^2+du^2+a-au^2-b-d+u^2b}{2(t^2-u^2)} \\ \frac{t(-a+au^2+b+d-u^2b+du^2)}{t^2-u^2} \end{bmatrix}$$

Pour  $a = 1$ ,  $b = 2$ ,  $d = 4$ , nous avons le graphique correspondant à la figure 3.14.

**Remarque 17.** Avec cette approche on peut facilement traiter le cas général de deux surfaces développables quelconques

**Observation sur l'efficacité de l'algorithme 4** Il faut noter que la l'efficacité de l'algorithme 4 dépend de la paramétrisation des surfaces d'entrée. Ainsi le table (3.2) suivant montre qu'avec une implémentation en Maple (version 17, sur le système mac osx 10.7.5, Processeur 2.4GHz Intel Core 2 Duo), l'algorithme prend beaucoup plus de temps pour calculer la paramétrisation de la médiatrice de deux surfaces données avec les PN-paramétrisations qu'avec les paramétrisations classiques. En effet, le degré de la PN-paramétrisation est relativement plus grand que celui d'une paramétrisation classique (qui très souvent, conduit à une paramétrisation non rationnelle à l'aide par notre algorithme) et le calcul devient plus compliqué, notamment dans le calcul de l'inverse généralisée de Moore-Penrose et dans les substitutions des expressions paramétriques dans la solution (3.6).

Surfaces d'entree	Param. classc.	PN-Param.
Plan et Ellipsoïde ( voir 6)	0.043	10.786
Plan et Paraboloid elliptique (voir 7)	0.340	348.905
Plan et Hyperboloid 1-nappe (voir 11)	1187.730	6272.393
Cylindre et Paraboloid elliptique (voir 33)	0.051	1.133
Deux Cylindres paraboliques (voir 2)	0.300	0.407

TABLE 3.2 – La comparaison sur le temps de calcul de la paramétrisation de la médiatrice de deux surfaces données par leur paramétrisation classique et par leur PN-paramétrisation.

## Conclusion

Au terme de ce chapitre, dont le résultat à conduit au papier [6] qui est accepté pour publication, nous avons présenté une nouvelle approche algorithmique, qui permet de caractériser la représentation algébrique exacte de la surface médiatrice algébrique d'un couple de surfaces rationnelles de petit degré, qui interviennent dans plusieurs domaines d'applications tels que CAO/CGAO.

Il a été essentiellement question des cas de couples suivants :

- plan et quadrique,
- plan et tore,
- cylindre circulaire et quadrique non développable,
- deux cylindres,
- deux cônes, et
- cylindre et cône.

Dans la plus part de cas de couples de surfaces, nous avons obtenu une paramétrisation rationnelle pour leur médiatrice algébrique, tandis que dans d'autre cas, la paramétrisation contient de racines carrées, qui pourrait être utilisée pour calculer une paramétrisation rationnelle approximative de la surface médiatrice.

Tout comme pour le cas de offsets, la PN-paramétrisation pour les surfaces d'entrée est nécessaire dans la caractérisation d'une paramétrisation rationnelle de la médiatrice. Cependant, compte tenu de la grandeur du degré de la PN-paramétrisation, le calcul de la paramétrisation de la médiatrice algébrique prend beaucoup de temps. Pour le cas de plan et quadrique ou plan et tore, une équation implicite de la surface médiatrice peut être facilement calculée et nous avons présenté son degré maximal dans chaque cas.

Il est à noter que cette nouvelle approche nous a permis de montrer que dans le cas rationnel, les coefficients de la paramétrisation de la médiatrice ne sont pas toujours contenus dans le corps de coefficients de représentations de deux surfaces d'entrée, le même constat est aussi valable pour la paramétrisation d'offset.

# Chapitre 4

## Le diagramme de Voronoï d'un ensemble de demi-droites parallèles restreint à un domaine compact $\mathcal{D}_0 \subset \mathbb{R}^3$

Dans ce chapitre nous présentons le calcul du Diagramme de Voronoï d'un ensemble de demi-droites parallèles de même orientation restreint à un domaine compact de  $\mathbb{R}^3$  pour la distance euclidienne.

### Introduction

Le diagramme de Voronoï (VD, pour Voronoi Diagram, en anglais) est une structure de données fondamentale en géométrie algorithmique avec de nombreuses et diverses applications dans des domaines théoriques et pratiques, tels que la recherche du plus proche, la planification de mouvement, les problèmes de classification, etc (voir [17, 61, 80, 99]).

Étant donné un ensemble discret d'objets géométriques dans un espace métrique  $\mathcal{E}$ , le VD donne une partition de  $\mathcal{E}$  en des régions, dont chaque région par objet, est constituée de tous les points qui sont plus proche de cet objet que de tout autre. Le VD peut être aussi défini, de façon général, comme le diagramme de minimisation (MD, pour Minimization Diagram, en anglais) d'un ensemble fini de fonctions continues. Chacune de ces fonctions est définie comme la fonction de distance à un objet. Le VD associé donne la partition de l'espace  $\mathcal{E}$  en des régions, chacune constitué des points qui sont plus proches de l'objet que d'autres (voir [22]).

Différents types d'objets dans plusieurs espaces métriques, ont été proposés avec différents types d'applications selon le contexte.

Dans l'espace  $\mathbb{R}^2$ , le VD a été largement étudié, débouchant sur une meilleure compréhension de sa structure, ainsi plusieurs algorithmes robustes et efficaces ont été proposés (voir [47, 48, 50, 76, 114]). Cependant, dans les espaces tri-dimensionnels et de dimension supérieure, le VD a été peu étudié, et de nombreux problèmes restent toujours ouverts. Toutefois des travaux récents pour des objets linéaires, quadriques, et semi-algébriques ont été proposés (voir [13, 17, 21, 41, 73, 78, 80, 85, 99]).

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à la détermination du VD, par le MD, d'un ensemble de demi-droites parallèles de même orientation restreint à un domaine compact

$$\mathcal{D}_0 = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \subset \mathbb{R}^3,$$

pour la distance euclidienne. Ce type de VD est, particulièrement, un tout nouveau problème difficile dans cette littérature, car la région associée à chaque objet résulte d'un arrangement de demi-plans et de morceaux de demi-cylindres paraboliques.

L'étude de ce type de VD peut aider à résoudre certains problèmes dans l'industrie du forage (exploitation minière, forage en mer, hydraulique, etc), notamment lors de l'exploration des nappes la plus proche, pour éviter de collision entre des puits, l'identification des nappes non-désirées (voir [18, 63, 74, 83, 120, 121, 125, 127]).

Deux classes générales d'algorithmes sont disponibles pour calculer le VD : exacts et approximatifs. Certains algorithmes exacts nécessitent la manipulation de représentations exactes des composantes de la frontière de régions du VD, qui sont des courbes et des surfaces, souvent de haut degré, et de leur intersection menant ainsi à des algorithmes complexes et très difficiles à implémenter ([75, 115]). Pour surmonter de telles difficultés, des algorithmes approximatifs sont utilisés sans qu'il soit toujours possible d'exhiber une topologie exacte dans certains cas (voir [21, 76]). Le nouvel algorithme que nous présentons dans ce chapitre, inspiré du cadre algébrique pour le VD généralisé dans le plan introduit par Emirîs et al. (voir [47]), fournit un résultat topologiquement correct pour l'approximation du VD d'un ensemble de  $n$  demi-droites parallèles  $\{d_i, i = 1, \dots, n\}$  définies par (4.2) par le MD, restreint à un domaine compact  $\mathcal{D}_0$ , pour les distances euclidiennes associées  $g_i, i = 1 \dots, n$  définies par (4.3).

Comme le VD peut être construit par la projection de l'enveloppe inférieure de fonctions distances (voir [41]), notre méthode utilise cette dernière pour identifier un petit nombre de objets (fonctions distances) qui contribuent, localement, au VD. La méthode consiste, grâce à un test de régularité sur la topologie de courbes et de surfaces algébriques dans un domaine compact, basé les résultats introduits dans [9, 88], à subdiviser le domaine initial  $\mathcal{D}_0$  suivant une structure arborescente *kd-tree*, qui est une partition binaire récursive de l'espace par des hyperplans orthogonaux aux axes du système de coordonnées (voir [19]). Ensuite, en utilisant l'arithmétique des intervalles (voir [28, 97]), les fonctions distances  $g_i$  associées sont bornées sur chaque sous-domaine tout en éliminant par filtrage celles qui, localement, ne contribuent pas à l'enveloppe inférieure. Les sous-domaines contenant les faces, les arêtes et les sommets de régions du VD seront identifiées et rangés dans un graphe d'adjacence. Il existe un seuil (une constante)  $\varepsilon$  fixé, initialement choisi, tel que le processus de la subdivision s'arrête lorsque la topologie de régions dans un domaine est suffisamment bien définie, ou lorsque la taille du domaine correspondant est inférieure à  $\varepsilon$ . Les domaines de taille inférieure à  $\varepsilon$ , peuvent contenir des arêtes ou sommets dégénérés et la topologie correspondante sera analysée séparément. Au moyen de l'algorithme de parcours en profondeur de graphe **DFS** (voir [62, 77]) expliqué aux chapitre 1, le graphe d'adjacence (dont les nœuds sont des  $d$ -listes, associées à des domaines qui intersectent les faces et les les arêtes de VD, calculées à l'issue de la phase de la subdivision) sera traversé tout en maillant localement les faces (surfaces *médiatrices*) et les arêtes (courbes *trisectrices*) du VD contenues dans chaque do-

maine traversé, et des approximations des régions de Voronoï seront reconstruites. Ainsi, nous obtenons un polyèdre par objet, qui est topologiquement équivalent à la région exacte associée à l'objet dans  $\mathcal{D}_0$ .

Le reste de ce chapitre est organisé comme suit : à la section 4.1, nous rappelons le langage de VD, ensuite nous donnons la définition du VD par le MD dans notre cas (de demi-droites parallèles) et les composantes de la frontière de ses régions, notamment la surface médiatrice, la courbe trisectrice et le point quadrisecteur. La topologie de la médiatrice et de la trisectrice permettant de définir les critères de régularité, conditions fondamentales dans la subdivision, fera l'objet de la section 4.2. La section 4.3 présente l'algorithme de la subdivision, les algorithmes de maillage et l'algorithme de la reconstitution de régions de Voronoï. Nous terminons le chapitre avec une conclusion et quelques perspectives.

## 4.1 Le diagramme de Voronoï d'un ensemble de demi-droites parallèles restreint à un domaine $\mathcal{D}_0 \subset \mathbb{R}^3$

Dans cette section, nous allons présenter la définition formelle du diagramme de Voronoï et la définition de ses différents composantes dans notre situation ainsi que de leur description algébrique.

### 4.1.1 Définitions

La théorie du diagramme de Voronoï dispose d'un langage propre.

**Définition 39.** Soit  $\mathcal{S} = \{s_1, \dots, s_n\}$  un ensemble d'objets d'un espace métrique  $\mathcal{E}$ .

1. Les éléments de l'ensemble  $\mathcal{S} = \{s_1, \dots, s_n\}$  pour lesquels on va calculer le diagramme de Voronoï sont appelés des **sites de Voronoï**.
2. La région constituée des tous les points les plus proche d'un site  $s_i$  est appelée la **cellule de Voronoï** associée au site  $s_i$ , et
3. L'ensemble de toutes les cellules de Voronoï constituent le **Diagramme de Voronoï** de l'ensemble  $\mathcal{S}$ .

Nous nous sommes intéressés aux cas où :

- l'espace est donné par un domaine compact  $\mathcal{D}_0 \subset \mathbb{R}^3$  de la forme

$$\mathcal{D}_0 = [a_{10}, b_{10}] \times [a_{20}, b_{20}] \times [a_{30}, b_{30}], \quad (4.1)$$

- les sites sont des demi-droites parallèles (supposées, ici, parallèles à l'axe  $(Ox)$ ) et dirigées dans le sens de valeurs croissantes de  $x$ , c-à-d définies par

$$d_i = (x_i + t, y_i, z_i), t \geq 0, i = 1 \dots n \quad (4.2)$$

avec  $x_l \neq x_k$ , et  $(y_l, z_l) \neq (y_k, z_k), \forall l \neq k$ .

La distance euclidienne d'un point  $Q = (x, y, z)$  de  $\mathbb{R}^3$  à une demi-droite  $d_i$  est définie par :

$$g_i(x, y, z) = \begin{cases} d((x, y, z), (x_i, y_i, z_i)) & \text{si } x < x_i, \\ d((y, z), (y_i, z_i)) & \text{si } x \geq x_i, \end{cases} \quad (4.3)$$

où  $d(\cdot, \cdot)$  est la distance euclidienne.

En associant à chaque site  $d_i$ , défini par (4.2), la fonction distance  $g_i$ , définie par (4.3), nous avons :

**Définition 40.** *Le diagramme de Voronoï (VD) de l'ensemble de  $n$  sites  $\{d_i, \dots, d_n\}$ , restreint au domaine  $\mathcal{D}_0$ , est une partition du domaine  $\mathcal{D}_0$  en  $n$  cellules où chaque cellule associée à un seul site  $d_i$  est constituée de points les plus proches de  $d_i$  comparativement à tout autre site  $d_j$ , pour la distance  $g_i$  associée. La cellule de Voronoï associée au site  $d_i$  est définie et notée par :*

$$Vor(d_i) = \{Q \in \mathcal{D}_0 : g_i(Q) \leq g_j(Q), j = 1 \dots n\}. \quad (4.4)$$

Ce VD est aussi connu sous le nom de VD par le diagramme de minimisation (MD) de fonctions distances associées aux sites.

**Remarque 18.** Bien que l'élevation au carré de la fonction change leur l'enveloppe inférieure, nous avons vu à la remarque 5 que le VD pour la distance euclidienne reste inchangé. Ainsi, dans toute la suite, nous considérons le carré de la distance

$$g_i(x, y, z) = \begin{cases} d^2((x, y, z), (x_i, y_i, z_i)) & \text{si } x < x_i, \\ d^2((y, z), (y_i, z_i)) & \text{si } x \geq x_i \end{cases}, \quad (4.5)$$

à la place de la distance elle même, d'autant que notre approche considère des fonctions distances polynomiales (par morceaux).

Pour étudier le VD, il est nécessaire de procéder à une étude approfondie et détaillée des composantes de frontières de ses cellules, qui sont les surfaces médiatrices, les courbes trisectrices et les points quadrisecteurs.

### 4.1.2 Médiatrice, trisectrice et quadrisecteur de sites

Dans cette sous-section, nous allons donner la définition et la description algébrique de la surface médiatrice, la courbe trisectrice et le point quadrisecteur, qui déterminent, localement, les faces, les arêtes et les sommets des cellules de Voronoï. Commençons par la médiatrice.

**Définition 41.** *Soient  $d_i$  et  $d_j$ ,  $x_i < x_j$ , deux sites d'extrémités respectives  $A_i = (x_i, y_i, z_i)$  et  $A_j = (x_j, y_j, z_j)$ , de droites de support respectifs  $\ell_i$  et  $\ell_j$ , et des fonctions distances associées respectives  $g_i$  et  $g_j$  au sens de la définition (4.5). La surface **médiatrice** de deux sites  $d_i$  et  $d_j$  détermine, localement, une face du VD est définie comme l'ensemble de points équidistants de deux sites :*

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : b_{i,j}(x, y, z) = 0, \}$$

où

$$b_{i,j}(x, y, z) = g_i(x, y, z) - g_j(x, y, z). \quad (4.6)$$

En développant l'équation (4.6), nous obtenons :

$$b_{i,j}(x, y, z) = \begin{cases} p_{i,j}(x) + \ell_{i,j}(y, z) & \text{si } x < x_i, \\ q_{i,j}(x) + \ell_{i,j}(y, z) & \text{si } x_i \leq x < x_j, \\ \ell_{i,j}(y, z) & \text{si } x \geq x_j. \end{cases} \quad (4.7)$$

avec

$$\begin{aligned} p_{i,j}(x) &= 2x(x_j - x_i) + x_i^2 - x_j^2, \\ q_{i,j}(x) &= (x - x_j)^2, \\ \ell_{i,j}(y, z) &= 2y(y_j - y_i) + y_i^2 - y_j^2 + 2z(z_j - z_i) + z_i^2 - z_j^2. \end{aligned}$$

Comme le montre la représentation (4.7), la surface médiatrice de deux sites est une  $C^1$  surface, convexe et monotone, car elle est constituée d'un raccordement de trois morceaux de surfaces (algébriques) connexes, dont un morceau convexe (voir la figure 4.1) suivants :

- Un demi-plan de représentation algébrique :

$$\begin{cases} b_{i,j}^1(x, y, z) = 0 \\ x < x_i \end{cases} \quad (4.8)$$

avec

$$\begin{aligned} b_{i,j}^1(x, y, z) &= 2x(x_j - x_i) + x_i^2 - x_j^2 + 2y(y_j - y_i) + y_i^2 - y_j^2 \\ &\quad + 2z(z_j - z_i) + z_i^2 - z_j^2. \end{aligned}$$

Ce demi-plan est supporté par le plan médiateur de points  $A_i = (x_i, y_i, z_i)$  et  $A_j = (x_j, y_j, z_j)$ .

Avec les conditions :

$$x_i \neq x_j, \text{ et } (y_i, z_i) \neq (y_j, z_j), \forall i \neq j,$$

le demi-plan ne peut être parallèle à l'axe ( $Ox$ ) et pour tout  $x < x_i$ , le polynôme  $b_{i,j}^1$  est strictement monotone en  $x$ .

- Un morceau de demi-cylindre parabolique de représentation algébrique :

$$\begin{cases} b_{i,j}^2(x, y, z) = 0 \\ x_i \leq x < x_j \end{cases} \quad (4.9)$$

avec

$$\begin{aligned} b_{i,j}^2(x, y, z) &= (x - x_j)^2 + 2y(y_j - y_i) + y_i^2 - y_j^2 + 2z(z_j - z_i) \\ &\quad + z_i^2 - z_j^2. \end{aligned}$$

Avec les conditions :

$$x_i \neq x_j, \text{ et } (y_i, z_i) \neq (y_j, z_j), \forall i \neq j,$$

pour tout  $x_i \leq x < x_j$ ,  $b_{i,j}^2$  est monotone en  $x$  et le morceau de surface correspondant est supporté par la partie convexe du cylindre parabolique qui est la médiatrice du point  $A_j$  et de la droite  $\ell_i$ .

– Un demi-plan de représentation algébrique :

$$\begin{cases} b_{i,j}^3(x, y, z) = 0 \\ x \geq x_j \end{cases} \quad (4.10)$$

avec

$$b_{i,j}^3(x, y, z) = 2y(y_j - y_i) + y_i^2 - y_j^2 + 2z(z_j - z_i) + z_i^2 - z_j^2.$$

Ce demi-plan est supporté par le plan médiateur de deux droites  $\ell_i$  et  $\ell_j$ , donc parallèle à l'axe  $(Ox)$ . Pour tout  $x \geq x_j$ , le polynôme  $b_{i,j}^3$  est constant et donc monotone en  $x$ .

**Exemple 36.** Soient

$$d_1 = \{(2 + t, 2, 2), t \geq 0\} \text{ et } d_2 = \{(4 + t, 4, -4), t \geq 0\}$$

deux demi-droite parallèles. Les fonctions distances associée aux sites  $d_1$  et  $d_2$  sont respectivement données par :

$$g_1(x, y, z) = \begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2, & \text{si } x < 2 \\ (y - 2)^2 + (z - 2)^2, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$g_2(x, y, z) = \begin{cases} (x - 4)^2 + (y - 4)^2 + (z + 4)^2, & \text{si } x < 4 \\ (y - 4)^2 + (z + 4)^2, & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

et la surface médiatrice est donnée par  $b_{1,2}(x, y, z) = 0$ , avec

$$\begin{aligned} b_{1,2}(x, y, z) &= g_1(x, y, z) - g_2(x, y, z) \\ &= \begin{cases} 4x - 36 + 4y - 12z, & \text{si } x < 2 \\ -40 + 4y - 12z - x^2 + 8x, & \text{si } 2 \leq x < 4 \\ -24 + 4y - 12z & \text{si } x \geq 4. \end{cases} \end{aligned}$$

Donnons la définition et la descriptionn algébrique de la courbe trisectrice.

**Définition 42.** Soient  $d_i, d_j$  et  $d_k$ ,  $x_i < x_j < x_k$  trois sites de fonctions distances associées respective  $g_i, g_j$  et  $g_k$ . Soient  $A_i = (x_i, y_i, z_i)$ ,  $A_j = (x_j, y_j, z_j)$ ,  $A_k = (x_k, y_k, z_k)$  et  $\ell_i, \ell_j, \ell_k$  leurs extrémités et droites de support respectives.

La courbe *trisectrice* de trois sites  $d_i, d_j$  et  $d_k$  détermine, localement, une arête du VD. Elle est définie comme l'ensemble des points équidistants de trois sites. Elle

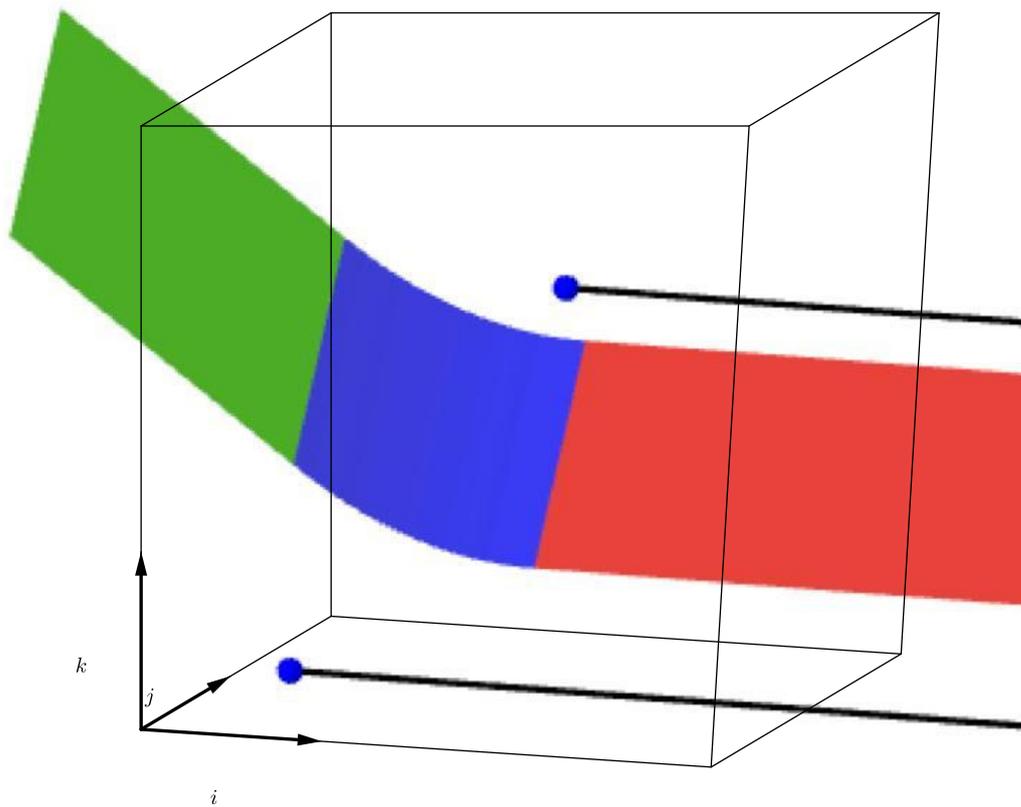


FIGURE 4.1 – Les trois composante de la surface médiatrice de l'exemple 36 : du gauche vers la droite : le demi-plan(vert), la portion du demi-cylindre parabolique(bleu) et le demi-plan parallèle à l'axe ( $Ox$ ).

correspond à l'intersection commune de trois surfaces médiatrices générées par les 3 sites :

$$\mathcal{T}_{i,j,k} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, b_{i,j}(x, y, z) = b_{i,k}(x, y, z) = b_{j,k}(x, y, z) = 0\}.$$

Toute portion de courbe équidistante de plus de trois sites est dite une arête dégénérée.

La courbe trisectrice est une courbe gauche constituée par un raccordement de quatre portions de courbes, chacune d'elle est plane et rationnelle. En éliminant les variables  $y$  et  $z$  du système

$$b_{i,j}(x, y, z) = b_{i,k}(x, y, z) = b_{j,k}(x, y, z) = 0, \quad (4.11)$$

nous obtenons la paramétrisation de chacune des ces quatre portions (en fonction de  $x$ ) comme suit :

$$\mathcal{T}_{i,j,k}(x) = \begin{cases} \left[ x, -\frac{a_{0,1}+a_{1,1}x}{c_0}, \frac{a_{2,1}+a_{3,1}x}{c_0} \right]^T & \text{si } x < x_i, \\ \left[ x, -\frac{a_{0,2}+a_{1,2}x+a_{2,2}x^2}{c_0}, \frac{a_{3,2}+a_{4,2}x+a_{5,2}x^2}{c_0} \right]^T & \text{si } x_i \leq x < x_j, \\ \left[ x, \frac{a_{0,3}+a_{1,3}x+a_{2,3}x^2}{c_0}, -\frac{a_{3,3}+a_{4,3}x+a_{5,3}x^2}{c_0} \right]^T & \text{si } x_j \leq x < x_k, \\ \left[ x, \frac{a_{0,4}}{c_0}, -\frac{a_{1,4}}{c_0} \right]^T & \text{si } x \geq x_k, \end{cases} \quad (4.12)$$

avec :

$$\begin{aligned} a_{0,1} &= (z_i - z_k)(x_j^2 + y_j^2 + z_j^2) + (z_j - z_i)(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2) \\ &\quad + (z_k - z_j)(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2), \\ a_{1,1} &= 2(x_i(z_j - z_k) + x_k(z_i - z_j) + x_j(z_k - z_i)), \\ a_{2,1} &= (z_j^2 - z_k^2)y_i + (z_k^2 - z_i^2)y_j + (z_i^2 - z_j^2)y_k \\ &\quad + (y_i - y_k)(x_j^2 + y_j^2) + (y_k - y_j)(x_i^2 + y_i^2) + (y_j - y_i)(x_k^2 + y_k^2), \\ a_{3,1} &= 2(x_i(y_j - y_k) + x_j(y_k - y_i) + x_k(y_i - y_j)), \\ a_{0,2} &= (z_i^2 + y_i^2)(z_k - z_j) + (x_k^2 + z_k^2 + y_k^2)(z_j - z_i) \\ &\quad + (y_i^2 + z_i^2)(z_k - z_j), \\ a_{1,2} &= 2(z_i(x_k - x_j) + x_j z_k - z_j x_k), \\ a_{2,2} &= (-z_k + z_j), \\ a_{3,2} &= (z_i^2 + y_i^2)(y_k - y_j) + (y_j^2 + x_j^2 + z_j^2)(y_i - y_k) \\ &\quad + (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2)(y_j - y_i), \\ a_{4,2} &= 2(y_i(x_k - x_j) + y_k x_j - y_j x_k), \\ a_{4,2} &= (y_j - y_k), \\ a_{0,3} &= -z_j z_k^2 + z_i x_k^2 - z_j y_k^2 + z_i^2 z_j + y_i^2 z_j - z_i z_j^2 + z_j^2 z_k - z_j x_k^2 \\ &\quad - y_i^2 z_k + y_j^2 z_k - z_i^2 z_k + z_i z_k^2 - z_i y_j^2 + z_i y_k^2, \\ a_{1,3} &= 2x_k(z_j - z_i), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{2,3} &= (z_i - z_j), \\
 a_{3,3} &= y_j z_i^2 + y_k y_j^2 + y_k z_j^2 - y_j y_k^2 - y_j x_k^2 - y_i y_j^2 - y_i z_j^2 - y_k y_i^2 \\
 &\quad y_j z_k^2 + y_i x_k^2 + y_i y_k^2 + y_i z_k^2 + y_j y_i^2 - y_k z_i^2, \\
 a_{4,3} &= 2x_k (y_j - y_i), \\
 a_{5,3} &= (y_i - y_j), \\
 a_{0,4} &= y_i y_k^2 - y_k z_i^2 + y_i z_k^2 + y_j y_i^2 + y_k z_j^2 + y_j z_i^2 - y_j y_k^2 - y_i z_j^2 \\
 &\quad - y_j z_k^2 - y_i y_j^2 + y_k y_j^2 - y_k y_i^2, \\
 a_{1,4} &= y_i y_k^2 - y_k z_i^2 + y_i z_k^2 + y_j y_i^2 + y_k z_j^2 + y_j z_i^2 - y_j y_k^2 - y_i z_j^2 \\
 &\quad - y_j z_k^2 - y_i y_j^2 + y_k y_j^2 - y_k y_i^2 \text{ et} \\
 c_0 &= 2(-y_i z_k - y_j z_i + y_j z_k + y_i z_j + y_k z_i - y_k z_j).
 \end{aligned}$$

Les quatre portions sont :

- Une demi-droite (pour  $x < x_i$ ) supportée par la droite trisectrice (l'intersection commune de trois plans médiateurs) des points correspondantes  $A_i, A_j$  et  $A_k$  ;
- Une portion de demi-parabole (pour  $x_i \leq x < x_j$ ) supportée par l'intersection commune du plan (médiateur de points  $A_j$  et  $A_k$ ), du cylindre parabolique (médiatrice du point  $A_j$  et de la droite  $\ell_i$ ) et du cylindre parabolique (médiatrice du point  $A_k$  et de la droite  $\ell_i$ ) ;
- Une portion de demi-parabole (pour  $x_j \leq x < x_k$ ) supportée par l'intersection commune du plan (médiateur de droites  $\ell_i$  et  $\ell_j$ ), du cylindre parabolique (médiatrice du point  $A_k$  et de la droite  $\ell_i$ ) et du cylindre parabolique (médiatrice du point  $A_k$  et de la  $\ell_i$ ) et
- une demi-droite (pour  $x \geq x_k$ ) parallèle à  $(Ox)$  supportée par la droite trisectrice (l'intersection commune de trois plans médiateurs des droites  $\ell_i, \ell_j$  et  $\ell_k$ ).

**Exemple 37.** Soient

$$d_1 = \{(-3 + t, -4, 4), t \geq 0\}, d_2 = \{(t, 0, 0), t \geq 0\} \text{ et } d_3 = \{(3 + t, 4, 3), t \geq 0\}$$

trois sites. Leur courbe trisectrice est représentée par la paramétrisation suivante et la figure 4.2 montre les quatre composantes de la trisectrice :

$$\mathcal{T}_{1,2,3}(x) = \begin{cases} [x, -\frac{3}{4}x + \frac{13}{56}, \frac{75}{14}]^T & \text{si } x < -3, \\ [x, \frac{3}{56}x^2 - \frac{3}{7}x + \frac{5}{7}, -\frac{1}{14}x^2 - \frac{3}{7}x + \frac{33}{7}]^T & \text{si } -3 \leq x < 0, \\ [x, \frac{1}{14}x^2 - \frac{3}{7}x + \frac{5}{7}, \frac{1}{14}x^2 - \frac{3}{7}x + \frac{33}{7}]^T & \text{si } 0 \leq x < 3, \\ [x, \frac{1}{14}, \frac{57}{14}]^T & \text{si } x \geq 3. \end{cases}$$

Ensuite, nous donnons la définition du quadrisecteur.

**Définition 43.** Soient  $d_i, d_j, d_k$  et  $d_l$ ,  $x_i < x_j < x_k < x_l$ , quatre sites de fonctions distances respectives associées  $g_i, g_j, g_k$  et  $g_l$ .

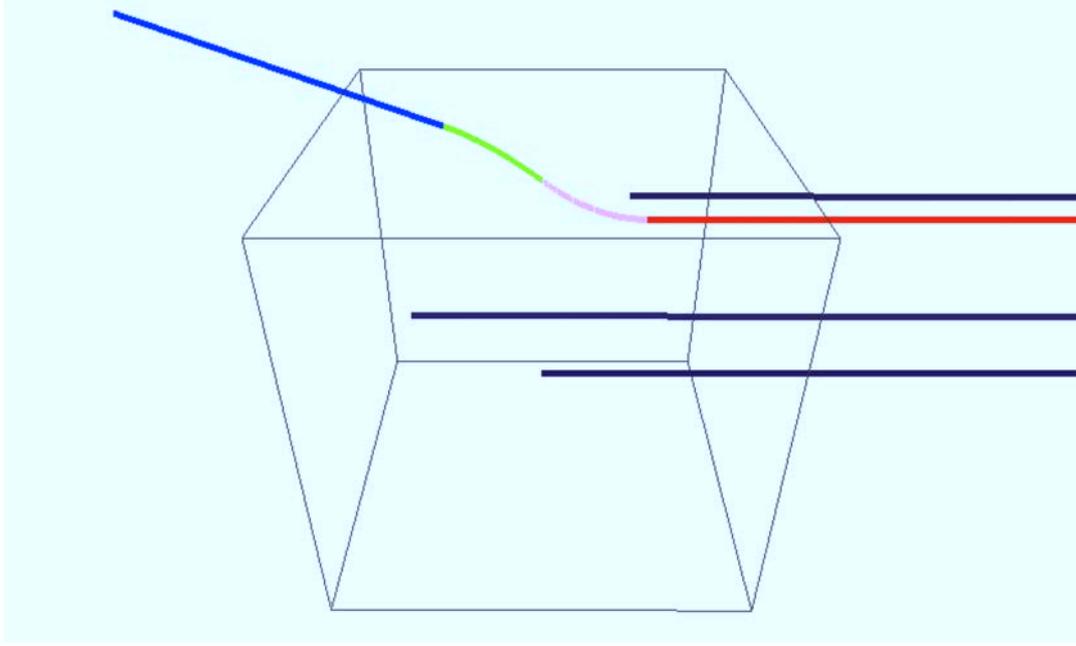


FIGURE 4.2 – Les quatre composantes de la trisectrice de l'exemple 37

On appelle *quadrisecteur* de ces quatre sites, le point équidistant des quatre sites. Il détermine un sommet du VD et il correspond à l'intersection commune de quatre courbes trisectrices engendrées 3 à 3 par les quatre sites :

$$Q_{i,j,k,l} = \mathcal{T}_{i,j,k} \cap \mathcal{T}_{i,j,l} \cap \mathcal{T}_{i,l,k} \cap \mathcal{T}_{j,l,k} \quad (4.13)$$

Tout point équidistant de plus de quatre sites est un sommet dégénéré.

**Exemple 38.** Soient

$$d_1 = \{(-5 + t, 3, -2), t \geq 0\}, d_2 = \{(-3 + t, -4, 4), t \geq 0\},$$

$$d_3 = \{(t, 0, 0), t \geq 0\} \text{ et } d_4 = \{(3 + t, 4, 3), t \geq 0\}$$

quatre demi-droites de fonctions distance respectives associées  $g_1, g_2, g_3$  et  $g_4$ .

Leur point quadrisecteur  $Q_{1,2,3,4}$  est donné par :

$$\begin{aligned} Q_{1,2,3,4} &= \mathcal{T}_{1,2,3} \cap \mathcal{T}_{1,2,4} \cap \mathcal{T}_{1,3,4} \cap \mathcal{T}_{2,3,4} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{9}{4} - \frac{\sqrt{29869}}{28} \\ \frac{1}{82} \left( \frac{9}{4} - \frac{\sqrt{29869}}{28} \right)^2 - \frac{325}{164} + \frac{33}{1148} \sqrt{29869} \\ \frac{47}{41} + \frac{9}{574} \sqrt{29869} + \frac{4}{41} \left( \frac{9}{4} - \frac{\sqrt{29869}}{28} \right)^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3.922375093 \\ 3.173924177 \\ 5.357142857 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La valeur numérique de la distance (au sens de (4.5)) commune à partir de quatre sites est donnée par :

$$g_1(Q_{1,2,3,4}) = g_2(Q_{1,2,3,4}) = g_3(Q_{1,2,3,4}) = g_4(Q_{1,2,3,4}) = \frac{598399 - 1497\sqrt{29869}}{6272}.$$

La figure 4.3 montre les quatre trisectrices concourantes au point quadrisecteur.

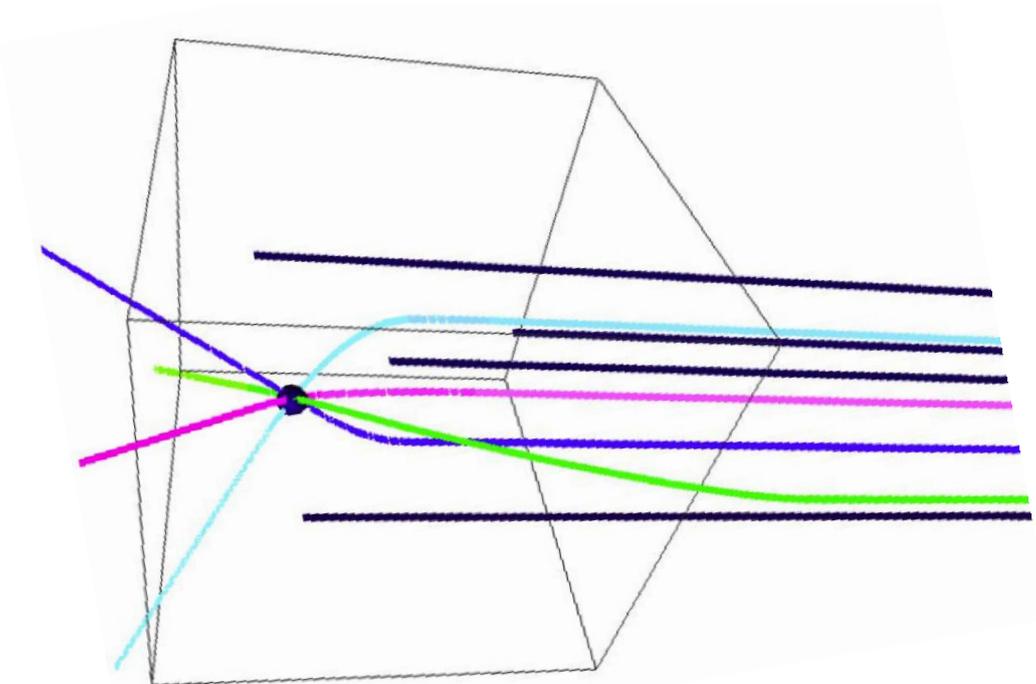


FIGURE 4.3 – Les quatre courbes trisectrices concourantes au point quadrisecteur dans l'exemple 38

Une fois que les représentations algébriques de la surface médiatrice, de la courbe trisectrice et du point quadrisecteur ont été bien définies, nous allons procéder à l'étude de leur comportement topologique dans un domaine compact.

## 4.2 La topologie de la surface médiatrice et de la courbe trisectrice dans un domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$

Nous consacrons cette section à l'étude topologique de la courbe trisectrice et de la surface médiatrice. En partant des définitions et des critères de régularité pour la topologie des courbes et des surfaces algébriques introduits par L. Alberti et B. Mourrain (voir [9]) et Liang et al. (voir [88]), nous allons dégager des critères qui vont, non seulement, être utilisés pour établir un test de régularité qui est fondamental dans le processus de la subdivision, mais aussi, permettre de calculer la topologie de la courbe trisectrice et la surface médiatrice dans un domaine compact. Le test

de régularité identifiera des configurations pour lesquelles la topologie des trisec-trices et des médiatrices sera correctement et facilement calculée dans un domaine compact donné. Cela permettra de caractériser une approximation de la frontière qui est topologiquement correcte pour chaque cellule de VD dans le domaine  $\mathcal{D}_0$ . Le calcul de la topologie d'une courbe et d'une surface dans un domaine compact consiste à déterminer un nombre fini de segments de droite et de polyèdres qui sont respectivement isotopes à la courbe et à la surface dans le domaine tel que expliqué à la section 1.3.4 (chapitre 1).

Commençons par la notion de régularité topologique pour une courbe et une surface algébriques dans un domaine compact.

### 4.2.1 Critère de régularité topologique pour les courbes

Donnons la définition de régularité topologique d'une courbe dans l'espace  $\mathbb{R}^n$ ,  $n = 2, 3$  dans un domaine compact  $\mathcal{D}$  de la forme

$$\mathcal{D} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2 \quad (4.14)$$

ou

$$\mathcal{D} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \subset \mathbb{R}^3. \quad (4.15)$$

**Définition 44.** *On dit qu'une courbe  $\mathcal{C}$  de  $\mathbb{R}^n$  est **t-régulière** (pour la régularité topologique) dans un domaine compact  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ , si sa topologie est uniquement déterminée à partir de son intersection avec le bord  $\partial\mathcal{D}$ .*

Cette définition signifie que pour calculer la topologie de  $\mathcal{C}$  dans le domaine  $\mathcal{D}$ , on a tout simplement besoin de calculer les points d'intersection de  $\mathcal{C}$  avec  $\partial\mathcal{D}$  et l'unique graphe connectant ces points d'intersection détermine la topologie de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{D}$ , c-à-d : isotope à  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{D}$ .

Nous allons rappeler les critères de régularité topologique d'une courbe algébrique plane et d'une courbe algébrique spatiale.

Ainsi pour une courbe algébrique plane, les critères de régularité topologique sont formulés par la proposition suivante.

**Proposition 4.** (voir [88] ) *Soit  $\mathcal{C}$  une courbe algébrique plane définie par*

$$f(x, y) = 0.$$

*Si  $\partial_y f(x, y) \neq 0$  (resp.  $\partial_x f(x, y) \neq 0$ ) dans un domaine compact  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ , alors la courbe  $\mathcal{C}$  est **t-régulière** dans  $\mathcal{D}$ .*

Pour une courbe algébrique spatiale, les critères de  $b$ -régularité sont formulés par la proposition suivante.

**Proposition 5.** (voir [88] ) *Soit une courbe algébrique spatiale  $\mathcal{C}$  de  $\mathbb{R}^3$  définie par*

$$\begin{cases} P_1(x, y, z) = 0 \\ P_2(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

*Si :*

–  $(\nabla P_1(x, y, z) \times \nabla P_2(x, y, z))_x \neq \mathbf{0}$  dans  $\mathcal{D}$ , et  
 –  $\partial_y h \neq 0$  (ou  $\partial_z h \neq 0$ ) dans  $\mathcal{D}$ , pour  $h = P_1$  ou  $h = P_2$ ,  
 alors la courbe  $\mathcal{C}$  est *t-régulière* dans  $\mathcal{D}$ .

Pour une courbe algébrique de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , on a une formulation du critère de *t-régularité* suivant.

**Proposition 6.** *Soit  $\mathcal{C}$  une courbe algébrique de classe  $\mathcal{C}^\infty$  dans le domaine compact  $\mathcal{D}$ . Si pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}$ , le plan  $x = x_0$  a au plus un seul point d'intersection avec la courbe  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{D}$ , alors la courbe  $\mathcal{C}$  est *t-régulière* dans  $\mathcal{D}$ .*

**Remarque 19.** La proposition 6 fournit un moyen simple et pratique pour vérifier la *t-régularité* d'une courbe algébrique, même si la courbe est définie par une paramétrisation.

### 4.2.2 Critère de régularité topologique pour les surfaces

Donnons la définition de la régularité topologique pour une surface dans un domaine compact  $\mathcal{D}$  de la forme (4.15)

**Définition 45.** *Une surface algébrique  $\mathcal{S}$  définie par  $f(x, y, z) = 0$ , est dite *z-t-régulière* (resp. *x, y-t-régulière*) si :*

- $\mathcal{S}$  n'admet pas de tangente parallèle à la direction  $(Ox)$  (resp.  $(Oy)$  ou  $(Oz)$ )
- $\mathcal{S} \cap \partial\mathcal{D}_z$  (resp.  $\mathcal{S} \cap \partial\mathcal{D}_x$ ,  $\mathcal{S} \cap \partial\mathcal{D}_y$ ) est une courbe plane *t-régulière*, où  $\partial\mathcal{D}_u$  est une face de  $\mathcal{D}$  qui est orthogonale à la *u-direction*, avec  $u = x, y, z$ .

La surface  $\mathcal{S}$  est dite *t-régulière* dans le domaine  $\mathcal{D}$  si elle est *x, y* ou *z-t-régulière* dans  $\mathcal{D}$ .

Nous avons la proposition suivante pour la propriété de une surface *t-régulière*.

**Proposition 7.** (voir [9]) *Si  $\mathcal{S}$  est une surface *t-régulière* dans  $\mathcal{D}$ , alors sa topologie est unquement déterminée à partir de ses points d'intersection avec les arêtes de  $\mathcal{D}$ .*

La Proposition suivant donne un critère de régularité topologique pour une surface algébrique.

**Proposition 8.** (voir [9]) *Soient  $\mathcal{S}$  une surface algébrique définie par  $f(x, y, z) = 0$  et  $(u, v, w)$  une permutation de  $(x, y, z)$ . Si  $\partial_u f \neq 0$  dans  $\mathcal{D}$  et si  $\mathcal{S} \cap \partial\mathcal{D}_u$  est une courbe *t-régulière*, où  $\partial\mathcal{D}_u$  est une face de  $\mathcal{D}$  orthogonale à  $(Ou)$ , alors  $\mathcal{S}$  est *t-régulière* dans  $\mathcal{D}$ .*

**Remarque 20.** Cette notion de *t-régularité* qui est purement topologique, est différente de la notion classique (lisse) au sens différentiel. Cependant, il n'est pas difficile de montrer que si une surface est *t-régulière* dans  $\mathcal{D}$ , elle est régulière aussi au sens différentielle dans  $\mathcal{D}$ , car elle ne peut avoir de point singulier dans le domaine  $\mathcal{D}$ .

### 4.2.3 Topologie de la courbe trisectrice et de la surface médiatrice

En adaptant les définitions et critères de régularité topologique aux cas de la courbe trisectrice et de la surface médiatrice, nous allons dégager des propriétés topologiques qui seront utilisées dans le test de régularité topologique et dans le processus de leur maillage.

Nous pouvons facilement montrer la proposition suivante.

**Proposition 9.** *Soient  $\mathcal{D}$  un domaine compact de la forme (4.15),  $b_{i,j}$  la surface médiatrice de sites  $d_i$  et  $d_j$ , et  $\mathcal{T}_{i,j,k}$  la courbe trisectrice de sites  $d_i$ ,  $d_j$  et  $d_k$  tels que :*

1.  $\dim(b_{i,j} \cap \partial\mathcal{D}) = 1$  et que la partie de la médiatrice délimitée par les points d'intersection avec les arêtes de  $\mathcal{D}$  est strictement contenue dans le domaine  $\mathcal{D}$ .
2.  $\mathcal{T}_{i,j,k} \cap \partial\mathcal{D} = \{P_1, P_2\}$  et  $\mathcal{T}_{i,j,k} \cap \mathcal{D} = [P_1, P_2]$ , où  $P_1$  et  $P_2$  sont des points.

Alors :

- La médiatrice  $b_{i,j}$  est  $t$ -régulière dans le domaine  $\mathcal{D}$ .
- La trisectrice  $\mathcal{T}_{i,j,k}$  est  $t$ -régulière dans le domaine  $\mathcal{D}$ .

*Démonstration.*

Montrons que la surface médiatrice est  $t$ -régulière dans le domaine  $\mathcal{D}$  :

En différentiant l'équation implicite (4.7) de la surface médiatrice nous avons :

$$\nabla b_{i,j}(x, y, z) = \begin{cases} (2(x_j - x_i), 2(y_j - y_i), 2(z_j - z_i)) & \text{si } x \leq x_i \\ (2(x - x_j), 2(y_j - y_i), 2(z_j - z_i)) & \text{si } x_i < x \leq x_j \\ (0, 2(y_j - y_i), 2(z_j - z_i)) & \text{si } x > x_j \end{cases} \quad (4.16)$$

1. compte tenu de

$$x_i < x_j \text{ et } (y_i, z_i) \neq (y_j, z_j),$$

à partir de (4.16) on peut facilement vérifier l'une des conditions :

$$\partial_x b_{i,j} \neq 0, \quad \partial_y b_{i,j} \neq 0 \quad \text{ou} \quad \partial_z b_{i,j} \neq 0;$$

2. et compte tenu de la condition 1 de la proposition, puisque la surface médiatrice  $b_{i,j}$  est un raccordement de trois portions connexes (deux demi-plans et un morceau de demi-cylindre parabolique), son intersection avec toute face  $\partial\mathcal{D}_x, \partial\mathcal{D}_y$  ou  $\partial\mathcal{D}_z$  est un segment de droite, une portion d'une parabole ou une jonction de ces deux derniers, qui sont évidemment des courbes planes  $t$ -régulières dans les faces, i.e :  $b_{i,j} \cap \partial\mathcal{D}_u$  est  $t$ -régulière,  $\forall u = x, y, z$ .

De (1) et (2) et grâce à la Proposition 8 on conclure que la surface médiatrice  $b_{i,j}$  est  $t$ -régulière dans le domaine  $\mathcal{D}$ .

Montrons que la courbe trisectrice est  $t$ -régulière dans le domaine  $\mathcal{D}$  :

La courbe trisectrice est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et son vecteur tangent est donné par :

$$\mathcal{T}'_{i,j,k}(x) = \begin{cases} \left( 1, \frac{(-x_j+x_k)y_i+(x_i-x_k)y_j-y_k(x_i-x_j)}{(z_j-z_k)y_i+(-z_i+z_k)y_j+y_k(z_i-z_j)}, \frac{(x_j-x_k)z_i+(-x_i+x_k)z_j+z_k(x_i-x_j)}{(-y_j+y_k)z_i+(y_i-y_k)z_j-z_k(y_i-y_j)} \right), & \text{si } x < x_i \\ \left( 1, \frac{(-x_j+x_k)y_i+(x-x_k)y_j-y_k(x-x_j)}{(z_j-z_k)y_i+(-z_i+z_k)y_j+y_k(z_i-z_j)}, \frac{(x_j-x_k)z_i+(-x+x_k)z_j+z_k(x-x_j)}{(-y_j+y_k)z_i+(y_i-y_k)z_j-z_k(y_i-y_j)} \right), & \text{si } x_i \leq x < x_j \\ \left( 1, \frac{(-y_i-y_j)(x-x_k)}{(z_j-z_k)y_i+(-z_i+z_k)y_j+y_k(z_i-z_j)}, \frac{(z_i-z_j)(x-x_k)}{(-y_j+y_k)z_i+(y_i-y_k)z_j-z_k(y_i-y_j)} \right), & \text{si } x_j \leq x < x_k \\ (1, 0, 0), & \text{si } x \geq x_k \end{cases}$$

et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{T}'_{i,j,k}(x) \neq (0, 0, 0)$ .

Compte tenu de la condition 2, et comme la courbe trisectrice  $\mathcal{T}_{i,j,k}$  est une jonction des quatre composantes :

- une demi-droite (pour  $x < x_i$ ) supportée par la droite trisectrice de points  $A_i$ ,  $A_j$  et  $A_k$ , qui n'est pas orthogonale à  $(Ox)$ ;
- deux portions de demi-paraboles (pour  $x_i \leq x < x_j$ , et  $x_j \leq x < x_k$ ) de directrice parallèle à  $(Ox)$ ;
- une demi-droite parallèle à l'axe  $(Ox)$  (pour  $x \geq x_k$ ) supporté par la droite trisectrice de  $\ell_i$ ,  $\ell_j$  and  $\ell_k$ ,  
pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}$ , le plan  $(x = x_0)$  intersecte la courbe trisectrice en exactement un seul point et grâce à la Proposition 6, on conclut que la courbe trisectrice est  $t$ -régulière dans  $\mathcal{D}$ .

□

La surface médiatrice et la courbe trisectrice étant  $t$ -régulières dans un domaine  $\mathcal{D}$ , en vertu de la définition et de critère de  $t$ -régularité, leur topologie dans le domaine  $\mathcal{D}$  est déterminée à partir de points d'intersection avec la frontière  $\partial\mathcal{D}$ , plus précisément on a :

- Pour la surface médiatrice  $b_{i,j}$  intersectant un domaine  $\mathcal{D}$ , le graphe de ses points d'intersection avec les arêtes de  $\mathcal{D}$  détermine un polyèdre isotope à  $b_{i,j}$  dans  $\mathcal{D}$  (voir la sous-section 4.3.2 et figure 4.4).
- Pour la courbe trisectrice  $\mathcal{T}_{i,j,k}$  intersectant un domaine  $\mathcal{D}$ , le segment de droite joignant ses deux points d'intersection avec la frontière  $\partial\mathcal{D}$  est isotope à  $\mathcal{T}_{i,j,k}$  à l'intérieur de  $\mathcal{D}$ .

Pour calculer la topologie de la surface médiatrice et de la courbe trisectrice dans un domaine  $\mathcal{D}$ , nous devons détecter et calculer effectivement leur point d'intersection avec la frontière  $\partial\mathcal{D}$ . La proposition suivante fournit un moyen très élémentaire pour y parvenir.

**Proposition 10. (Une surface médiatrice à travers une arête)**

Soient  $b_{i,j}$  la médiatrice de deux sites  $d_i$  et  $d_j$  et  $\mathcal{E}_{l,k} = [S_l, S_k]$  une arête du domaine  $\mathcal{D}$  joignant les sommets  $S_l$  et  $S_k$ .

1. La surface médiatrice  $b_{i,j}$  intersecte l'arête ouverte  $\mathcal{E}_{l,k} = ]S_l, S_k[$  si et seulement si :

$$b_{i,j}(S_l)b_{i,j}(S_k) < 0$$

2. La surface médiatrice  $b_{i,j}$  intersecte l'arête fermée  $\mathcal{E}_{l,k} = [S_l, S_k]$  si et seulement si :

$$b_{i,j}(S_l)b_{i,j}(S_k) \leq 0$$

*Démonstration.* Soient  $\mathcal{E}_{l,k} = [S_l, S_k]$  une arête joignant les sommets  $S_l$  et  $S_k$  du domaine  $\mathcal{D}$  et  $b_{i,j} = g_i - g_j$  la médiatrice de sites  $d_i$  and  $d_j$ .

Nous allons montrer que :

1. la médiatrice  $b_{i,j}$  intersecte une arête ouverte  $\mathcal{E}_{l,k} = ]S_l, S_k[$  ssi :

$$b_{i,j}(S_l)b_{i,j}(S_k) < 0.$$

Supposons que la médiatrice  $b_{i,j}$  intersecte l'arête  $\mathcal{E}_{l,k}$ .

Par définition, la médiatrice  $b_{i,j}$  partage l'espace  $\mathbb{R}^3$  en un sous-espace de points plus proches du site  $d_i$  et un sous-espace de points plus proche du site  $d_j$ . Ainsi les points  $S_l$  et  $S_k$  sont respectivement distribués dans ces deux sous-espaces séparés, supposons que  $S_l$  plus proche de  $d_i$  et  $S_k$  plus proche de  $d_j$ . Dans ce cas on a :

$$g_i(S_l) < g_j(S_l) \text{ et } g_j(S_k) < g_i(S_k)$$

ce qui implique :

$$\left( g_i(S_l) - g_j(S_l) \right) \left( g_i(S_k) - g_j(S_k) \right) < 0,$$

c-à-d :  $b_{i,j}(S_l)b_{i,j}(S_k) < 0$ .

Supposons que

$$b_{i,j}(S_l)b_{i,j}(S_k) < 0,$$

alors on a :

$$g_i(S_l) - g_j(S_l) > 0 \text{ et } g_i(S_k) - g_j(S_k) < 0$$

ou

$$g_i(S_l) - g_j(S_l) < 0 \text{ et } g_i(S_k) - g_j(S_k) > 0,$$

ceci implique que les points  $S_l$  et  $S_k$  sont respectivement plus proche du site  $d_j$  et du site  $d_i$ , ou respectivement plus proche du site  $d_i$  et du site  $d_j$ . Ainsi donc, tout chemin, et en particulier le segment joignant  $S_l$  et  $S_k$ , c'est à dire l'arête  $\mathcal{E}_{l,k}$  traverse la surface médiatrice  $b_{i,j}$  de deux sites  $d_i$  et  $d_j$ .

2. Nous allons montrer que la médiatrice  $b_{i,j}$  intersecte  $\mathcal{E}_{l,k} = [S_l, S_k]$  ssi :

$$b_{i,j}(S_l)b_{i,j}(S_k) \leq 0.$$

Comme

$$b_{i,j}(S_l)b_{i,j}(S_k) \leq 0 \Leftrightarrow b_{i,j}(S_l)b_{i,j}(S_k) < 0 \text{ ou } b_{i,j}(S_l)b_{i,j}(S_k) = 0$$

Mais le cas  $b_{i,j}(S_l)b_{i,j}(S_k) < 0$  vient d'être traité ci-haut, nous allons donc vérifier l'équivalence avec la condition  $b_{i,j}(S_l)b_{i,j}(S_k) = 0$ .

La condition

$$b_{i,j}(S_l)b_{i,j}(S_k) = 0,$$

est équivalente à l'un des cas suivants :

(a)  $g_i(S_l) - g_j(S_l) = 0$  et  $g_i(S_k) - g_j(S_k) \neq 0$ .

(b)  $g_i(S_l) - g_j(S_l) \neq 0$  et  $g_i(S_k) - g_j(S_k) = 0$ .

(c)  $g_i(S_l) - g_j(S_l) = 0$  et  $g_i(S_k) - g_j(S_k) = 0$ .

Étant donné que la médiatrice est monotone et convexe, les cas (2a) et (2b) impliquent que la surface médiatrice contient au moins l'un des deux sommets  $S_l$  et  $S_k$  et éventuellement un sous-segment de l'arête  $\mathcal{E}_{l,k}$ , tandis que le cas (2c) implique que l'arête  $\mathcal{E}_{l,k}$  est strictement contenue dans la surface médiatrice. La proposition est ainsi démontrée. □

**Remarque 21.**

1. Pour les cas (2a) et (2b) de la preuve précédente on doit calculer le point d'intersection en substituant la représentation paramétrique de l'arête dans l'équation implicite de la médiatrice. S'il existe un point d'intersection  $S_0 \in ]S_l, S_k[$ , donc l'un des sous-segment  $[S_l, S_0]$  ou  $[S_0, S_k]$  serait strictement contenu dans la surface médiatrice.
2. Ces différents cas seront utilisés dans le test de régularité afin de détecter le type d'intersection entre la médiatrice et l'arêtes d'un domaine.
3. Le trisectrice étant une intersection commune des trois médiatrices, son intersection avec la frontière du domaine  $\mathcal{D}$  peut être détectée à travers les (deux) faces qui coupent les trois médiatrices correspondantes.

Maintenant, nous allons aborder la partie algorithmique et fondamentale de ce chapitre.

### 4.3 L'Algorithme

Cette section qui constitue la partie fondamentale de ce chapitre est composée de deux grandes parties : la subdivision du domaine initial  $\mathcal{D}_0$  et la reconstruction de cellules de Voronoï.

- Durant la phase de la subdivision telle que résumée dans l'algorithme 7, en utilisant des *critères de t-régularité*, le domaine initial  $\mathcal{D}_0$  sera subdivisé en des sous-domaines suivant une structure arborescente *kd-trees* (voir [19]), c-à-d : le domaine  $\mathcal{D}_0$  sera tout d'abord divisé en deux sous-domaines par un plan médiateur perpendiculaire à l'une des directions du repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , ensuite chacun de domaines fils sera aussi divisé en deux par un plan médiateur

perpendiculaire à une autre direction, et ainsi de suite. Tous les sous-domaines intersectant les cellules du diagramme de Voronoï, c-à-d : les sous-domaines qui génèrent les surfaces médiatrices et les courbes trisectrices, seront identifiés, et reliés suivant un graphe d'adjacence.

- La phase de reconstitution consiste à traverser le graphe d'adjacence à l'aide de l'algorithme **DFS** (Depth First Search) (voir [62, 77]), tout en maillant tous les (médiatrices et trisectrices contenues dans) sous-domaines intersectant les cellules de Voronoï le long de la traversée. L'algorithme **DFS** parcourt chaque branche d'un graphe à partir d'un noeud donné, tout en marquant les sommets rencontré avant d'atteindre le noeud initial. Des approximations des cellules de Voronoï qui sont topologiquement correctes dans  $\mathcal{D}_0$  seront ainsi déterminées.

Avant d'aborder la phase de la subdivision, nous aurons besoin d'une formulation d'un test de régularité qui permettra d'identifier les sous-domaines comportant de configurations topologiques bien définies, pour les surfaces médiatrices, les courbes trisectrices et les points quadrisecteurs.

Nous allons introduire un certain nombre de définitions techniques que nous aurons à utiliser dans la suite.

**Définition 46.** Soient  $\{d_i, i = 1, \dots, n\}$  un ensemble de  $n$  sites,  $(g_i)_{i=1, \dots, n}$  les fonctions distances associées et  $\mathcal{D}$  un domaine de la forme (4.1).

1. Une distance  $g_{i_0}$  est dite **active** dans le domaine  $\mathcal{D}$  si elle contribue localement à l'enveloppe inférieure des fonctions de distance  $(g_i)_{i=1, \dots, n}$  dans  $\mathcal{D}$ , c-à-d si

$$\min(g_{i_0|_{\mathcal{D}}}) \leq \min\{ \max(g_{i|_{\mathcal{D}}}), i = 1, \dots, n \}.$$

2. Un site  $d_i$  est dit **actif** dans  $\mathcal{D}$  si la distance associée  $g_i$  y est active.
3. On appelle  $d$ -liste notée  $B(\mathcal{D}) = \{g_{1|_{\mathcal{D}}}, \dots, g_{p|_{\mathcal{D}}}\}$ , la liste de  $p$  distances détectées pour un domaine subdivisé  $\mathcal{D}$  et notons  $|B(\mathcal{D})| = p$ .

Une  $d$ -liste  $B(\mathcal{D})$  génère des surfaces médiatrices, des courbes trisectrices et des points quadrisecteurs. Leur topologie dans un domaine  $\mathcal{D}$  sera référée par la topologie de  $d$ -liste correspondante  $B(\mathcal{D})$ , par conséquent, le *test de régularité topologique* sera établi sur  $B(\mathcal{D})$ . Ainsi donc, à la place d'un domaine  $\mathcal{D}$ , la  $d$ -liste correspondante sera utilisée dans le processus de la subdivision.

Donnons la définition de la topologie d'une  $d$ -liste  $B(\mathcal{D})$ .

**Définition 47.** Une  $d$ -liste  $B(\mathcal{D})$  est dite  **$b$ -régulière** (pour la régularité topologique de  $B(\mathcal{D})$ ) si toutes les surfaces médiatrices et toutes les courbes trisectrices qu'elle génère sont  **$t$ -régulière** dans  $\mathcal{D}$ .

Au cours du processus de la subdivision toute  $d$ -liste  $B(\mathcal{D})$  qui est  $b$ -régulière sera transformée en une  $d$ -liste des médiatrices et des et trisectrices correspondantes. La définition précédente va nous permet de définir le test de régularité topologique.

**Le Test de Régularité (IsRegular)** permet une identification judicieuse de toutes les  $d$ -listes qui sont  $b$ -régulières engendrant (ou éventuellement, pour les  $d$ -listes dont les domaines correspondants sont inclus dans) les cellules de VD, à partir des quelles la topologie correcte des cellules va être aisément calculée. Un code Maple avec quelques exemples pour ce test est présenté à l'annexe A.1.

Pour une  $d$ -liste  $B(\mathcal{D})$  donnée, seules les configurations de médiatrices, de trisectrices et de quadrisecteurs engendrés par  $B(\mathcal{D})$  et pour lesquelles les médiatrices, les trisectrices et les quadrisecteurs possèdent une intersection **générique** avec domaine  $\mathcal{D}$  permettant une approximation topologiquement correcte, sont autorisées pour déclarer la  $b$ -régularité de la  $d$ -liste. Une intersection **générique** est réalisée :

- pour la médiatrice qui possède une intersection de dimension 1 avec les faces de  $\mathcal{D}$ , et que la partie de la médiatrice délimitée par les points d'intersection avec les arêtes de  $\mathcal{D}$  est strictement contenue dans le domaine  $\mathcal{D}$ .
- pour la trisectrice qui possède exactement deux points d'intersection avec le bord du domaine  $\mathcal{D}$  et la portion délimitée par les deux d'intersection est strictement contenue dans le domaine  $\mathcal{D}$ .
- pour le quadrisecteur qui est strictement contenu dans le domaine  $\mathcal{D}$ .

Ce test va jouer un rôle fondamental dans le processus de subdivision en faisant découvrir l'information topologique d'une  $d$ -liste  $B(\mathcal{D})$ . Plus précisément, Il permettra de savoir si la  $d$ -liste requiert la condition topologique suffisante, ou bien elle doit être subdivisée.

Puisque dans notre contexte, nous nous intéressons au calcul de la topologie de faces de VD (médiatrices), de arêtes de VD (trisectrices) et de sommets de VD (quadrisecteurs) dans un domaine  $\mathcal{D}$ , une  $d$ -liste avec plus de quatre distances est naturellement non **b-régulière**, donc la  $b$ -régularité ne sera effectivement vérifiée que pour une  $d$ -liste contenant au plus quatre distances.

Avant de procéder à la vérification de la  $b$ -régularité des  $d$ -listes, il y'a lieu de préciser que

- Pour la médiatrice  $b_{i,j}$  de deux sites  $d_i$  et  $d_j$ , les types d'intersections avec les arêtes de  $\mathcal{D}$  seront détectés et calculés grâce à la proposition 10. Si l'intersection  $b_{i,j} \cap \partial\mathcal{D}$  est générique, la topologie de la médiatrice sera donnée par un polyèdre (déterminé par les points d'intersection avec les arêtes de  $\mathcal{D}$ ) isotope à  $b_{i,j}$  dans  $\mathcal{D}$ .
- Pour la trisectrice de trois sites  $d_i, d_j$  et  $d_k$ , l'intersection sera détectée à travers les faces de  $\mathcal{D}$  sur lesquelles se croisent les trois surfaces médiatrices correspondantes. Cela peut se faire en se servant de la paramétrisation correspondante (4.12) de la trisectrice. Si l'intersection  $\mathcal{T}_{i,j,k} \cap \partial\mathcal{D}$  est générique (c-à-d en exactement deux points sur les faces de  $\mathcal{D}$ ), la topologie de cette trisectrice sera donnée par le segment de droite, joignant les deux points d'intersection, qui est, évidemment, isotope à  $\mathcal{T}_{i,j,k}$  dans  $\mathcal{D}$ .
- Le point quadrisecteur  $Q_{h,i,j,k}$  de quatre sites  $d_h, d_i, d_j$  et  $d_k$  peut être calculé par un calcul exact en résolvant l'intersection commune des quatre trisectrices, puis sa position par rapport au domaine  $\mathcal{D}$  est facilement déterminée à partir de ses coordonnées.

Ainsi, pour toute  $d$ -liste  $B(\mathcal{D})$  telle que  $|B(\mathcal{D})| \leq 4$ , nous avons :

1. Une  $d$ -liste  $B(\mathcal{D})$  d'une seule distance active  $g_i$  (c-à-d :  $\mathcal{D} \subset Vor(d_i)$ ) est trivialement  $b$ -régulière.
2. Une  $d$ -liste  $B(\mathcal{D})$  de deux distances actives  $g_i$  et  $g_j$  ( $\mathcal{D}$  peut contenir une

- surface médiatrice) est  $b$ -régulière si la médiatrice  $b_{i,j}$  admet une intersection générique avec le domaine  $\mathcal{D}$ .
3. Une  $d$ -liste  $B(\mathcal{D})$  de trois distances actives  $g_i, g_j$  et  $g_k$  ( $\mathcal{D}$  peut contenir trois médiatrices et une courbe trisectrice) est  $b$ -régulière si :
    - (a) chacune des trois médiatrices  $b_{i,j}, b_{i,k}$  et  $b_{j,k}$  prises séparément est  $t$ -régulière dans  $\mathcal{D}$ ,
    - (b) la courbe trisectrice  $\mathcal{T}_{i,j,k}$  est  $t$ -régulière dans  $\mathcal{D}$ .
  4. Une  $d$ -liste  $B(\mathcal{D})$  de quatre distances actives  $g_i, g_j, g_k$  et  $g_l$ , ( $\mathcal{D}$  peut contenir six  $\left(6 = \binom{4}{2}\right)$  médiatrices, quatre  $\left(4 = \binom{4}{3}\right)$  trisectrices et un quadrisecteur) est  $b$ -régulière si :
    - (a) chacune des trois médiatrices  $b_{m,n}$ ,  $m < n \in \{i, j, k, l\}$ , prises séparément est  $t$ -régulière dans  $\mathcal{D}$ ,
    - (b) si chacune des quatre trisectrices  $\mathcal{T}_{m,n,p}$ ,  $m < n < p \in \{i, j, k, l\}$ , prises séparément est  $t$ -régulière dans  $\mathcal{D}$ , et
    - (c) le point quadrisecteur correspondant  $Q_{i,j,k,l}$  admet une intersection générique avec le domaine  $\mathcal{D}$  (c-à-d :  $Q_{i,j,k,l}$  est strictement contenu dans  $\mathcal{D}$ ).

**Remarque 22.** Dans la pratique, nous pouvons imposer des conditions supplémentaires pour éviter des intersections non-génériques pour la médiatrice, durant la subdivision afin d'alléger le test de régularité. Quelques explications sur la façon de gérer des intersections non-génériques pour une médiatrice le domaine  $\mathcal{D}$ , seront données en annexe A.1.

Une fois que notre test de régularité est bien établi, nous sommes en mesure de procéder à la première étape principale de ce chapitre, qui est la subdivision.

### 4.3.1 Subdivision de domaine

Dans cette sous-section, nous allons procéder à la phase de la subdivision du domaine initial pour identifier toutes les  $d$ -listes qui y génèrent les cellules de VD. Soit

$$\mathcal{D}_0 = [a_{1_0}, b_{1_0}] \times [a_{2_0}, b_{2_0}] \times [a_{3_0}, b_{3_0}]$$

un domaine dans lequel les  $n$  sites  $d_1, \dots, d_n$ , sont actifs et un seuil  $\varepsilon > 0$ .

Le domaine  $\mathcal{D}_0$  sera subdivisé en sous-domaines, et les  $d$ -listes correspondantes engendrant les cellules du VD seront identifiées et rangées dans un graphe d'adjacence. Le phase de subdivision telle que résumée dans l'algorithme 7 commence par le calcul de la  $d$ -liste initiale associée au domaine  $\mathcal{D}_0$

$$B(\mathcal{D}_0) := \{g_1|_{\mathcal{D}_0}, \dots, g_n|_{\mathcal{D}_0}\},$$

comportant toutes les fonctions distances. Le processus se poursuit avec les étapes suivantes :

1. l'initialisation :

- d'une pile  $\mathcal{P}$  par la  $d$ -liste  $B(\mathcal{D}_0)$ ,
  - du graphe d'adjacence  $\mathcal{G}$  par le graphe vide.
2. La principale étape commence une boucle en prenant une  $d$ -liste  $B(\mathcal{D})$  de la pile  $\mathcal{P}$ , et ensuite en utilisant l'arithmétique d'intervalles, les fonctions distances seront bornées sur le domaine  $\mathcal{D}$  c-à-d :

$$m_{\mathcal{D}}^i \leq g_{i|\mathcal{D}} \leq M_{\mathcal{D}}^i, i = 1, \dots, |B(\mathcal{D})|.$$

Toute distance qui n'est pas active dans  $\mathcal{D}$  sera éliminée par filtrage, c-à-d toute distance  $g_{i_0|\mathcal{D}}$  vérifiant

$$m_{\mathcal{D}}^{i_0} \geq M_{\mathcal{D}} := \min\{M_{\mathcal{D}}^i, i = 1, \dots, |B(\mathcal{D})|\},$$

sera éliminée de la  $d$ -liste  $B(\mathcal{D})$  :

$$B(\mathcal{D}) := B(\mathcal{D}) \setminus \{g_{i_0|\mathcal{D}}\}.$$

Ainsi il va rester que des distances actives (c-a-d qui contribuent à l'enveloppe inférieure de distances) dans  $\mathcal{D}$  (voir définition 46). La  $d$ -liste résultante suivra le test de régularité topologique "IsRegular".

Si la  $d$ -liste  $B(\mathcal{D})$  est  $b$ -régulière ou bien si la taille du domaine est atteint le seuil  $\varepsilon$  (c-à-d :  $|\mathcal{D}| = \max_{1 \leq i \leq 3} (|b_i - a_i|) < \varepsilon$ ), alors cette  $d$ -liste sera transformée en une  $d$ -liste des médiatrices et des trisectrices correspondantes :

$$B^{bis}(\mathcal{D}) := \left\{ b_{i,j}, \mathcal{T}_{i,j,k} : \mathcal{T}_{i,j,k} = b_{i,j} \cap b_{i,k} \cap b_{j,k}, b_{m,n} = g_{m|\mathcal{D}} - g_{n|\mathcal{D}}, \right. \\ \left. m < n \in \{1, \dots, |B(\mathcal{D})|\} \right\},$$

et qui sera ajoutée au graphe  $\mathcal{G}$ . Sinon, la  $d$ -liste (c-à-d : le domaine correspondant) sera divisée, le long de la plus longue arête de  $\mathcal{D}$  par un plan perpendiculaire à la direction de cette même arête, en  $d$ -listes identiques  $B(\mathcal{D}_1)$  et  $B(\mathcal{D}_2)$  (i.e : telles que  $|\mathcal{D}_1| = |\mathcal{D}_2|$ ). Le graphe d'adjacence  $\mathcal{G}$  sera mis à jour en remplaçant  $B(\mathcal{D})$  par les deux nouvelle  $d$ -liste, en ajoutant une arête d'adjacence entre elles et en les reliant avec leurs  $d$ -liste voisines. Enfin les deux  $d$ -listes seront renvoyées dans la pile  $\mathcal{P}$  et le processus continue jusqu'à l'épuisement total de  $\mathcal{P}$  (i.e : jusqu'à  $\mathcal{P} = \emptyset$ ).

Le processus de subdivision s'arrête lorsque toutes les  $d$ -listes  $b$ -régulières et toutes les  $d$ -listes dont la taille du domaine correspondant est plus petit que le seuil  $\varepsilon$  sont identifiées, transformées en  $d$ -listes des médiatrices et les trisectrices, et rangées dans le graphe d'adjacence  $\mathcal{G}$ .

**Remarque 23.** Cependant, les  $d$ -listes identifiées, lorsque le seuil sur la taille du sous-domaine correspondant est atteint, pourraient générer des arêtes et/ou des sommets dégénérés du VD. C'est précisément ce qui pourrait arriver si toutes les parties de médiatrices (resp. des parties de trisectrices) impliquées ont une portion de courbe (resp. un point) d'intersection commune dans le sous-domaine.

Les différentes phases de la subdivision sont résumés dans l'algorithme suivant :

---

**Algorithme 7. (Subdivision)**

---

**Input :**  $\mathcal{D}_0 \subset \mathbb{R}^3$  un domaine compact,  $g_1, \dots, g_n \in \mathbb{R}[x, y, z]$  (par morceaux) les distances associées aux sites  $d_1, \dots, d_n$  et le seuil  $\varepsilon > 0$ .

**Output :**  $\mathcal{G}$  graphe d'adjacence des  $d$ -listes des médiatrices et des trisectrices générant les cellules du VD de  $\{d_1, \dots, d_n\}$  dans  $\mathcal{D}_0$ .

1. Calculons  $B(\mathcal{D}_0) := \{g_{1|\mathcal{D}_0}, \dots, g_{n|\mathcal{D}_0}\}$  ;
2. Initialisons
  - (a) une pile  $\mathcal{P} := \{B(\mathcal{D}_0)\}$  ;
  - (b) un graphe  $\mathcal{G} := \emptyset$  ;
3. **Tant que**  $\mathcal{P} \neq \emptyset$  **faire**
  - (a) Prenons une  $d$ -liste  $B(\mathcal{D})$  de  $\mathcal{P}$
  - (b) Filtrons de la  $d$ -liste  $B(\mathcal{D})$  :
    - i. calculons  $M_{\mathcal{D}} := \min\{\max(g_{i|\mathcal{D}}), i = 1 \dots, |B(\mathcal{D})|\}$  ;
    - ii. **pour**  $i = 1 \dots |B(\mathcal{D})|$  **faire**
      - si**  $\min(g_{i|\mathcal{D}}) \geq M_{\mathcal{D}}$  **alors**

$$B(\mathcal{D}) := B(\mathcal{D}) \setminus \{g_{i|\mathcal{D}}\}$$
      - fin si** ;
    - iii. **fin pour** ;
  - (c) **Si** ;  $B(\mathcal{D})$  IsRegular or  $|\mathcal{D}| < \varepsilon$  **alors** ;  
calculons
 
$$B^{bis}(\mathcal{D}) := \left\{ b_{i,j}, \mathcal{T}_{i,j,k} : \mathcal{T}_{i,j,k} = b_{i,j} \cap b_{i,k} \cap b_{j,k}, b_{m,n} = g_{m|\mathcal{D}} - g_{n|\mathcal{D}}, \right. \\ \left. m < n \in \{1, \dots, |B(\mathcal{D})|\} \right\}$$
  - et l'ajoutons à  $\mathcal{G}$  ;
  - (d) **Sinon**
    - i. subdivisons  $B(\mathcal{D})$  en  $B(\mathcal{D}_1)$  et  $B(\mathcal{D}_2)$  ;
    - ii. mettons à jour  $\mathcal{G}$  avec  $B(\mathcal{D}_1)$  and  $B(\mathcal{D}_2)$  ;
    - iii. remettons  $B(\mathcal{D}_1)$  et  $B(\mathcal{D}_2)$  dans  $\mathcal{P}$  ;
  - (e) **Fin Si** ;
4. **Fin Tant que** ;
5. Faisons tourner  $\mathcal{G}$  ;

L'efficacité et l'exactitude de cet algorithme ont été justifiées par la validité et la fiabilité de deux étapes clés de la boucle, qui sont :

- L'étape du filtrage, qui permet de ne conserver que les fonctions distances qui contribuent localement à l'enveloppe inférieure, car, localement, seul un petit nombre de sites participent aux cellules du VD. Pour une  $d$ -liste  $B(\mathcal{D})$  donnée cette opération a un coût de l'ordre du nombre de fonctions distances qu'elle renferme :  $\mathcal{O}(|B(\mathcal{D})|)$ .
- L'étape proprement dite de la subdivision a été réalisée grâce aux critères d'arrêt : le test de régularité topologique (`IsRegular`) et le test sur le seuil de la taille du sous-domaine correspondant, permettant de décider si les cellules de VD engendrées par la  $d$ -liste  $B(\mathcal{D})$  possèdent une topologie entièrement bien connue, ou bien, si le sous-domaine correspondant doit être divisé. En effet, notre objectif est d'identifier toutes les  $d$ -liste  $b$ -régulières engendrant les cellules du VD. Si la  $d$ -liste échappe aux critères d'arrêt, alors le partitionnement de la  $d$ -liste en deux avec la mise à jour du graphe d'adjacence et la remise de nouvelles  $d$ -listes dans la pile, assurent la continuité de la boucle jusqu'à l'identification complète de toutes les  $d$ -listes engendrant le VD.

Le graphe d'adjacence servira d'une trajectoire idéale, pour traverser toutes les  $d$ -liste des médiatrices et des trisectrices, durant la phase de reconstruction.

Puisque la  $b$ -régularité d'une  $d$ -liste  $B(\mathcal{D})$ , qui est le critère fondamental dans l'algorithme, n'est réalisable que pour  $|B(\mathcal{D})| \leq 4$ , dépend donc de l'efficacité de l'étape du filtrage, dont le coût est de  $\mathcal{O}(|B(\mathcal{D})|)$ , par conséquent le coût global de l'algorithme dépend de l'efficacité du filtrage.

Une fois que le domaine  $\mathcal{D}_0$  est subdivisé et que toutes les  $d$ -liste des médiatrices et des trisectrices générant les cellules de Voronoï sont bien identifiées et rangées dans un graphe d'adjacence, nous allons procéder à la deuxième phase fondamentale de ce chapitre, qui est la reconstruction.

### 4.3.2 La reconstruction de cellules du diagramme de Voronoï

Cette sous-section présente la phase finale de l'algorithme qui est la reconstruction de cellules de VD à partir du graphe d'adjacence de toutes les  $d$ -listes des médiatrices et des trisectrices, issu de la phase précédente. Comme durant la reconstruction, toutes les  $d$ -listes  $B^{bis}(\mathcal{D})$  seront maillées lors de leur traversée, nous aurons à présenter, tout d'abord, les procédures de maillage de différents types de  $d$ -listes  $B^{bis}(\mathcal{D})$  résultantes de la subdivision.

#### Maillage de la $d$ -liste $B^{bis}(\mathcal{D})$

A l'issue l'algorithme 7 de la subdivision, la  $d$ -liste  $B(\mathcal{D}_0)$  correspondante au domaine initial  $\mathcal{D}_0$  a été subdivisée et transformée en des  $d$ -listes  $B^{bis}(\mathcal{D})$  des médiatrices et des trisectrices, qui génèrent les cellules Voronoï dans des sous-domaines  $\mathcal{D}$ . Nous obtenons ainsi des  $d$ -listes générant respectivement aucune, une médiatrice, trois médiatrices et une trisectrice, ou six médiatrices et quatre trisectrices, et éven-

tuellement de  $d$ -listes générant des arêtes de VD dégénérées ou des sommets de VD dégénérés.

Dans cette partie des algorithmes vont être conçus pour le maillage de chacune de ces différents types de  $d$ -listes. L'éventuel cas de  $d$ -listes générant des arêtes de VD et des sommets de VD dégénéré peut être traité de manière identique aux cas réguliers. Il y'a lieu de noter ici que le maillage d'une  $d$ -liste  $B^{bis}(\mathcal{D})$  signifie le maillage ou le calcul de la topologie des surfaces médiatrices et de courbes trisectrices correspondantes dans le domaine  $\mathcal{D}$ .

Pour le cas d'une  $d$ -liste qui ne génère aucune surface médiatrice (c-à-d une  $d$ -listes avec un seul distance active), le sous-domaine correspondant est intégralement contenu dans une cellule, aucun traitement n'est nécessaire.

Pour une  $d$ -liste d'une seule médiatrice, de trois médiatrices et d'une trisectrice, et de six médiatrices et quatre trisectrice, le processus de maillage est le suivant :

### Maillage d'une $d$ -liste $B^{bis}(\mathcal{D})$ d'une seule médiatrice

Pour une  $d$ -liste  $B^{bis}(\mathcal{D})$  d'une seule surface médiatrice  $b_{1,2}$ , le processus de maillage tel que résumé dans l'algorithme 8 est assez simple. Il consiste :

- tout d'abord à détecter et à calculer les points d'intersection de la médiatrice avec les arêtes du domaine  $\mathcal{D}$  en utilisant la proposition 10 :

Si

$$b_{1,2}(S_l)b_{1,2}(S_k) \leq 0,$$

on calcule

$$B_{1,2}(l, k) = b_{1,2} \cap \mathcal{E}_{l,k},$$

où  $\mathcal{E}_{l,k} = [S_l, S_k]$ ,  $S_l$  et  $S_k$ , sont respectivement une arête et les sommets du domaine  $\mathcal{D}$ .

Le calcul de points  $B_{1,2}(l, k)$  peut se faire en substituant la paramétrisation de l'arête  $\mathcal{E}_{l,k}$  dans l'équation implicite de la médiatrice  $b_{1,2}$ .

- Ensuite les points  $B_{1,2}(l, k)$  seront rangés dans une liste circulaire de telle sorte que deux points consecutifs appartiennent à une même face de  $\mathcal{D}$ . Ces points seront connectés 3 à 3 par des triangles successivement joints formant ainsi un polyèdre  $\mathcal{P}_{1,2}$ . La figure 4.4 montre une illustration du processus.

Le polyèdre  $\mathcal{P}_{1,2}$  détermine la maille de la surface médiatrice  $b_{1,2}$  dans le domaine  $\mathcal{D}$ .

---

### Algorithme 8. Maillage d'une $d$ -liste d'une seule médiatrice

---

**Input :**  $B^{bis}(\mathcal{D})$   $d$ -liste d'une seule médiatrice.

**Output :**  $\mathcal{P}_{1,2}$  un polyèdre isotope à la médiatrice  $b_{1,2}$  dans  $\mathcal{D}$ .

1. Initialisons  $\mathcal{P}_{1,2} := \emptyset$ ;  $\mathcal{V} := \emptyset$ ;
2. Calculons  $\mathcal{E}(\mathcal{D}) := \{\mathcal{E}_{l,k} = [S_l, S_k] : l \neq k \in \{1, \dots, 8\}, \text{ arêtes de } \mathcal{D}\}$ ;
3. **Pour** chaque arête  $\mathcal{E}_{l,k} \in \mathcal{E}(\mathcal{D})$  **faire**
  - (a) **Si**  $b_{1,2}(S_l)b_{1,2}(S_k) \leq 0$  **faire**

- i. calculons  $B_{1,2}(l, k) := b_{1,2} \cap \mathcal{E}_{l,k}$ ;
  - ii. ajoutons  $B_{1,2}(l, k)$  dans  $\mathcal{V}$ ;
- (b) **Fin Si** ;
4. **Fin Pour** ;
5. Rangeons  $\mathcal{V}$  en une liste circulaire  
 $\mathcal{V} := \{V_0, V_1, V_2, \dots, V_{|\mathcal{V}|-1}\}$  such that  $[V_{p-1}, V_p]_{p=1, \dots, |\mathcal{V}|-1} \subset \partial\mathcal{D}$  ;
6. **Pour** ;  $p = 1, \dots, |\mathcal{V}| - 2$  **faire** ;  
 $\mathcal{P}_{1,2} := \mathcal{P}_{1,2} \cup \Delta(V_{p-1}, V_p, V_{p+1})$  ;  
**Fin Pour** ;
7. Faisons tourner  $\mathcal{P}_{1,2}$  ;

L'efficacité et l'exactitude de cet algorithme réside en :

- La définition 45, assurant la déduction de la topologie de la médiatrice dans  $\mathcal{D}$  à partir de ses points d'intersection avec les arêtes du domaine, car la médiatrice  $y$  est  $t$ -régulière, et de la proposition 10 qui permet de détecter les arêtes du domaine possédant une intersection avec la médiatrice.
- La manière de calculer de la topologie par jonction des triangles successifs définis par les points d'intersection (car ils ne sont pas tous coplanaires) de la médiatrice avec les arêtes, rangés dans une liste circulaire.

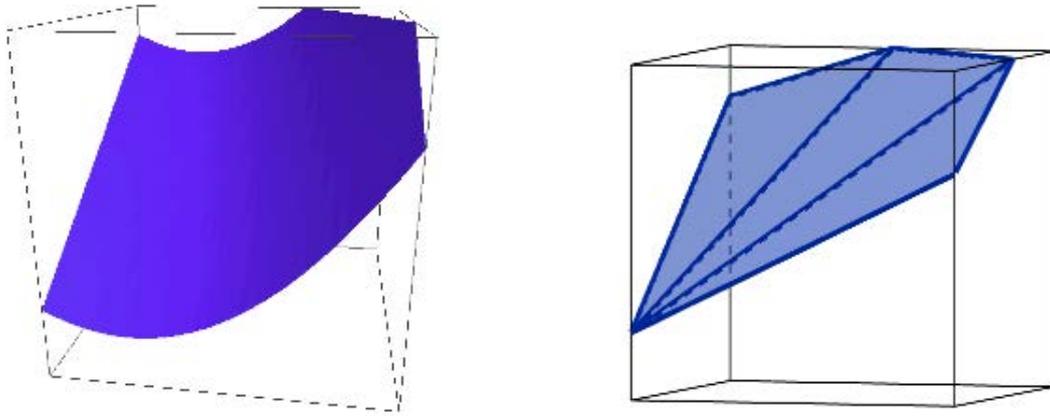


FIGURE 4.4 – La figure correspondant à la  $d$ -liste initiale (à droite) et la  $d$ -liste mailée (à gauche)

### Maillage d'une $d$ -liste $B^{bis}(\mathcal{D})$ de trois médiatrices et une trisectrice

Pour une  $d$ -liste  $B^{bis}(\mathcal{D})$  avec plus de une seule médiatrice, ce n'est pas l'intégralité de toute la partie de la médiatrice (contenue dans  $\mathcal{D}$ ) qui définit une face de VD dans  $\mathcal{D}$ . La courbe trisectrice divisant chaque médiatrice  $b_{i,j}$  de sites  $d_i$  et  $d_j$  et en deux parties, et seule la partie délimitée par la trisectrice et les points d'intersection de  $b_{i,j}$  avec les arêtes de  $\mathcal{D}$  qui ne sont pas plus proches de un autre site  $d_k$ ,

détermine la face de VD dans  $\mathcal{D}$ . En effet les points d'intersection de la médiatrice  $b_{i,j}$  et les arêtes qui sont plus proche du troisième site  $d_k$ , sont contenus dans la cellule  $Vor(d_k)$  et non plus à la frontière des cellules  $Vor(d_i)$  et  $Vor(d_j)$ . Les points d'intersection  $B_{i,j}(l, m)$  de la médiatrice  $b_{i,j} = g_{i|\mathcal{D}} - g_{j|\mathcal{D}}$  avec l'arête  $\mathcal{E}_{l,m} = [S_l, S_m]$  du domaine  $\mathcal{D}$  qui ne sont pas plus proche d'un autre site  $d_k$  sont définis par :

$$\begin{cases} B_{i,j}(l, m) = b_{i,j} \cap \mathcal{E}_{l,m} \text{ et} \\ \forall k \neq i, j, g_{k|\mathcal{D}}(B_{i,j}(l, m)) > g_{i|\mathcal{D}}(B_{i,j}(l, m)) = g_{j|\mathcal{D}}(B_{i,j}(l, m)). \end{cases} \quad (4.17)$$

**Remarque 24.** La deuxième condition de (4.17) signifie que le point d'intersection  $B_{i,j}(l, m)$  de la médiatrice  $b_{i,j}$  avec l'arête  $\mathcal{E}_{l,m}$  est plus proche des sites  $d_i$  et  $d_j$  que de tout autre  $d_k, k \neq i, j$ .

La maille d'une  $d$ -liste  $B^{bis}(\mathcal{D})$  de trois médiatrices et une trisectrice est donnée par un ensemble de trois polyèdres joints le long d'un même segment de droite, qui est isotope à la courbe trisectrice dans  $\mathcal{D}$ , et chaque polyèdre est isotope à la partie de chaque médiatrice déterminant à une face de VD dans  $\mathcal{D}$ .

L'algorithme 9 donne les différentes étapes du calcul de la maille comme suit :

1. Premièrement, nous calculons les deux points d'intersection  $P_1$  et  $P_2$  de la trisectrice avec les faces du domaine  $\mathcal{D}$ , puis leur milieu  $C$ .
2. Pour chaque médiatrice  $b_{i,j}, i < j \in \{1, 2, 3\}$ , tous les points d'intersection  $B_{i,j}(l, m)$  avec les arêtes vérifiant la condition (4.17) seront calculés et rangés dans la liste  $\mathcal{V} = \{V_0, \dots, V_{|\mathcal{V}|-1}\}$  tels que :

$$[V_0, P_1], [V_{p-1}, V_p]_{p=1 \dots |\mathcal{V}|-1} \text{ et } [V_{|\mathcal{V}|-1}, P_2] \subset \partial\mathcal{D},$$

c-à-d : chaque segment  $[V_0, P_1], [V_{p-1}, V_p]$  et  $[V_{|\mathcal{V}|-1}, P_2]$  est contenu dans une face de  $\mathcal{D}$ .

- (a) Ensuite, nous initialisons un polyèdre  $\mathcal{P}_{i,j}$  avec les deux triangles extrêmes :

$$\mathcal{P}_{i,j} = \Delta(P_1, C, V_0) \cup \Delta(V_{|\mathcal{V}|-1}, C, P_2),$$

et

- (b) On ajoute successivement le triangle  $\Delta_p = \Delta(V_{p-1}, C, V_p)$  à  $\mathcal{P}_{i,j}$  :

$$\mathcal{P}_{i,j} := \mathcal{P}_{i,j} \cup \Delta_p, \text{ pour } p = 1, \dots, |\mathcal{V}| - 1$$

A la fin nous obtenons un ensemble de trois polyèdres (isotopes aux faces de VD dans  $\mathbf{D}$ ) joints le long du segment  $[P_1, P_2]$  (isotope à la trisectrice dans  $\mathbf{D}$ ), la figure 4.5 donne une illustration du maillage.

Par exemple si une médiatrice  $b_{i,j}$  possède un seul point d'intersection vérifiant (4.17), c-à-d si  $|\mathcal{V}| = 1$ , alors on a  $V_{|\mathcal{V}|-1} = V_0$  et donc

$$\mathcal{P}_{i,j} = \Delta(V_0, C, P_1) \cup \Delta(V_{|\mathcal{V}|-1}, C, P_2) = \Delta(V_0, P_1, P_2),$$

c'est à dire que le polyèdre  $\mathcal{P}_{i,j}$  est donné par l'unique triangle défini par les points  $P_1, P_2$  et  $V_0$ .

**Remarque 25.** Le même procédé peut être utilisé pour calculer la maille de la  $d$ -liste qui génère une arête dégénérée et le résultat de l'algorithme serait un ensemble de plus de trois polyèdres joints le long d'un segment commun (isotope à l'arête dégénérée dans  $\mathcal{D}$ ).

---

**Algorithme 9. Maillage d'une  $d$ -liste de trois médiatrices et une trisectrice**

---

**Input:**  $B^{bis}(\mathcal{D})$  une  $d$ -listes de trois médiatrices et une trisectrice

**Output:**  $\mathcal{P}_{1,2} \cup \mathcal{P}_{1,3} \cup \mathcal{P}_{2,3}$  l'ensemble de trois polyèdres isotopes aux faces de VD dans  $\mathcal{D}$  joints le long d'un segment commun qui est isotope à la trisectrice  $\mathcal{D}$ .

1. Calculons  $\mathcal{E}(\mathcal{D}) := \left\{ \mathcal{E}_{l,k} = [S_l, S_k], l \neq k \in \{1, \dots, 8\}, \text{arêtes de } \mathcal{D} \right\}$
2. Calculons  $\{P_1, P_2\} := \mathcal{T}_{1,2,3} \cap \partial\mathcal{D}; C := \frac{P_1 + P_2}{2};$
3. **Pour**  $i < j \in \{1, 2, 3\}$  **faire**;
  - (a) Initialisons  $\mathcal{V} := \emptyset$
  - (b) **Pour** chaque arête  $\mathcal{E}_{l,k} \in \mathcal{E}(\mathcal{D})$ , **faire**;
    - i. **si**;  $b_{i,j}(S_l)b_{i,j}(S_k) \leq 0$  **faire**;
      - A. calculons  $B_{i,j}(l, k) := b_{i,j} \cap \mathcal{E}_{l,k};$
      - B. **pour**  $h \neq i, j$ , **faire**;
        - si**  $g_{h|\mathcal{D}}(B_{i,j}(l, k)) \geq g_{i|\mathcal{D}}(B_{i,j}(l, k))$  **faire**;
        - ajoutons  $B_{i,j}(l, k)$  dans  $\mathcal{V};$
        - fin si**;
      - C. **fin pour**;
    - ii. **fin si**;
  - (c) **Fin Pour**;
  - (d) Rangeons  $\mathcal{V} := \{V_0, \dots, V_{|\mathcal{V}|-1}\}$  tels que  $[V_0, P_1], [V_{p-1}, V_p], [V_{|\mathcal{V}|-1}, P_2] \subset \partial\mathcal{D}$
  - (e) Initialisons  $\mathcal{P}_{i,j} := \Delta(P_1, C, V_0) \cup \Delta(V_{|\mathcal{V}|-1}, C, P_2);$
  - (f) **Pour**  $p = 1, \dots, |\mathcal{V}| - 1$  **faire**;
    - $\mathcal{P}_{i,j} := \mathcal{P}_{i,j} \cup \Delta(V_{p-1}, C, V_p);$
  - (g) **Fin Pour**;
4. **Fin Pour**;
5. Faisons tourner  $\mathcal{P}_{1,2} \cup \mathcal{P}_{1,3} \cup \mathcal{P}_{2,3};$

---

Puisque chacun des trois surfaces médiatrices et la courbe trisectrice sont  $t$ -régulières dans le domaine  $\mathcal{D}$ , l'efficacité et l'exactitude de l'algorithme 9 a été ont été assurées grâce à la définition 45, déterminant leur topologie dans le domaine  $\mathcal{D}$  à partir de ses points d'intersection avec la frontière  $\partial\mathcal{D}$ , et à la proposition 10 pour

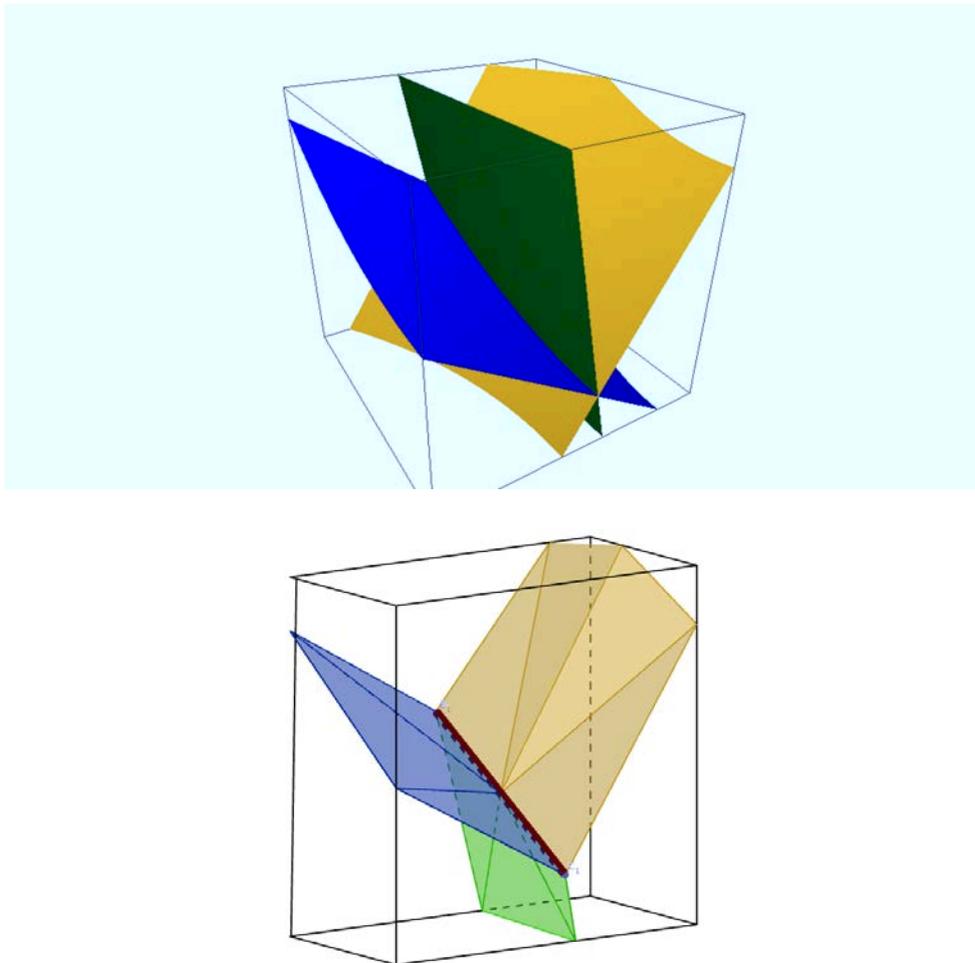


FIGURE 4.5 – La figure correspondant à la  $d$ -liste initiale en haut et à la  $d$ -liste maillée en bas.

la détection des points d'intersection. Et ensuite, comme pour chaque médiatrice, seule la partie délimitée par la trisectrice et les points d'intersection de  $b_{i,j}$  et les arêtes de  $\mathcal{D}$ , qui ne sont pas plus proches d'un autre troisième site  $d_k$ , constitue une face du diagramme de Voronoï, la simple comparaison de la distance de chaque point de  $b_{i,j} \cap \mathcal{E}(\mathcal{D})$  aux trois sites, données par la condition (4.17) permet la détection de tous ces points d'intersection. Il est à noter que l'implication idéale du point  $C$  (milieu du segment isotope à la trisectrice dans le domaine  $\mathcal{D}$ ) a été d'une grande importance dans la construction correcte de la topologie des parties de chaque médiatrice, qui déterminent les face de VD dans  $\mathcal{D}$ , le long du segment isotope à la trisectrice, en joignant les triangles successifs définis par les points d'intersection (4.17), préalablement bien ordonnés ensemble avec les deux points d'intersection de la trisectrice avec  $\partial\mathcal{D}$ .

#### Maillage d'une $d$ -liste $B^{bis}(\mathcal{D})$ de six médiatrices et quatre trisectrices

Pour une  $d$ -liste  $B^{bis}(\mathcal{D})$  avec plus de trois médiatrices et plus d'une seule trisectrice, ce n'est pas toute l'intégralité de une courbe trisectrice  $\mathcal{T}_{h,i,j}$  qui définit une

arête de VD dans  $\mathcal{D}$ . Les courbes trisectrices étant concourantes au point quadrisecteur  $Q_{h,i,j,k}$  (de sites  $d_h, d_i, d_j$  et  $d_k$ ) dans  $\mathcal{D}$ . C'est seulement la portion délimitée par le point  $Q_{h,i,j,k}$  et le point d'intersection de la trisectrice  $\mathcal{T}_{h,i,j}$  avec la face du domaine  $\mathcal{D}$ , qui n'est pas plus proche d'un autre quatrième site  $d_k$ , détermine une arête de VD dans  $\mathcal{D}$ . Ces genre de points  $P_{h,i,j}$  sont déterminés par :

$$\begin{cases} P_{h,i,j} = \mathcal{T}_{h,i,j} \cap \partial\mathcal{D} \\ \forall k \neq h, i, j \ g_{k|_{\mathcal{D}}}(P_{h,i,j}) > g_{h|_{\mathcal{D}}}(P_{h,i,j}) = g_{i|_{\mathcal{D}}}(P_{h,i,j}) = g_{j|_{\mathcal{D}}}(P_{h,i,j}) \end{cases} \quad (4.18)$$

**Remarque 26.** La première condition de (4.18) détermine un point d'intersection  $P_{h,i,j}$  de la trisectrice  $\mathcal{T}_{h,i,j}$  avec la face du domaine  $\mathcal{D}$ , tandis que la deuxième signifie que le point  $P_{h,i,j}$  est plus proche de trois sites  $d_h, d_i$  et  $d_j$ , que de tout autre site  $d_k, k \neq h, i, j$ .

Comme dans ce cas on a exactement quatre portions de trisectrices concourantes au point quadrisecteur  $Q_{1,2,3,4}$  dans  $\mathcal{D}$  et compte tenu de la condition (4.18), on aura :

- quatre demi-portions de trisectrice délimitées par  $Q_{1,2,3,4}$  et les points  $P_{h,i,j}$  vérifiant la condition (4.18), et
- trois parties de médiatrices le long de chacune de quatre demi-portions de trisectrice. Chaque partie de médiatrice est délimitée par une demi-portion  $[Q_{1,2,3,4}, P_{h,i,j}]$  et les points d'intersection  $B_{i,j}(m, l)$  vérifiant (4.17).

Les étapes de maillage de la  $d$ -liste  $B(\mathcal{D})$  par l'algorithme 10 sont :

1. Tout d'abord nous calculons le sommet  $Q_{1,2,3,4}$  et les quatre points d'intersection  $P_{h,i,j}$ , entre de chaque trisectrice  $\mathcal{T}_{h,i,j}$  et la frontière  $\partial\mathcal{D}$ , vérifiant la condition (4.18).

En reliant chaque point  $P_{h,i,j}$  au sommet  $Q_{1,2,3,4}$  par un segment de droite, on obtient un graphe isotope aux arêtes de VD, qui est étoilé autour du sommet  $Q_{1,2,3,4}$ .

2. Ensuite, nous calculons la topologie des trois parties des médiatrices, supportées par chaque demi-portion de trisectrice  $[Q_{1,2,3,4}, P_{h,i,j}]$ , comme suit :

Pour chaque médiatrice  $b_{i',j'}, i' < j' \in \{h, i, j\}$ , leurs points d'intersection  $B_{i',j'}(m, l)$  (s'ils existent) avec les arêtes de  $\mathcal{D}$  vérifiant la condition (4.17) et qui ne sont pas plus proche d'un quatrième site  $d_k$ , seront calculés et ajoutés à une liste  $\mathcal{V}$ .

La liste  $\mathcal{V}$  pourrait être vide plus précisément lorsque aucun point  $P_{h,i,j}$  vérifiant (4.18) n'appartiennent aux arêtes de  $\mathcal{D}$ , et que la médiatrice n'a pas de points d'intersection avec les arêtes vérifiant (4.17).

Cela nous amène à distinguer deux cas possibles :

- (a) Si la liste  $\mathcal{V}$  est non vide, alors

- i. la liste va être rangée par  $\mathcal{V} := \{V_0, \dots, V_{|\mathcal{V}|-1}\}$  de telle sorte que :

$$[V_0, P_{h,i,j}], [V_{p-1}, V_p]_{p=1 \dots |\mathcal{V}|-1} \subset \partial\mathcal{D}$$

c-à-d, chacun des segments  $[V_0, P_{h,i,j}]$  et  $[V_{p-1}, V_p]$  est strictement contenu dans une face du domaine  $\mathcal{D}$

- ii. nous initialisons le polyèdre  $\mathcal{P}_{i',j'} = \Delta(P_{h,i,j}, Q_{1,2,3,4}, V_0)$  et
- iii. on ajoute successivement le triangle  $\Delta_p = \Delta(V_{p-1}, Q_{1,2,3,4}, V_p)$  au  $\mathcal{P}_{i',j'}$  :

$$\mathcal{P}_{i',j'} = \mathcal{P}_{i',j'} \cup \Delta_p, \quad p = 1 \dots |\mathcal{V}| - 1$$

- (b) Si la liste  $\mathcal{V}$  est vide, il existe deux points distincts  $P_{h,i,j}$  et  $P_{h_1,i_1,j_1}$  vérifiant (4.18) qui sont strictement contenus sur une même face du domaine  $\mathcal{D}$  et partageant la médiatrice  $b_{i',j'}$ , c-à-d : tels que

$$h_1 = h, \quad i_1 = i, \quad j_1 \neq j,$$

ou

$$h_1 = h, \quad i_1 \neq i, \quad j_1 = j$$

ou

$$h_1 \neq h, \quad i_1 = i, \quad j_1 = j,$$

et la partie de la médiatrice contribuant à la face de VD dans  $\mathcal{D}$  est prise en sandwich par les deux portions

$$[P_{h_1,i_1,j_1}, Q_{1,2,3,4}] \text{ et } [P_{h,i,j}, Q_{1,2,3,4}].$$

Ainsi donc, le polyèdre qui sera isotope à la médiatrice  $b_{i',j'}$  est réduit à l'unique triangle défini par les points  $P_{h_1,i_1,j_1}$ ,  $P_{h,i,j}$  et  $Q_{1,2,3,4}$  :

$$\mathcal{P}_{i',j'} := \Delta(P_{h_1,i_1,j_1}, P_{h,i,j}, Q_{1,2,3,4})$$

A la fin, le long de chaque segment  $[Q_{1,2,3,4}, P_{h,i,j}]$ , on obtient un ensemble de trois polyèdres joints  $\mathcal{P}^{h,i,j} = \mathcal{P}_{h,i} \cup \mathcal{P}_{h,j} \cup \mathcal{P}_{i,j}$  isotope aux trois parties de médiatrices (qui contribuent aux faces de VD) dans le domaine  $\mathcal{D}$ . Au total, nous obtenons quatre ensembles de ce type qui forment une structure étoilée autour du point  $Q_{1,2,3,4}$  (voir figure 4.6).

**Remarque 27.** Le même processus peut être utilisé pour mailler une  $d$ -liste avec un sommet de VD dégénéré, et le résultat de l'algorithme serait une famille de plus de quatre ensembles de trois polyèdres qui forment une structure étoilée autour du sommet dégénéré  $Q_{1,2,3,\dots,k}$ ,  $k \geq 4$ .

---

**Algorithme 10. Maillage d'une  $d$ -liste de six médiatrices et quatre trisectrices**

---

**Input :**  $B(\mathcal{D})^{bis}$  une  $d$ -liste de six médiatrices et quatre trisectrices.

**Output :**  $\mathcal{P}^{1,2,3} \cup \mathcal{P}^{1,2,4} \cup \mathcal{P}^{2,3,4} \cup \mathcal{P}^{1,3,4}$ , où  $\mathcal{P}^{i,j,k}$  est l'ensemble de trois polyèdres (isotopes aux faces de VD  $b_{i,j}$ ,  $b_{i,k}$  et  $b_{j,k}$  dans  $\mathcal{D}$ ) joints le long d'un segment commun (isotope à la trisectrice  $\mathcal{T}_{i,j,k}$  dans  $\mathcal{D}$ ).

1. Calculons  $\mathcal{E}(\mathcal{D}) := \{ \mathcal{E}_{l,k} = [S_l, S_k], \quad l \neq k \in \{1, \dots, 8\}, \text{ arêtes de } \mathcal{D} \}$ ;
2. Calculons  $\mathcal{Q} := \mathcal{T}_{1,2,3} \cap \mathcal{T}_{1,2,4} \cap \mathcal{T}_{2,3,4} \cap \mathcal{T}_{1,3,4}$ ;
3. **Pour**  $h < i < j \in \{1, 2, 3, 4\}$  **faire**

- (a) Calculons  $P_{h,i,j} := \mathcal{T}_{h,i,j} \cap \partial\mathcal{D}$ ;
- (b) **Pour**  $k \neq h, i, j$ , **faire**
- i. **si**  $g_{k|_{\mathcal{D}}}(P_{h,i,j}) > g_{h|_{\mathcal{D}}}(P_{h,i,j})$  **faire**
    - A. **pour**  $i' < j' \in \{h, i, j\}$  **faire**

**pour** chaque arête  $\mathcal{E}_{l,m} \in \mathcal{E}(\mathcal{D})$ , **faire**

**si**  $b_{i',j'}(S_l)b_{i',j'}(S_m) \leq 0$  **faire**

Initialisons  $\mathcal{V} := \emptyset$ ;

Calculons  $B_{i',j'}(l, m) := b_{i',j'} \cap \mathcal{E}_{l,m}$ ;

**Pour**  $h' \neq i', j'$ , **faire**

**si**  $g_{h'|_{\mathcal{D}}}(B_{i',j'}(l, m)) > g_{i'|_{\mathcal{D}}}(B_{i',j'}(m, l))$  **faire**

ajoutons  $B_{i',j'}(l, m)$  à  $\mathcal{V}$ ;

**fin si**;

**Fin Pour**;
    - fin si**;
  - B. **fin pour**;
  - C. **si**  $\mathcal{V} \neq \emptyset$  alors

rangeons  $\mathcal{V} := \{V_0, \dots, V_{|\mathcal{V}|-1}\}$  tels que  $[V_0, P_{h,i,j}], [V_{p-1}, V_p] \subset \partial\mathcal{D}$

initialisons  $\mathcal{P}_{i',j'} := \Delta(P_{h,i,j}, \mathbf{Q}, V_0)$ ;

**pour**  $p=1, \dots, |\mathcal{V}| - 1$  **faire**

$\mathcal{P}_{i',j'} := \mathcal{P}_{i',j'} \cup \Delta(V_{p-1}, \mathbf{Q}, V_p)$ ;

**fin pour**;
  - D. **sinon**, let  $P_{h_1, i_1, j_1} := \mathcal{T}_{h_1, i_1, j_1} \cap \partial\mathcal{D}$  such that  $[P_{h_1, i_1, j_1}, P_{h, i, j}] \subset \partial\mathcal{D}$
  - E. **fin si**;
- ii. **fin si**;
- (c) Calculons  $\mathcal{P}^{h,i,j} := \mathcal{P}_{h,i} \cup \mathcal{P}_{h,j} \cup \mathcal{P}_{i,j}$ ;
- (d) **Fin Pour**;
4. **Fin Pour**
5. Faisons tourner  $\mathcal{P}^{1,2,3} \cup \mathcal{P}^{1,2,4} \cup \mathcal{P}^{2,3,4} \cup \mathcal{P}^{1,3,4}$ ;

---

Étant donné que dans ce cas il y a six médiatrices qui s'intersectent 3 à 3 le long leur trisectrices correspondantes, qui sont eux aussi, concourantes au point quadrisecteur  $\mathbf{Q}$ , alors nous avons une configuration quadruplée de l'algorithme 9, et donc l'argument de l'exactitude de l'algorithme 9 doit être valable pour l'algorithme. Mais dans ce cas les conditions (4.18) complète l'argumentation pour identifier les points d'intersection de chaque courbe trisectrice avec les faces de domaine  $\mathcal{D}$ , qui

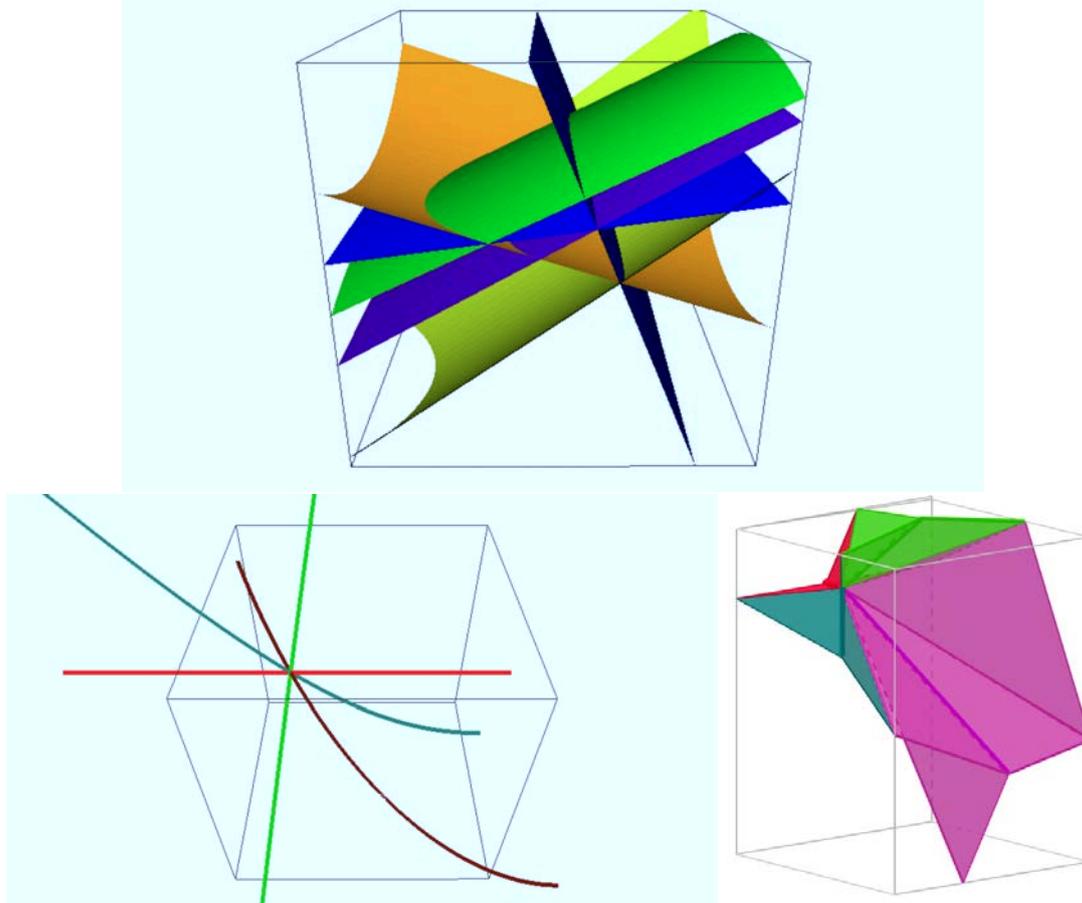


FIGURE 4.6 – Du haut en bas on a la  $d$ -liste initiale de six médiatrices, les quatre trisectrices concurrente au point quadrisecteur et l'ensemble de polyèdres qui représente la maille de la  $d$ -liste initiale.

ne sont pas plus proches d'un autre quatrième site. Il est à noter que le point quadrisecteur  $\mathbb{Q}$  a joué le même rôle que le point  $C$  (dans l'algorithme 9) dans la construction correcte de la topologie de chacune de parties des trois médiatrices, qui contribuent aux face de VD dans  $\mathcal{D}$ , tout au long de chaque segment isotope à la portion de trisectrice, qui contribue à une arête de VD dans  $\mathcal{D}$ .

**Observation sur une  $d$ -liste  $B^{bis}(\mathcal{D})$  avec  $|\mathcal{D}| < \varepsilon$**

Nous venons de présenter les procédures de maillage pour une  $d$ -liste  $B^{bis}(\mathcal{D})$  qui contient respectivement :

- une surface médiatrice ;
- trois surfaces médiatrice qui s'intersectent le long de la courbe trisectrice correspondante et
- six surfaces médiatrices qui s'intersectent 3 à 3 respectivement le long quatre courbes trisectrices correspondantes,

c-à-d une  $d$ -liste qui correspond à la  $d$ -liste  $B(\mathcal{D})$   $b$ -régulière. Mais comme mentionnée à la remarque 23, la  $d$ -liste qui correspond au domaine  $\mathcal{D}$  dont la taille est inférieure au seuil  $\varepsilon$  peut générer des arêtes ou des sommets de VD qui sont dégénérés. De plus, de telles  $d$ -listes peuvent comporter des configurations plus compliquées que l'on pense, notamment c'est le cas où toutes les surfaces médiatrices et/ou toutes les courbes trisectrices n'ont pas d'intersection commune dans le domaine  $\mathcal{D}$ . Pour tenir en compte de cette situation on va établir un **test supplémentaire** qui permet de vérifier si

1. oui :
  - il y'a plus de trois médiatrices qui ont d'intersection commune le long d'une portion de courbe dans  $\mathcal{D}$ , et/ou
  - il y'a plus de quatre trisectrices qui sont concourantes en un point commun dans  $\mathcal{D}$ ,
2. non : il n' y'a pas de telles intersections.
  - Dans le cas du oui, on pourrait se trouver dans la situation d'arêtes et de sommets de VD dégénérés dont le processus de maillage est similaire aux cas réguliers comme expliqué aux remarques 25 et 27. On pourrait aussi se trouver dans la situation où il y'a plus d'un sommet de VD dans le domaine  $\mathcal{D}$ , et en ce moment on va subdiviser  $\mathcal{D}$  pour obtenir des sous-domaines qui contiennent exactement un sommet de VD (normal ou dégénéré), ce qui va permettre de calculer la topologie dans chacun des sous-domaines.
  - Sinon (c-à-d dans le cas du non), la topologie n'est pas très bien connue dans le domaine  $\mathcal{D}$ .

### Reconstruction de cellules de Voronoï

Dans cette dernière partie, nous allons procéder à la reconstruction des cellules de Voronoï en traversant tout en maillant toutes les  $d$ -listes  $B^{bis}(\mathcal{D})$  obtenues à l'issue de l'algorithme 7, qui sont rangées dans le graphe d'adjacence  $\mathcal{G}$ .

- La traversée de  $d$ -listes sera réalisée par application de l'algorithme de parcours en profondeur **DFS** (détaillé aux chapitre 1). On rappelle que l'algorithme **DFS** (voir [33, 62, 70, 77, 81]) est un algorithme de parcours d'un graphe (ou d'une structure arborescente) qui se décrit en recherchant progressivement à partir d'un noeud  $S$  donné du graphe en s'appelant récursivement pour chaque noeud voisin de  $S$ . Cet algorithme est appliqué dans notre cas à un sous graphe  $\mathcal{G}_{l,m}$  du graphe d'adjacence  $\mathcal{G}$  à partir d'une  $d$ -liste  $B^{bis}(\mathcal{D})$  (qui est un noeud de  $\mathcal{G}$ ). Le sous-graphe considéré dans ce cas est celui de toutes les  $d$ -listes qui contiennent une médiatrice  $b_{l,m}$  :

$$\mathcal{G}_{l,m} = \{B^{bis}(\mathcal{D}) \in \mathcal{G} : b_{l,m} \in B^{bis}(\mathcal{D})\}.$$

- Le maillage des  $d$ -listes traversées se fera en utilisant l'un des algorithmes de maillage 8, 9 ou 10 correspondant selon le type de la  $d$ -liste.

Ainsi une approximation de la frontière de la cellule de Voronoï associée à un site  $d_i$  sera reconstruite en traversant et en maillant toutes les  $d$ -liste dans lesquelles, le site  $d_i$  est impliqué. Toute cellule ouverte (c-à-d non bornée) sera complétée par

une partie du bord  $\partial\mathcal{D}_0$  de manière à contraindre la reconstruction à l'intérieur du domaine  $\mathcal{D}_0$ .

Pour des raisons de nécessité et de commodité nous réintroduisons la définition suivante.

**Définition 48.** *On dit qu'un site  $d_i$  appartient à une  $d$ -liste  $B^{bis}(\mathcal{D})$ , si il existe  $j \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $b_{i,j|_{\mathcal{D}}} \in B^{bis}(\mathcal{D})$ .*

Le processus de reconstruction, tel que présenté dans l'algorithme 11, commence par une  $d$ -liste (un noeud)  $B^{bis}(\mathcal{D})$ , quelconque non encore traversée, du graphe  $\mathcal{G}$ , la frontière de la cellule associée à un site  $d_i$  va être reconstruite en traversant et en maillant toutes les  $d$ -listes impliquant  $d_i$  comme suit :

- Pour tout site  $d_i \in B^{bis}(\mathcal{D})$  et tout site  $d_j \in B^{bis}(\mathcal{D}), j \neq i$ , parcourons en profondeur le sous-graphe  $\mathcal{G}_{i,j} \subset \mathcal{G}$ , de toutes les  $d$ -listes qui contiennent la médiatrice  $b_{i,j}$ , à partir de  $B^{bis}(\mathcal{D})$  par : **DFS**( $\mathcal{G}_{i,j}, B^{bis}(\mathcal{D})$ );
- Si au cours de la traversée une  $d$ -liste  $B^{bis}(\mathcal{D})_1$  contient une arête ( $\mathcal{T}_{i,j,j_1}$ ) de VD, alors le site  $d_j$  sera substitué par un autre site  $d_{j_1}, j_1 \neq i$  et nous continuons avec le parcours du sous-graphe  $\mathcal{G}_{i,j_1} \subset \mathcal{G}$ , de toutes les  $d$ -listes qui contiennent la médiatrice  $b_{i,j_1}$  à partir de  $B^{bis}(\mathcal{D})_1$  par : **DFS**( $\mathcal{G}_{i,j_1}, B^{bis}(\mathcal{D})_1$ ); et
- Si au cours de la traversée une  $d$ -liste  $B^{bis}(\mathcal{D})_2$  contient un sommet ( $Q_{i,j,j_1,j_2}$ ) de VD, le site  $d_{j_1}$  sera à son tour substitué par un autre site  $d_{j_2}, j_2 \neq i$ , et nous continuons avec le parcours du sous-graphe  $\mathcal{G}_{i,j_2} \subset \mathcal{G}$ , de toutes les  $d$ -listes qui contiennent la médiatrice  $b_{i,j_2}$ , à partir de  $B^{bis}(\mathcal{D})_2$  par : **DFS**( $\mathcal{G}_{i,j_2}, B^{bis}(\mathcal{D})_2$ ).

Le processus se poursuit ainsi jusqu'à atteindre la  $d$ -liste initiale  $B^{bis}(\mathcal{D})$  pour la deuxième fois.

La cellule  $Vor(d_i)$  est ainsi reconstruite. On répète le même processus pour les tous sites. A la fin on obtient une approximation polyédrique de la cellule du VD associée à chaque site restreinte au domaine  $\mathcal{D}_0$ . Le processus de reconstruction est résumé par l'algorithme 11 suivant :

---

### Algorithme 11. Reconstruction de cellules du VD

---

**Input :**  $\mathcal{G}$  le graphe d'adjacence de  $d$ -listes générant le VD de sites  $\{d_1, \dots, d_n\}$  dans  $\mathcal{D}_0$ .

**Output :**  $\mathcal{VD}$  la partition  $\mathcal{D}_0$  en des cellules maillées de VD associées aux sites  $\{d_1, \dots, d_n\}$

1. **Pour**  $i = 1, \dots, n$  **faire**
2. On initialise  $\mathcal{VD}[i] := \emptyset$ ;
3. **Pour** chaque  $d$ -liste  $B^{bis}(\mathcal{D})$  (noeud) non traversée du graphe  $\mathcal{G}$  **faire**
  - (a) **pour** chaque site  $d_i \in B^{bis}(\mathcal{D})$ , **faire**
    - i. **pour** chaque site  $d_j \in B^{bis}(\mathcal{D}), j \neq i$ , **faire**

A. Parcourons le sous-graphe  $\mathcal{G}_{i,j}$  à partir de  $B^{bis}(\mathcal{D})$  :

$$\mathbf{DFS}(\mathcal{G}_{i,j}, B^{bis}(\mathcal{D})),$$

tout en maillant les  $d$ -listes qui intersectent la médiatrice  $b_{i,j}$  ;

B. **Si** une certaine  $d$ -liste  $B^{bis}(\mathcal{D})_1$  contient une arête de VD, **alors**

$$j_1 := j_1 ;$$

et continuons le parcours avec le sous-graphe  $\mathcal{G}_{i,j_1}$  à partir de  $B^{bis}(\mathcal{D})_1$  :

$$\mathbf{DFS}(\mathcal{G}_{i,j_1}, B^{bis}(\mathcal{D})_1),$$

tout en maillant les  $d$ -listes qui intersectent la médiatrice  $b_{i,j_1}$  ;

C. **Fin SI**

D. **Si** une certaine  $d$ -liste  $B^{bis}(\mathcal{D})_2$  contient un sommet de VD, **alors**

$$j_2 := j_2 ;$$

et continuons le parcours avec le sous-graphe  $\mathcal{G}_{i,j_2}$  à partir de  $B^{bis}(\mathcal{D})_2$  :

$$\mathbf{DFS}(\mathcal{G}_{i,j_2}, B^{bis}(\mathcal{D})_2),$$

tout en maillant les  $d$ -listes qui intersectent la médiatrice  $b_{i,j_2}$ , et continuons le parcours jusqu'à atteindre  $B^{bis}(\mathcal{D})$  pour la deuxième fois ;

E. **Fin SI**

F. Ajoutons la cellule reconstruite à  $\mathcal{VD}[i]$  ;

ii. **fin pour** ;

(b) **fin pour** ;

4. **Fin Pour** ;

5. Faisons retourner  $\mathcal{VD}$  ;

Malgré que l'algorithme développé n'a pas encore été implémenté, nous allons présenter quelques exemples réalisés manuellement.

**Exemple 39.** Nous allons présenter deux exemples réalisés manuellement à l'aide du logiciel Maple pour le calcul des points d'intersections de la médiatrice et de la trisectrice avec le bord du domaine of  $\mathcal{D}$ , ensuite en se servant du logiciel GeoGebra 3D (version 4.9.32.0-JOGL1 sur le système mac os x) pour le maillage manuel des surfaces médiatrices et des courbes trisectrices dans le domaine  $\mathcal{D}$ .

Ainsi pour :

1. l'ensemble

$$\{d_1 = (-5 + t, 3, -2), d_2 = (-3 + t, -4, 4), d_3 = (3 + t, 4, 3), t \geq 0, \}$$

de trois demi-droites parallèles et le domaine

$$\mathcal{D}_0 = [-10, 10] \times [-6, 6] \times [-6, 6],$$

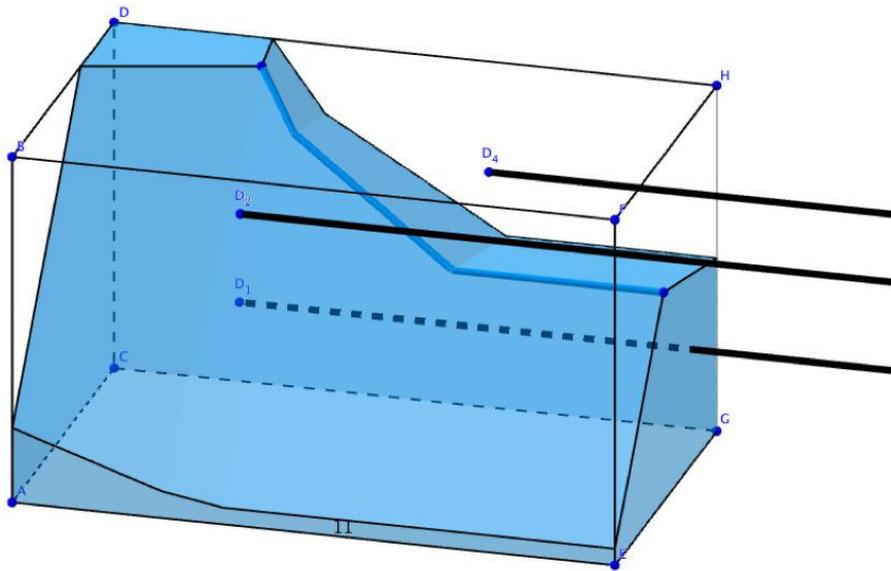


FIGURE 4.7 – La maille de la cellule associée au site  $d_1$  de l'exemple 1.

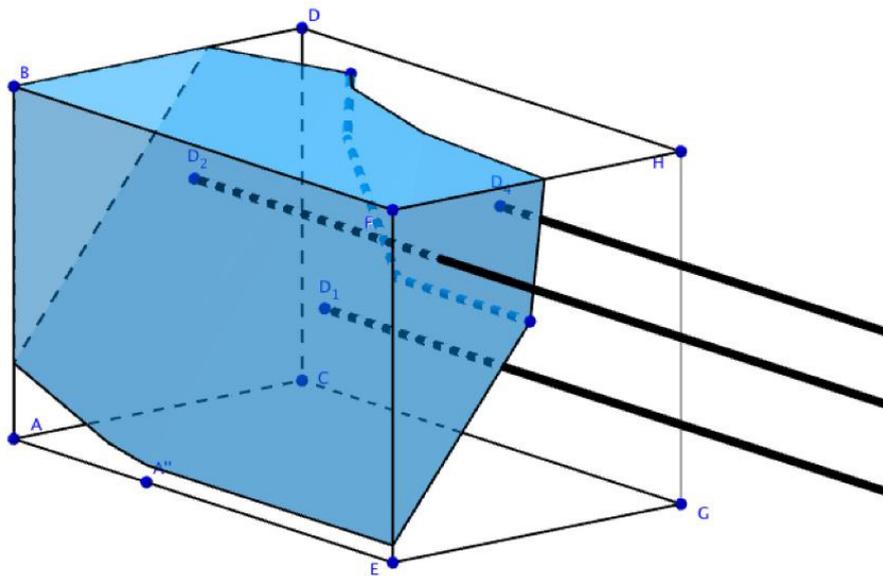


FIGURE 4.8 – La maille de la cellule associée au site  $d_2$  de l'exemple 1.

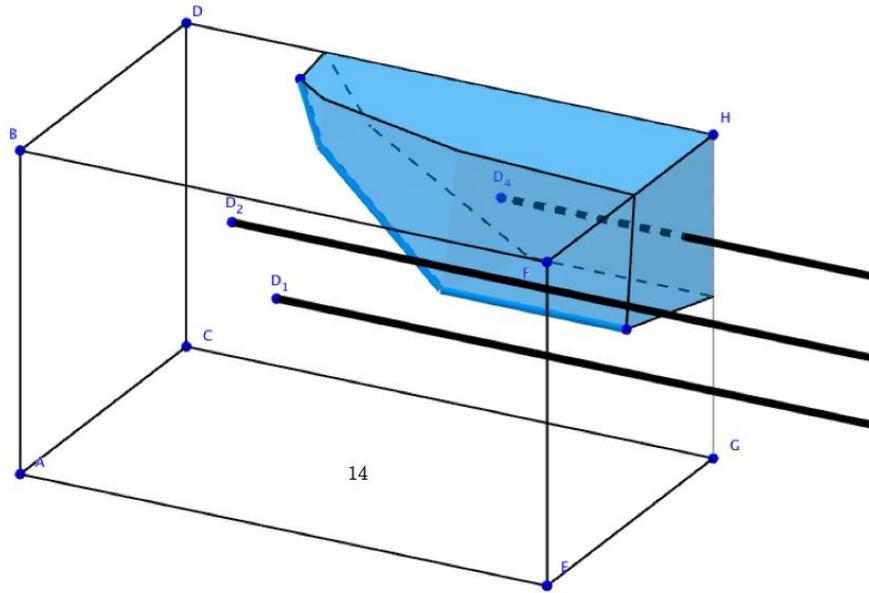


FIGURE 4.9 – La maille de la cellule associée au site  $d_3$  de l'exemple 1.

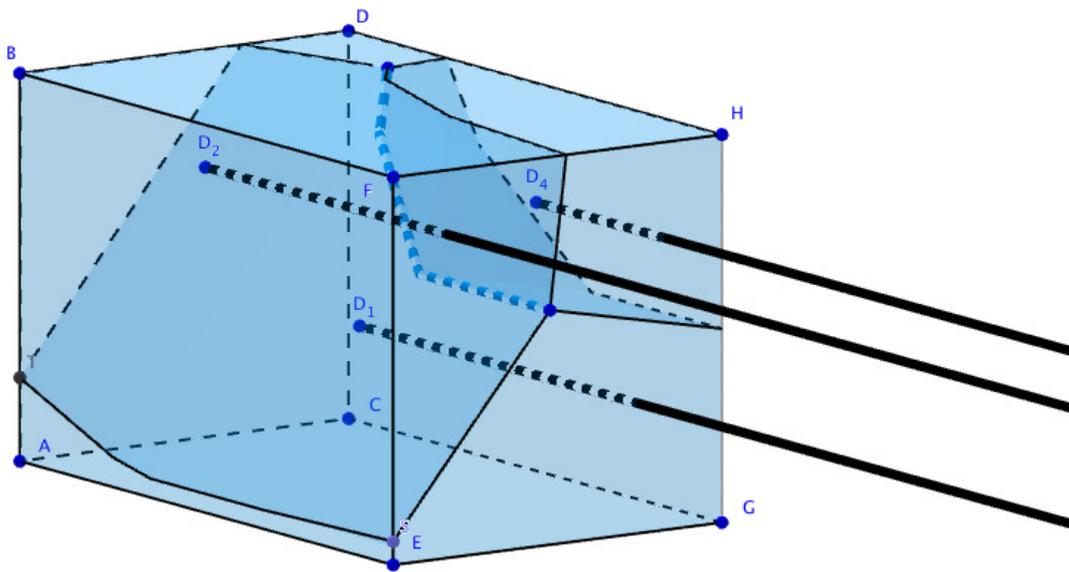


FIGURE 4.10 – La maille du diagramme de Voronoï de  $d_1, d_2$  et  $d_3$  restraint à  $\mathcal{D}_0$  de l'exemple 1.

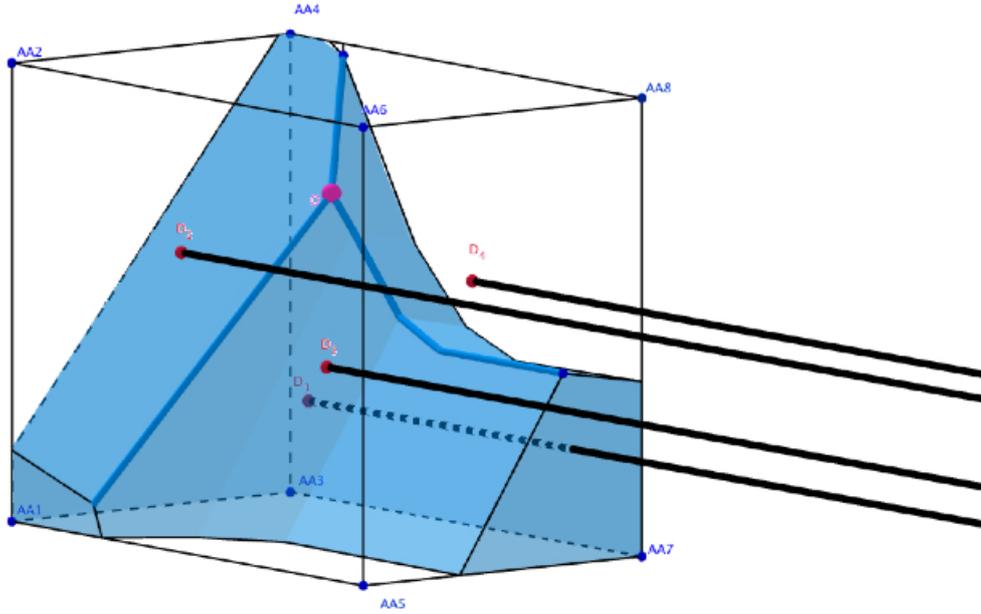


FIGURE 4.11 – La maille de la cellule associée au site  $d_1$  de l'exemple 2.

en calculant 25 points d'intersection, en construisant et connectant 28 triangles, le maillage de chacune des cellules du VD de l'ensemble  $\{d_1, d_2, d_3\}$ , restreint au domaine  $\mathcal{D}_0$ , peut être visualisé séparément, respectivement, dans figures 4.7, 4.8 et 4.9, et ceux de trois cellules sont simultanément présentées à la figure 4.10,

2. l'ensemble

$$\{d_1 = (-5 + t, 3, -2), d_2 = (-3 + t, -4, 4), d_3 = (3 + t, 4, 3) \text{ et } d_4 = (t, 0, 0), t \geq 0\}$$

de quatre demi-droites parallèles et le domaine

$$\mathcal{D}_0 = [-10, 10] \times [-6, 6] \times [-6, 10],$$

en calculant 45 points d'intersection, en construisant et connectant 65 triangles, le maillage de chacune des cellules du VD de l'ensemble  $\{d_1, d_2, d_3, d_4\}$ , restreint au domaine  $\mathcal{D}_0$ , peut être visualisé séparément, respectivement, dans les figures 4.11, 4.12, 4.13, et 4.14, et ceux de quatre cellules sont simultanément présentés à la figure 4.15.

## Conclusion

Au terme de ce dernier chapitre, nous avons développé un nouvel algorithme pour calculer une approximation du diagramme de Voronoï d'une famille finie de demi-droites parallèles restreint à un domaine compact  $\mathcal{D}_0 \subset \mathbb{R}^3$ , pour la distance euclidienne. Ce nouvel algorithme qui est basé sur les méthodes de subdivision du

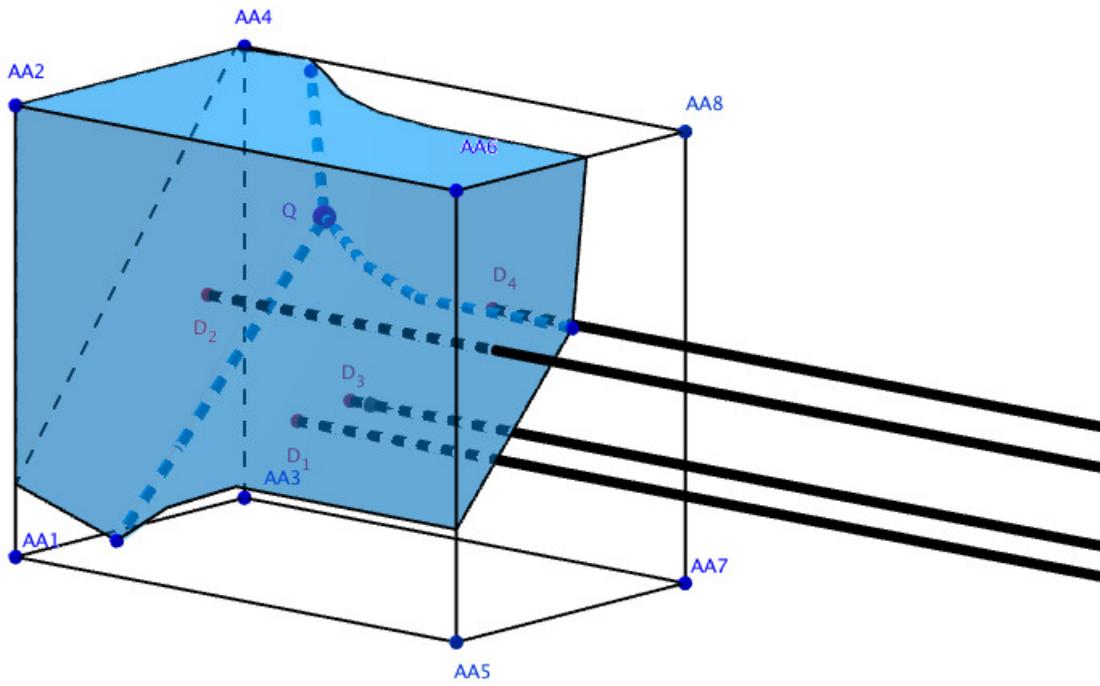


FIGURE 4.12 – La maille de la cellule associée au site  $d_2$  de l'exemple 2.

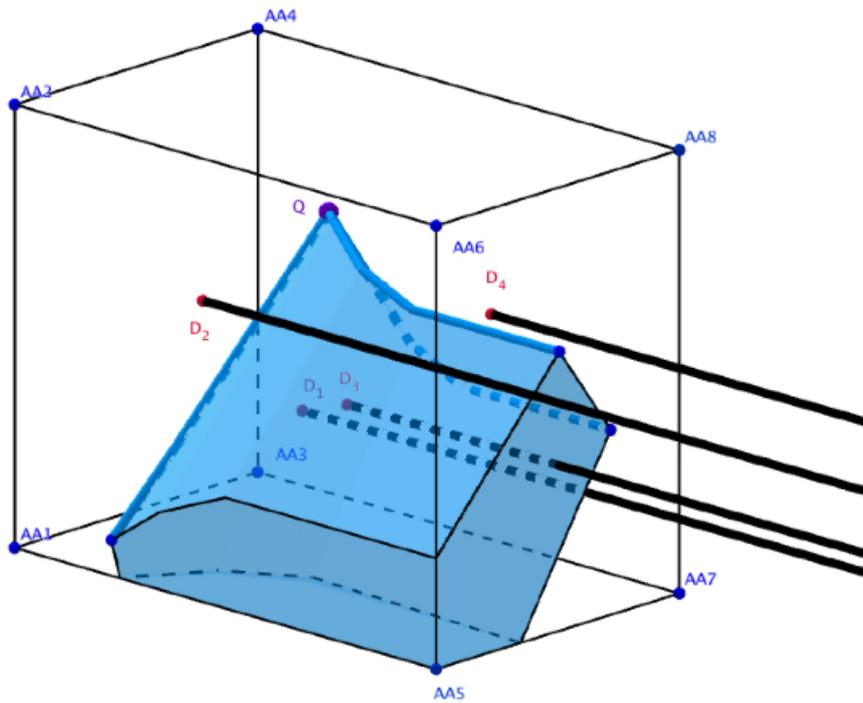


FIGURE 4.13 – La maille de la cellule associée au site  $d_3$  de l'exemple 2.

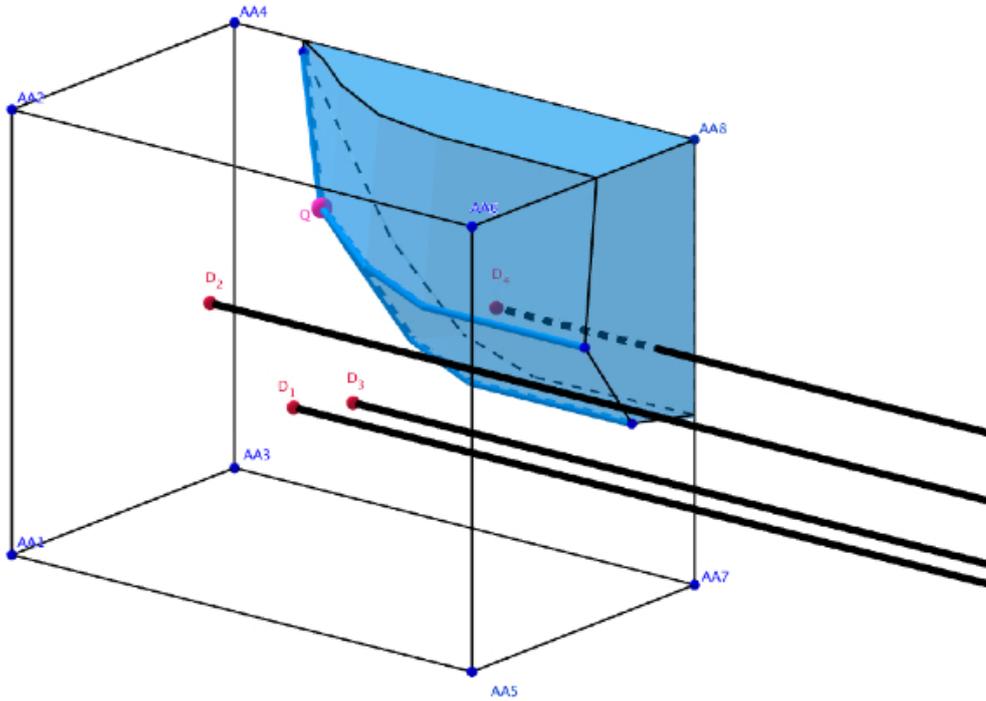


FIGURE 4.14 – La maille de la cellule associée au site  $d_4$  de l'exemple 2.

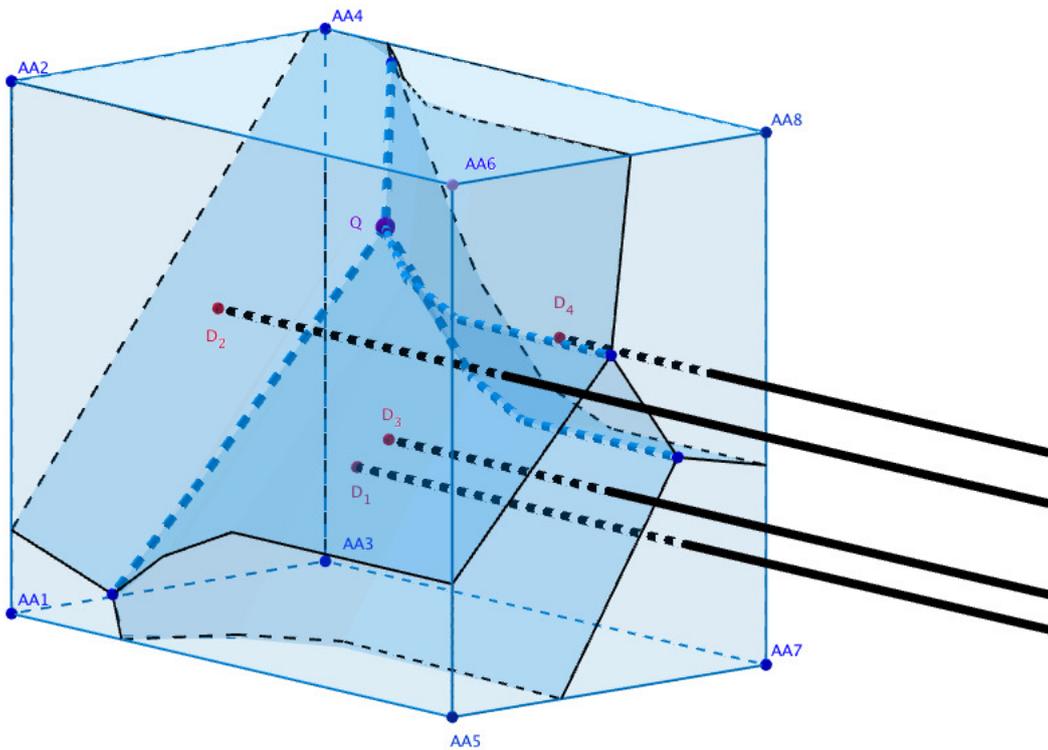


FIGURE 4.15 – La maille du diagramme de Voronoï de  $d_1, d_2$  et  $d_3$  restreint à  $\mathcal{D}_0$  de l'exemple 2.

domaine  $\mathcal{D}_0$  et de maillage de courbes et surfaces algébriques dans un domaine compact, calcule le VD de ces nouveaux type de sites par le MD des fonctions distances associées aux sites. L'algorithme développé calcule une approximation du VD qui est topologiquement équivalente au VD exact dans le cas où la taille de tous sous-domaines  $\mathcal{D}$  issus de la subdivision est plus grande que le seuil  $\varepsilon$  ( $|\mathcal{D}| \geq \varepsilon$ ), ou dans le cas où  $|\mathcal{D}| < \varepsilon$  et que la  $d$ -liste  $B^{bis}(\mathcal{D})$  contient une seule arête dégénérée ou un seul sommet dégénéré, pour  $\varepsilon > 0$ , convenablement très petit. Dans les autres cas la topologie n'est pas déterminée, et donc des méthodes doivent être établie pour s'assurer de l'exactitude de la topologie de VD de façon générale. Cette méthode pourrait être appliquée au cas de tout domaine compact d'un espace métrique dont la fonction distance peut être transformée en une fonction polynomiale. Nous comptons implémenter notre algorithme dans un langage de programmation pour analyser sa complexité pratique. Nous avons en projet de nous intéresser à des cas plus généraux où les fonctions distances ne sont pas euclidiennes et au cas d'un ensemble de demi-droites non parallèles.



# Conclusion et perspectives

Au terme de cette thèse, nous avons développé des nouvelles approches pour calculer des descriptions exactes des courbes médiatrices planes et des surfaces médiatrices et une approximation de la description du diagramme de Voronoï d'une famille de demi-droites parallèles de  $\mathbb{R}^3$ .

En ce qui concerne les médiatrices :

- Nous avons proposé une nouvelle approche algorithmique, pour calculer des paramétrisations algébriques exactes de la médiatrice algébrique de deux objets géométriques réguliers (deux courbes rationnelles planes, deux surfaces rationnelles). Cette approche permet de calculer facilement une paramétrisation de la médiatrice algébrique de deux courbes planes dont l'une est au moins un cercle ou une droite, et des paramétrisations des médiatrices algébriques des paires de surfaces de petit degré telles que : plan-quadrique, plan-tore, cylindre circulaire-quadrique non développable, deux cylindres, deux cônes et cylindre-cône. Dans le cas où la médiatrice possède une paramétrisation rationnelle, les résultats obtenus coïncident avec les résultats déjà existant dans la littérature. Dans les autres cas, les paramétrisations contiennent des racines carrées qui sont bien adaptées aux calculs approchés. Pour le cas de deux courbes planes, en s'inspirant de la méthode introduite par Farouki et Johnstone pour le cas point-courbe, nous avons appliqué un processus d'"élagage" afin de caractériser la médiatrice géométrique à partir de la paramétrisation calculée. Cependant, dans le cas non-rationnel, le calcul des points critiques reste aussi une tâche non évidente. De même pour le cas de deux surfaces rationnelles, régulières, orientées et disjointes, en se basant sur un choix judicieux de sens des vecteurs normaux des surfaces, nous avons développé une méthode d'"élagage" à partir de la paramétrisation calculée. Il y'a lieu de préciser que ces nouvelles approches ont fait ressortir, explicitement, le lien étroit qui existe entre la rationalité de la médiatrice et celle des normes de vecteurs vitesses des deux courbes ou de vecteurs normaux des deux surfaces d'entrées. De plus, ces approches ont permis de montrer que, même dans le cas rationnel, le corps de coefficient, n'est en général pas conservé par la médiatrice (c-à-d : le corp des coefficients d'une paramétrisation de la médiatrice, n'est pas toujours contenu dans le corps des coefficients des représentations de deux objets géométriques d'entrée).
- Nous avons aussi proposé une approche expérimentale à l'aide de couleur dynamique au logiciel GeoGebra, qui permet de caractériser géométriquement et numériquement la courbe médiatrice géométrique d'un point et une courbe rationnelle plane, ou de deux courbes rationnelles planes. Cette méthode, bien

qu'elle ne fournit aucune représentation algébrique, peut donner lieu au calcul de la représentation approximative de courbe médiatrice géométrique à partir de coordonnées de points, ainsi collectées.

En ce qui concerne le diagramme de Voronoï, nous avons proposé un nouvel algorithme pour calculer une approximation du VD d'une famille finie de demi-droites parallèles restreint à un domaine compact  $\mathcal{D}_0$  de  $\mathbb{R}^3$ , pour la distance euclidienne. La méthode développée utilise l'enveloppe inférieure de la famille des carrées des fonctions distances associées aux demi-droites, le processus de subdivision et du maillage, qui donne une approximation du VD restreint au domaine  $\mathcal{D}_0$ . L'approximation du VD obtenu, est topologiquement équivalente au VD exact dans le cas où la taille de tous sous-domaines  $\mathcal{D}$  issus de la subdivision est plus grande que le seuil  $\varepsilon$  ( $|\mathcal{D}| \geq \varepsilon$ ), ou dans le cas où  $|\mathcal{D}| < \varepsilon$  et que la  $d$ -liste  $B^{bis}(\mathcal{D})$  contient une seule arête dégénérée ou un seul sommet dégénéré, pour  $\varepsilon > 0$ , convenablement très petit. Dans les autres cas la topologie n'est pas déterminée.

De nombreuses perspectives restent à explorer :

- Bien qu'il est conjectural que la rationalité de normes de deux vecteurs vitesses des courbes ou de deux vecteurs normaux des surface est une condition nécessaire pour la rationalité de la médiatrice, des critères supplémentaires pour la rationalité de la médiatrice restent toujours à explorer pour une identification et une classification des paires de courbes et de surfaces possédant une médiatrice rationnelle.
- La méthode de couleur dynamique en GeoGebra nécessite d'être intégrée dans le programme source de GeoGebra afin d'accroître la rapidité et la stabilité du processus du scannage.
- Le nouvel algorithme introduit pour le calcul de VD, nécessite d'être implémenté dans un langage de programmation pour une analyse complète de son efficacité. De même des approches plus sophistiquées sont à explorer pour garantir l'exactitude de la topologie de VD de façon générale. L'algorithme doit être aussi étendu au cas de demi-droites non-parallèles et au cas d'un espace métrique non euclidien et dont la distance est transformable en polynôme.

# Bibliographie

- [1] M. A. Abánades, F. Botana, J. Escribano, and J. L. Valcarce, Using Free Open Source Software for Intelligent Geometric Computing, In B. Murgante et al., editors, *ICCSA 2011, Part IV*, Lecture Notes in Computer Science (LNCS) 6785, pp. 353–367. Springer- Verlag Berlin Heidelberg 2011. [85](#)
- [2] S. S. Abhyankar. *Algebraic Space Curves*, University of Montreal Press, 1971. [50](#)
- [3] S.S Abhyankar and C.L. Bajaj. Automatic parameterization of rational curves and surfaces I : Conic and conicoids. *Computer Aided Design*,19(1), 11-14, 1987 a. [71](#)
- [4] S.S Abhyankar and C. L. Bajaj. Automatic parameterization of rational curves and surfaces II : Cubic and cubicoids. *Computer Aided Design*,19(9), 499-502 1987 b. [71](#)
- [5] S.S. Abhyankar and C. L. Bajaj. Automatic parametrization of rational curves and surfaces III : Algebraic plane curves. *Computer Aided Geometric Design* 5, 309–321, 1988. [58](#)
- [6] I. Adamou, M. Fioravanti and L. Gonzalez -Vega. Parametrization of the Bisector of Two Low Degree Surfaces. Submitted. In Raffaele De Amicis and Giuseppe Conti, editors, *Future Vision and Trends on Shapes, Geometry and Algebra*, Springer. [213](#)
- [7] I. Adamou, M. Fioravanti, L. Gonzalez-Vega and B. Mourrain. Bisectors and Voronoï diagram of a family of parallel half-lines. Submitted. *SAGA Official Book*, Springer. [40](#)
- [8] Alfred V. Aho and Jeffrey D. Ullman and J.E. Hopcroft. Data-Structures-and-Algorithms, book, *Addison Wesley Longman Publishing Co., Inc.* ISBN :0-201-000237,1983 [38](#), [91](#)
- [9] L. Alberti and B. Mourrain. Regularity criteria for the topology of algebraic curves and surfaces. In Ralph Martin, Malcom Sabin and Joab Winkler, editors, *Proceedings of IMA international conference on Mathematics of Surfaces XII*, Springer-Verlag Berlin, Heildelbeg, 4647 :1–28, 2007. [74](#), [75](#), [216](#), [225](#), [227](#)
- [10] L. Alberti, G. Comte, and B. Mourrain. Meshing implicit algebraic surfaces : the smooth case. In L.L. Schumaker and M. Maehlen, K. Morken, editors, *Mathematical Methods for Curves and Surfaces : Tromso '04*, pages 11–26. Nashboro, 2005. [74](#)
- [11] J.G. Alcázar, G.M. Díaz-Toca. Topology of 2D and 3D rational curves. *Computer Aided Geometric Design* , 27 (2010) 483–502. [74](#)

- [12] J. G. Alcázar and J. R. Sendra. Computation of the topology of real algebraic space curves. *J. Symbolic Comput.*, 39(6) :719–744, 2005. [74](#)
- [13] François Anton, Darka Mioc, and Marcelo Santos. Exact computation of the topology and geometric invariants of the voronoi diagram of spheres in 3d. *Journal of Computer Science and Technology*, 28 :255–266, 2013. [215](#)
- [14] J.M. Arranz, R. Losada, J.A. Mora and T. Recio, M. Sada, Modeling the cube using GeoGebra. In L. Bu & R. Schoen, editors, *Model-Centered Learning : Pathways to mathematical understanding using GeoGebra* (pp. 119–131). Rotterdam : Sense Publishers. 2011. [85](#)
- [15] E. Arrondo, J. Sendra and J. R. Sendra. *Parametric Generalized Offsets to Hypersurfaces*. *J. Symbolic Computation* (1997) **23**, 267–285 [55](#), [56](#), [68](#)
- [16] D. A. Aruliah, Robert M. Corless, Azar Shakoori, Laureano Gonzalez-Vega, and Ignacio F. Rua. Computing the topology of a real algebraic plane curve whose equation is not directly available. In *Proceedings of the 2007 international workshop on Symbolic-numeric computation*, SNC '07, pages 46–54, New York, NY, USA, 2007. ACM. [103](#)
- [17] F. Aurenhammer and R. Klein. Voronoi diagrams. in J.-R. Sack and J. Urrutia, editors, *Handbook of computational geometry*, North-Holland, Amsterdam, 2000, pp. 201–290. [215](#)
- [18] P.G. Barros, D.A. Pessoa, P.J.S. Leite, V. Teichrieb, and J. Kelner. *Three dimensional Oil Well Planning in Ultra-deep Water*. In Proceedings of Symposium on Virtual Reality (SVR), 2006, Belém, Pará. v. 1. pp. 285–296. [216](#)
- [19] J.L. Bentley. Multidimensional binary search trees used for associative searching. *Communications of the ACM*, 18 :509–517, 1975. [38](#), [89](#), [216](#), [231](#)
- [20] M. Bizzarri and M. Lávička. Algorithm for parameterization of rational curves revisited. *Journal for Geometry and Graphics*, 15(1),1–18 (2011). [58](#)
- [21] Imma Boada, Narcis Coll, Narcis Madern, and J. Antoni Sellares. Approximations of 2d and 3d generalized voronoi diagrams. *Int. J. Comput. Math.*, 85(7) :1003–1022, July 2008. [215](#), [216](#)
- [22] J.-D. Boissonnat, C. Wormser, and M. Yvinec. *Curved voronoi diagrams*. In J.-D. Boissonnat and M. Teillaud, editors, *Effective Computational Geometry for Curves and Surfaces*, pages 67–116. Springer Berlin Heidelberg, 2006. [76](#), [215](#)
- [23] F. Botana, Computing bisectors in a dynamic geometry environment. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 44 :2, 299–310 (2012). [96](#), [132](#)
- [24] F. Botana and M.A. Abánades Interactive Symbolic-Numeric Geometric Tools for Computing Equidistant Curves. *Mathematics and Computers in Simulation*. ACA 2012 . [29](#), [96](#), [114](#), [132](#), [138](#)
- [25] F. Botana and M. A. Abanades, A demo on using the GröbnerCover algorithm for dynamic geometry tasks. In J.R. Sendra and C. Villarino, editors, *EACA 2012, Libro de resúmenes del XIII Encuentro de Álgebra computational y Aplicaciones, The 13rd EACA meeting( Meeting on Computer Algebra and Applications)*, pages 63–66, Alcalá de Henares June 13-15th, 2012. [85](#)

- [26] F. Botana, Z. Kovács and S. Weitzhofer. Implementing theorem proving in Geogebra by using a Singular webservice. In J.R. Sendra and C. Villarino, editors, *EACA 2012, Libro de resúmenes del XIII Encuentro de Álgebra computational y Aplicaciones, The 13rd EACA meeting (Meeting on Computer Algebra and Applications)*, pages 67–69, Alcalá de Henares June 13–15th, 2012. [85](#)
- [27] R. M. Boynton. *Human Color Vision*. Holt, Rinehart and Winston, 1979. [87](#)
- [28] H. Brönnimann, C. Burnikel and S. Pion. Interval arithmetic yields efficient dynamic filters for computational geometry. *Discrete Applied Mathematics*, 109 :25–47, 2001. [216](#)
- [29] B. Buchberger. Applications of Groebner bases in nonlinear computational geometry. In Kapur, D. and Mundy, J., editors, *Geometric Reasoning*, Elsevier Science Publisher, MIT Press, 413–446, 1989. [50](#), [57](#), [175](#)
- [30] F. Chen, D. Cox, and Y. Liu, *The  $\mu$ -basis and implicitization of a rational parametric surface*, Journal of Symbolic Computation, Vol.39, 689–706, 2005. [50](#), [175](#)
- [31] E. Chionh and R. Goldman, *Using multivariate resultants to find the implicit equation of a rational surface*, The visual Computer : International Journal of Computer Graphics, Vol.8, 171–180, 1992. [50](#), [175](#)
- [32] E. Chionh, R. N. Goldman, J. R. Miller, Using multivariate resultants to find intersection of three quadric surfaces. *ACM Transactions on Graphics*, Vol.10, No.4(10) 378–400. [61](#)
- [33] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, and S. Clifford. Introduction to Algorithms, Second Edition. *MIT Press and McGraw-Hill*, 2001. ISBN 0-262-03293-7. Section 22.3 : Depth-first search, pp. 540–549. [38](#), [93](#), [247](#)
- [34] D. Diatta Niang. Calcul effectif de la topologie de courbes et surfaces algébriques réelles. *These, Université de Limoges, Sept. 2009*. [74](#)
- [35] H. Decell, Jr. An application of the Cayley-Hamilton theorem to generalized matrix inversion. *SIAM Review*, 7(4) :526–528, 1965. [80](#), [82](#), [159](#)
- [36] Gema M. Diaz-Toca, Laureano Gonzalez-Vega, and Henri Lombardi. Generalizing Cramer’s rule : Solving uniformly linear systems of equations. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 27(3) :621–637, July 2005. [80](#), [82](#)
- [37] M. P. do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., (1976). [50](#)
- [38] L. Dupont, D. Lazard, S. Lazard, S. Petitjean. Near-optimal parameterization of the intersection of quadrics : I+II+III. *J. Symbolic Computation* 43 (3), 168–232, 2008. [61](#)
- [39] L. Dupont, D. Lazard, S. Lazard, and S. Petitjean. Near-Optimal parameterization of the intersection of quadrics. In *proc of 19th ACM Symposium on Computational Geometry*, San Diego, USA, July 2003. [61](#)
- [40] D. Dutta and C. Hoffman. On the skeleton of simple CSG objects. *ASME J. Mech. Des.* 115 (1993), 87–94. [153](#), [204](#)
- [41] Herbert Edelsbrunner and Raimund Seidel. Voronoi diagrams and arrangements. *Discrete Comput. Geom.*, 1(1) :25–44, April 1986. [80](#), [215](#), [216](#)

- [42] Gershon Elber and Myung-Soo Kim. Bisector curves of planar rational curves. *Computer-Aided Design*, 30(14) :1089–1096, 1998. [96](#)
- [43] Gershon Elber and Myung-Soo Kim. Rational bisectors of CSG primitives. *Proc. 5th ACM/IEEE Symposium on Solid Modeling and Applications*, Ann Arbor, Michigan, (June 1999), 246–257. [96](#), [153](#)
- [44] Gershon Elber and Myung-Soo Kim. Computing Rational Bisectors. *Computer Graphics and Applications*, IEEE, Vol. 19, No. 6, (Nov/Dec 1999), 76–81. [96](#), [108](#), [113](#), [152](#), [153](#)
- [45] Gershon Elber and Myung-Soo Kim. A computational model for non-rational bisector surfaces : curve-surface and surface-surface bisectors. *Proc. Geometric Modeling and Processing 2000*, Hong Kong, (April 2000), 364–372. [96](#), [154](#)
- [46] M. El Kahoui. Topology of real algebraic space curves. *J. Symbolic Comput.*, 43(4) :235–258, 2008. [74](#)
- [47] Ioannis Emiris, Angelos Mantzaflaris, and Bernard Mourrain. Voronoi Diagrams of Algebraic Distance Fields. *Computer-Aided Design*, 45, 2 (2013) 511–516. [215](#), [216](#)
- [48] Ioannis Z. Emiris, Elias P. Tsigaridas, and George M. Tzoumas. Exact delaunay graph of smooth convex pseudo-circles : general predicates, and implementation for ellipses. In *2009 SIAM/ACM Joint Conference on Geometric and Physical Modeling*, SPM '09, pages 211–222, New York, NY, USA, 2009. ACM. [215](#)
- [49] A. van den Essen and J.-T. Yu. The D-resultant, singularities and the degree of unfaithfulness. *Proceedings of the American Mathematical Society* 125 (3), 689–695, 1997. [102](#)
- [50] Chenglin Fan, Jun Luo, Jinfei Liu, and Yinfeng Xu. Half-plane voronoi diagram. In *Proceedings of the 2011 Eighth International Symposium on Voronoi Diagrams in Science and Engineering*, ISVD '11, pages 127–133, Washington, DC, USA, 2011. IEEE Computer Society. [215](#)
- [51] G. Farin. *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*. Third Edition. Academic Press, 1993 [50](#)
- [52] Rida T. Farouki. *Pythagorean-Hodograph Curves : Algebra and Geometry Inseparable*. Springer Berlin Heidelberg New York, 2008. [55](#), [56](#)
- [53] Rida T. Farouki and John K. Johnstone. Computing point/curve and curve/curve bisectors. In *Design and Application of Curves and Surfaces : Mathematics of Surfaces V.*, ed. R. B. Fisher. Oxford University Press, 1994, pp. 327–354. [96](#), [106](#), [114](#), [155](#)
- [54] Rida T. Farouki and John K. Johnstone. The bisector of a point and a plane parametric curve. *Comput. Aided Geom. Des.*, 11(2) :117–151, April 1994. [96](#), [97](#), [98](#), [99](#), [100](#), [121](#), [155](#)
- [55] R.T. Farouki, C.A. Neff, M.A. O'Connor. Automatic parsing of degenerate quadric-surface intersections. *ACM Trans. Graph.* 8 (1989) 174–203. [61](#)
- [56] Rida T. Farouki and C.A. Neff. Analytiic properties of plane offset curves. *Computer Aided Geometric Design*, 7(1-4) :83–99, 1990. [98](#)

- [57] Rida T. Farouki and R. Ramamurthy. Specified-precision computation of curve/curve bisectors. *International Journal of Computational Geometry & Applications*, Vol. 8, Nos. 5/6 (1998) 599–617 [96](#)
- [58] R.T. Farouki, R. Ramamurthy, Degenerate point/curve and curve/curve bisectors arising in medial axis computations for planar domains with curved boundaries, *Computer Aided Geometric Design* 15 (1998) 615–635 [98](#), [138](#)
- [59] M. Fioravanti, L. Gonzalez-Vega, I. Necula. Computing the intersection of two ruled surfaces by using a new algebraic approach. *Journal of Symbolic Computation*, Vol. 41, No. 11, 1187-1205, 2006. [61](#)
- [60] J. D. Foley, A. van Dam, S. K. Feiner, and J. F. Hughes. Computer Graphics : Principles and Practice. *The Systems Programming Series*. Addison-Wesley Publishing Company, New York, 2nd edition, 1990. [87](#)
- [61] Steven Fortune. Handbook of discrete and computational geometry. chapter Voronoi diagrams and Delaunay triangulations, pages 377–388. CRC Press, Inc., Boca Raton, FL, USA, 1997. [215](#)
- [62] H. de Fraysseix, P. Ossona de Mendez and P. Rosenstiehl. Trémaux Trees and Planarity, *International Journal of Foundations of Computer Science* 17 (5) : 1017–1030, 2006, doi :10.1142/S0129054106004248 (<http://dx.doi.org/10.1142/93>), [216](#), [232](#), [247](#)
- [63] J.T. Fredrich, D. Coblenz, A.F. Fossum, B.J. Thorne. *Stress Perturbations Adjacent to Salt Bodies in the Deepwater Gulf of Mexico*, SPE Annual Technical Conference and Exhibition, 5-8 October 2003, Denver, Colorado. [216](#)
- [64] G. Gatellier, A. Labrouzy, B. Mourrain and J.-P.Tecourt. Bisectors and Voronoi diagram of a family of parallel half-lines. In *SAGA official Book*, xxxxxx Springer-Verlag, 2013. [40](#)
- [65] G. Gatellier, A. Labrouzy, B. Mourrain and J.-P.Tecourt. Computing the topology of 3-dimensional algebraic curves. In *Computational Methods for Algebraic Spline Surfaces*, pages 27–44. Springer-Verlag, 2004. [74](#)
- [66] F. Gerritsen. *Evolution in Color*. Schiffer Publishing Ltd., West Chester, PA. originally published in Dutch in 1982 as *Evolutie van de Kleurenleer*. Translation by Dr. Edward Force and Ruth de Vriendt, 1988 . [86](#)
- [67] A. J.P. Gomes, I. Voiculescu, J. Jorge, B. Wyvill and C. Galbraith. *Implicit Curves and Surfaces : Mathematics, Data Structures and Algorithms*. Springer Dordrecht Heidelberg London New York, 2009, DOI 10.1007/978-1-84882-406-5 [16](#), [89](#), [90](#)
- [68] L. Gonzalez-Vega. Implicitization of parametric curves and surfaces by using multidimensional Newton formulae. *Journal of Symbolic Computation*, 23, no.2–3, 137–151 (1997). [50](#), [175](#)
- [69] L. González-Vega and Ioana Necula. Efficient topology determination of implicitly defined algebraic plane curves. *Comput. Aided Geom. Design*, 19(9) :719–743, 2002. [74](#)
- [70] M. T. Goodrich. Algorithm Design :Foundations, Analysis, and Internet Examples. *Wiley*, 2001, ISBN 0-471-38365-1. [93](#), [247](#)

- [71] J. Gutierrez and R. Rubio, and J-T. Yu. D-resultant for rational functions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 130 (8), 2237–2256, 2002. [102](#)
- [72] R. Hall. *Illumination and Color in Computer Generated Imagery*. Springer-Verlag, New York, 1988. [87](#)
- [73] I. Hanniel and G. Elber. Computing the voronoi cells of planes, spheres and cylinders in  $\mathbb{R}^3$ . *Computer Aided Geometric Design*, 26(6) :695 – 710, 2009. [215](#)
- [74] M. Hasan and M.L. Gavrilova. *A Geometric Approach to Drill Path Collision Avoidance*, Proceedings of the 2010 International Symposium on Voronoi Diagrams in Science and Engineering (ISVD'10), pp.244–253. [216](#)
- [75] M. Hemmer, O. Setter, and D. Halperin. *Constructing the Exact Voronoi Diagram of Arbitrary Lines in Three-Dimensional Space*, In Berg, Mark and Meyer, editors, *Algorithms @ ESA 2010* Springer Berlin Heidelberg 6346 :398–409, 2010. [216](#)
- [76] Kenneth E. Hoff, III, John Keyser, Ming Lin, Dinesh Manocha, and Tim Culver. Fast computation of generalized voronoi diagrams using graphics hardware. In *Proceedings of the 26th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, SIGGRAPH '99, pages 277–286, New York, NY, USA, 1999. ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co. [215](#), [216](#)
- [77] J. Hopcroft and R. E. Tarjan. Efficient planarity testing. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 21 (4) : 549–568, 1974 [38](#), [93](#), [216](#), [232](#), [247](#)
- [78] D. Kim and D-S. Kim. *Region-expansion for the Voronoi diagram of 3D spheres*, Computer-Aided Design 38 (2006) 417–430. [215](#)
- [79] Myung-Soo Kim, Gershon Elber, and Joon-Kyung Seong. Geometric computations in parameter space. In *Proceedings of the 21st spring conference on Computer graphics*, SCCG '05, pages 27–32, New York, NY, USA, 2005. ACM. [156](#)
- [80] R. Klein. Lecture Notes in Computer Science : Concrete and Abstract Voronoi Diagrams, G. Goos and J. Hartmanis, editors, Springer-Verlag 1989. [215](#)
- [81] D.E. Knuth, The Art Of Computer Programming : fundamental algorithms. Vol 1. 3rd ed. *Boston : Addison-Wesley*, 1997 ISBN 0-201-89683-4, OCLC 155842391, ([//www.worldcat.org/oclc/155842391](http://www.worldcat.org/oclc/155842391)) , [http ://www-cs-faculty.stanford.edu/~knuth/taocp.html](http://www-cs-faculty.stanford.edu/~knuth/taocp.html) [93](#), [247](#)
- [82] V. Koltun and M. Sharir. Three dimensional euclidean Voronoi diagrams of lines with a fixed number of orientations, *SIAM J. COMPUT.* Vol. 32, No. 3, pp. 616–642, 2003.
- [83] J.C. Lafon and G. Blanc. *Meshing and Visualization of Oilfields*, IEEE Conference on Information Visualization (IV'97). [216](#)
- [84] S. Lazard, L.M. Penaranda, S. Petitjean, Intersecting quadrics : An efficient and exact implementation, in *Proc. 20th Annu. ACM Sympos. Comput. Geom.*, 2004, pp. 419–428. [61](#)

- [85] H. Ledoux. Computing the 3d voronoi diagram robustly : An easy explanation. In *Voronoi Diagrams in Science and Engineering, 2007. ISVD '07. 4th International Symposium on*, pages 117 –129, july 2007. 215
- [86] J.Z. Levin. Aparametric Algorithm for drawing pictures of solid objects composer of quadric surfaces. *Commun. ACM* 19 (10) : 555–563, Oct. 1976. 61
- [87] Yong-Ming Li and Robert J. Cripps. Identification of inflection points and cusps on rational curves. *Computer Aided Geometric Design*, 14(5) :491 – 497, 1997. 101
- [88] Chen Liang, Bernard Mourrain, and Jean-Pascal Pavone. Subdivision methods for the topology of 2d and 3d implicit curves. In Bert Jüttler and Ragni Piene, editors, *Geometric Modeling and Algebraic Geometry*, pages 199–214. Springer Berlin Heidelberg, 2008. 74, 75, 216, 225, 226
- [89] R. Losada : *Propiedad de color dinámico en GeoGebra*, [http ://geogebra.es/color\\_dinamico/color\\_dinamico.html](http://geogebra.es/color_dinamico/color_dinamico.html) . 87, 132
- [90] R. Losada, T. Recio and J. L. Valcarce. Equal bisectors at a vertex of a triangle. B. Murgante et al. , editors, *ICCSA 2011, Part IV*, Lecture Notes in Computer Science (LNCS) 6785, pp. 328–341. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg 2011. 85, 132
- [91] W. Lü Rationality of the offsets to algebraic curves and surfaces. *Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities*, 9 :265–277, 1994. 68, 69, 70, 172, 187
- [92] W. Lü Offset-rational parametric plane curves. *Comput. Aided Geom. Design*, 12(1995) 601–616.
- [93] W. Lü. Rational parameterization of quadrics and their offsets. *Computing*, 57 :135–147, 1996. 68, 69, 70, 172
- [94] Dinesh Manocha and John F. Canny. Detecting cusps and inflection points in curves. Technical Report UCB/CSD-89-549, EECS Department, University of California, Berkeley, Jan 1990. 101
- [95] Dinesh Manocha. Algorithms for Intersecting Parametric and Algebraic Curves II : Multiple Intersections. *Graphical Models and Image Processing*. Vol. 57, No. 2, March, pp. 81–100, 1995. 101
- [96] J.R. Miller, R.N. Goldman. Geometric algorithms for detecting and calculating all conics sections in the intersection of any two natural quadric surfaces. *Graph. Models Image Process.* 57 (1) (1995) 55–66. 61
- [97] R. E. Moore. Interval Analysis. *Prentice Hall, Englewood Cliffs*, NJ, 1966. 216
- [98] R. B. Norman. *Electronic Color : the art of color applied to graphic computing*. Van Nostrand Reinhold,1990. 86
- [99] Atsuyuki Okabe, Barry Boots, Kokichi Sugihara, and Sung Nok Chiu. *Spatial Tessellations : Concepts and Applications of Voronoi Diagrams*. Series in Probability and Statistics. John Wiley and Sons, Inc., 2nd ed. edition, 2000. 215

- [100] Jean Pelletier-Thibert, *Charles Pierre Trémaux (1859–1882) École Polytechnique of Paris (X :1876), French engineer of the telegraph in Public conference, December 2, 2010 - in Académie de Mâcon (Burgundy - France) - (Abstract published in the Annals academic, March 2011 - ISSN : 0980-6032)*
- [101] R. Penrose, A generalized inverse for matrices. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 51 :406–413 (1955). [90](#)
- [102] Sonia Pérez-Díaz. Computation of the singularities of parametric plane curves. *Journal of Symbolic Computation*, 42(8) :835 – 857, 2007. [82](#)
- [103] M. Peternell. Geometric properties of bisector surfaces. *Graphical Models*, 62(3) :202–236, 2000. [101](#), [103](#)
- [104] M. Peternell. Sphere-geometric aspects of bisector surfaces. *AGGM 2006*, Barcelona. [96](#), [113](#), [152](#), [153](#), [154](#), [172](#)
- [105] H. Pottmann. Rational curves and surfaces with rational offsets. *Computer Aided Geometric Design*, 12 (1995) 175–192 [153](#)
- [106] T. Recio and J.R. Sendra, Real parametrizations of real curves. *J. Symbolic Computation* 23/23, 241–254,1997. [55](#), [56](#), [68](#), [69](#)
- [107] Sedgewick, Robert Algorithms in C++ : Graph Algorithms (3rd ed.), *Pearson Education*, 2002 ISBN 978-0-201- 36118-6. [58](#)
- [108] D. F. Rogers. *Procedural Elements for Computer Graphics*. McGraw-Hill, 1985. [38](#)
- [109] T. Sakkalis and R. Farouki. Singular Points of Algebraic Curves. *J. Symbolic Computation* (1990) 9, 405–421. [87](#)
- [110] T. W. Sederberg, D. Anderson, and R. Goldman, *Implicit representation of parametric curves and surfaces*, Computer Vision, Graphics, and Image Processing, Vol.28, 72–84, 1984. [50](#), [57](#), [175](#)
- [111] T. Sederberg. *Improperly parametrized rational curves*. Computer Aided Geometric Design. Vol. 3 (1986), 67–75. [50](#)
- [112] T. W. Sederberg and F. Chen. *Implicitization using moving curves and surfaces*, Proceedings of Siggraph’1995, 301–308, 1995. [50](#), [57](#), [175](#)
- [113] J.R. Sendra and F. Winkler. Symbolic parametrization of curves. *J. Symbolic Computation* 12/6, 607–631, 1991. [58](#)
- [114] J. K. Seong, E. Cohen and G. Elber. Voronoi diagram computations for planar NURBS curves. *Proceedings of the 2008 ACM symposium on Solid and physical modelling*, June 02-04, 2008, Stony Brook, New York . [215](#)
- [115] O. Setter, M. Sharir, and D. Halperin. Constructing two-dimensional voronoi diagrams via divide-and-conquer of envelopes in space. In M. L. Gavrilova and C. J. K. Tan, editors, *Transactions on computational science IX*, pages 1–27. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2010. [216](#)
- [116] M. Sharir. Almost tight upper bounds for lower envelopes in higher dimensions. *Discrete Comput. Geom.*, 12 : 327–345, 1994. [76](#)

- [117] L. Shen, F. Chen, and J. Deng. *Implicitization and parametrization of quadric and cubic surfaces by  $\mu$ -bases*, Computing, Vol.5, 131–142, 2006. 50, 175
- [118] Even Shimon Graph Algorithms , *Cambridge University Press*, pp. 46–48, 2011 ISBN 978-0-521-73653-4 38, 91
- [119] Huahao Shou, Tao Li, and Yongwei Miao. The bisector of a point and a plane algebraic curve. In Qihai Zhou, editor, *Theoretical and Mathematical Foundations of Computer Science*, volume 164 of *Communications in Computer and Information Science*, pages 449–455. Springer Berlin Heidelberg, 2011. 97, 152
- [120] J. L. Thorogood, T. W. Hogg, and H. S. Williamson. *Application of risk analysis methods to subsurface well collisions*, SPE Drill. Eng., vol. 6, no. 4, Dec. 1991, pp. 299–304, doi :10.2118/23941-PA. 216
- [121] Y.H. Tsao, C. R. Dawson, and D. W. Ure. *Well collision avoidance*, U.S. Patent 5,901,795 , May 11, 1999. 216
- [122] M. van Hoeij. Rational parametrizations of algebraic curves using a canonical divisor. *J. Symbolic Computation* 23/23, 209–227, 1997. 58
- [123] I. Wald and V. Havran. On building fast kd-Trees for Ray Tracing, and on doing that in  $O(N \log N)$ . In *Proceedings of the 2006 IEEE Symposium on Interactive Ray Tracing*, pages 61–69, 2006. 89
- [124] J. R. Walker. Algebraic Curves. *Princeton University Press*, New Jersey, 1950. 58
- [125] Z. Wang and T. A. Inglis, *Planning directional wells through a high density cluster of existing wells*, SPE Drill. Eng., vol. 5, no. 4, Dec. 1990, pp. 291–293, doi :10.2118/17594-PA. 216
- [126] W. Wang, R. Goldman, and C. Tu. Enhancing Levin’s method for computing quadric-surface intersections. *Computer Aided Geometric Design* 20 (2003) 401–422. 61
- [127] T.M. Warren. Directional Survey and Proximity Log Analysis of a Downhole Well Intersection. *JPT* (December 1981) 2351–2362. 216
- [128] Wikipédia, Juin 2013, [http://en.wikipedia.org/wiki/Depth-first\\_search](http://en.wikipedia.org/wiki/Depth-first_search). 38, 91
- [129] Wikipédia, Juin 2013. [https://en.wikipedia.org/wiki/K-d\\_tree](https://en.wikipedia.org/wiki/K-d_tree). 89
- [130] F. Winkler. Polynomial Algorithms in Computer algebra. *Springer-Verlag, Wien*, 1996. 58
- [131] Using Sage to symbolically compute the bisector of a point and a curve in GeoGebra <http://webs.uvigo.es/fbotana/BisectorsPointCurveGeneral/>. 132



# Annexe A

## Annexes

### A.1 Le code Maple du test de régularité de l'algorithme 7

Dans cette section, nous allons donner le code Maple du test de régularité utilisé dans l'algorithme 7 (chapitre 4) pour la subdivision. Le test est constitué d'un certain nombre de tests et de procédures intermédiaires que nous allons décrire successivement. Nous allons tout d'abord donner les procédures relative aux calculs de la médiatrice, la trisectrice et le quadrisecteur.

#### A.1.1 Le code Maple pour le calcul des représentations algébriques de la médiatrice, la trisectrice et le quadrisecteur

##### 1. la représentation implicite de la surface médiatrice de deux sites

La procédure intitulée **BIS**, permet de calculer la représentation implicite de la surface médiatrice de deux sites

$$d_1 = (x_1 + t, y_1, z_1), d_2 = (x_2 + t, y_2, z_2)t \geq 0$$

avec  $x_1 < x_2$ , induisant les distances :

$$g_1(x, y, z) = \begin{cases} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 & \text{si } x < x_1, \\ (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 & \text{si } x \geq x_1. \end{cases}$$
$$g_2(x, y, z) = \begin{cases} (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 & \text{si } x < x_2, \\ (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 & \text{si } x \geq x_2. \end{cases}$$

Cette procédure dont le code Maple s'ensuit, prend les deux fonctions distances associées aux sites sous forme d'une liste de deux listes comme suit :

$$G2 = \left[ \left[ x_1, (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2, (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 \right], \right. \\ \left. \left[ x_2, (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2, (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 \right] \right],$$

et donnera l'équation implicite de la surface médiatrice sous la forme (4.7).

```

BIS := proc( G2::(listlist(ratpoly)) )
  local x1, x2, x3, T123, b12, b13, b23, d1, d2, d3;
  d1 := G2[1];
  d2 := G2[2];
  x1 := d1[1];
  x2 := d2[1];
  b12 := piecewise(x < x1, simplify(d1[2] - d2[2]), x1 <= x and x < x2,
  simplify(d1[3] - d2[2]), x2 <= x, simplify(d1[3] - d2[3]));
  b12
end proc

```

**BIS**([[-3, (x + 3)<sup>2</sup> + (y + 4)<sup>2</sup> + (z - 4)<sup>2</sup>, (y + 4)<sup>2</sup> + (z - 4)<sup>2</sup>],  
[0, x<sup>2</sup> + y<sup>2</sup> + z<sup>2</sup>, y<sup>2</sup> + z<sup>2</sup>]]);

$$\begin{cases} 6x + 8y - 8z + 41 & x < -3 \\ -x^2 + 8y - 8z + 32 & -3 \leq x \text{ and } x < 0 \\ 8y - 8z + 32 & 0 \leq x \end{cases}$$

## 2. La paramétrisation de la courbe trisectrice de trois sites

La procédure intitulée **TRIS**, permet de calculer la paramétrisation de la courbe trisectrice de trois sites

$$d_1 = (x_1 + t, y_1, z_1), d_2 = (x_2 + t, y_2, z_2), d_3 = (x_3 + t, y_3, z_3), t \geq 0$$

avec  $x_1 < x_2 < x_3$ , induisant les distances :

$$g_1(x, y, z) = \begin{cases} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 & \text{si } x < x_1, \\ (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 & \text{si } x \geq x_1. \end{cases}$$

$$g_2(x, y, z) = \begin{cases} (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 & \text{si } x < x_2, \\ (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 & \text{si } x \geq x_2. \end{cases}$$

$$g_3(x, y, z) = \begin{cases} (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2 & \text{si } x < x_3, \\ (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2 & \text{si } x \geq x_3. \end{cases}$$

Cette procédure dont le code Maple s'ensuit, prend les trois fonctions distances associées aux sites sous forme d'une liste de trois listes suivante :

$$G3 = \begin{bmatrix} [x_1, (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2, (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2], \\ [x_2, (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2, (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2], \\ [x_3, (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2, (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2] \end{bmatrix},$$

et donnera la paramétrisation de la trisectrice sous la forme (4.12).

```

TRIS := proc(G3::(listlist(ratpoly)))
  local x1, x2, x3, T123, b12, b13, b23, d1, d2, d3;
  d1 := G3[1];
  d2 := G3[2];
  d3 := G3[3];
  x1 := d1[1];
  x2 := d2[1];
  x3 := d3[1];
  b12 := [op(2, BIS([d1, d2])), op(4, BIS([d1, d2])), op(6,
  BIS([d1, d2]))];
  b13 := [op(2, BIS([d1, d3])), op(4, BIS([d1, d3])), op(6,
  BIS([d1, d3]))];
  b23 := [op(2, BIS([d2, d3])), op(4, BIS([d2, d3])), op(6,
  BIS([d2, d3]))];
  T123 := piecewise(x < x1, Vector([x, op(2, solve({b12[1], b13
  [1]}, {y, z})[1]), op(2, solve({b12[1], b13[1]}, {y, z})[2])]),
  x1 <= x and x < x2, Vector([x, op(2, solve({b12[2], b13[2]
  }, {y, z})[1]), op(2, solve({b12[2], b13[2]}, {y, z})[2])]),
  x2 <= x and x < x3, Vector([x, op(2, solve({b12[3], b23[2]},
  {y, z})[1]), op(2, solve({b12[3], b23[2]}, {y, z})[2])]), x3
  <= x, Vector([x, op(2, solve({b13[3], b23[3]}, {y, z})[1]),
  op(2, solve({b13[3], b23[3]}, {y, z})[2])]);
  T123
end proc

```

$$\mathbf{TRIS} \left( \left[ \begin{array}{l} [-3, (x+3)^2 + (y+4)^2 + (z-4)^2, (y+4)^2 + (z-4)^2, \\ [0, x^2 + y^2 + z^2, y^2 + z^2], \\ [3, (-3+x)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2, (y-4)^2 + (z-3)^2] \end{array} \right] \right);$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} x \\ -3/4x + \frac{13}{56} \\ \frac{75}{14} \end{array} \right] \quad x \leq -3 \\ \left[ \begin{array}{l} x \\ 5/7 + \frac{3}{56}x^2 - 3/7x \\ -3/7x + \frac{33}{7} - 1/14x^2 \end{array} \right] \quad -3 < x \text{ and } x \leq 0 \\ \left[ \begin{array}{l} x \\ 5/7 + 1/14x^2 - 3/7x \\ 1/14x^2 - 3/7x + \frac{33}{7} \end{array} \right] \quad 0 < x \text{ and } x \leq 3 \\ \left[ \begin{array}{l} x \\ 1/14 \\ \frac{57}{14} \end{array} \right] \quad 3 < x \end{array} \right.$$

### 3. La procédure de calcul des surfaces médiatrices et de courbes trisectrice de $n \leq 4$ sites

La procédure intitulée **BISTR**I permet de calculer les représentations implicites de surfaces médiatrices et les paramétrisations des courbes trisectrices d'un ensemble de  $n \leq 4$  sites

$$d_1 = (x_1 + t, y_1, z_1), \dots, d_n = (x_n + t, y_n, z_n), t \geq 0, x_1 < \dots < x_n,$$

induisant les distances

$$g_i(x, y, z) = \begin{cases} (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 & \text{si } x < x_i, \\ (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 & \text{si } x \geq x_i. \end{cases} \quad i = 1, \dots, n.$$

Cette procédure dont le code Maple s'ensuit, prend les  $n$  fonctions distances associées aux sites sous forme d'une liste de  $n$  listes suivante :

$$Gn = \left[ \left[ x_1, (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2, (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 \right], \dots, \left[ x_n, (x - x_n)^2 + (y - y_n)^2 + (z - z_n)^2, (y - y_n)^2 + (z - z_n)^2 \right] \right],$$

et donnera les représentations des médiatrices et les paramétrisations des trisectrices correspondantes au  $n$  sites.

**BISTR**I := proc ( G :: ( listlist( ratpoly ) ) )

**local** i, j, k, n, m, H, B, TTT;

  H := G;

  B := [ ];

  TTT := [ ];

**for** i **to** nops(H) - 1 **do**

**for** j **from** i + 1 **to** nops(H) **do**

      B := [ op(B), b[i, j] = BIS( [ H[i], H[j] ] ) ]

**end do**

**end do;**

**for** i **to** nops(H) - 2 **do**

**for** j **from** i + 1 **to** nops(H) - 1 **do**

**for** k **from** j + 1 **to** nops(H) **do**

        TTT := [ op(TTT), T[i, j, k] = TRIS( [ H[i], H[j], H[k] ] ) ]

**end do**

**end do**

**end do;**

  [ op(B), op(TTT) ]

**end proc**

$$\mathbf{BISTR1} \left( \left[ [-3, (x+3)^2 + (y+4)^2 + (z-4)^2, (y+4)^2 + (z-4)^2], [0, x^2 + y^2 + z^2, y^2 + z^2], [3, (-3+x)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2, (y-4)^2 + (z-3)^2] \right] \right);$$

$$b_{1,2} = \begin{cases} 6x + 8y - 8z + 41 & x < -3 \\ -x^2 + 8y - 8z + 32 & -3 \leq x \text{ and } x < 0, \\ 8y - 8z + 32 & 0 \leq x \end{cases}$$

$$b_{1,3} = \begin{cases} 12x + 16y - 2z + 7 & x < -3 \\ -x^2 + 6x + 16y - 2z - 2 & -3 \leq x \text{ and } x < 3, \\ 16y - 2z + 7 & 3 \leq x \end{cases}$$

$$b_{2,3} = \begin{cases} 6x + 8y + 6z - 34 & x < 0 \\ -x^2 + 6x + 8y + 6z - 34 & 0 \leq x \text{ and } x < 3 \\ 8y + 6z - 25 & 3 \leq x \end{cases},$$

$$T_{1,2,3} = \begin{cases} \begin{bmatrix} x \\ -3/4x + \frac{13}{56} \\ \frac{75}{14} \end{bmatrix} & x < -3 \\ \begin{bmatrix} x \\ 5/7 + \frac{3}{56}x^2 - 3/7x \\ -3/7x + \frac{33}{7} - 1/14x^2 \end{bmatrix} & -3 \leq x \text{ and } x < 0 \\ \begin{bmatrix} x \\ 5/7 + 1/14x^2 - 3/7x \\ 1/14x^2 - 3/7x + \frac{33}{7} \end{bmatrix} & 0 \leq x \text{ and } x < 3 \\ \begin{bmatrix} x \\ 1/14 \\ \frac{57}{14} \end{bmatrix} & 3 \leq x \end{cases}$$

#### 4. Les coordonnées du point quadrisecteur de quatre sites

La procédure intitulée **QUADRI** permet de calculer les coordonnées du point quadrisecteur de quatre sites

$d_1 = (x_i + t, y_i, z_i), t \geq 0, i = 1, \dots, 4$  avec  $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ ,

induisant les distances :

$$g_i(x, y, z) = \begin{cases} (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 & \text{si } x < x_i, \\ (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 & \text{si } x \geq x_i. \end{cases} \quad i = 1, \dots, 4.$$

Cette procédure dont le code Maple s'ensuit, prend la liste d'indices de quatre sites, la liste de quatre trisectrices associées aux sites et une des médiatrices

(ici  $b_{1,4}$ ) comme suit :

$$\begin{aligned} X &= [x_1 < x_2 < x_3 < x_4], \\ TT &= [\mathcal{T}_{1,2,3}, \mathcal{T}_{1,2,4}, \mathcal{T}_{1,3,4}, \mathcal{T}_{2,3,4}] \\ b_{1,4} &= \left[ b_{1,4}|_{x < x_1}, b_{1,4}|_{x_1 \leq x < x_4}, b_{1,4}|_{x \geq x_4} \right], \end{aligned}$$

et donnera les coordonnées du point quadrisecteur.

```

QUADRI := proc(X:list, TT:(list(function)), B:(list(ratpoly)))
  local i, Q, j, k, Y1, Y2, S22, Y3, Y4, l, m, T, T2, S, A1, S1, S2, S3, S5, S4, x1,
  x2, x3, x4, Y, T1, TR;
  Y1 := [ ];
  for i to nops(TT) do
    Y1 := [op(Y1), [convert(op(2, TT[i]), 'list'), convert(op(4, TT[i]), 'list'
    '), convert(op(6, TT[i]), 'list'), convert(op(8, TT[i]), 'list')]]];
  end do;
  T1 := [Y1[1], Y1[2], Y1[3], Y1[4]];
  TR := subs(x = t, T1[1]);
  S1 := [solve({subs(x = TR[1][1], y = TR[1][2], z = TR[1][3], B[1]), t
  <= X[1]}, {t})];
  S2 := [solve({subs(x = TR[2][1], y = TR[2][2], z = TR[2][3], B[2]), X[1]
  < t and t <= X[2]}, {t})];
  S3 := [solve({subs(x = TR[3][1], y = TR[3][2], z = TR[3][3], B[2]), X[2]
  < t and t <= X[3]}, {t})];
  S4 := [solve({subs(x = TR[4][1], y = TR[4][2], z = TR[4][3], B[2]), X[3]
  < t and t <= X[4]}, {t})];
  S5 := [solve({subs(x = TR[4][1], y = TR[4][2], z = TR[4][3], B[3]), X[4]
  < t}, {t})];
  S := [S1, S2, S3, S4, S5];
  for i to nops(S) do
    if S[i] <> [ ] then
      A1 := [seq(eval(TT[j], x = op(2, op(op(S[i])))), j = 1 .. nops(TT))]
    end if
  end do;
  for i to nops(A1) do
    if A1[i][2] = A1[1][2] and A1[i][3] = A1[1][3] then Q := A1[1]
    end if
  end do;
  A1[1]
end proc

```

Pour

$$\begin{aligned} X &= [-5, -3, 0, 3], \\ TT &= [\mathcal{T}_{1,2,3}, \mathcal{T}_{1,2,4}, \mathcal{T}_{1,3,4}, \mathcal{T}_{2,3,4}] \\ b_{1,4} &= \left[ 16x + 4 + 2y + 10z_{|x < -5}, -x^2 + 6x + 2y + 10z - 21_{|-5 \leq x < 3}, \right. \\ &\quad \left. 2y - 12 + 10z_{|x \geq 3} \right], \end{aligned}$$

avec

$$\mathcal{T}_{1,2,3} = \left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} x \\ 13/2 x + \frac{117}{4} \\ \frac{29}{4} x + \frac{275}{8} \end{array} \right] \quad x \leq -5 \\ \left[ \begin{array}{l} x \\ 3/2 x + \frac{67}{4} - 1/2 x^2 \\ \frac{175}{8} - 1/2 x^2 + 9/4 x \end{array} \right] \quad -5 < x \text{ and } x \leq -3 \\ \left[ \begin{array}{l} x \\ \frac{29}{2} - 3/4 x^2 \\ \frac{37}{2} - \frac{7}{8} x^2 \end{array} \right] \quad -3 < x \text{ and } x \leq 0 \\ \left[ \begin{array}{l} x \\ \frac{29}{2} \\ \frac{37}{2} \end{array} \right] \quad 0 < x \end{array} \right. ,$$

$$\mathcal{T}_{1,2,4} = \left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} x \\ -\frac{38}{41} x - \frac{39}{82} \\ -\frac{58}{41} x - \frac{25}{82} \end{array} \right] \quad x \leq -5 \\ \left[ \begin{array}{l} x \\ -\frac{7}{41} + \frac{1}{82} x^2 - \frac{33}{41} x \\ \frac{119}{41} + \frac{15}{82} x^2 + \frac{3}{41} x \end{array} \right] \quad -5 < x \text{ and } x \leq -3 \\ \left[ \begin{array}{l} x \\ \frac{31}{82} + \frac{3}{41} x^2 - \frac{18}{41} x \\ \frac{83}{41} + \frac{7}{82} x^2 - \frac{21}{41} x \end{array} \right] \quad -3 < x \text{ and } x \leq 3 \\ \left[ \begin{array}{l} x \\ -\frac{23}{82} \\ \frac{103}{82} \end{array} \right] \quad 3 < x \end{array} \right. ,$$

$$\mathcal{T}_{1,3,4} = \left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{c} x \\ \frac{9}{17}x + \frac{91}{17} \\ -\frac{29}{17}x - \frac{25}{17} \end{array} \right] \quad x \leq -5 \\ \left[ \begin{array}{c} x \\ \frac{107}{34} - \frac{3}{34}x^2 - \frac{6}{17}x \\ -\frac{9}{17}x + \frac{25}{17} + 2/17x^2 \end{array} \right] \quad -5 < x \text{ and } x \leq 0 \\ \left[ \begin{array}{c} x \\ 1/17x^2 - \frac{6}{17}x + \frac{107}{34} \\ \frac{3}{34}x^2 - \frac{9}{17}x + \frac{25}{17} \end{array} \right] \quad 0 < x \text{ and } x \leq 3 \\ \left[ \begin{array}{c} x \\ \frac{89}{34} \\ \frac{23}{34} \end{array} \right] \quad 3 < x \end{array} \right. ,$$

$$\mathcal{T}_{2,3,4} = \left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{c} x \\ -3/4x + \frac{13}{56} \\ \frac{75}{14} \end{array} \right] \quad x \leq -3 \\ \left[ \begin{array}{c} x \\ 5/7 + \frac{3}{56}x^2 - 3/7x \\ -3/7x + \frac{33}{7} - 1/14x^2 \end{array} \right] \quad -3 < x \text{ and } x \leq 0 \\ \left[ \begin{array}{c} x \\ 5/7 + 1/14x^2 - 3/7x \\ 1/14x^2 - 3/7x + \frac{33}{7} \end{array} \right] \quad 0 < x \text{ and } x \leq 3 \\ \left[ \begin{array}{c} x \\ 1/14 \\ \frac{57}{14} \end{array} \right] \quad 3 < x \end{array} \right.$$

on a

**QUADRI**( $X, TT, b_{1,4}$ );

$$\left[ \begin{array}{c} \frac{9}{4} - \frac{1}{28} \sqrt{29869} \\ \frac{161}{8} - \frac{3}{56} \sqrt{29869} - \frac{1}{2} \left( \frac{9}{4} - \frac{1}{28} \sqrt{29869} \right)^2 \\ \frac{431}{16} - \frac{1}{2} \left( \frac{9}{4} - \frac{1}{28} \sqrt{29869} \right)^2 - \frac{9}{112} \sqrt{29869} \end{array} \right]$$

### A.1.2 Le code Maple du test de régularité

Maintenant nous allons donner un certain nombre de codes de test intermédiaires utiles avant d'arriver le test de régularité proprement dit.

#### 1. Le test d'intersection de deux domaines $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \subset \mathbb{R}^3$

Il va nous permettre de savoir si deux domaines

$$\mathcal{D}_1 = A_1 \times B_1 \times C_1 \text{ et } \mathcal{D}_2 = A_2 \times B_2 \times C_2 \subset \mathbb{R}^3$$

où  $A_1, B_i, C_i, i = 1, 2$  sont des intervalles de  $\mathbb{R}$ , s'intersectent ou pas. Ce test va être utilisé dans la suite pour décider si une portion de courbe trisectrice, bornée dans un domaine  $\mathcal{D}_1$ , intersecte le  $\mathcal{D}_2$ .

Le test donné par la procédure **INTERCUBE** dont le code Maple est le suivant, prend les deux domaines sous la forme

$$TT = [A_1, B_1, C_1] \text{ et } DD = [A_2, B_2, C_2],$$

et tournera :

- "true" si  $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 \neq \emptyset$
- "false" si  $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \emptyset$ .

```
INTERCUBE := proc(TT::listlist, DD::listlist)
  local T, D;
  T := TT;
  D := DD;
  if T[1][2] < D[1][1] or D[1][2] < T[1][1] then
    return false
  elif T[2][2] < D[2][1] or D[2][2] < T[2][1] then
    return false
  elif T[3][2] < D[3][1] or D[3][2] < T[3][1] then
    return false
  end if;
  return true
end proc
```

Pour

$$\mathcal{D}_1 = [-15, -4] \times \left[-\frac{1}{14}, \frac{1}{14}\right] \times \left[-\frac{57}{14}, \frac{57}{14}\right] \text{ et } \mathcal{D}_2 = [-4, 7] \times [-4, 4] \times [-4, 6],$$

on a :

$$\text{INTERCUBE}\left(\left[-15, -4\right], \left[-\frac{1}{14}, \frac{1}{14}\right], \left[-\frac{57}{14}, \frac{57}{14}\right], \left[-4, 7\right], [-4, 4], [-4, 6]\right);$$

**true**

c-à-d :  $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 \neq \emptyset$ .

Pour

$\mathcal{D}_1 = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$  et  $\mathcal{D}_2 = [2, 4] \times [2, 4] \times [2, 4]$ ,

on a

**INTERCUBE**( $([-1, 1], [-1, 1], [-1, 1]), ([2, 4], [2, 4], [2, 4])$ );

**false**

c-à-d :  $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \emptyset$ .

## 2. Le test d'un point contenu dans un domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$

Il va nous permettre de savoir si un point  $Q = (x_0, y_0, z_0)$  est contenu dans un domaine  $\mathcal{D}$  ou pas. Ce test intitulé **INSID**, dont s'en suit, va être utilisé dans la suite pour décider si un point quadrisecteur  $Q$  contenu dans un domaine  $\mathcal{D}$ . Le test prend les coordonnées du point et le domaine

$$\mathcal{D} = A \times B \times C$$

respectivement sous forme d'une liste de trois nombres réels (les composante de  $Q$ ) et d'une liste de trois intervalles comme suit :

$$Q = [x_0, y_0, z_0], \quad \mathcal{D} = [A, B, C],$$

et tournera :

- "true" si  $Q \in \mathcal{D}$
- "false" si  $Q \notin \mathcal{D}$ .

**INSID** := **proc** ( $Q$ ::list,  $D$ ::listlist)

**local**  $B, a1, a2, a3, b1, b2, b3, P$ ;

$B := D$ ;

$P := \text{convert}(Q, 'list')$ ;

$a1 := \min(\text{seq}(B[i][1], i = 1 .. \text{nops}(B)))$ ;

$b1 := \max(\text{seq}(B[i][1], i = 1 .. \text{nops}(B)))$ ;

$a2 := \min(\text{seq}(B[i][2], i = 1 .. \text{nops}(B)))$ ;

$b2 := \max(\text{seq}(B[i][2], i = 1 .. \text{nops}(B)))$ ;

$a3 := \min(\text{seq}(B[i][3], i = 1 .. \text{nops}(B)))$ ;

$b3 := \max(\text{seq}(B[i][3], i = 1 .. \text{nops}(B)))$ ;

**if not** ( $a1 < P[1]$  **and**  $P[1] < b1$  **and**  $a2 < P[2]$  **and**  $P[2] < b2$   
**and**  $a3 < P[3]$  **and**  $P[3] < b3$ ) **then**

**return false**

**end if**;

**return true**

**end proc**

**INSID**([-3.922375092, 3.173924180, 5.35714286], [[-5, -5, 0], [-5, -5, 10], [-5, 5, 0], [-5, 5, 10], [5, -5, 0], [5, -5, 10], [5, 5, 0], [5, 5, 10]]);

**true**

**INSID**([12, 3, 4], [[-5, -5, 0], [-5, -5, 10], [-5, 5, 0], [-5, 5, 10], [5, -5, 0], [5, -5, 10], [5, 5, 0], [5, 5, 10]]);

**false**

Maintenant, nous sommes en mesure d'établir le test régularité. Il y'a de préciser, comme déjà annoncé à la remarque 22, que les cas d'intersections non-génériques avec le bord du domaine  $\mathcal{D}$ , c-à-d une intersection de dimension deux pour une surface médiatrice et une intersection de dimension une pour une courbe trisectrice, seront évités durant la phase de la subdivision. Un test supplémentaire sera envisagé lors de l'implémentation de notre algorithme, Ce test supplémentaire va détecter de telles intersections, et dans ce cas, au lieu de diviser le domaine par un plan séparateur médian, (c-à-d en son milieu), le domaine sera divisé à  $\frac{1}{3}, \frac{1}{4} \dots$  de telle sorte que le morceau de la surface médiatrice ou la portion de courbe trisectrice, qui était en intersection non-générique, soit contenue dans un sous-domaine. Ainsi, le test de régularité que nous allons supposer que toute surface médiatrice et toute courbe trisectrice qui intersectent un domaine  $\mathcal{D}$ , admettent des intersections générique avec le bord du domaine. Le test va s'établir comme suit :

- Une  $d$ -liste de deux distances, c-à-d qui génère une seule médiatrice, est naturellement condérée comme  $t$ -régulière, et on n a rien à vérifier.
- Pour une  $d$ -liste de trois distances, c-à-d qui génère trois médiatrices et une courbe trisectrice, on va tout simplement vérifier si une portion de la trisectrice est conténue dans le domaine. L'idée consiste à calculer un plus petit domaine  $\mathcal{D}'$  bornant la trisectrice sur le domaine  $\mathcal{D}$ , le test **INTERCUBE** appliqué aux domaines  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  complète le test.
- Pour une  $d$ -liste de quatre distances, c-à-d qui génère six médiatrices et quatre trisectrices, on va tout simplement vérifier si les portions de chacune des quatre trisectrices et le point quadrisecteur correspondant sont contenus dans le domaine  $\mathcal{D}$ . A ce niveau, on applique le test précédant à chacune des quatre trisectrices et le test **INSID** appliqué au point quadrisecteur et le domaine  $\mathcal{D}$  complète le test.

### 3. Le test de régularité pour une $d$ -liste $B(\mathcal{D})$ de trois distances

Il permet de savoir si une  $d$ -liste de trois distances est  $t$ -régulière ou pas. Ce test intitulée **REGUL3** dont le code Maple est présenté ci-après, prend le domaine  $\mathcal{D}$  donné par ses huit sommets et les trois distances associées aux sites sous forme des listes de liste suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= [[a_1, b_1, c_1], \dots, [a_8, b_8, c_8]] \\ G3 &= \left[ \begin{aligned} & \left[ x_1, (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2, (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 \right], \\ & \left[ x_2, (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2, (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 \right], \\ & \left[ x_3, (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2, (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2 \right] \end{aligned} \right], \end{aligned}$$

et tournera

- "true" si  $B(\mathcal{D})$  est régulière,
- "false" sinon.

```

REGUL3 := proc(D::listlist, G::(listlist(ratpoly)))
  local a1, b1, B, a2, a3, b2, b3, DD, X, T, TAV, TT, i, j, Dx, Dy, Dz, Tx, Ty, Tz,
  IT;
  B := D;
  TAV := [ ];
  a1 := min(seq(B[i][1], i = 1 .. nops(B)));
  b1 := max(seq(B[i][1], i = 1 .. nops(B)));
  a2 := min(seq(B[i][2], i = 1 .. nops(B)));
  b2 := max(seq(B[i][2], i = 1 .. nops(B)));
  a3 := min(seq(B[i][3], i = 1 .. nops(B)));
  b3 := max(seq(B[i][3], i = 1 .. nops(B)));
  Dx := [a1, b1];
  Dy := [a2, b2];
  Dz := [a3, b3];
  X := [a1, b1];
  Tx := [ ];
  Ty := [ ];
  Tz := [ ];
  DD := [Dx, Dy, Dz];
  TT := [ ];
  T := TRIS(G);
  for i to nops(G) do
    if a1 < G[i][1] and G[i][1] < b1 then
      X := sort([op(X), G[i][1]]);
    end if
  end do;
  for i to nops(X) do TAV := [op(TAV), eval(T, x = X[i])] end do;
  for i to nops(X) - 1 do
    Tx := [op(Tx), [TAV[i][1], TAV[i + 1][1]]];
    Ty := [op(Ty), [min(TAV[i][2], TAV[i + 1][2]), max(TAV[i][2], TAV
    [i + 1][2])]];
    Tz := [op(Tz), [min(TAV[i][3], TAV[i + 1][3]), max(TAV[i][3], TAV
    [i + 1][3])]];
    TT := [op(TT), [Tx[i], Ty[i], Tz[i]]];
  end do;
  IT := op(TT);
  for j to nops(IT) do
    if INTERCUBE(IT[j], DD) then return true end if
  end do;
  return false
end proc

```

REGUL3([[−7, −7, −7], [−7, −7, 7], [−7, 7, 7], [−7, 7, −7], [7, −7, −7], [7, −7, 7], [7, 7, 7], [7, 7, −7]], [[−3,  $x^2 + y^2 + z^2 + 6 * x + 8 * y - 8 * z + 41, y^2 + z^2 + 8 * y - 8 * z + 32$ ], [0,  $x^2 + y^2 + z^2, y^2 + z^2$ ], [3,  $x^2 + y^2 + z^2 - 6 * x - 8 * y - 6 * z + 34, y^2 + z^2 - 8 * y - 6 * z + 25$ ]]);

true

#### 4. Le test de régularité pour une $d$ -liste $B(\mathcal{D})$ de quatre distances

Il permet de savoir si une  $d$ -liste de trois distances est  $t$ -régulière ou pas. Ce

test intitulée **REGUL4** dont le code Maple est présenté ci après, prend le domaine  $\mathcal{D}$  donné par ses huit sommets et les trois distances associées aux sites sous forme des listes de liste suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= [[a_1, b_1, c_1], \dots, [a_8, b_8, c_8]] \\ G3 &= \left[ \begin{aligned} &[x_1, (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2, (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2], \\ &[x_2, (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2, (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2], \\ &[x_3, (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2, (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2] \end{aligned} \right], \end{aligned}$$

et tournera

- "true" si  $B(\mathcal{D})$  est régulière,
- "false" sinon.

Le test **REGUL4** utilise un test intermédiaire **REGUL04** qui permet de savoir si la  $d$ -liste  $B(\mathcal{D})$  est  $t$ -régulière pour chaque triplet de distances prise parmi les quatre distances associées aux quatre sites. Cet test **REGUL04** est donné comme suit :

```
REGUL04 := proc(D::listlist, G::listlist)
  local i, j, k, l, m, B, H, Hi, d1, d2, d3, d4, T123, T124, T134, T234, TT;
  B := D;
  H := [ ];
  Hi := [ ];
  d1 := G[1];
  d2 := G[2];
  d3 := G[3];
  d4 := G[4];
  T123 := TRIS([d1, d2, d3]);
  T124 := TRIS([d1, d2, d4]);
  T134 := TRIS([d1, d3, d4]);
  T234 := TRIS([d2, d3, d4]);
  TT := [T123, T124, T134, T234];
  for i to nops(G) - 2 do
    for j from i + 1 to nops(G) - 1 do
      for k from j + 1 to nops(G) do
        H := [op(H), [G[i], G[j], G[k]]]; Hi := [op(Hi), [i, j, k]]
      end do
    end do
  end do;
  for i to nops(H) do
    if not REGUL3(B, H[i]) then return false end if
  end do;
  return true
end proc
```

**REGUL04**([[-3, -4, -4], [-3, -4, 4], [-3, 4, 4], [-3, 4, -4], [5, -4, -4], [5, -4, 4], [5, 4, 4], [5, 4, -4]], [[-3,  $x^2 + y^2 + z^2 + 6*x + 8*y - 8*z + 41$ ,  $y^2 + z^2 + 8*y - 8*z + 32$ ], [0,  $x^2 + y^2 + z^2$ ,  $y^2 + z^2$ ], [1,  $x^2 + y^2 + z^2 - 2*x - 6*z + 10$ ,  $y^2 + z^2 - 6*z + 9$ ], [3,  $x^2 + y^2 + z^2 - 6*x - 8*y - 6*z + 34$ ,  $y^2 + z^2 - 8*y - 6*z + 25$ ]]);

**false**

**REGUL04**( $[[[-5, -5, 0], [-3, -5, 10], [-3, 5, 0], [-3, 5, 10], [5, -5, 0], [5, -5, 10], [5, 5, 0], [5, 5, 10]], [[-5, x^2 + y^2 + z^2 + 10*x - 6*y + 4*z + 38, y^2 + z^2 - 6*y + 4*z + 13], [-3, x^2 + y^2 + z^2 + 6*x + 8*y - 8*z + 41, y^2 + z^2 + 8*y - 8*z + 32], [0, x^2 + y^2 + z^2, y^2 + z^2], [3, x^2 + y^2 + z^2 - 6*x - 8*y - 6*z + 34, y^2 + z^2 - 8*y - 6*z + 25]]]$ );

**true**

Et le test **REGUL4** est donné comme suit

```

REGUL4 := proc(D:listlist, G:listlist)
  local i, j, k, l, m, Q, Q1, Q2, Q3, a1, b14, R3, P, R4, a2, a3, b1, b2, b3, B, H,
  Hi, d1, d2, d3, d4, x1, x2, x3, x4, T123, T124, T134, T234, TT;
  B := D;
  H := [ ];
  Hi := [ ];
  d1 := G[1];
  d2 := G[2];
  d3 := G[3];
  d4 := G[4];
  x1 := d1[1];
  x2 := d2[1];
  x3 := d3[1];
  x4 := d4[1];
  a1 := min(seq(B[i][1], i = 1 ..nops(B)));
  b1 := max(seq(B[i][1], i = 1 ..nops(B)));
  a2 := min(seq(B[i][2], i = 1 ..nops(B)));
  b2 := max(seq(B[i][2], i = 1 ..nops(B)));
  a3 := min(seq(B[i][3], i = 1 ..nops(B)));
  b3 := max(seq(B[i][3], i = 1 ..nops(B)));
  b14 := [simplify(d1[2] - d4[2]), simplify(d1[3] - d4[2]), simplify(d1[3]
  ] - d4[3])];
  T123 := TRIS([d1, d2, d3]);
  T124 := TRIS([d1, d2, d4]);
  T134 := TRIS([d1, d3, d4]);
  T234 := TRIS([d2, d3, d4]);
  for i to nops(G) - 2 do
    for j from i + 1 to nops(G) - 1 do
      for k from j + 1 to nops(G) do
        H := [op(H), [G[i], G[j], G[k]]]; Hi := [op(Hi), [i, j, k]]
      end do
    end do
  end do;
  R3 := [seq(REGUL3(B, H[i]), i = 1 ..nops(H))];
  TT := [T123, T124, T134, T234];
  Q := QUADRI([x1, x2, x3, x4], TT, b14);
  Q1 := evalf[10](Q[1]);
  Q2 := evalf[10](Q[2]);
  Q3 := evalf[10](Q[3]);
  P := [Q1, Q2, Q3];
  R4 := [REGUL04(B, G)];
  if not (REGUL04(B, G) and INSID(P, B)) then return false end if;
  return true
end proc

```

**REGUL4**([[-5, -5, 0], [-5, -5, 10], [-5, 5, 0], [-5, 5, 10], [5, -5, 0], [5, -5, 10], [5, 5, 0], [5, 5, 10]], [[-5,  $x^2 + y^2 + z^2 + 10 * x - 6 * y + 4 * z + 38$ ,  $y^2 + z^2 - 6 * y + 4 * z + 13$ ], [-3,  $x^2 + y^2 + z^2 + 6 * x + 8 * y - 8 * z + 41$ ,  $y^2 + z^2 + 8 * y - 8 * z + 32$ ], [0,  $x^2 + y^2 + z^2$ ,  $y^2 + z^2$ ], [3,  $x^2 + y^2 + z^2 - 6 * x - 8 * y - 6 * z + 34$ ,  $y^2 + z^2 - 8 * y - 6 * z + 25$ ]]);

**true**

**REGUL4**([[-3, -4, -4], [-3, -4, 4], [-3, 4, 4], [-3, 4, -4], [5, -4, -4], [5, -4, 4], [5, 4, 4], [5, 4, -4]], [[-3,  $x^2 + y^2 + z^2 + 6 * x + 8 * y - 8 * z + 41$ ,  $y^2 + z^2 + 8 * y - 8 * z + 32$ ], [0,  $x^2 + y^2 + z^2$ ,  $y^2 + z^2$ ], [1,  $x^2 + y^2 + z^2 - 2 * x - 6 * z + 10$ ,  $y^2 + z^2 - 6 * z + 9$ ], [3,  $x^2 + y^2 + z^2 - 6 * x - 8 * y - 6 * z + 34$ ,  $y^2 + z^2 - 8 * y - 6 * z + 25$ ]]);

**false**

Enfin, nous arrivons au test de régularité global.

### 5. Le test de régularité (**Isregular**) pour une $d$ -liste de $n$ distances

Le test **Isregular** pour une  $d$ -liste  $B(\mathcal{D})$  de  $n$ , qui prend le domaine  $\mathcal{D}$  donné par ses huit sommets et les  $n$  distances associées aux sites sous forme des listes de liste suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= [[a_1, b_1, c_1], [a_2, b_2, c_2], \dots, [a_8, b_8, c_8]] \\ Gn &= \left[ \left[ x_1, (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2, (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 \right], \right. \\ &\quad \left. \dots, \left[ x_n, (x - x_n)^2 + (y - y_n)^2 + (z - z_n)^2, (y - y_n)^2 + (z - z_n)^2 \right] \right], \end{aligned}$$

s'exécute comme suit :

- si  $n = 1, 2$ ,  $B(\mathcal{D})$  est régulière
- si  $n = 3$  on applique le test **REGUL3** à  $\mathcal{D}$  et à  $Gn$
- si  $n = 4$  on applique le test **REGUL4** à  $\mathcal{D}$  et à  $Gn$
- si  $n > 4$ ,  $B(\mathcal{D})$  est non-régulière.

Le test tournera

- **true** si  $B(\mathcal{D})$  est régulière
- **false** sinon

**ISREGULAR** := **proc**(**D**::*listlist*, **G**::*listlist*)

**local** *i, j, k, B, H, n*;

**B** := **D**;

**H** := **G**;

**n** := *nops*(**H**);

**if** **n** <= 4 **then**

**if** **n** = 1 **or** **n** = 2 **then return true end if**;

**if** **n** = 3 **and** *REGUL3*(**B, H**) **then return true end if**;

**if** **n** = 4 **and** *REGUL4*(**B, H**) **then return true end if**

**end if**;

**return false**

**end proc**

**ISREGULAR**([[−5, −5, 0], [−5, −5, 10], [−5, 5, 0], [−5, 5, 10], [5, −5, 0],  
[5, −5, 10], [5, 5, 0], [5, 5, 10]], [[−5,  $x^2 + y^2 + z^2 + 10*x - 6*y + 4*z + 38$ ,  $y^2 + z^2 - 6*y + 4*z + 13$ ], [−3,  $x^2 + y^2 + z^2 + 6*x + 8*y - 8*z + 41$ ,  $y^2 + z^2 + 8*y - 8*z + 32$ ], [0,  $x^2 + y^2 + z^2$ ,  $y^2 + z^2$ ], [3,  $x^2 + y^2 + z^2 - 6*x - 8*y - 6*z + 34$ ,  $y^2 + z^2 - 8*y - 6*z + 25$ ]]);

**true**

**ISREGULAR**([[−3, −4, −4], [−3, −4, 4], [−3, 4, 4], [−3, 4, −4], [5, −4, −4],  
[5, −4, 4], [5, 4, 4], [5, 4, −4]], [[−3,  $x^2 + y^2 + z^2 + 6*x + 8*y - 8*z + 41$ ,  $y^2 + z^2 + 8*y - 8*z + 32$ ], [0,  $x^2 + y^2 + z^2$ ,  $y^2 + z^2$ ], [1,  $x^2 + y^2 + z^2 - 2*x - 6*z + 10$ ,  $y^2 + z^2 - 6*z + 9$ ], [3,  $x^2 + y^2 + z^2 - 6*x - 8*y - 6*z + 34$ ,  $y^2 + z^2 - 8*y - 6*z + 25$ ]]);

**false**

**ISREGULAR**([[−5, −5, 0], [−5, −5, 10], [−5, 5, 0], [−5, 5, 10], [5, −5, 0],  
[5, −5, 10], [5, 5, 0], [5, 5, 10]], [[−5,  $x^2 + y^2 + z^2 + 10*x - 6*y + 4*z + 38$ ,  $y^2 + z^2 - 6*y + 4*z + 13$ ], [−3,  $x^2 + y^2 + z^2 + 6*x + 8*y - 8*z + 41$ ,  $y^2 + z^2 + 8*y - 8*z + 32$ ], [0,  $x^2 + y^2 + z^2$ ,  $y^2 + z^2$ ], [3,  $x^2 + y^2 + z^2 - 6*x - 8*y - 6*z + 34$ ,  $y^2 + z^2 - 8*y - 6*z + 25$ ], [2,  $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 + (z - 5)^2$ ,  $(y - 5)^2 + (z - 5)^2$ ]]);

**false**