

Facultad  
de  
Ciencias

# Caracterización Óptica de Sustratos Metálicos mediante Elipsometría Espectroscópica

(Optical Characterization of Metallic Substrates by Spectroscopic  
Ellipsometry)

Trabajo de Fin de Grado  
para acceder al

**GRADO EN FÍSICA**

Autora: Natalia Romero Sánchez

Directora: Yael Gutiérrez Vela

Codirector: Francisco González Fernández

Junio - 2025



*Quiero expresar mi más profundo agradecimiento a los docentes que me han acompañado a lo largo de estos años de formación. Su guía, compromiso y apoyo han sido pilares fundamentales para la realización de este trabajo. Sin la orientación de Paco y Yael, este texto carecería de sentido y profundidad.*

*Dedico también este logro a mis padres, hermanos, abuelos y amigos. Su compañía constante, sus palabras, conversaciones y hasta las discusiones, han sido el motor que me ha impulsado a seguir adelante. Gracias por tenderme la mano en cada tramo de este camino lleno de baches y piedras que juntos hemos ido superando.*

*A esas personas especiales que nunca se apartaron, incluso cuando no había una solución fácil a la vista. Este esfuerzo está inspirado en vosotros. Gracias de corazón.*



# Resumen

La polarimetría es una técnica basada en el estudio de la variación del estado de polarización de un haz de luz que se refleja, transmite o difunde en su interacción con un medio material. Conociendo el estado de polarización del haz incidente, es posible detectar las variaciones inducidas por la muestra y, a partir de ellas, obtener sus propiedades ópticas. La elipsometría, una técnica derivada de la polarimetría, se enfoca exclusivamente en estados de luz polarizada. Su principio se basa en analizar la polarización de un haz que se refleja en una superficie o lámina delgada, con el objetivo de extraer las propiedades ópticas del material. Esta técnica es especialmente relevante en nanofotónica, y es empleada en sectores como la microelectrónica, la energía solar, la biomedicina y la fabricación de materiales avanzados, donde el control del índice de refracción complejo resulta crucial para el diseño y optimización de dispositivos funcionales.

El propósito de este proyecto es diseñar y montar un elipsómetro con configuración PSAr, simular las condiciones óptimas para la realización de las medidas con dicho dispositivo y utilizarlo para obtener las propiedades ópticas de dos sustratos metálicos: el oro (Au) y el aluminio (Al).

Para ello, se procedió al montaje experimental y alineamiento del elipsómetro, realizando un estudio del rango espectral de la fuente de luz y el rango operacional de los polarizadores empleados. En la simulación, se evaluaron las desviaciones relativas de los resultados en función de la variación de los parámetros libres (el ángulo de incidencia, el ángulo del analizador y el ángulo del polarizador), para determinar los intervalos adecuados para llevar a cabo las medidas minimizando errores sistemáticos. Finalmente, se realizaron medidas experimentales donde se obtuvieron los valores del índice de refracción complejo ( $n, k$ ) en el rango del visible para ambos sustratos. La comparación con los valores de referencia y los datos tomados con un elipsómetro comercial de alta precisión evidencian una gran concordancia y exactitud de las medidas. Se identificó que la principal fuente de error en el experimento está relacionada con la determinación del ángulo de incidencia ( $\phi_0$ ).

**Palabras clave:** elipsometría espectroscópica, polarización, sustratos metálicos, índice de refracción complejo, formalismo de Jones, espectrofotómetro.

# Abstract

Polarimetry is a technique based on the study of changes in the polarization state of a light beam as it is reflected, transmitted, or scattered during its interaction with a material. By knowing the polarization state of the incident beam, it is possible to detect the variations induced by the sample and, from these, determine its optical properties. Ellipsometry, a technique derived from polarimetry, focuses exclusively on polarized light states. It is based on analyzing the polarization of a beam reflected from a surface or thin film, with the aim of getting the material's optical properties. This technique is particularly relevant in nanophotonics and it is widely used in fields such as microelectronics, solar energy, biomedicine, and advanced materials manufacturing, where control of the complex refractive index is crucial for the design and optimization of functional devices.

The purpose of this project is to design and assemble an ellipsometer with a PSAr configuration, simulate the optimal conditions for performing measurements with this device, and use it to determine the optical properties of two metallic substrates: gold (Au) and aluminium (Al).

To this end, it was proceeded with the experimental setup and alignment of the ellipsometer, including a study of the spectral range of the light source and the operational range of the polarizers used. In the simulation, the relative deviations of the results were evaluated as a function of the variation of the free parameters (the angle of incidence, the angle of the analyzer and the angle of the polarizer), in order to determine the appropriate intervals for performing measurements while minimizing systematic errors. Finally, the complex refractive index ( $n, k$ ) was obtained in the visible range for both substrates. The comparison with reference values and the data obtained using a high-precision commercial ellipsometer demonstrate a high degree of agreement and accuracy. The main source of error in the experiment was identified as being related to the determination of the angle of incidence ( $\phi_0$ ).

**Key words:** spectroscopic ellipsometry, polarization, metallic substrates, complex refractive index, Jones formalism, spectrophotometer.



# Índice general

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Objetivos y metodología</b>	<b>3</b>
2.1	Objetivos . . . . .	3
2.2	Metodología . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Fundamento teórico</b>	<b>5</b>
3.1	Principios de la óptica . . . . .	5
3.1.1	Ecuaciones de Maxwell . . . . .	5
3.1.2	Ecuación de ondas . . . . .	6
3.1.3	Coefficientes de Fresnel . . . . .	7
3.1.4	Índice de refracción . . . . .	9
3.1.5	Ley de Malus . . . . .	10
3.1.6	Concepto de ángulo de Brewster . . . . .	10
3.2	Formalismo matrices de Jones . . . . .	11
3.2.1	Vector de Jones . . . . .	11
3.2.2	Transformación del sistema de coordenadas . . . . .	11
3.2.3	Matrices de Jones para elementos ópticos . . . . .	12
3.3	Principio medidas elipsométricas . . . . .	13
3.3.1	Elipsometría con analizador rotatorio (RAE) . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Dispositivo y montaje experimental</b>	<b>16</b>
4.1	Componentes . . . . .	17
4.2	Alineamiento . . . . .	19
<b>5</b>	<b>Metodología del proceso de medidas</b>	<b>20</b>
<b>6</b>	<b>Estudio simulado del sistema experimental</b>	<b>22</b>
6.1	Simulación . . . . .	22
6.2	Análisis . . . . .	23
<b>7</b>	<b>Resultados</b>	<b>27</b>
7.1	Calibración de los polarizadores . . . . .	27
7.2	Sustrato de Oro . . . . .	30
7.2.1	Comparación métodos de análisis según el paso angular . . . . .	30
7.2.2	Concordancia resultados experimentales y valores de referencia . . . . .	34
7.3	Sustrato de Aluminio . . . . .	39
7.3.1	Reproducibilidad de los resultados experimentales . . . . .	39

---

8 Conclusiones	42
Bibliografía	45
Apéndice	46



# Capítulo 1

## Introducción

La óptica es una de las ramas más fascinantes y versátiles de la física aplicada. Las propiedades de la luz, su generación, su detección así como su interacción con la materia, resultan esenciales en el diseño de herramientas y dispositivos de gran utilidad en tecnologías contemporáneas. Desde el diseño de instrumentos ópticos y láseres, sistemas de iluminación, comunicaciones ópticas, etc., hasta sensores biomédicos en el ámbito de la nanofotónica.

La luz se describe como una onda electromagnética desde el punto de vista clásico, compuesta por campos eléctricos y magnéticos que se propagan de forma conjunta en el espacio, oscilando en el tiempo, en el plano transversal al del haz. La intensidad y la polarización son dos parámetros asociados a la luz que pueden resultar de gran interés como herramientas en numerosos campos de la física. En el caso de la intensidad, ha permitido el desarrollo de la espectroscopía, de gran utilidad en disciplinas científicas como la astronomía, la química, la biología, etc. Por otra parte, la polarización es una característica asociada al carácter de transversalidad de la onda asociada a la luz. En condiciones generales, las oscilaciones del campo eléctrico (y, por tanto, también el magnético) están orientadas aleatoriamente dentro del plano perpendicular a la dirección de propagación y varían en el tiempo (luz despolarizada o natural). El concepto de luz polarizada se emplea cuando las oscilaciones dejan de producirse en direcciones aleatorias, es decir, cuando el campo eléctrico y el campo magnético oscilan en un plano bien definido y acompasados.

La polarimetría es la técnica utilizada para la medición del fenómeno que se acaba de introducir. Consiste en la determinación de la rotación del plano de polarización, una vez que la luz ha interactuado con la materia. El instrumento que se emplea para tomar estas medidas angulares se conoce como polarímetro. Esencialmente, este consta de una fuente de luz, un elemento polarizador, la muestra y un elemento analizador. Por lo general, se aplica a ondas electromagnéticas que han atravesado, sido reflejadas, refractadas o difundidas por un material, con el fin de caracterizar sus propiedades ópticas. Por ejemplo, es aplicada en la medición de la rotación angular inducida por sustancias ópticamente activas sobre un plano de luz polarizada, lo que permite determinar la concentración de soluciones o características como la quiralidad.

La polarimetría tiene gran relevancia en múltiples ámbitos. Un ejemplo destacado de aplicación se encuentra en la industria farmacéutica, donde esta técnica permite analizar la rotación del plano de polarización causada por los compuestos activos de un fármaco. Este tipo de medición es esencial en los procesos de control de calidad, ya que proporciona información relevante sobre la seguridad y efectividad del producto final. Asimismo, la técnica es clave para evaluar la pureza enantiomérica, un aspecto crucial en la formulación de medicamentos quirales. Otra área en la que esta aplicación

resulta especialmente valiosa es la industria azucarera, donde se utiliza para determinar con precisión la concentración de azúcar en diversos productos. Esto permite asegurar que los niveles de dulzor se mantengan dentro de los estándares establecidos para garantizar la calidad del alimento. En el ámbito de la investigación biomédica, la polarimetría se aplica al análisis de la estructura y las características ópticas de biomoléculas como proteínas, ácidos nucleicos y carbohidratos. Esta técnica permite examinar procesos como el plegamiento y las variaciones conformacionales de las proteínas, aspectos fundamentales tanto para entender su función biológica como para avanzar en el diseño y desarrollo de nuevos fármacos. En definitiva, esta técnica cuenta con un amplio abanico de usos en diversas disciplinas científicas e industriales, lo que demuestra su versatilidad y valor como herramienta de análisis óptico. [1]

En numerosos casos, por ejemplo en el campo de la nanofotónica, el interés puede estar centrado en la caracterización de las propiedades ópticas de películas nanométricas, con aplicaciones en biosensing, fotocatalisis, etc. En estos casos, se utiliza una técnica basada en la polarimetría llamada elipsometría, que se centra en el análisis de los cambios en la polarización de la luz reflejada por el material correspondiente. Esta técnica no altera la integridad de la muestra y su aplicación, además de rápida, es valiosa para determinar con precisión el grosor de películas delgadas, así como cuantificar las propiedades ópticas de los materiales, como el índice de refracción complejo.

Una de las principales aplicaciones de esta técnica de análisis óptico es la caracterización detallada de materiales, tanto inorgánicos como orgánicos. La elipsometría espectroscópica permite estudiar con gran precisión sustratos metálicos, como oro (Au), plata (Ag), cobre (Cu) o aluminio (Al), materiales semiconductores, como silicio (Si) o arseniuro de galio (GaAs), así como materiales orgánicos, entre los que destacan polímeros conductores y recubrimientos funcionales. En sectores como la industria solar, la biomédica, la optoelectrónica o la fabricación de semiconductores, conocer con exactitud las propiedades ópticas de estos materiales es crucial para optimizar su rendimiento y funcionalidad. Por ejemplo, en microelectrónica, esta técnica permite ajustar con precisión el grosor de capas dieléctricas o metálicas en la producción de chips de alta densidad. En energía solar, ayuda a minimizar las pérdidas ópticas en celdas fotovoltaicas y a maximizar la eficiencia en la conversión de luz en electricidad. En aplicaciones biomédicas, se emplea para desarrollar sensores ópticos basados en resonancia de plasmones de superficie (SPR), capaces de detectar interacciones moleculares con alta sensibilidad, lo cual es fundamental en el diseño de biosensores para diagnóstico precoz o análisis de biomoléculas. Asimismo, en el campo de los materiales avanzados, la elipsometría es clave para caracterizar nanocompuestos, películas delgadas funcionales y recubrimientos antirreflectantes utilizados en dispositivos ópticos de nueva generación. [2]- [3]

Esta memoria se organiza en capítulos, donde en los capítulos 2 y 3 se presentan los objetivos y la metodología empleada en el experimento, junto con los fundamentos teóricos necesarios para el análisis y la comprensión de los resultados. Los capítulos 4, 5 y 6 se centran en la descripción del dispositivo experimental y en el estudio de los parámetros ajustables del sistema. Finalmente, los capítulos 7 y 8 exponen los resultados obtenidos y las conclusiones derivadas del desarrollo de todas las actividades realizadas.

# Capítulo 2

## Objetivos y metodología

A la vista de la multitud de aplicaciones posibles que ofrece la caracterización óptica de sustratos, el desarrollo de este trabajo plantea una serie de objetivos bien definidos que permiten avanzar en el conocimiento y la implementación de estas técnicas. El estudio se centrará en sustratos metálicos ampliamente conocidos y caracterizados, como el oro y el aluminio.

### 2.1. Objetivos

- Diseñar, montar y caracterizar un sistema elipsométrico con analizador rotatorio (RAE, por sus siglas en inglés), o lo que es igual, con configuración PSAr, donde P, S y A representan al polarizador, muestra (sample) y analizador, respectivamente. Siendo r un indicativo de la rotación del elemento óptico que acompaña.
- Simular distintos escenarios experimentales para evaluar el impacto de los parámetros libres del sistema sobre la precisión y eficiencia de las medidas.
- Analizar las propiedades ópticas de sustratos metálicos mediante la medición de parámetros elipsométricos. La obtención del índice de refracción y el coeficiente de extinción a lo largo de un amplio rango espectral, permitiendo comprender el comportamiento óptico de materiales como el oro y el aluminio.

### 2.2. Metodología

Para proceder a interpretar los resultados correctamente, se deben tener ciertos conocimientos sobre el fenómeno que se va a estudiar, dando pie a un repaso de la literatura en los siguientes temas: las ecuaciones de Maxwell, coeficientes de Fresnel, las definiciones del índice de refracción complejo y ángulo de Brewster, los principios de las medidas elipsométricas, el formalismo de Jones y la teoría de la ley de Malus. Además, se introducirá el dispositivo experimental y los algoritmos del código empleados para el análisis de los parámetros óptimos en el proceso de toma de medidas, para cumplir con los objetivos propuestos.

Los pasos que se suceden para continuar con el desarrollo del trabajo son:

- Montaje, alineamiento y caracterización del dispositivo experimental.

- Cálculo de la ecuación que da la intensidad detectada en el sistema con configuración PSAr.
- Simulación del sistema elipsométrico de rotación basado en el formalismo de Jones.
- Búsqueda de las condiciones óptimas para realizar las medidas y verificación del código de análisis.
- Estudio de las propiedades ópticas de dos sustratos metálicos (Au y Al). Lo que implica:
  - Implementación y comparación de los métodos de calibrado del dispositivo experimental.
  - Implementación y comparación de los dos métodos de análisis de los resultados experimentales.
  - Representación y análisis del índice de refracción ( $n$ ) y coeficiente de extinción ( $k$ ) en función de la longitud de onda  $\lambda$ .

# Capítulo 3

## Fundamento teórico

### 3.1. Principios de la óptica

Es bien sabido que la luz posee una naturaleza ondulatoria. La teoría de Maxwell predice que las ondas electromagnéticas se propagan a la velocidad de la luz, lo que permitió identificarla como una manifestación de ondas electromagnéticas. A partir de sus conocidas ecuaciones, es posible describir su propagación en estos términos. Cuando la luz atraviesa un medio, el comportamiento de este puede caracterizarse mediante el índice de refracción complejo, el cual se expresa a través de dos componentes: el índice de refracción y el coeficiente de extinción (se introduce dicho término en la subsección 3.1.4).

#### 3.1.1. Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell unifican las leyes fundamentales del electromagnetismo y permiten describir la propagación de ondas electromagnéticas, como la luz, a través de distintos medios materiales. Su expresión en forma diferencial:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde  $\mathbf{E}$  es el vector de campo eléctrico,  $\mathbf{B}$  el vector de la inducción magnética,  $\mathbf{H}$  es el vector de campo magnético,  $\mathbf{D}$  es el vector de desplazamiento del campo eléctrico,  $\mathbf{J}$  es el vector de la densidad de corriente, ( $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ , donde  $\sigma$  es la conductividad del material),  $\rho$  es la densidad de carga y  $\varepsilon$  es la constante dieléctrica.[4]

Para comprender cómo se relacionan las propiedades ópticas de un material con su respuesta electromagnética, es necesario establecer la relación entre las ecuaciones de Maxwell y los parámetros materiales que caracterizan dicha respuesta. Este enlace se establece mediante las denominadas relaciones de constitución, que permiten expresar el comportamiento del medio ante un campo electromagnético aplicado. Para un medio isotrópico, homogéneo y lineal se tiene que:

- La relación que vincula el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  y el desplazamiento del campo eléctrico  $\mathbf{D}$ :

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}\tag{3.2}$$

donde  $\varepsilon$  es la constante dieléctrica o permitividad del medio. Esta constante describe la capacidad del medio para polarizarse eléctricamente en presencia de un campo eléctrico, y por tanto, almacenar energía eléctrica.

- La relación que vincula el campo magnético  $\mathbf{H}$  y la inducción magnética  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (3.3)$$

donde  $\mu$  es la permeabilidad magnética del medio.

La constante dieléctrica se puede expresar en términos de otra magnitud fundamental, la susceptibilidad eléctrica  $\chi_e$ . Esta representa la intensidad de la polarización inducida en el material por unidad de campo eléctrico aplicado, y su relación viene dada por:

$$\varepsilon = \varepsilon_0(1 + \chi_e) \quad (3.4)$$

donde  $\varepsilon_0$  es la permitividad eléctrica en el vacío. En los medios dieléctricos, los campos externos provocan una separación espacial significativa de las cargas eléctricas. Este evento depende del parámetro  $\varepsilon$ , el cual se relaciona con el índice de refracción, mediante la siguiente expresión:

$$n = \sqrt{\varepsilon} \quad (3.5)$$

De esta forma, la constante dieléctrica no solo condiciona el grado de polarización de un material, sino que también determina cómo se comporta la luz al atravesarlo: su velocidad de propagación, su reflexión, transmisión o absorción.

En los medios metálicos, los electrones libres reaccionan casi de manera instantánea ante campos eléctricos externos, generando una redistribución interna que neutraliza dicho campo e impide su propagación efectiva dentro del material. El campo eléctrico penetra una distancia muy corta (longitud de penetración o skin depth) y es rápidamente absorbido debido a las pérdidas asociadas con los electrones libres. Como resultado, la permitividad eléctrica  $\varepsilon$  adquiere un valor imaginario alto. La parte que no penetra es reflejada inmediatamente en la superficie, debido al alto índice de refracción y al fuerte desacoplamiento del campo eléctrico en el interior.

### 3.1.2. Ecuación de ondas

Para las ondas electromagnéticas en un medio isotrópico, homogéneo y lineal, la ecuación de ondas se describe como:

$$\begin{cases} \nabla^2 \mathbf{E} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \mathbf{B} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \end{cases} \quad (3.6)$$

donde la velocidad de propagación de fase es,  $v = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}}$ , [5].

#### Descripción de la luz mediante ondas planas

La descripción de una onda plana monocromática propagándose en un medio isótropo toma la forma de:

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cdot e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \delta)} \\ \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \cdot e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \delta)} \end{cases} \quad (3.7)$$

donde  $\mathbf{E}_0$  y  $\mathbf{B}_0$  son las amplitudes de los campos eléctrico y magnético, respectivamente,  $\omega$  la frecuencia angular,  $|\mathbf{k}| = \frac{2\pi n}{\lambda}$  el número de propagación de onda,  $\lambda$  es la longitud de onda y  $\delta$  la fase inicial. Además, su intensidad asociada es  $I = |\mathbf{E}|^2 = EE^*$ , donde la notación  $E^*$  indica el conjugado de  $E$ . La relación entre los campos que conforman la onda es:

$$|\mathbf{E}| = c \cdot |\mathbf{B}| \quad (3.8)$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz.

### 3.1.3. Coeficientes de Fresnel

Los coeficientes de Fresnel se obtienen al aplicar las condiciones de frontera de las ecuaciones de Maxwell en la interfaz entre dos medios dieléctricos con diferentes índices de refracción. Estas condiciones exigen la continuidad de los componentes normales y tangenciales del campo eléctrico ( $\mathbf{E}$ ) y de la inducción magnética ( $\mathbf{B}$ ) a través de la superficie de separación.

Cuando una onda electromagnética plana incide oblicuamente sobre una superficie plana que separa dos medios con índices de refracción  $n_i$  y  $n_t$ , donde los subíndices indican  $i$  de incidente y  $t$  de transmitido, parte de la onda se refleja y parte se transmite (refracta). Los coeficientes de Fresnel cuantifican la amplitud relativa de estas ondas reflejada y transmitida, y dependen de la polarización de la luz. Obsérvese la Figura 3.1 para visualizar las componentes del campo con las dos posibles polarizaciones. El plano de incidencia se define como el plano imaginario que contiene al haz incidente de luz y la normal a la interfaz en el punto donde este haz incide. [6]

#### Polarización paralela $s$

Cuando se tiene que el campo eléctrico es perpendicular al plano de incidencia (paralelo a la interfaz), las condiciones de continuidad para la luz polarizada  $s$  vienen expresadas como:

$$\begin{aligned} E_{is} + E_{rs} &= E_{ts} \\ -B_{is}\cos\theta_i + B_{rs}\cos\theta_r &= -B_{ts}\cos\theta_t \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde los subíndices  $is$ ,  $rs$  y  $ts$ , representan la componente incidente, reflejada y transmitida de la luz polarizada  $s$ , respectivamente. En un medio de índice  $n$  se sigue que  $|\mathbf{E}| = s|\mathbf{B}|$ , con  $s = c/n$ . Sabiendo que  $\theta_i = \theta_r$ , se obtienen los coeficientes de Fresnel:

Coefficiente de reflexión:

$$r_s \equiv \frac{E_{rs}}{E_{is}} = \frac{n_i \cos \theta_i - n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t} \quad (3.10)$$

Coefficiente de transmisión:

$$t_s \equiv \frac{E_{ts}}{E_{is}} = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t} \quad (3.11)$$

#### Polarización perpendicular $p$

Cuando se tiene que el campo eléctrico está en el plano de incidencia (perpendicular a la interfaz), las condiciones de continuidad son expresadas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} E_{ip}\cos\theta_i - E_{rp}\cos\theta_r &= E_{tp}\cos\theta_t \\ B_{ip} + B_{rp} &= B_{tp} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Donde los subíndices  $ip$ ,  $rp$  y  $tp$  representan la incidencia, reflexión y transmisión de la luz polarizada  $p$ , respectivamente. De manera análoga, se obtienen los coeficientes de Fresnel:

Coefficiente de reflexión:

$$r_p = \frac{n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} \quad (3.13)$$

Coefficiente de transmisión:

$$t_p = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} \quad (3.14)$$

Donde el ángulo de transmisión,  $\theta_t$ , se obtiene al emplear la ley de Snell, conocido el ángulo de incidencia,  $\theta_i$ :

$$n_i \sin \theta_i = n_t \sin \theta_t \quad (3.15)$$

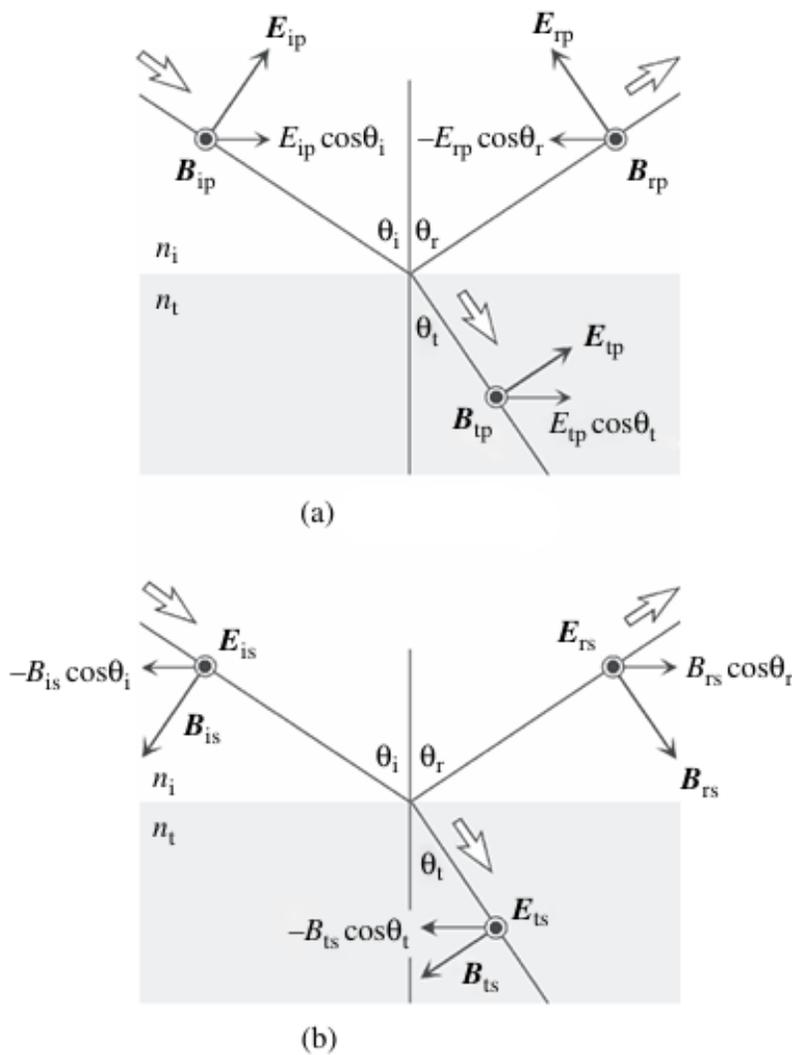


Figura 3.1: Campo eléctrico  $\mathbf{E}$  e inducción magnética  $\mathbf{B}$  para ondas  $p$ -polarizadas (a) y  $s$ -polarizadas (b). El campo  $\mathbf{B}$  en (a) y  $\mathbf{E}$  en (b) son perpendiculares al plano del folio y se dirigen hacia el lector. [7]

### 3.1.4. Índice de refracción

El índice de refracción de un medio se define como el cociente entre la velocidad de la luz en el vacío y la velocidad de la luz en dicho medio.

$$n = \frac{c}{v} \quad (3.16)$$

En un medio con absorción, se introduce el parámetro  $k$ , conocido como coeficiente de extinción, de modo que el índice de refracción se convierte en un número complejo, expresado como:

$$N = n + ik \quad (3.17)$$

donde la parte real  $n$  da cuenta de la propagación de la luz y la parte compleja  $k$  da cuenta de la atenuación.

La constante dieléctrica  $\varepsilon$ , es también una cantidad escalar compleja,  $\varepsilon(\omega) = \varepsilon_1(\omega) + i\varepsilon_2(\omega)$ , dependiente de la frecuencia cuando se consideran fenómenos ópticos. Atendiendo a la ecuación 3.5, ahora se tiene que:

$$\begin{cases} \varepsilon_1(\omega) &= n^2 - k^2 \\ \varepsilon_2(\omega) &= 2nk \end{cases} \quad (3.18)$$

Entonces, si  $\varepsilon_2(\omega) = 0$ , el medio no presenta pérdidas por absorción y, por tanto,  $k = 0$ . Además, podemos expresarlo de la siguiente manera, donde por simplicidad  $\varepsilon(\omega) = \varepsilon$ :

$$\begin{cases} n &= \frac{\varepsilon^{1/2} + \varepsilon^{1/2*}}{2} \\ k &= \frac{\varepsilon^{1/2} - \varepsilon^{1/2*}}{2i} \end{cases} \quad (3.19)$$

### 3.1.5. Ley de Malus

La ley de Malus describe cómo varía la intensidad de la luz linealmente polarizada al pasar a través de un analizador, tal como se puede observar en la Figura 3.2. Establece que la intensidad transmitida por el sistema depende del ángulo entre la dirección de polarización de la luz incidente y el eje de transmisión del analizador,  $\theta$ . La expresión matemática de esta ley:

$$I = I_0 \cos^2(\theta) \quad (3.20)$$

donde  $I_0$  es la intensidad del haz después de pasar por el primer polarizador, y  $I$  es la intensidad transmitida por el segundo polarizador. El ángulo  $\theta$  representa el ángulo entre los ejes de transmisión de los polarizadores, [8].

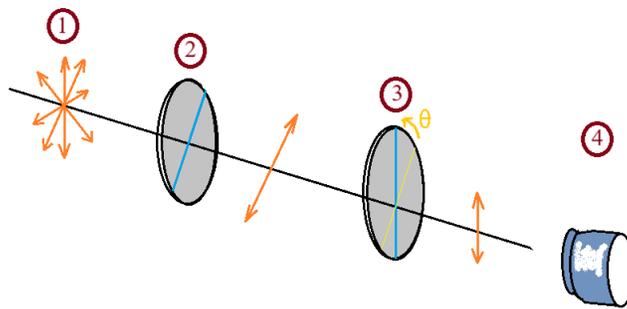


Figura 3.2: Esquema del sistema óptico para verificar experimentalmente la ley de Malus. Este instrumento está compuesto por una fuente de luz natural (1), un polarizador (2), un analizador (3) y un detector (4). Donde la polarización de la luz está descrita en naranja, el eje de transmisión de los polarizadores se corresponde con la línea azul y la amarilla se emplea para representar la rotación de un eje respecto del otro.

### 3.1.6. Concepto de ángulo de Brewster

El ángulo de Brewster es el ángulo de incidencia en el que la luz reflejada por una superficie se encuentra completamente  $s$ -polarizada, siendo  $r_p = 0$ , siempre que nos encontremos ante dos medios dieléctricos (aislantes eléctricos). En este caso, la polarización es lineal, lo que significa que las ondas de luz reflejada vibran en un único plano, perpendicular a su dirección de propagación.

$$\tan(\theta_B) = \frac{n_2}{n_1} \quad (3.21)$$

donde  $\theta_B$  es el ángulo de Brewster.

## 3.2. Formalismo matrices de Jones

El formalismo conocido como matrices de Jones permite describir de forma matricial cómo un elemento óptico o medio cambia la polarización de la luz que interacciona con él. Al utilizar este enfoque, es posible representar las variaciones en la polarización de la luz mediante operaciones matriciales, incluso en configuraciones que involucran múltiples elementos ópticos. Las matrices de Jones también son empleadas en la formulación matemática de las medidas elipsométricas. Por otra parte, los vectores de Jones se utilizan para representar los distintos estados de polarización de la luz, incluyendo tanto la polarización lineal como la elíptica. En esta sección se presenta este formalismo con el objetivo de comprender los fundamentos de las medidas elipsométricas. Cabe destacar que este formalismo no permite describir el estado de luz despolarizada.

### 3.2.1. Vector de Jones

El estado de polarización de la luz se puede representar mediante la superposición de dos ondas que oscilan en direcciones perpendiculares al vector de propagación, que consideraremos toma la dirección del eje  $z$ , donde  $\omega t - kz$  es la fase de la onda. Este estado puede describirse utilizando el vector de Jones, el cual está definido por las componentes del campo eléctrico en las direcciones  $x$  e  $y$ . Dicho vector expresa el estado de polarización de la luz y se representa de la siguiente forma:

$$E(z, t) = \begin{bmatrix} E_{x0} \cdot e^{i(\omega t - kz + \delta_x)} \\ E_{y0} \cdot e^{i(\omega t - kz + \delta_y)} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Esta expresión se puede simplificar obviando el término  $e^{i(\omega t - kz)}$ , obteniendo:

$$E(z, t) = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

donde  $E_x = E_{x0}e^{i\delta_x} = |E_x|e^{i\delta_x}$  y  $E_y = E_{y0}e^{i\delta_y} = |E_y|e^{i\delta_y}$ .

La intensidad de la luz vendría expresada como:

$$I = I_x + I_y = E_x E_x^* + E_y E_y^* \quad (3.24)$$

Los vectores de Jones suelen expresarse con una intensidad de luz normalizada, es decir, ( $I=1$ ), véase el Apéndice I para mayor claridad en la descripción de los estados de polarización por los vectores de Jones.

### 3.2.2. Transformación del sistema de coordenadas

Por lo general, los elementos que conforman un sistema óptico y alteran la polarización de la luz, como un polarizador o retardador, se posicionan a un cierto ángulo de rotación respecto del plano de incidencia,  $\alpha$ . En estos casos, es necesario aplicar transformaciones matemáticas para rotar el sistema de coordenadas  $x$ - $y$  que describe dicho plano. Con la representación de la luz polarizada con vectores de Jones, operaciones de este tipo se vuelven triviales de realizar.

Por ejemplo, la transformación del sistema de coordenadas  $x$ - $y$  cuando  $x'$ - $y'$  se encuentra un ángulo  $\alpha$  rotado, asumiendo que la rotación se realiza en el sentido contrario a las agujas del reloj, un vector  $(E_x, E_y)$ , en el sistema de coordenadas  $x'$ - $y'$  se expresa como:

$$\begin{pmatrix} E'_x \\ E'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

En la ecuación 3.25, la matriz de rotación levógira se denota como  $R(\alpha)$ . Si la rotación se realiza en sentido horario (dextrógiro), se representa como  $R(-\alpha)$ . Además, es posible componer rotaciones sucesivas aplicadas a distintos ángulos. Por ejemplo, la combinación de dos rotaciones  $R(\alpha)$  y  $R(-\beta)$  equivale a una rotación total de  $\alpha - \beta$ , lo cual se expresa como:

$$R(\alpha)R(-\beta) = R(\alpha - \beta)$$

### 3.2.3. Matrices de Jones para elementos ópticos

Las matrices de Jones son representaciones matemáticas que describen el efecto de los elementos ópticos sobre la fase y la amplitud de un haz de luz polarizado. El estado final de polarización se puede determinar fácilmente mediante cálculos matriciales, añadiendo secuencialmente las matrices correspondientes a cada elemento óptico atravesado por la luz al vector de Jones inicial. Véase en el Apéndice II para obtener una referencia del uso del formalismo y cómo se opera con matrices, multiplicándose en sentido inverso. A continuación, se muestran las matrices de Jones de los elementos ópticos usados en este trabajo:

- Matriz de Jones correspondiente a un polarizador y analizador:

$$P = A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Matriz de Jones correspondiente a la transformación de la luz polarizada debida a una muestra en reflexión:

$$S = \begin{bmatrix} \sin \psi \cdot e^{i\Delta} & 0 \\ 0 & \cos \psi \end{bmatrix}$$

donde  $\psi$  y  $\Delta$  son parámetros asociados a las propiedades ópticas de la muestra y serán definidos posteriormente en la sección 3.3.

### 3.3. Principio medidas elipsométricas

Tal como se introdujo, la elipsometría espectroscópica es una técnica óptica que analiza los cambios en el estado de polarización de la luz reflejada por películas delgadas y superficies. Es ampliamente utilizada en sectores como la energía, la biomedicina y la optoelectrónica, entre otros. En un experimento de elipsometría, se incide con luz polarizada sobre una muestra, generalmente con un ángulo de incidencia cercano al ángulo de Brewster. Las constantes ópticas de la muestra se determinan a partir del cambio en el estado de polarización de la luz reflejada. Este análisis proporciona dos parámetros característicos,  $(\psi, \Delta)$ , que representan, respectivamente, el cociente de amplitudes y la diferencia de fase entre las componentes de polarización  $s$  y  $p$ . En la Figura 3.3 se muestra un esquema que ilustra la variación del estado de polarización de la luz tras su reflexión en una muestra.

Tanto  $\psi$  como  $\Delta$  están influenciadas por  $n$  y  $k$ . Bajo estas condiciones, los valores de  $(n, k)$  pueden obtenerse directamente a partir de los parámetros elipsométricos  $(\psi, \Delta)$ , aplicando las ecuaciones de Fresnel. Estos parámetros se definen a partir de la razón entre los coeficientes de reflexión para las polarizaciones  $s$  y  $p$ :

$$\begin{aligned} \psi &= \tan^{-1}(|\rho|) = \tan^{-1}\left(\frac{|r_p|}{|r_s|}\right) \\ \Delta &= \arg(\rho) = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\frac{\text{Im}(\rho)}{\text{Re}(\rho)}\right) & \text{si } \text{Re}(\rho) > 0 \\ \tan^{-1}\left(\frac{\text{Im}(\rho)}{\text{Re}(\rho)}\right) + 180^\circ & \text{si } \text{Re}(\rho) < 0 \text{ y } \text{Im}(\rho) \geq 0 \\ \tan^{-1}\left(\frac{\text{Im}(\rho)}{\text{Re}(\rho)}\right) - 180^\circ & \text{si } \text{Re}(\rho) < 0 \text{ y } \text{Im}(\rho) < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Se introduce la notación  $\rho$  como el cociente de los coeficientes de reflexión, que se define como:

$$\rho \equiv \tan\psi \exp(i\Delta) \equiv \frac{\frac{E_{rp}}{E_{ip}}}{\frac{E_{rs}}{E_{is}}} \equiv \frac{r_p}{r_s} \quad (3.27)$$

Este cociente puede relacionarse con la constante dieléctrica del material y, a partir de ella, con el índice de refracción complejo de forma que:

$$\varepsilon = \sin^2\phi_0 + \sin^2\phi_0 \cdot \tan^2\phi_0 \cdot \left[\frac{1-\rho}{1+\rho}\right]^2 = N^2 = (n + ik)^2 \quad (3.28)$$

donde  $\phi_0$ , antes visto como  $\theta_i$ , es el ángulo de incidencia, [9].

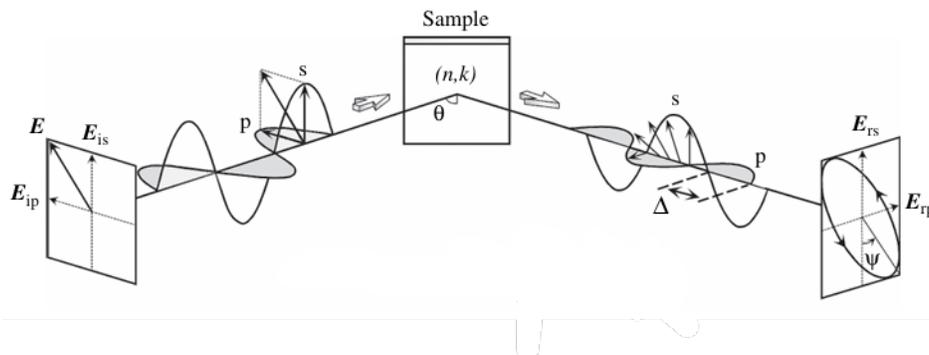


Figura 3.3: Cambio en el estado de polarización de luz polarizada que se refleja en una muestra. En esta figura,  $\theta = \phi_0$ , representando el ángulo de incidencia. [7]

### 3.3.1. Elipsometría con analizador rotatorio (RAE)

Este trabajo se centra en el elipsómetro RAE, presentando la configuración óptica más simple que permite medir los parámetros  $(\psi, \Delta)$ , obsérvese en la Figura 3.4. Esta disposición se conoce como configuración PSAr, donde el polarizador se encuentra en un ángulo fijo  $P$ , mientras que el analizador rota con un ángulo de rotación  $A$ . La letra S hace referencia a la muestra, y la r indica la rotación del analizador.

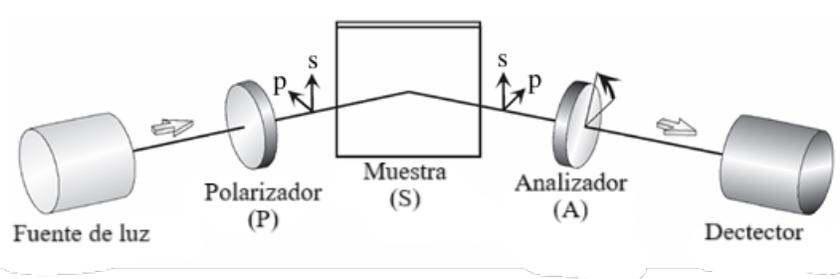


Figura 3.4: Diagrama esquemático del instrumento elipsométrico RAE, con configuración PSAr. Donde la fuente de luz y el polarizador se hayan en el lado de incidencia y el analizador y detector en el lado de reflexión. [7]

La descripción matricial de los elementos ópticos involucrados en la configuración PSAr queda expresada como:

$$\begin{bmatrix} E_A \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos A & \sin A \\ -\sin A & \cos A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin \psi \cdot e^{i\Delta} & 0 \\ 0 & \cos \psi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos P & -\sin P \\ \sin P & \cos P \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde  $\psi$  y  $\Delta$  son los parámetros determinados por las constantes ópticas de la muestra sobre la que se refleja la luz, introducidos en la sección 3.3.

Dado que los vectores de Jones no pueden describir luz despolarizada (natural), la descripción de la luz incidente se expresa normalizada y su orientación se toma directamente paralela al eje de transmisión del polarizador. A partir del cálculo matricial desarrollado en el Apéndice III, se obtiene la expresión para la intensidad en función del ángulo del analizador:

$$I(A) = \frac{1}{4} \cdot \left( 1 + \frac{(\cos 2P - \cos 2\psi)}{(1 - \cos 2P \cdot \cos 2\psi)} \cdot \cos 2A + \frac{(\sin 2P \cdot \cos 2\psi \cdot \cos \Delta)}{(1 - \cos 2P \cdot \cos 2\psi)} \cdot \sin 2A \right) \quad (3.29)$$

Expresándose en su versión más simplificada como:

$$I = I_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \cos 2A + \beta \cdot \sin 2A) \quad (3.30)$$

En las medidas elipsométricas realizadas con un elipsómetro con analizador rotatorio (RAE), los parámetros  $(\alpha, \beta)$  se determinan inicialmente mediante un análisis de Fourier de las intensidades registradas, [10]. Este procedimiento puede desarrollarse en forma de ajuste, donde la señal del elipsómetro se ajusta a la ecuación 3.30 para obtener los valores de  $\alpha$  y  $\beta$ . No obstante, siempre que el ángulo del analizador se encuentre en el intervalo  $A \in [0, 2\pi]$ , estas magnitudes también pueden extraerse directamente a partir de la medida discreta de la intensidad:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} I_i \cdot 2 \cos 2A_i}{\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} I_i} \\ \beta = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} I_i \cdot 2 \sin 2A_i}{\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} I_i} \end{cases} \quad (3.31)$$

Al obtener estos valores, se calculan los parámetros elipsométricos  $(\psi, \Delta)$  mediante las siguientes relaciones:

$$\tan \psi = \sqrt{\frac{1 + \alpha}{1 - \alpha}} \cdot |\tan P| \quad ; \quad \cos \Delta = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \quad (3.32)$$

## Capítulo 4

# Dispositivo y montaje experimental

Una parte significativa del tiempo dedicado a la elaboración de este trabajo de fin de grado se ha invertido en el montaje, alineamiento y calibración de los elementos del dispositivo experimental. A partir del esquema básico del eipsómetro RAE, Figura 3.4, fue posible evaluar la precisión del sistema y su aplicabilidad en el estudio de las propiedades ópticas de distintos sustratos metálicos.

Se realizó un análisis detallado de todos los componentes del montaje experimental, evaluando su función y alineación, con el fin de minimizar errores y optimizar la precisión, la repetitibilidad y la reproducibilidad en las medidas. Al tratarse de un sistema completamente manual, la destreza del experimentador desempeña un papel clave en la calidad de los resultados.

En la Figura 4.1 se muestra la disposición de los elementos utilizados para la adquisición de medidas en el laboratorio. Los elementos ópticos que conforman el dispositivo experimental se detallan a continuación. Cabe señalar que, como se anticipa en la subsección 3.3.1, el elipsómetro empleado utiliza una configuración del tipo PSAr, donde se introducen elementos auxiliares para facilitar el proceso de alineamiento. El sistema fue montado fijando un ángulo de incidencia a  $\phi_0 = 67,5^\circ$  y la dirección de transmisión del campo eléctrico que atraviesa el polarizador se fijó a  $P = 45^\circ$ . La justificación de la selección de estos parámetros se encuentra en la sección 6.2.

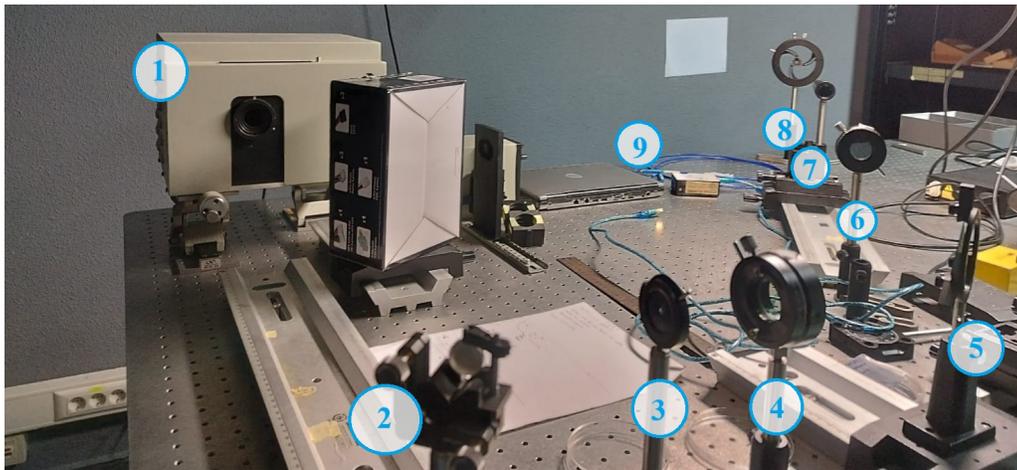


Figura 4.1: Montaje experimental dispuesto en la mesa óptica: fuente de luz (1), espejo (2), diafragma (3), polarizador (4), portamuestras (5), analizador (6), lente (7), diafragma auxiliar (8) y el conjunto de detección formado por la fibra óptica, el espectrofotómetro y finalmente, el ordenador (9).

## 4.1. Componentes

Para verificar la fiabilidad y el rango operativo de los dispositivos, se registraron varios espectros colocando la lente recolectora frente a la fuente de luz. Los resultados se muestran en la Figura 4.2. Con el objetivo de obtener el rango de emisión de la fuente, se colocó un diafragma entre la fuente y el espectrofotómetro para regular la intensidad recibida. Para determinar el intervalo funcional de los polarizadores, se situaron ambos entre la fuente y el espectrofotómetro con los ejes de transmisión perpendiculares. Finalmente, se bloqueó la fuente y se apagaron todas las luces del laboratorio, bajando el brillo del ordenador al máximo, para obtener el fondo del laboratorio.

### Fuente de luz de Xenón

La fuente seleccionada resulta especialmente adecuada para la evaluación de propiedades ópticas, ya que permite realizar medidas en una amplia banda del espectro. En la Figura 4.2a se muestra su rango de emisión, destacando su carácter policromático en el intervalo  $\lambda \in [350-1000]$  nm.

### Polarizadores

Un polarizador es un elemento óptico que filtra la luz incidente, permitiendo el paso únicamente de la componente del campo eléctrico alineada con su eje de transmisión y bloqueando las componentes perpendiculares. Si se coloca un segundo polarizador frente al detector, este recibe el nombre de analizador, ya que permite estudiar el estado de polarización de la luz transmitida. Estos elementos permiten ajustar su eje de transmisión mediante una montura graduada con una precisión de  $1^\circ$ , en el rango de  $0^\circ - 360^\circ$ . En la Figura 4.2b se muestra la intensidad registrada con los polarizadores cruzados, es decir, con sus ejes de transmisión a  $90^\circ$ . En condiciones ideales, dos polarizadores cruzados bloquean completamente el paso de luz. En este caso, se observa que su rango de operación espectral abarca desde 350 hasta 800 nm. Fuera de este rango, especialmente en la región del infrarrojo cercano, su funcionamiento se ve claramente limitado. Esto se debe a que las propiedades ópticas del material con el que se fabrica el polarizador permiten absorber el campo eléctrico solo en el visible. La naturaleza de los picos que se observan en el rango operacional se discutirá posteriormente. Además, se ha comprobado que estos elementos reducen la intensidad de la luz incidente debido a fenómenos de absorción o dispersión, lo cual se analiza con mayor detalle en el Apéndice IV (Figura 8.2).

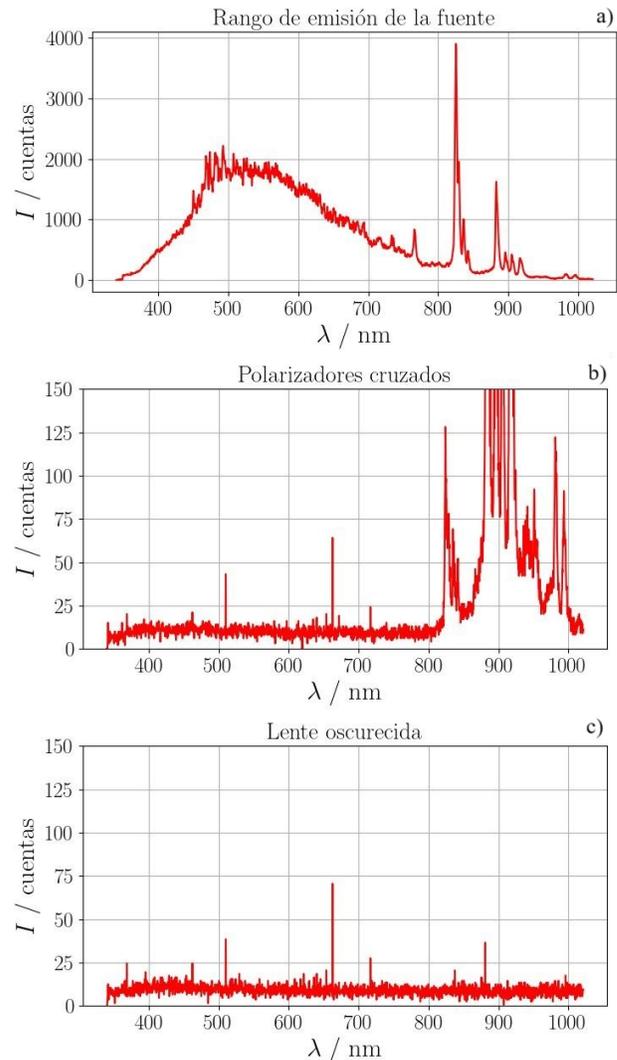


Figura 4.2: En la gráfica a) se muestra el rango de emisión de la fuente de Xenón, en la gráfica b) se observa la intensidad registrada en el sistema con los polarizadores cruzados y en el gráfico c) la intensidad recogida cuando la fuente se encuentra bloqueada y el laboratorio está a oscuras.

### Espectrofotómetro

Es uno de los elementos clave del dispositivo experimental. Su función principal es detectar la intensidad de la luz reflejada por la muestra en función de su longitud de onda. Para ello, incorpora un monocromador o red de difracción que permite descomponer la luz en sus distintas longitudes de onda, y un detector que registra la intensidad correspondiente, generando así un espectro de intensidad en función de la longitud de onda.

El rango espectral de detección se puede observar en cualquiera de las gráficas de la Figura 4.2, abarcando desde  $\lambda \in [339,99-1020,94]$  nm. En la Figura 4.2c, se muestra el espectro registrado con la fuente de luz bloqueada y el laboratorio completamente a oscuras, obteniendo una medida del fondo del laboratorio. En esa condición, se observan picos idénticos a los detectados en la gráfica correspondiente a los polarizadores cruzados, lo que indica que dichos picos están asociados, bien al fondo del laboratorio o bien son píxeles muertos del detector, y no al funcionamiento de los polarizadores. Cabe destacar que la intensidad del fondo tiene una influencia ínfima en las medidas realizadas, donde estos picos se encuentran un par de órdenes de magnitud por debajo.

La adquisición y el registro de los espectros de la intensidad detectada se realiza mediante el software Spectra Suite. Durante la operación, el espectrofotómetro realiza medidas espectrales a intervalos regulares definidos por el usuario. La frecuencia de adquisición está determinada por el tiempo de integración, el cual representa el período durante el cual el detector acumula señal antes de registrar un espectro. Este parámetro es ajustable y se selecciona en función de las condiciones experimentales, optimizando así la relación señal/ruido en las medidas. Para las medidas de caracterización del dispositivo, se emplearon tiempos de integración cortos, en el rango de 10 a 100 ms, mientras que para las medidas de las muestras y la calibración se utilizó un tiempo de integración mayor, de 500 ms, con el fin de maximizar la sensibilidad del sistema.

### Muestras

Para la caracterización óptica, se han dispuesto de dos sustratos metálicos, oro (Au) y aluminio (Al), depositados sobre un wafer de silicio (Si). Estos sustratos fueron seleccionados por sus propiedades reflectantes en el rango espectral de interés. Presentan un espesor significativamente superior a la longitud de penetración de la luz, lo que permite considerarlos semiinfinitos, pudiendo asumirse que toda la interacción ocurre en la región superficial.

### Otros

- **Espejo:** utilizado para redirigir el haz de luz hacia el primer polarizador. Aunque no es un espejo polarizante, esta característica no es crítica en su ubicación dentro del sistema, ya que se encuentra antes del polarizador. Su alineación está optimizada con respecto al portamuestras para garantizar una correcta trayectoria óptica.
- **Sustrato de Si:** utilizado como referencia para la calibración angular de los polarizadores en función de la longitud de onda.
- **Diafragma:** Está colocado tras el espejo y permite ajustar la cantidad de luz que entra en el sistema.
- **Portamuestras:** soporte mecánico destinado a la colocación de las muestras. Cuenta con tres puntos de sujeción que aseguran una fijación estable y precisa durante las medidas.
- **Lente:** se encarga de recoger la luz reflejada por la muestra y enfocarla adecuadamente en el extremo de entrada de la fibra óptica, optimizando el acoplamiento del haz.

- **Fibra óptica:** transmite la luz desde la lente hasta el espectrofotómetro. Su diseño asegura una mínima pérdida de intensidad, preservando la calidad espectral de la señal.
- **Diafragma auxiliar:** asegura el correcto alineamiento entre el haz de luz reflejado por la muestra y la lente encargada de recogerlo. Su colocación contribuye a mantener una trayectoria óptica precisa, minimizando posibles desviaciones en el ángulo de incidencia.

## 4.2. Alineamiento

La Figura 4.3 muestra el esquema del dispositivo experimental utilizado. Con el fin de fijar el ángulo de incidencia al deseado,  $\phi_0$ , se incorporó un diafragma auxiliar,  $D_2$ , que sirve de referencia para verificar la trayectoria del haz, a partir de la cual se añaden los elementos ópticos A y  $L_F$  de la figura. Durante cada medición, al reemplazar las muestras, se comprobaba nuevamente la alineación para garantizar la reproducibilidad del sistema.

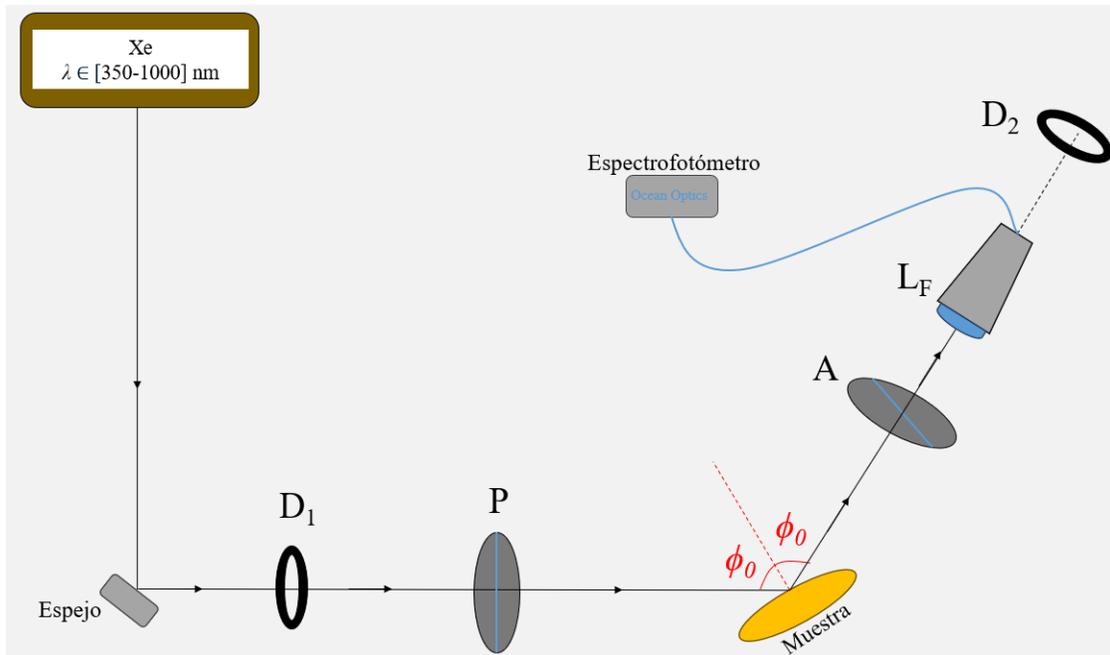


Figura 4.3: Diagrama ilustrativo del montaje experimental del elipsómetro RAE. Siendo  $D_1$  y  $D_2$  los diafragmas y  $L_F$  la lente que focaliza la luz a una fibra óptica acoplada, encargada de recogerla y transportarla a un espectrofotómetro. También se muestran la fuente de xenón, la muestra, el polarizador P, el analizador A y el espejo.

## Capítulo 5

# Metodología del proceso de medidas

En este capítulo se detalla el procedimiento seguido para la recolección de datos a lo largo de toda la experimentación. A partir del dispositivo montado en el laboratorio (Figura 4.1), se describirá el método utilizado para registrar y controlar las variables del sistema.

### Descripción de la toma de medidas experimentales

A continuación, se expone el procedimiento experimental utilizado para adquirir las medidas de la intensidad reflejada por el sustrato frente al ángulo de rotación del analizador,  $I(A)$ . Para obtener unos resultados precisos en la toma de medidas, las direcciones de vibración del campo, fijadas por el ángulo del polarizador  $P$  y el del analizador  $A$ , tienen que estar muy bien definidas. Esto requiere de un proceso de calibración. A partir de estas medidas, se determinan las propiedades ópticas de las muestras.

Como se mencionó anteriormente, el registro de los espectros se realiza utilizando el software Spectra Suite. Cada medición implica un barrido angular desde  $0^\circ$  hasta  $180^\circ$  mediante la rotación manual del analizador, mientras el polarizador se mantiene fijo a un ángulo  $P$ . Las muestras se colocan adecuadamente en el portamuestras y, se selecciona un paso angular, es decir, la cantidad de grados que rota el analizador para cada medida. Para cada ángulo del analizador, se registran los espectros de intensidad. En la subsección 7.2.1 se abordará cómo la reducción en el tamaño de los pasos mejora la precisión de los resultados según el método de análisis empleado y afecta directamente al tiempo empleado en las medidas.

El procedimiento es sencillo: una vez posicionada la muestra, asegurado el ángulo de incidencia deseado,  $\phi_0$ , y regulando la intensidad de entrada con el diafragma para no saturar el detector y establecer un compromiso con el ruido de fondo. Se comienza por rotar manualmente el analizador según el paso angular establecido, registrando el espectro correspondiente para cada ángulo  $A$ .

Este proceso se repite hasta alcanzar los  $180^\circ$ . Para reducir las fluctuaciones en las medidas tomadas, se emplea el filtro de Savitzky-Golay [11], cuya función se detalla en el Apéndice VI. A partir de la ecuación 3.30, para cada longitud de onda  $\lambda$  registrada, es posible aplicar el método de “ajuste”, en el cual las medidas de intensidad en función del ángulo del analizador ( $A$ ) se ajustan a la función correspondiente, lo que permite determinar los valores de  $\alpha$  y  $\beta$ . Alternativamente, estos parámetros pueden obtenerse mediante el análisis basado en sumatorios, según lo descrito en la ecuación 3.31.

Con estos valores, y utilizando la ecuación 3.32, se determinan los parámetros elipsométricos de la muestra,  $\psi$  y  $\Delta$ . Finalmente, mediante las ecuaciones 3.27-3.28, se calcula el índice de refracción y coeficiente de extinción ( $n$ ,  $k$ ) de la muestra. Se sigue el mismo protocolo para cada muestra y para las distintas configuraciones de pasos angulares que se quieren estudiar. Este procedimiento, que se puede seguir con mayor facilidad en el diagrama de la Figura 5.1, se implementa mediante el código detallado en el Apéndice V.2.

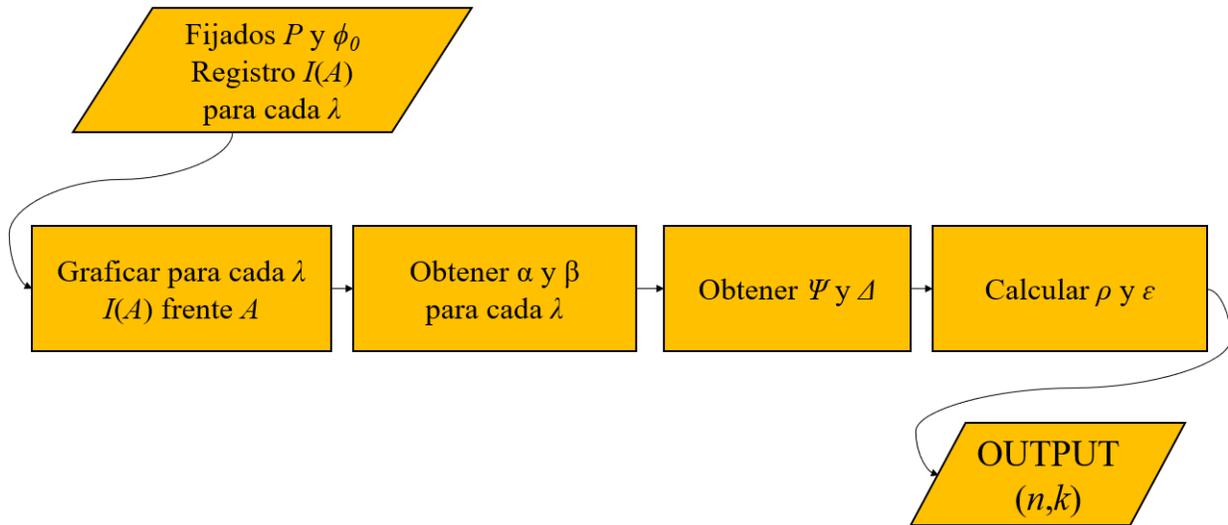


Figura 5.1: Diagrama de flujo del proceso de análisis de medidas experimentales para la obtención del índice de refracción ( $n$ ) y el coeficiente de extinción ( $k$ ) de una muestra.

Dada la posibilidad de que los ejes de transmisión de los polarizadores no estén perfectamente alineados a la escala de las monturas del analizador y polarizador, resulta necesario realizar una calibración adecuada que calcule el factor de corrección. En la sección 7.1 se detallarán los pasos seguidos para corregir estas magnitudes empleando los conceptos del ángulo de Brewster y la teoría de la ley de Malus.

## Capítulo 6

# Estudio simulado del sistema experimental

Este capítulo está dedicado a la descripción de la simulación desarrollada como herramienta complementaria al experimento, cuyo código queda descrito en el Apéndice V.1. Su objetivo es doble: por un lado, validar el correcto funcionamiento del código de análisis de datos; por otro, explorar el impacto de las variaciones en los parámetros libres del sistema, con el fin de optimizar las condiciones de medición.

### 6.1. Descripción de la simulación

La simulación se ha implementado en Python, utilizando bibliotecas como NumPy [12] para el cálculo numérico y Matplotlib [13] para la visualización. El código está estructurado en funciones, lo que permite modificar fácilmente los distintos parámetros del sistema, tales como el ángulo de incidencia ( $\phi_0$ ), el índice de refracción de la muestra  $n$  u otros valores relevantes para el análisis.

En este entorno de simulación, se han empleado los valores ópticos del oro extraídos de la bibliografía [14], para una longitud de onda de  $\lambda = 589$  nm, su correspondiente índice de refracción  $n = 0,27409$  y coeficiente de extinción  $k = 2,9443$ . El objetivo es simular la señal de intensidad que se obtendría experimentalmente en función del ángulo del analizador ( $A$ ), a partir de estas propiedades ópticas características del material.

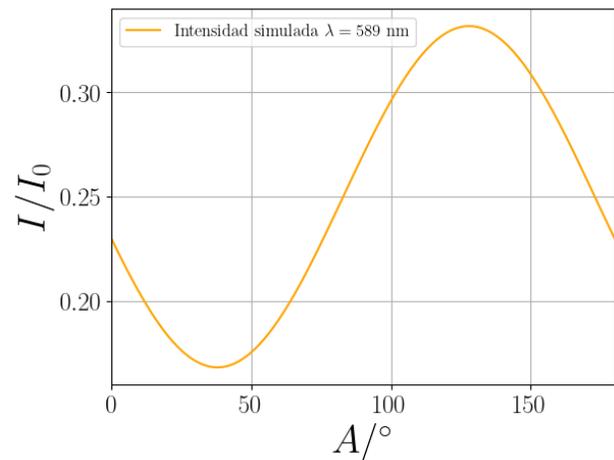


Figura 6.1: Intensidad simulada para el índice de refracción del oro a  $\lambda = 598$  nm en un barrido angular del analizador de  $0^\circ$  a  $180^\circ$ .

La simulación parte del valor de la constante dieléctrica  $\varepsilon = (n+ik)^2$ . A partir del cual, se determina el parámetro  $\rho$ , fijando un ángulo de incidencia ( $\phi_0$ ). Con  $\rho$  conocido, se obtienen los parámetros elipsométricos  $\psi$  y  $\Delta$  utilizando la ecuación 3.26.

Finalmente, se simula la señal de intensidad  $I(A)$  en función del ángulo del analizador ( $A$ ), que recorre de  $0^\circ$  a  $180^\circ$ , empleando la ecuación 3.30, con el polarizador fijado en  $P$ . El resultado se ilustra en la Figura 6.1. Como paso de verificación, se comprueba que el código de análisis permite recuperar correctamente los parámetros iniciales de la simulación, proceso introducido en la sección 5. En el diagrama de la Figura 6.2 se muestran los pasos seguidos en la simulación.

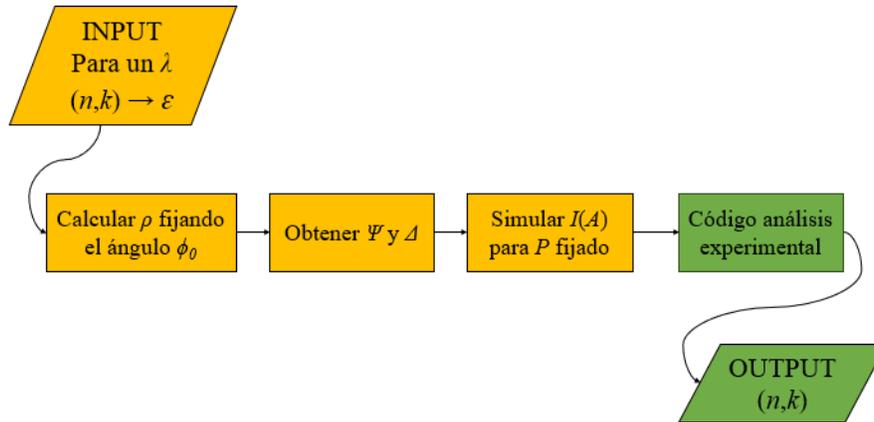


Figura 6.2: Diagrama de flujo para la simulación del espectro de la intensidad que se obtendría experimentalmente frente al ángulo del analizador para un  $\lambda$ , donde el código de análisis tendría la estructura del diagrama mostrado anteriormente.

## 6.2. Análisis de parámetros libres del sistema

La finalidad de este apartado es analizar cuáles son los valores más óptimos de los parámetros libres del sistema, entendiendo por óptimo el valor que introduce el menor error sistemático a los resultados. Con este estudio se determinará el ángulo de incidencia ( $\phi_0$ ) y el ángulo del polarizador ( $P$ ). El ángulo del analizador ( $A$ ), que tiene un barrido de  $0^\circ$  a  $180^\circ$ , ya está determinado para la toma de medidas, aunque en este apartado también se valoran los errores introducidos por desviaciones en dicha magnitud. Cabe destacar que el método empleado en el código de análisis fue el del ajuste. Esto se debe a que el método de análisis por sumatorio requiere de muchos puntos para lograr obtener el resultado del que se parte en la simulación, del orden de  $10^7$  puntos, afectando al tiempo de compilación del programa. Aún así, se espera que los errores proporcionados sean equivalentes en ambas metodologías ya que se fundamentan en lo mismo.

Dado que tanto el ángulo de incidencia ( $\phi_0$ ) como el ángulo del polarizador ( $P$ ) son parámetros que se mantienen fijos durante la medición, se ha evaluado un rango de valores entre  $35^\circ$  y  $80^\circ$  con el fin de determinar en qué rango la medición es más acertada. Para cada valor de estos ángulos se ha analizado la sensibilidad del sistema ante posibles errores sistemáticos, considerando desviaciones angulares de  $\delta = \pm 3^\circ, \pm 2^\circ, \pm 1^\circ, \pm 0.5^\circ$ . Siguiendo los pasos del apartado anterior, se simularán los espectros de intensidad  $I(A)$  con los valores  $\phi_0 + \delta_{\phi_0}$  y  $P + \delta_P$ , utilizando los valores bibliográficos del oro ya introducidos. Ajustando la función con los parámetros  $\phi_0$  y  $P$  sin variar, se calculan las

propiedades ópticas ( $n$  y  $k$ ) en esas condiciones. Al compararlos con los resultados que se obtendrían en ausencia de desviación, se obtienen los valores máximo y mínimo para  $n$  y  $k$  dentro del rango de error, lo que permite estimar la incertidumbre inducida en la medida por cada desviación considerada.

En la Figura 6.3 se muestra cómo afecta la desviación del ángulo de incidencia ( $\phi_0$ ) a la determinación del índice de refracción y del coeficiente de extinción. De manera análoga, en la Figura 6.4 se presentan los resultados correspondientes a la desviación en el ángulo del polarizador ( $P$ ).

En el caso del ángulo del analizador ( $A$ ), dado que este realiza un barrido angular amplio durante la medición, el análisis del error se ha abordado de forma distinta. En lugar de evaluar un único valor fijo, se ha aplicado la misma desviación angular de forma uniforme a todo el rango del barrido. Es decir, se ha simulado el efecto de un desplazamiento sistemático del analizador sobre la totalidad del conjunto de medidas.

Los resultados de este análisis pueden observarse en la Figura 6.5, donde se muestra cómo influyen estas desviaciones en la estimación del índice de refracción y coeficiente de extinción.

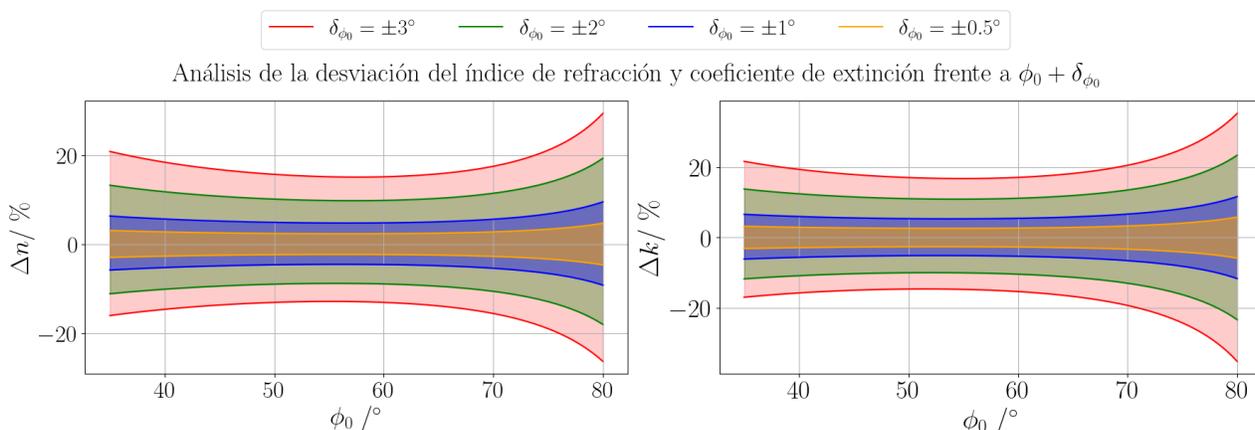


Figura 6.3: Desviación del índice de refracción ( $n$ ) y del coeficiente de extinción ( $k$ ) frente a errores sistemáticos en el ángulo de incidencia ( $\phi_0$ ). Se analiza cómo varía el índice de refracción complejo al introducir desviaciones angulares de  $\delta_{\phi_0} = \pm 3^\circ, \pm 2^\circ, \pm 1^\circ, \pm 0,5^\circ$  sobre un valor fijo de  $\phi_0$ .

Se observa que la influencia de una variación en el ángulo de incidencia ( $\phi_0$ ) afecta de manera muy similar tanto al índice de refracción como al coeficiente de extinción. Esta simetría en la respuesta se debe a que la relación entre  $\phi_0$  y las propiedades ópticas ( $n$ ,  $k$ ), que está descrita en la ecuación 3.28, muestra cómo  $\varepsilon = N^2$  depende directamente del ángulo de incidencia y del parámetro  $\rho$ . Como consecuencia, una variación sistemática en  $\phi_0$  produce un efecto prácticamente idéntico en la estimación de  $n$  y  $k$ , lo cual queda reflejado en las gráficas de sensibilidad correspondientes.

Este comportamiento pone de manifiesto que se requiere un control experimental preciso sobre el valor de  $\phi_0$ , ya que incluso pequeñas desviaciones pueden traducirse en errores sistemáticos en ambos parámetros, de un 5% en el mejor de los casos. Finalmente, se observa un ligero estrechamiento en el intervalo de  $[50^\circ-70^\circ]$ , lo que indica que esta es la región más óptima para la medición.

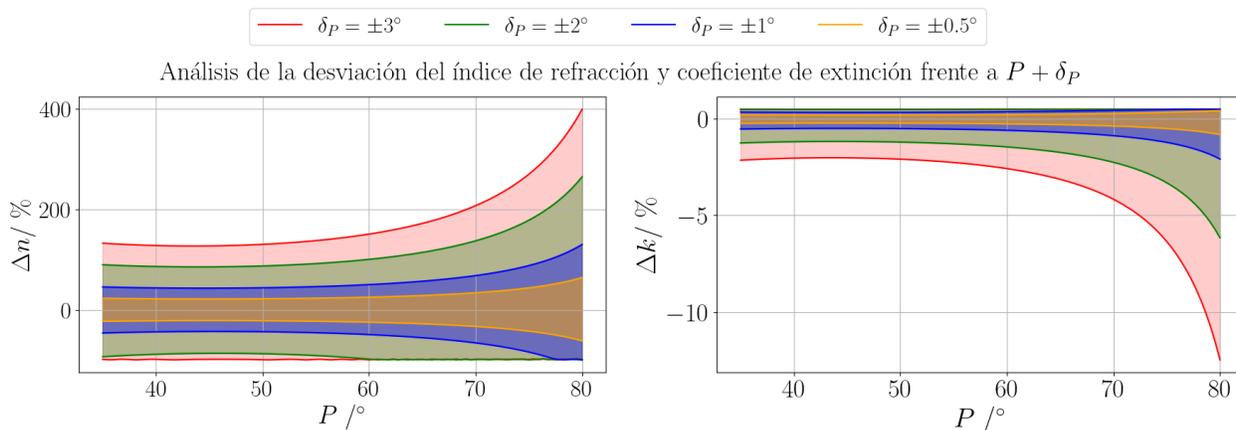


Figura 6.4: Desviación del índice de refracción ( $n$ ) y del coeficiente de extinción ( $k$ ) frente a errores sistemáticos en el ángulo del polarizador ( $P$ ). Se muestran las variaciones de  $n$  y  $k$  bajo desviaciones de  $\delta_P = \pm 3^\circ, \pm 2^\circ, \pm 1^\circ, \pm 0,5^\circ$  aplicadas al valor fijo de  $P$ .

En contraste con el caso anterior, una desviación en el ángulo del polarizador ( $P$ ) introduce un efecto asimétrico sobre los parámetros  $n$  y  $k$ , siendo especialmente significativo en el índice de refracción. Esto se entiende al considerar que el ángulo  $P$  participa directamente en las expresiones de  $\psi$  y  $\Delta$ , parámetros fundamentales para el cálculo de  $\rho$  (ecuación 3.27). Cualquier error en  $P$  se propaga de forma no lineal a este valor, y por extensión, a la constante dieléctrica, de la cual se extraen  $n$  y  $k$ .

Como resultado, se observa que el índice de refracción puede verse afectado gravemente, con errores superiores al 400% cuando  $\delta_P = \pm 3^\circ$ . Esto se debe a la alta sensibilidad de la función tangente para valores cercanos a  $90^\circ$ . En cambio, el impacto sobre  $k$  es más moderado, aunque apreciable, especialmente a partir de  $75^\circ$ .

Se concluye por tanto que, al igual que ocurre con  $\phi_0$ , es fundamental mantener un control preciso sobre el ángulo  $P$ . Es recomendable restringir su variación a intervalos próximos a  $45^\circ$ – $70^\circ$ , donde las curvas presentan un comportamiento más estable.

Por último, aunque de igual importancia, se observa que la variación sistemática en el ángulo del analizador produce un efecto muy similar tanto en el índice de refracción como en el coeficiente de extinción, con una desviación proporcional y constante a lo largo de todo el rango angular. Tal como se aprecia en la Figura 6.5,  $n$  puede presentar errores de hasta un 40%, mientras que  $k$  apenas supera el 1.5%.

Esta discrepancia se explica a partir del modo en que se determina cada parámetro. El ángulo del analizador interviene únicamente en la ecuación 3.30. Entonces, no participa de manera directa en las ecuaciones que definen ni  $\psi$  ni  $\Delta$ . Cualquier error sistemático en su medición afecta por igual a los coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$ , y por tanto induce errores simétricos en la estimación de  $n$  y  $k$  a través del parámetro  $\rho$ .

En este encadenamiento, el parámetro  $\alpha$  es más sensible a errores de ajuste por su dependencia de la amplitud y afecta directamente a  $\psi$  según la ecuación 3.32, donde un error en  $\alpha$  provoca una modificación notable en  $\psi$ , especialmente en regiones donde  $\tan(P)$  crece rápidamente.

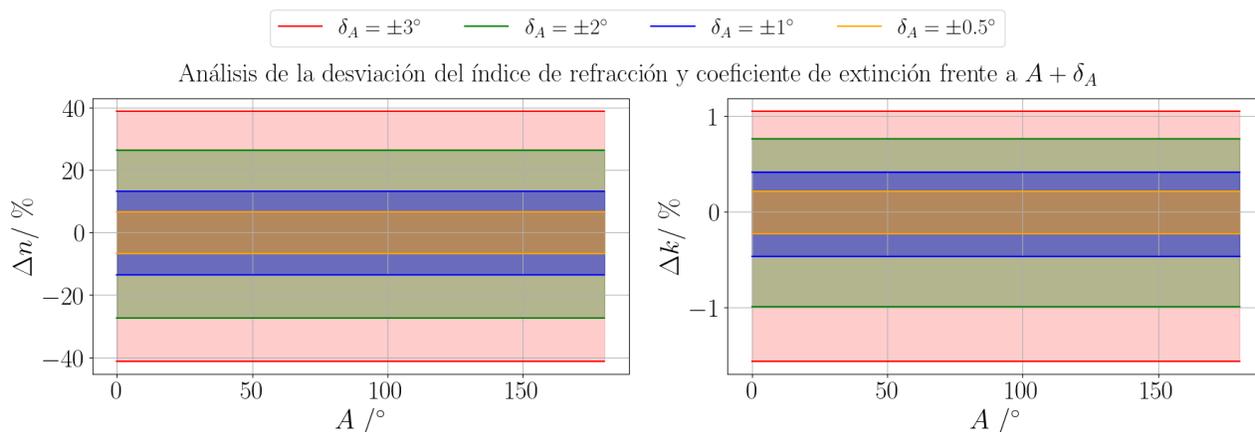


Figura 6.5: Desviación del índice de refracción ( $n$ ) y del coeficiente de extinción ( $k$ ) frente a errores sistemáticos en el ángulo del analizador ( $A$ ).

En este caso, la desviación angular  $\delta_A = \pm 3^\circ, \pm 2^\circ, \pm 1^\circ, \pm 0,5^\circ$  se aplica de forma uniforme a todo el rango del barrido angular del analizador, simulando un desplazamiento sistemático del conjunto de medidas.

Dado que  $\psi$  tiene un peso significativo en el módulo de  $\rho$ , y por tanto en la parte real de  $\varepsilon$ , de la cual depende  $n$ , el efecto de un error en  $A$  se amplifica significativamente en la estimación de este valor. En cambio, el parámetro  $k$  se relaciona con la parte imaginaria de  $\varepsilon$ , influida principalmente por  $\Delta$ , la cual depende de  $\beta$ , un parámetro que resulta ser menos afectado ante errores sistemáticos en el ajuste.

Cabe destacar que la desviación inducida por  $A$  es constante a lo largo de todo el barrido angular, ya que el error se suma homogéneamente al rango de análisis. Por tanto, se refuerza la necesidad de calibrar con precisión el sistema de adquisición angular para minimizar errores sistemáticos que puedan comprometer gravemente la estimación del índice de refracción complejo ( $n, k$ ) de la muestra. En conclusión, se comprueba que los valores de  $P$  y  $\phi_0$  con los que se ha elegido trabajar están en un rango donde los errores sistemáticos afectan poco.

Tras este análisis, los parámetros libres seleccionados del sistema no solo entran dentro del rango óptimo definido, sino que se han seleccionado valores razonables y comúnmente usados en experimentos de elipsometría, siendo el ángulo de incidencia,  $\phi_0 = 67,5^\circ$ , el ángulo del polarizador,  $P = 45^\circ$ .

# Capítulo 7

## Resultados

En este capítulo se presentan los resultados experimentales correspondientes a la medida del índice de refracción ( $n$ ) y el coeficiente de extinción ( $k$ ) de dos sustratos metálicos, Au y Al. Para ello, se ha realizado una evaluación de la metodología empleada, comparando y analizando dos enfoques de calibración de los elementos polarizantes del sistema de medición: ( $P$  y  $A$ ). Además, se examinan los procedimientos utilizados para la obtención del índice de refracción complejo ( $n, k$ ), prestando especial atención al impacto del paso angular en la precisión y fiabilidad de los resultados. Finalmente, los valores obtenidos se contrastan con datos reportados en la bibliografía [14]-[15] y valores medidos con un elipsómetro comercial, con el objetivo de validar la metodología adoptada y analizar posibles discrepancias.

### 7.1. Calibración de los polarizadores

Como se evidenció en el análisis desarrollado en la sección 6.2, es de vital importancia tener un conocimiento preciso de los valores  $A$  y  $P$ , que se corresponden con el ángulo del analizador y polarizador, respectivamente. Tal como se adelantó en la sección 5, ante la necesidad de hallar el factor que corrija la posible desviación en la lectura de dichos ángulos, existen dos enfoques para llevar a cabo esta calibración: uno basado exclusivamente en el concepto del ángulo de Brewster y otro que incorpora adicionalmente la teoría de la ley de Malus. Para distinguir entre ambos, se utilizarán las denominaciones *calibrado basado en Brewster* y *calibrado Malus*, respectivamente.

En el calibrado basado en Brewster, se realiza una medición empleando luz despolarizada de la fuente incidiendo directamente sobre un sustrato de silicio. Tras la reflexión, solo está presente el elemento a calibrar (el polarizador o el analizador), que en las medidas barrerá los ángulos de  $0^\circ$  hasta  $180^\circ$  con un paso angular dado.

El ángulo de incidencia  $\phi_0 = 67,5^\circ$  se encuentra próximo al ángulo de Brewster del sustrato, y según la teoría, para este ángulo, la componente de polarización  $s$  alcanza su intensidad máxima cuando el elemento polarizador se encuentra a  $90^\circ$  y mínima a  $0^\circ$  y  $180^\circ$ , respecto al plano de incidencia. La curva resultante se ajusta mediante la función:

$$f(x) = a \cdot \sin^2(x + \delta_x) + c \quad (7.1)$$

donde  $a$  y  $c$  son parámetros del ajuste,  $x$  es el ángulo  $A$  (o  $P$ ), y  $\delta_x = \delta_{BA}$  (o  $\delta_{BP}$ ) representa la corrección angular necesaria correspondiente a este calibrado basado en Brewster.

El calibrado Malus se realiza aplicando los principios de la ley de Malus, introducidos en la sección 3.1.5. Para ello, se calibra inicialmente uno de los polarizadores, como se ha descrito anteriormente, y después, manteniendo su eje de transmisión fijo, se mide la variación de la intensidad de la luz polarizada al rotar el segundo polarizador con respecto al primero, con un barrido de  $0^\circ$  hasta  $180^\circ$  para el mismo paso angular seleccionado. De este modo, es posible calibrar el elemento restante, empleando uno de los polarizadores como referencia. La curva resultante de la intensidad transmitida por ambos elementos se ajusta a la función:

$$f(x) = a \cdot \cos^2(x + \delta_x) + c \quad (7.2)$$

donde  $a$  y  $c$  son parámetros del ajuste,  $x$  es el ángulo  $A$  (o  $P$ ), y  $\delta_{M_A} = \delta_x + \delta_{B_P}$  (o  $\delta_{M_P} = \delta_x + \delta_{B_A}$ ) representa la corrección angular necesaria con el calibrado Malus, en función del calibrado basado en Brewster realizado anteriormente.

Un parámetro crucial a la hora de realizar la calibración de los polarizadores, independientemente del calibrado que se emplee, es el paso angular escogido para el barrido del ángulo del analizador ( $A$ ). En la Figura 7.1 se muestra la intensidad registrada frente al ángulo del analizador ( $A$ ) para  $\lambda = 696,96$  nm. También se incluye el ajuste a la función de calibrado basada en el ángulo de Brewster. Esto permite comparar el efecto de haber utilizado un paso angular pequeño, de  $4^\circ$ , en la Figura 7.1a, frente a un paso angular mayor, de  $12^\circ$ , en la Figura 7.1b.

Como se observa en la Figura 7.1b, un paso angular mayor provoca que los máximos y mínimos de la curva se representen de forma lineal, siendo evidente que es una resolución insuficiente para determinar con precisión la posición de estos puntos extremos. Se observa que, con un paso angular de  $4^\circ$ , se asegura una resolución razonable para ajustar la intensidad medida a las funciones 7.1 y 7.2 y así obtener un factor de corrección preciso. Este será el paso angular seleccionado para futuras medidas de calibrado.

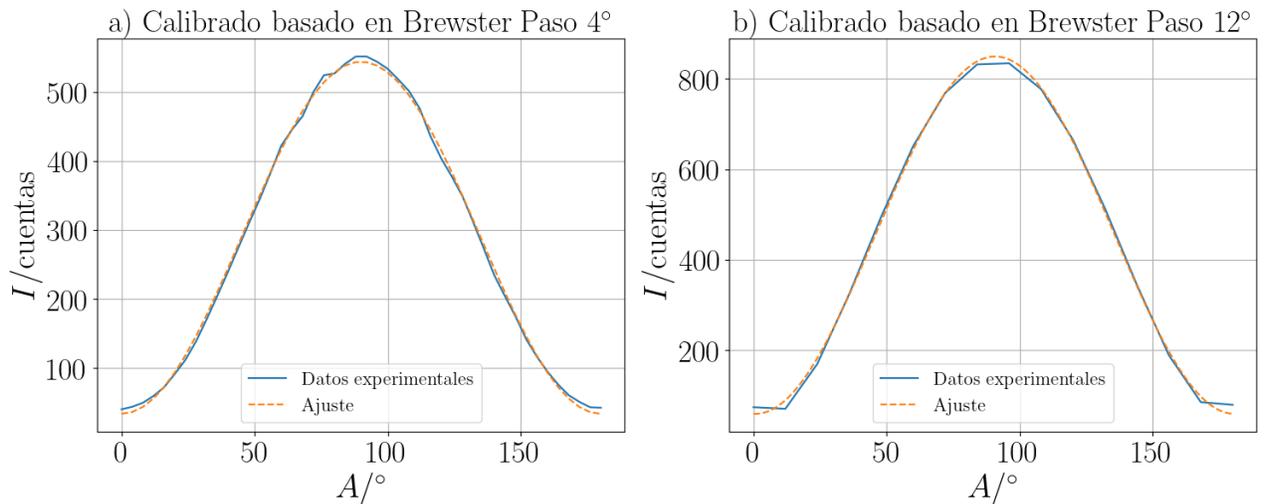


Figura 7.1: Ajuste para sacar el factor de corrección del ángulo del analizador para  $\lambda = 696,96$  nm. En la gráfica a) se observa el ajuste basado en Brewster usando el paso angular de  $4^\circ$ , donde  $\delta_{B_A} = 0,06^\circ$ . En la gráfica b) se muestra el mismo ajuste pero con paso  $12^\circ$ , donde  $\delta_{B_A} = -0,72^\circ$ .

En la Figura 7.2 se muestran los perfiles del ajuste realizado a la intensidad por ambos calibrados para el polarizador. Aunque el calibrado que se muestra está asociado a una sola  $\lambda$ , se puede apreciar que el perfil del calibrado basado en Brewster, Figura 7.2a, presenta menos ruido que el perfil del calibrado de Malus, Figura 7.2b. Este hecho puede deberse a las características bajo las cuales se realizan las medidas del calibrado Malus. La intensidad registrada se ha visto atenuada por el efecto de ambos polarizadores, tal como se comentaba en el Apéndice IV. Cabe destacar que ambas medidas se han hecho en las mismas condiciones.

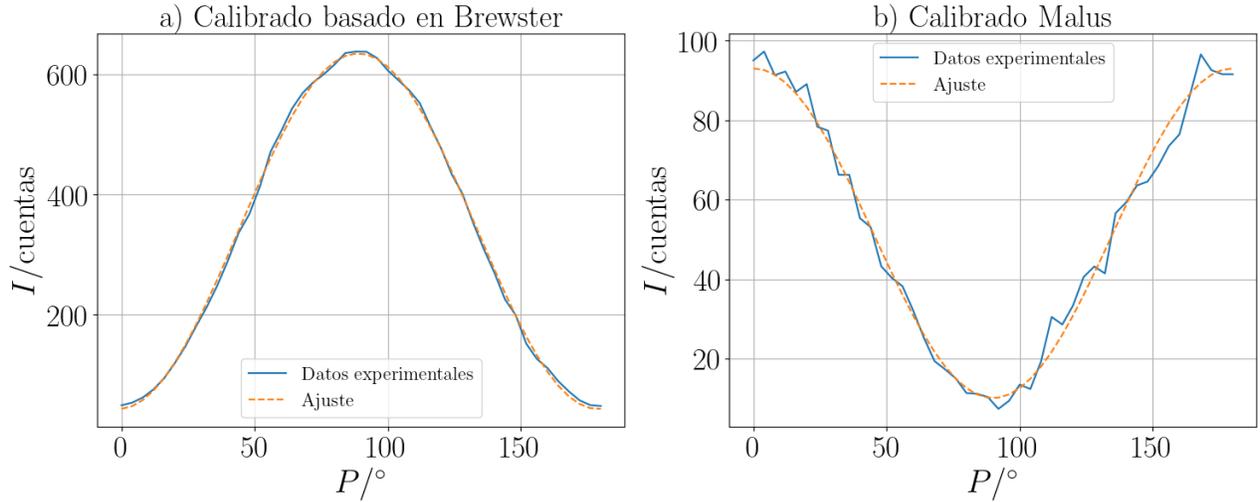


Figura 7.2: Ajuste para sacar el factor de corrección del ángulo del polarizador con paso angular de  $4^\circ$  para  $\lambda = 696,96$  nm. En la gráfica a) se muestra el ajuste al polarizador usando el calibrado basado en Brewster donde  $\delta_{B_P} = 0,02^\circ$  y en la gráfica b) se usa el calibrado Malus donde  $\delta_{M_P} = -0,003^\circ$ .

En la Figura 7.3 se presentan los resultados experimentales obtenidos para el sustrato de oro tras corregir los ángulos  $A$  y  $P$  mediante el calibrado basado en Brewster, representado por  $n_{exp}(\text{Brewster})$  y  $k_{exp}(\text{Brewster})$ . Estos se comparan con los resultados experimentales donde el ángulo  $P$  fue corregido con el calibrado Malus, a partir del  $\delta_{B_A}$ , denotado por  $n_{exp}(\text{Malus})$  y  $k_{exp}(\text{Malus})$ .

Si bien se han empleado dos métodos distintos de calibración, ambos se basan en el mismo principio físico. Por tanto, los errores sistemáticos derivados de posibles imperfecciones en los polarizadores afectarán de forma similar a ambos enfoques. La principal diferencia observada radica en el nivel de ruido presente en la señal: se aprecia en la Figura 7.3 que el calibrado Malus muestra un perfil más fluctuante, lo que puede atribuirse a una mayor sensibilidad frente a las mencionadas pérdidas de intensidad. En consecuencia, el método que presenta mejores resultados debe entenderse como el más eficaz dentro de este contexto específico, sin que ello implique una mayor fidelidad teórica general. A raíz de lo expuesto, se opta por emplear el calibrado basado en Brewster para los análisis posteriores.

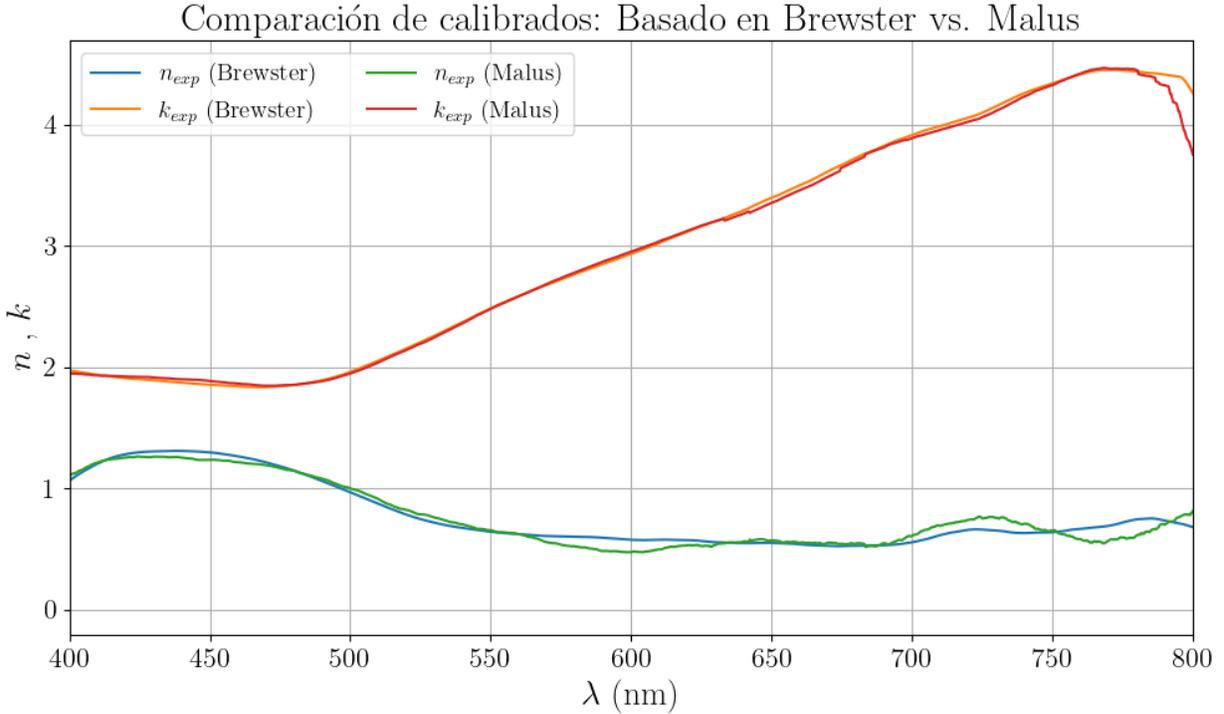


Figura 7.3: Comparación de los resultados experimentales obtenidos para el sustrato de oro, a partir de la corrección del ángulo de los polarizadores empleando ambos enfoques de calibrado, calibrado basado en Brewster y calibrado Malus.

## 7.2. Sustrato de Oro

El sustrato de oro se empleó extensamente tanto en el análisis comparativo de los métodos de obtención del índice de refracción complejo  $(n, k)$  como en la evaluación del efecto del paso angular sobre la precisión de los resultados, sirviendo como base para ajustar y optimizar el sistema de medición en su conjunto.

### 7.2.1. Comparación métodos de análisis según el paso angular

A partir de las dos metodologías descritas en la sección 3.3.1 para la obtención de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ , se ha realizado una comparación sistemática de los resultados proporcionados por ambas, en función del paso angular seleccionado durante el barrido del ángulo del analizador ( $A$ ). Se denominará como “Ajuste” al método que ajusta la intensidad registrada  $I(A)$  para cada longitud de onda según la ecuación 3.30, y se referirá como “Sumatorio” al cálculo de los parámetros según la suma discreta de esa misma intensidad según la ecuación 3.31. Este último método aproxima la integral de Fourier mediante una suma finita, y demostrará ser especialmente sensible al paso angular, ya que la calidad de esta suma depende directamente de la densidad del muestreo.

El propósito principal de esta comparación es evaluar la compatibilidad y consistencia entre ambos enfoques, ya que, aunque comparten el mismo fundamento teórico, presentan diferencias significativas en la elección del paso angular para el muestreo. Otro objetivo relevante es identificar cuál de los métodos resulta más adecuado cuando se busca reducir el tiempo de adquisición sin comprometer la precisión de los resultados. Esto es especialmente importante considerando que, como se detalla

en la sección 5, la adquisición de las intensidades  $I(A)$  se realiza mediante la rotación manual del analizador en el intervalo  $A \in [0^\circ, 180^\circ]$ . En este contexto, una mayor resolución angular implica un incremento considerable en el tiempo de adquisición, ya que cada posición angular requiere una medición independiente.

A continuación, se evaluaron diferentes configuraciones de paso angular, con incrementos de  $4^\circ$ ,  $12^\circ$  y  $18^\circ$ , con el fin de identificar un compromiso adecuado entre precisión en la obtención de los parámetros elipsométricos y eficiencia temporal en la realización del experimento. Se puede apreciar en la Figura 7.4 los resultados experimentales de  $(n, k)$  obtenidos para cada uno de los valores del paso angular seleccionados empleando los dos métodos de análisis: “Ajuste” y “Sumatorio”. También se representan los valores de Palik [15] como referencia y principal análisis experimental.

Se observa que, para pasos angulares pequeños, Figura 7.4a, ambos enfoques ofrecen resultados prácticamente indistinguibles, validando la equivalencia teórica entre el ajuste y el cálculo por sumatorio. Sin embargo, a medida que se incrementa el paso angular, Figura 7.4b-c, comienzan a aparecer discrepancias notables entre los resultados experimentales derivados del sumatorio, frente a los de referencia, mientras que la diferencia de resultados obtenidos a partir del ajuste es más estable. Este comportamiento es coherente con lo mencionado anteriormente. En el cálculo con el método de “sumatorio”, al incrementarse el paso angular, se dispone de menos valores para realizar la suma discreta de la intensidad  $I(A)$ , lo que reduce la precisión de la medida.

Con el fin de respaldar cuantitativamente estas afirmaciones y evaluar el grado de concordancia entre los conjuntos de datos comparados, se calcularon dos métricas ampliamente utilizadas en análisis de errores: el Error Absoluto Medio (Mean Absolute Error, MAE) y la Raíz del Error Cuadrático Medio (Root Mean Squared Error, RMSE).

El MAE indica, en promedio, cuánto difieren los valores comparados, lo que permite tener una visión clara de la precisión general, y sigue la ecuación:

$$\text{MAE} = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \tilde{x}_i|}{n} \quad (7.3)$$

donde  $x_i$  y  $\tilde{x}_i$  serán los valores a comparar experimentales y de referencia, respectivamente, tanto para el índice de refracción ( $n$ ) como para el coeficiente de extinción ( $k$ ).

Por su parte, el RMSE también mide la diferencia entre los valores, pero penaliza en mayor medida los errores grandes al elevar al cuadrado las diferencias antes de promediarlas, siguiendo la ecuación:

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \tilde{x}_i|^2}{n}} \quad (7.4)$$

El análisis mediante estas dos métricas complementarias permite obtener una buena valoración del grado de similitud entre los conjuntos de datos analizados. El código que recoge estas funciones queda detallado en el Apéndice V.3.

Comparación resultados del “Ajuste” vs. valores del Palik						
Paso	4°		12°		18°	
Magnitud	MAE	RMSE	MAE	RMSE	MAE	RMSE
$n$	0,2311	0,2996	0,2514	0,3316	0,2621	0,2998
$k$	0,1197	0,1511	0,1425	0,1887	0,1292	0,1568

Comparación resultados del “Sumatorio” vs. valores del Palik						
Paso	4°		12°		18°	
Magnitud	MAE	RMSE	MAE	RMSE	MAE	RMSE
$n$	0,2442	0,3373	0,4015	0,4875	0,5235	0,5671
$k$	0,1371	0,1691	0,2131	0,2767	0,2288	0,2822

Tabla 7.1: Valores de MAE y RMSE en la comparación de los resultados obtenidos por ambos métodos de análisis: “Ajuste” y “Sumatorio”, frente a los valores bibliográficos del Palik. Estudiados en el rango de interés [400-800] nm para un mismo paso angular.

En la Tabla 7.1 se observa que, con ambas metodologías, los errores en los valores experimentales del índice de refracción ( $n$ ) y del coeficiente de extinción ( $k$ ) aumentan a medida que crece el paso angular en el barrido del ángulo del analizador ( $A$ ). En particular, el MAE para  $n$  entre los valores experimentales con el método de “sumatorio” y los valores de referencia de Palik llega a incrementar 0,30 entre un paso de 4° y 18°. Este método muestra una fuerte dependencia a cambios en el paso angular, tal como se había mencionado. En cambio, el método de “ajuste” presenta una variación mucho menor ante el mismo aumento en el paso angular, con un cambio en el MAE para  $n$  de solo 0,06 respecto a los valores de Palik. Los errores del coeficiente de extinción ( $k$ ), para ambas metodologías, también aumentan pero de forma menos brusca. En general, esto indica que el método de “ajuste” es mucho menos sensible a la reducción del número de datos experimentales, siempre que los puntos disponibles describan adecuadamente la forma de la curva de la intensidad.

Del análisis comparativo entre los métodos de ajuste y sumatorio, se concluye que ambos pueden ofrecer resultados comparables bajo ciertas condiciones experimentales (pasos angulares pequeños), pero presentan diferencias importantes en términos de precisión y eficiencia si esas condiciones varían (pasos angulares altos). En particular, se ha observado que el método del sumatorio requiere una alta densidad de puntos, es decir, pequeños pasos angulares, para mantener una buena concordancia con los valores de referencia, lo que implica mayores tiempos de adquisición y procesamiento. Por otro lado, el método de “ajuste” ha demostrado ser significativamente más estable frente al aumento del paso angular, manteniendo una precisión considerable incluso cuando se reduce el número de datos experimentales. Esta característica lo convierte en el método más adecuado cuando se desea optimizar el tiempo de adquisición sin comprometer la calidad de las medidas. Por tanto, se presenta como la opción más viable para el estudio de la reproducibilidad de las medidas.

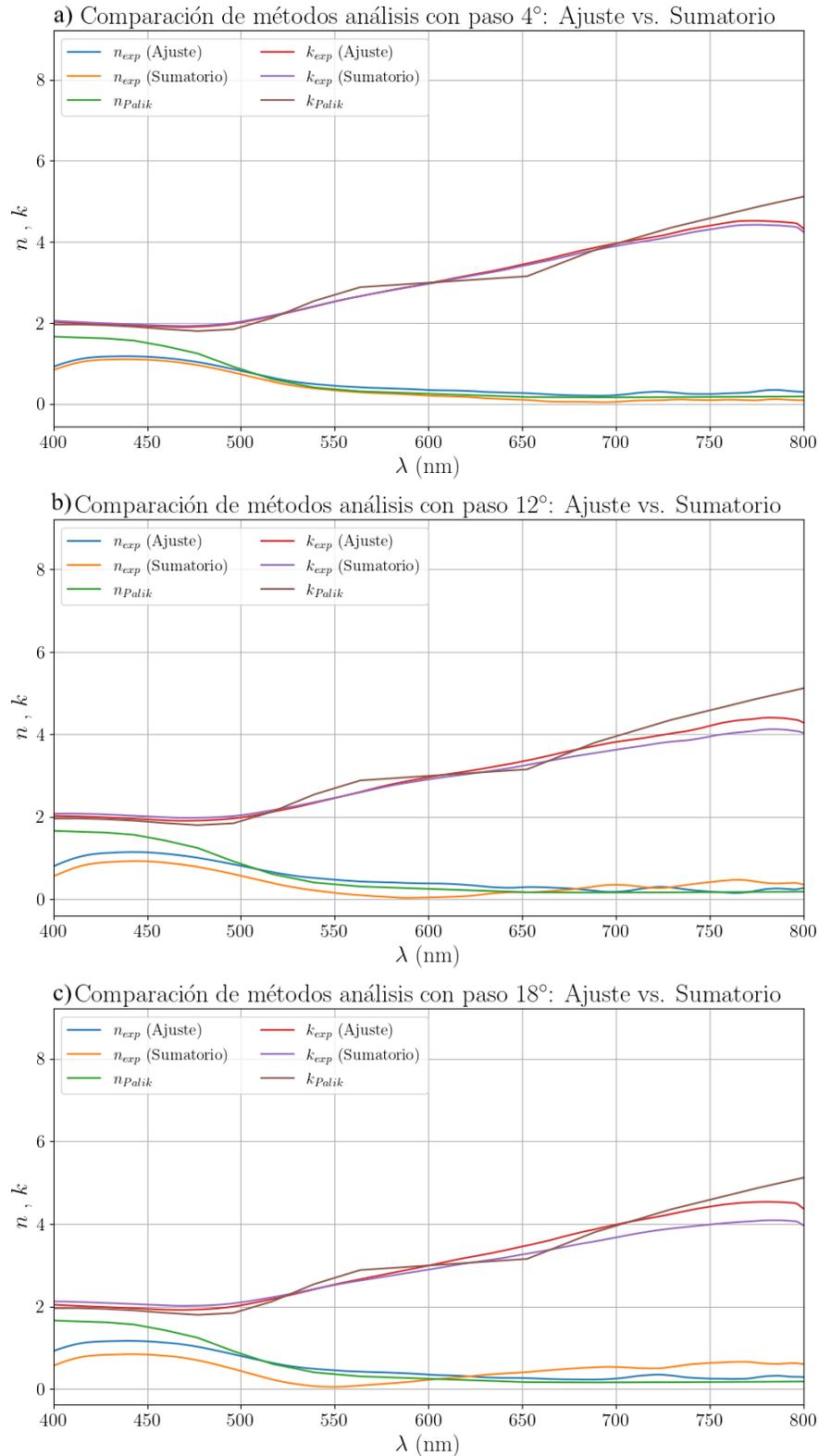


Figura 7.4: Comparación del índice de refracción complejo ( $n$ ,  $k$ ) obtenido por los dos métodos de análisis: “Ajuste” y “Sumatorio”, frente a los valores del Palik, y su desempeño con diferentes pasos angulares. El gráfico (a) corresponde a un paso angular de 4°, el (b) a 12°, y el (c) a 18°.

### 7.2.2. Concordancia resultados experimentales y valores de referencia

Gracias al análisis del apartado anterior, se ha determinado que, para evaluar adecuadamente los resultados experimentales del índice de refracción complejo ( $n$ ,  $k$ ) en comparación con los valores bibliográficos, deben considerarse las medidas realizadas con un paso angular de  $4^\circ$ . Bajo estas condiciones experimentales, los resultados obtenidos mediante ambos métodos de análisis son comparables.

En la Figura 7.5 se presentan nuevamente los resultados experimentales comparados con los valores de referencia bibliográficos de Palik [15], ya que el objetivo de este apartado es evaluar la fiabilidad de los resultados en relación con la literatura y analizar las posibles fuentes de error. Por otro lado, en la Figura 7.6, se comparan los resultados con los datos proporcionados por Johnson & Christy [14], otro referente experimental. Además, se incluye un tercer conjunto de referencia, denotado como “elipsómetro comercial”, correspondiente a medidas realizadas con el equipo Sopra GES5, un elipsómetro de alta precisión. Cabe destacar que estos valores se han obtenido a partir del mismo sustrato de oro utilizado en el experimento, véase la comparación en la Figura 7.7.

Para cuantificar la discrepancia entre los resultados experimentales y los valores de referencia, se calcularán, como en el análisis anterior, los valores MAE y RMSE. Cabe señalar que, en este caso, el procedimiento de cálculo difiere ligeramente del anterior, debido a que los datos bibliográficos presentan una menor densidad de puntos. En las comparaciones previas, los valores eran directamente equiparables.

Para resolver esta diferencia, se interpola una serie de datos a los puntos con los que se desea comparar, utilizando la librería SciPy [11]. La serie con mayor número de puntos es la que se interpola a la de menor resolución, ya que la interpolación resulta más precisa cuando se aplica sobre datos más continuos, en lugar de aquellos con mayor dispersión. En este caso, los datos experimentales se interpolan para ser evaluados en las mismas longitudes de onda que los valores de la literatura, dentro del rango de estudio [400–800] nm, sin comprometer la precisión de las medidas.

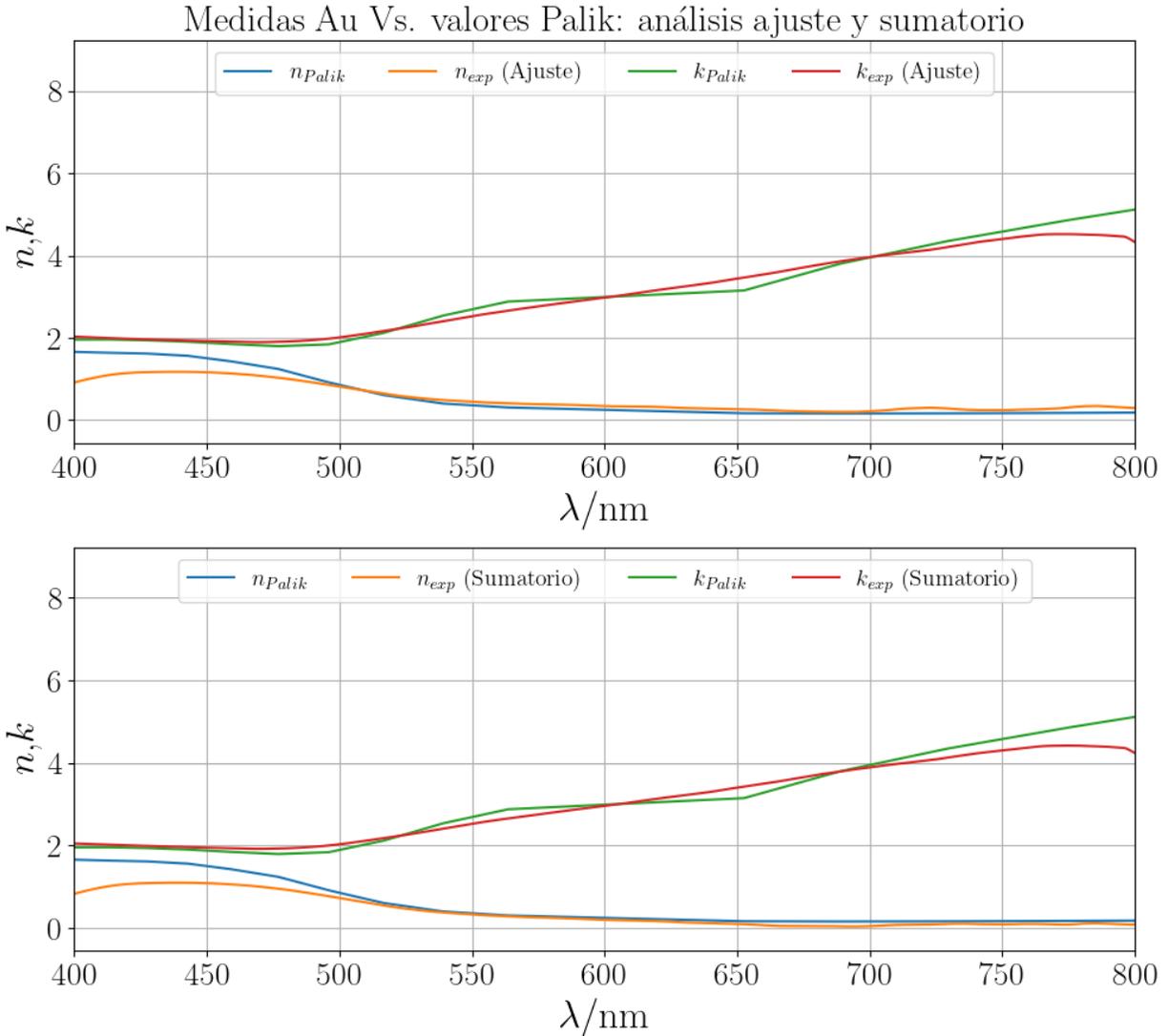


Figura 7.5: Representación de los resultados experimentales correspondientes a ambos métodos de análisis: “Ajuste” y “Sumatorio”, en el rango  $\lambda \in [400 - 800]$  nm, frente a los valores de la literatura de Palik.

Ajuste Vs. Palik				Sumatorio Vs. Palik			
$n$		$k$		$n$		$k$	
MAE	RMSE	MAE	RMSE	MAE	RMSE	MAE	RMSE
0,2311	0,2996	0,1197	0,1511	0,2442	0,3373	0,1371	0,1691

Tabla 7.2: Errores MAE y RMSE entre los resultados experimentales por ambos métodos de análisis y los datos de referencia de Palik.

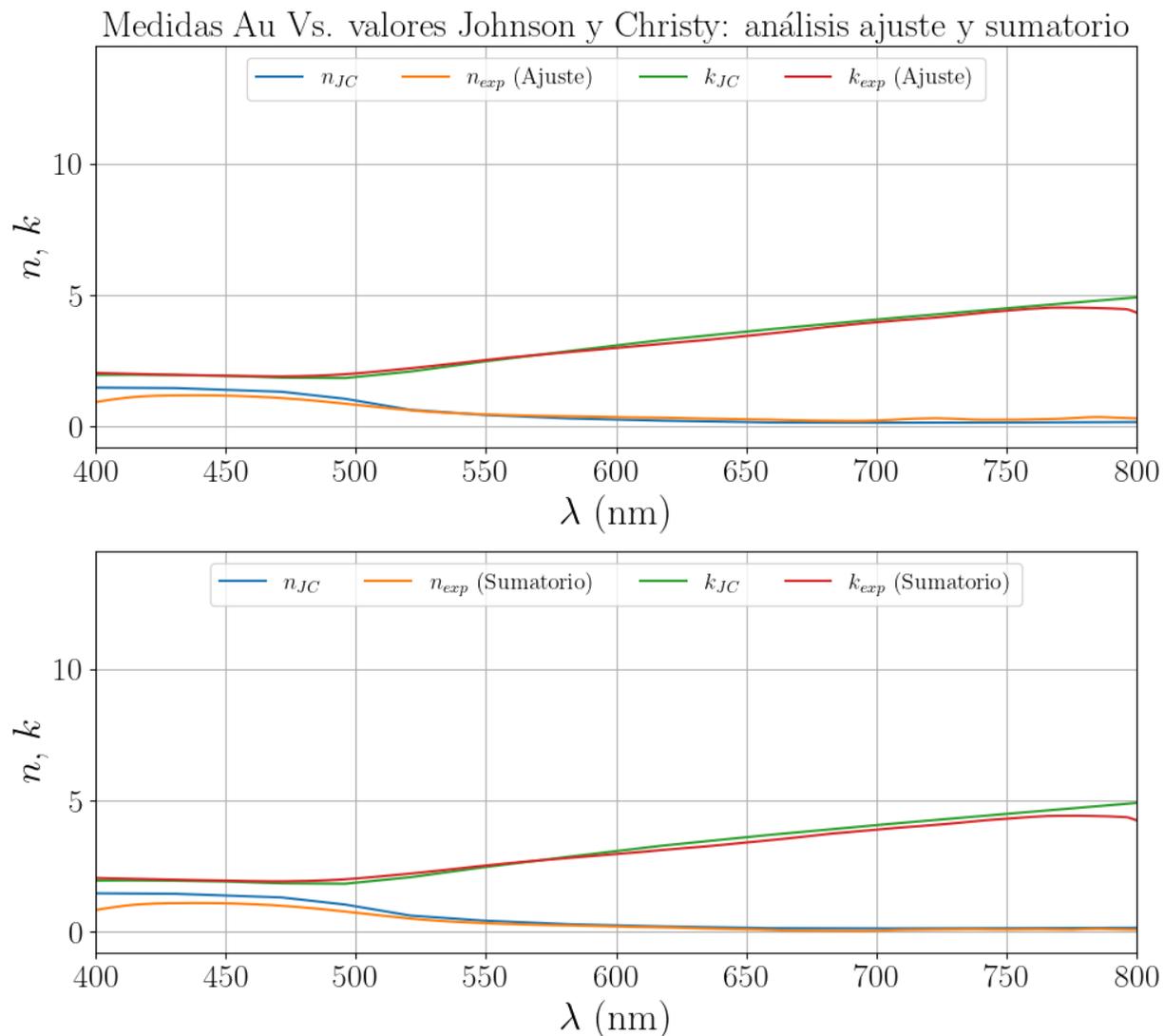


Figura 7.6: Representación de los resultados experimentales correspondientes a ambos métodos de análisis: “Ajuste” y “Sumatorio”, en el rango  $\lambda \in [400 - 800]$  nm, frente a los valores de la literatura de Johnson & Christy.

Ajuste Vs. Johnson & Christy				Sumatorio Vs. Johnson & Christy			
$n$		$k$		$n$		$k$	
MAE	RMSE	MAE	RMSE	MAE	RMSE	MAE	RMSE
0,1282	0,1627	0,0800	0,0995	0,1893	0,2197	0,1124	0,1305

Tabla 7.3: Errores MAE y RMSE entre los resultados experimentales por ambos métodos de análisis y los datos de referencia de Johnson & Christy.

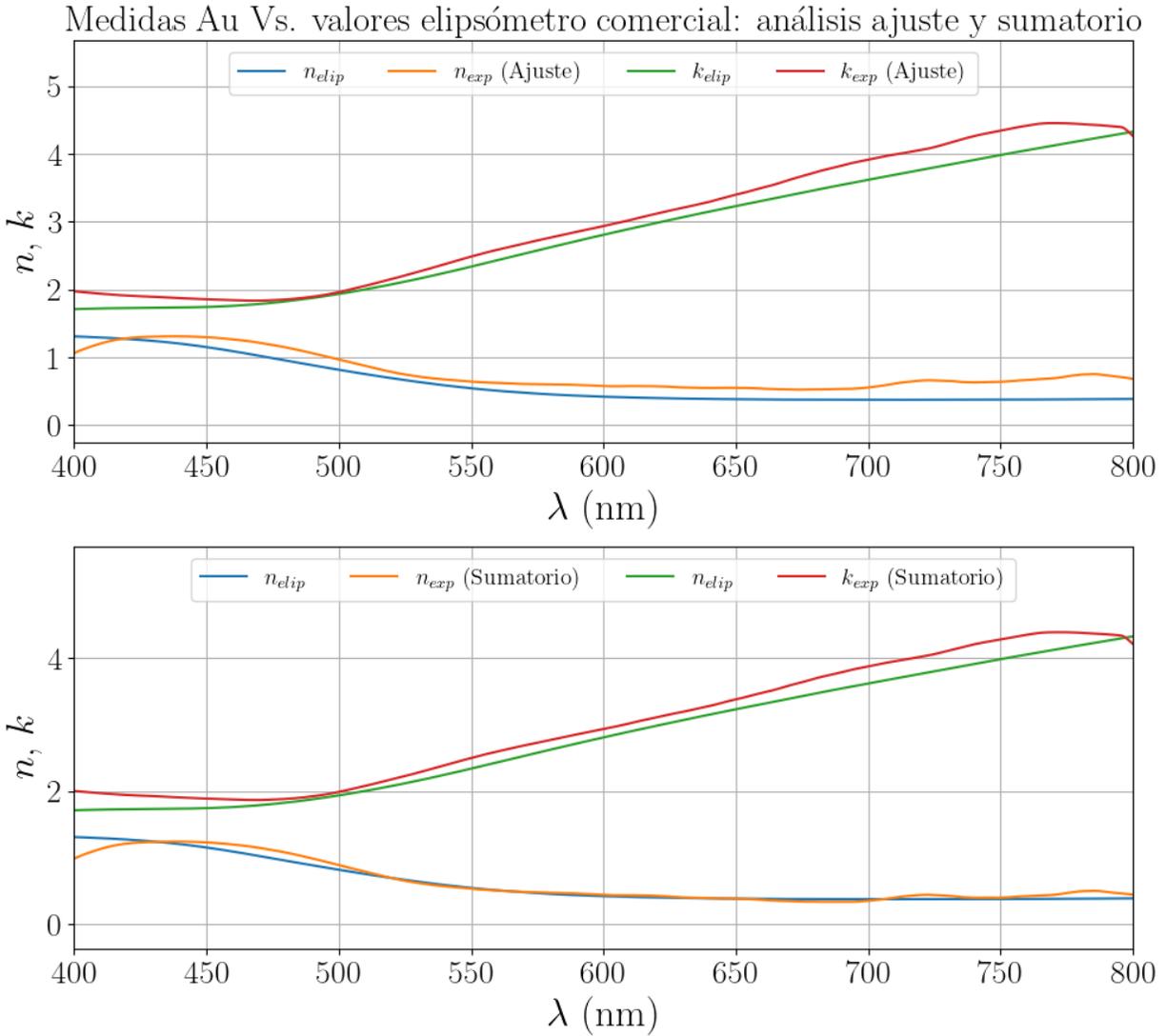


Figura 7.7: Representación de los resultados experimentales correspondientes a ambos métodos de análisis: “Ajuste” y “Sumatorio”, en el rango  $\lambda \in [400 - 800]$  nm, frente a los valores de referencia del elipsómetro comercial.

Ajuste Vs. Elipsómetro comercial				Sumatorio Vs. Elipsómetro comercial			
$n$		$k$		$n$		$k$	
MAE	RMSE	MAE	RMSE	MAE	RMSE	MAE	RMSE
0,1522	0,1718	0,1851	0,2052	0,0630	0,0755	0,1896	0,2007

Tabla 7.4: Errores MAE y RMSE entre los resultados experimentales por ambos métodos de análisis y los datos de referencia de elipsómetro comercial.

La comparación de los resultados experimentales con los valores de la literatura de Palik y Johnson & Christy (JC) proporciona una referencia general sobre la precisión del experimento, los resultados experimentales obtenidos son bastante precisos y se adecúan casi de forma perfecta a los valores de la literatura. No obstante, las condiciones específicas bajo las cuales se obtuvieron dichos datos de referencia no son completamente conocidas, en particular en lo que respecta a la pureza del oro, la preparación de los sustratos y otros factores experimentales que pueden influir significativamente en los valores del índice de refracción. Por tanto, las discrepancias observadas podrían deberse, en parte, a diferencias en la calidad o composición de las muestras empleadas y el estudio de las fuentes de error con estos datos no sería concluyente.

El sustrato de oro cuenta con los valores de referencia del elipsómetro comercial, datos de gran relevancia por haber sido obtenidos a partir del mismo sustrato usado en el experimento. Esto supone una fuente de contrastación fiable para discutir las fuentes de error, descartando discrepancias que puedan venir del depósito del sustrato de oro.

Luego, a la luz de los errores que se muestran en la Tabla 7.4, se observa que el enfoque basado en el sumatorio presenta un menor margen de error en comparación con el método de “ajuste”. En el cálculo del coeficiente de extinción ( $k$ ), ambos métodos tienen errores similares, lo que indica que esta magnitud puede determinarse con una precisión comparable independientemente del análisis utilizado. Sin embargo, en lo que respecta al índice de refracción ( $n$ ), el sumatorio parece ofrecer un resultado más preciso. Este hecho puede explicarse por haber una menor dependencia de los resultados derivados del método del sumatorio con respecto a los ángulos del analizador ( $A$ ) y el polarizador ( $P$ ).

Las magnitudes de los errores asociados al coeficiente de extinción ( $k$ ) y al índice de refracción ( $n$ ) en la comparación del método de “ajuste” con los valores de referencia, sugieren una marcada dependencia con el ángulo de incidencia ( $\phi_0$ ). Tal como se analizó en la sección 6.2, dichas magnitudes muestran de forma comparable una alta sensibilidad a variaciones en  $\phi_0$ , lo que refuerza la influencia de dicha variable en la precisión de los resultados y apunta a la necesidad de mejorar la determinación del mismo en el sistema. Considerando que en ese mismo análisis, se observó que el error máximo en  $n$ , inducido por una desviación de  $2^\circ$  en el ángulo del polarizador ( $P$ ), podría llegar a dar una desviación relativa del 100% y que el error máximo en  $n$ , inducido por una desviación de  $2^\circ$  en el ángulo del analizador ( $A$ ), podría llegar hasta el 40%, el resultado obtenido para esta magnitud, además de ser favorable, prueba que el calibrado realizado a los elementos polarizadores del sistema es adecuado y funcional. Estos niveles de precisión evidencian un desempeño experimental sólido y confirman que los resultados son suficientemente fiables para la caracterización óptica del sustrato de oro.

### 7.3. Sustrato de Aluminio

Este apartado presenta los resultados experimentales obtenidos del análisis del sustrato de aluminio (Al), aplicando los conceptos y métodos desarrollados a lo largo del trabajo. Esta muestra se ha utilizado como referencia para evaluar la reproducibilidad de las medidas experimentales.

#### 7.3.1. Reproducibilidad de los resultados experimentales

Para el estudio de la reproducibilidad, se compararon los resultados experimentales obtenidos en tres días distintos con los valores del Palik [15] para el aluminio, como se muestra en la Figura 7.8. En este caso, a diferencia del estudio con el sustrato de oro, no se cuenta con una referencia directa tomada con la misma lámina. Las medidas se realizaron procurando mantener un alineamiento consistente del dispositivo y condiciones de medición similares. Basándose en el análisis realizado con el sustrato de oro, se optó por emplear el método de “ajuste” con un paso angular de  $12^\circ$ , elegido para optimizar el tiempo de adquisición sin comprometer la precisión de los resultados. En la Tabla 7.5 se recogen los errores asociados a los resultados experimentales correspondientes a cada día con los valores de la literatura.

Día 1 vs. Palik		
Magnitud	MAE	RMSE
$n$	0,0943	0,1070
$k$	0,1456	0,1851
Día 2 vs. Palik		
Magnitud	MAE	RMSE
$n$	0,0582	0,0863
$k$	0,2699	0,3101
Día 3 vs. Palik		
Magnitud	MAE	RMSE
$n$	0,0938	0,1339
$k$	0,3975	0,4890

Tabla 7.5: Errores MAE y RMSE entre los resultados experimentales calculados en distintos días y los datos de referencia de Palik para  $n$  y  $k$ .

A la vista de los datos recogidos en la Tabla 7.5, el índice de refracción ( $n$ ) se reproduce de manera consistente en los tres días de medición. Los valores obtenidos muestran una buena concordancia con los datos de referencia, lo que sugiere que la muestra utilizada en el experimento presenta una pureza similar a la del material considerado por Palik.

Por otro lado, los resultados del coeficiente de extinción ( $k$ ) presentan mayor dispersión y menor concordancia con los valores tabulados. Esta discrepancia puede estar influida por la sensibilidad de  $k$  al ángulo de incidencia ( $\phi_0$ ), como se ha discutido en el estudio anterior. También se evaluó la posibilidad de que la muestra estuviera contaminada o sucia, lo cual podría alterar las medidas. No obstante, este escenario parece poco probable dado que se tomaron precauciones adecuadas durante su manipulación, como el uso de guantes y su almacenamiento tras haber utilizado la muestra.

La explicación más plausible para esta discrepancia es una desviación en el ángulo de incidencia ( $\phi_0$ ) al acoplar la fibra a la lente. Es probable que, durante el montaje al colocar y quitar la fibra óptica, el ángulo no coincida exactamente con el valor determinado, lo que introduce un error sistemático. Dado que el índice de refracción ( $n$ ) se ha determinado con bastante precisión, se considera que los errores introducidos por la calibración de los polarizadores, realizada en días distintos a las medidas, podrían compensar estas desviaciones, resultando en una medida final más coherente.

En resumen, este experimento ha demostrado ser reproducible con tiempos de adquisición bajos, proporcionando resultados consistentes y precisos, siempre que se controlen adecuadamente las condiciones del estudio, como la intensidad de la luz en el sistema, y se determinen con precisión parámetros clave, como el ángulo de incidencia ( $\phi_0$ ). Con este experimento, las propiedades ópticas características del sustrato de aluminio se han podido determinar con gran exactitud.

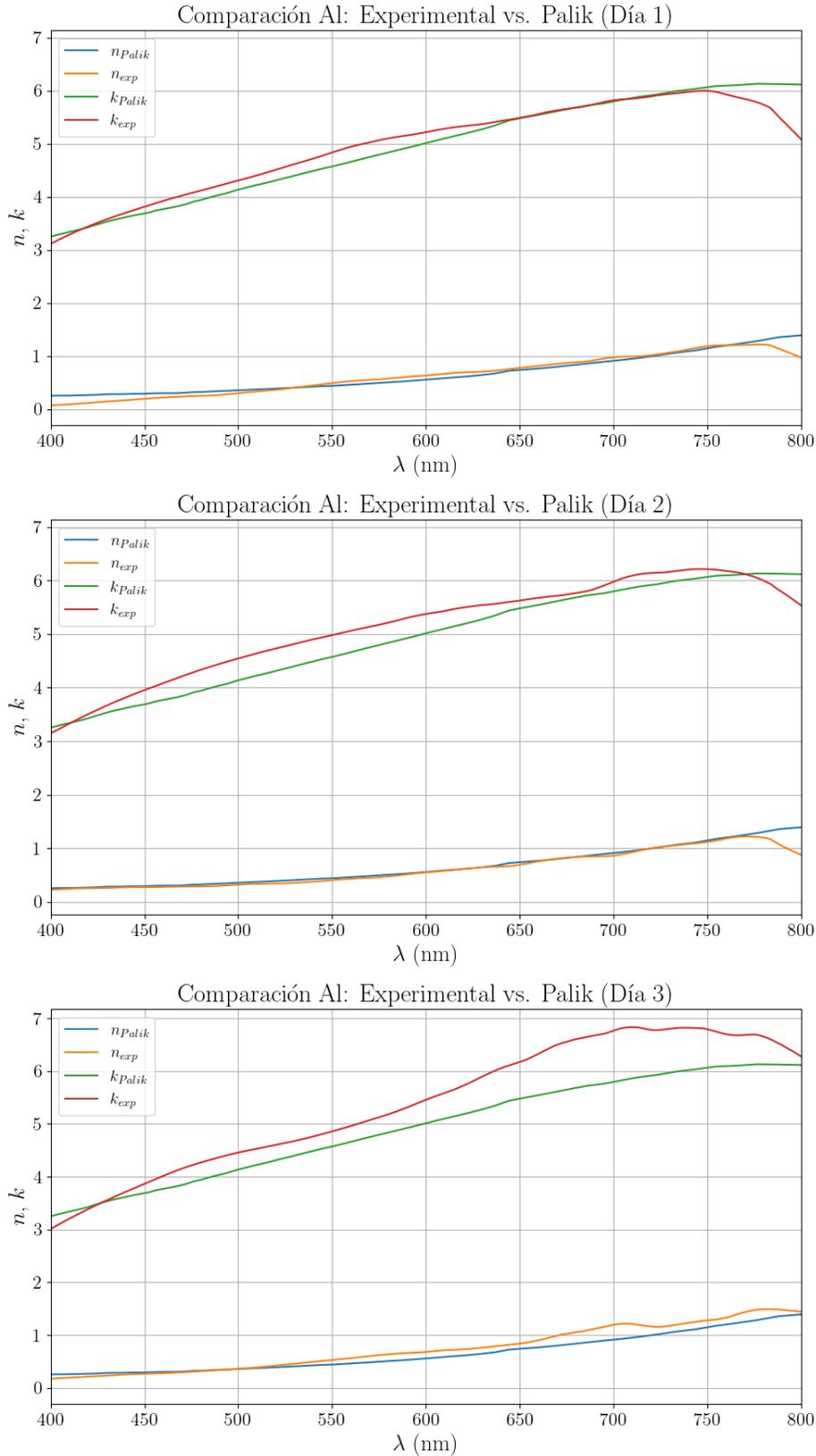


Figura 7.8: Representación de los resultados experimentales correspondientes al sustrato de aluminio, tomados en días diferentes, en el rango  $\lambda \in [400 - 800]$  nm, frente a los valores de referencia del Palik.

## Capítulo 8

# Conclusiones

A lo largo de este trabajo se montó, calibró y alineó un elipsómetro con configuración PSAr, en el que se han empleado: un polarizador, una muestra fija y un analizador rotatorio, lo que ha permitido registrar con precisión las variaciones en el estado de polarización de la luz reflejada por la muestra, respecto a los estados de la luz incidente. Con este montaje, se han determinado con éxito las propiedades ópticas de dos sustratos metálicos: oro (Au) y aluminio (Al). La caracterización se ha llevado a cabo en el rango del espectro visible comprendido entre  $\lambda \in [400 - 800]$  nm, rango de operación espectral de los elementos polarizadores.

Se ha comprobado que el control de los parámetros libres del dispositivo experimental y el uso de pasos angulares adecuados para el barrido angular en el analizador durante las medidas son factores fundamentales para asegurar la calidad de los datos obtenidos y minimizar los errores sistemáticos. Gracias a este enfoque, ha sido posible realizar medidas reproducibles y con alta precisión de los parámetros elipsométricos ( $\psi$ ,  $\Delta$ ), a partir de los cuales se han calculado los valores del índice de refracción complejo ( $n$ ,  $k$ ) para ambos materiales. Los valores encontrados para  $N$  presentan un buen acuerdo con los valores de referencia bibliográficos.

La simulación del experimento, variando los parámetros libres (ángulo de incidencia, ángulo del analizador y ángulo del polarizador), ha permitido establecer las condiciones óptimas experimentales para llevar a cabo las medidas de la forma más precisa. Este análisis ha puesto de manifiesto que pequeñas desviaciones en estas magnitudes pueden inducir grandes discrepancias en la determinación de  $n$  y de  $k$ , siendo el ángulo del polarizador  $P$  el que más error puede introducir. Sin embargo, experimentalmente, se ha observado que el ángulo de incidencia ( $\phi_0$ ) influye más en la precisión de la medida por la dificultad de fijarle de manera adecuada. Lo que indica que el proceso de alineamiento debe ser llevado de una forma muy cuidadosa.

En los procesos realizados para llevar a cabo el calibrado, se ha encontrado que el procedimiento basado en el ángulo de Brewster no solo corrige eficazmente los ángulos de los polarizadores, sino que además lo hace con menor nivel de ruido en comparación con el calibrado Malus. Asimismo, se han utilizado dos metodologías de análisis de datos: “Ajuste” y “Sumatorio”, concluyendo que ambas son válidas siempre que se respeten las condiciones experimentales que minimizan el error, en particular, que el paso angular empleado en el barrido del analizador sea pequeño. Cabe destacar que un paso angular grande implica realizar un menor número de medidas, lo que reduce significativamente el tiempo de adquisición. De las dos metodologías, el método de “ajuste” ha resultado ser el que mejor equilibra la precisión de los resultados y el tiempo de adquisición necesario, convirtiéndose en la opción más adecuada para el tratamiento de las medidas en este experimento.

En resumen, este trabajo demuestra la viabilidad y precisión de un elipsómetro montado manualmente para la caracterización óptica de metales, siendo una herramienta eficaz para la medida de propiedades ópticas de sustratos metálicos. Como trabajo futuro, se propone mejorar el sistema experimental automatizando la rotación del analizador con un motor, optimizando así la adquisición de datos y reduciendo el error humano, así como perfeccionar el proceso de alineamiento del brazo detector. Además, sería de interés aplicar el sistema para medir el grosor de láminas delgadas o evaluar la respuesta óptica de láminas multicapa con estructuras más complejas.

# Bibliografía

- [1] Drawell Analytical. Polarimetry: Applications, advancements, and industry trends, 2024.
- [2] Lila Raj Dahal, Deepak Sainju, N.J. Podraza, S. Marsillac, and R.W. Collins. Real time spectroscopic ellipsometry of ag/zno and al/zno interfaces for back-reflectors in thin film si:h photovoltaics. *Thin Solid Films*, 519(9):2682–2687, 2011. 5th International Conference on Spectroscopic Ellipsometry (ICSE-V).
- [3] Erdoğan Özgür, Aykut Arif Topçu, Erkut Yılmaz, and Adil Denizli. Surface plasmon resonance based biomimetic sensor for urinary tract infections. *Talanta*, 212:120778, 2020.
- [4] John David Jackson. *Classical Electrodynamics*. Wiley, 3 edition, 1999.
- [5] David J. Griffiths. *Introduction to Electrodynamics*. Cambridge University Press, 4th edition, 2017.
- [6] Óptica Naranjo. Plano de incidencia: Clave en óptica. <https://opticanaranjo.com.ar/plano-de-incidencia-optica/>, 2023.
- [7] H.Fujiwara. *Spectroscopic Ellipsometry: Principles and Applications*. John Wiley & Sons, Ltd., 2007.
- [8] E. Hecht. *Optics*. Addison-Wesley, San Francisco, 4 edition, 2002.
- [9] Losurdo M. et al. Spectroscopic ellipsometry and polarimetry for materials and systems analysis at the nanometer scale: state-of-the-art, potential, and perspectives. *J Nanopart Res* 11, 1521–1554, 2009.
- [10] Scott Prahl. PyPolar: Python code for simulating polarized light. <https://github.com/scottprahl/pypolar>, 2021.
- [11] Virtanen et. al. SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python. *Nature Methods*, 17:261–272, 2020.
- [12] Charles R. Harris et al. Array programming with NumPy. *Nature*, 585(7825):357–362, September 2020.
- [13] J. D. Hunter. Matplotlib: A 2d graphics environment. *Computing in Science & Engineering*, 9(3):90–95, 2007.
- [14] M. N. Polyanskiy. Refractive index database. <https://refractiveindex.info>, 2025.
- [15] Edward D. Palik, editor. *Handbook of Optical Constants of Solids*. Academic Press, San Diego, 1985.

- [16] Juan Marcos Sanz Casado. *Medida de constantes ópticas de materiales mediante elipsometría de reflexión*. Phd thesis, Universidad de Cantabria, Cantabria, España, 2011.
- [17] D. E. Aspnes. Optical properties of thin films. *Thin Solid Films*, 89(3), 1982.
- [18] R. M. A. Azzam. *Ellipsometry and Polarized Light*. North-Holland Publishing Co., 1977.

# Apéndice

## Apéndice I

### Estados de polarización

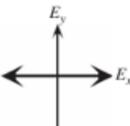
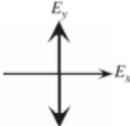
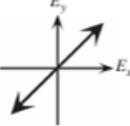
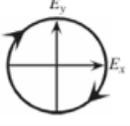
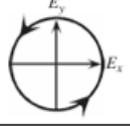
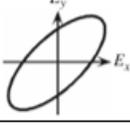
Estados de Polarización			
Polarización	Estado	Vector de Jones	Desfase del campo ( $E_{x0}=E_{y0}$ )
Polarización lineal paralela al eje x		$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$E_{y0}=0$
Polarización lineal paralela al eje y		$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$E_{x0}=0$
Polarización lineal orientada a 45°		$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\delta_x - \delta_y = 2\pi$
Polarización circular dextrógira		$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$	$\delta_x - \delta_y = 3\pi/2$
Polarización circular levógira		$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$	$\delta_x - \delta_y = \pi/2$
Polarización elíptica (levógira)		$\begin{bmatrix} \sin \psi \exp(i\Delta) \\ \cos \psi \end{bmatrix}$	$\delta_x - \delta_y = \pi/4$

Figura 8.1: Expresión de los estados de polarización por vectores de Jones y convencional.

## Apéndice II

### Descripción de un dispositivo sencillo empleando matrices de Jones

El dispositivo experimental está compuesto por un polarizador rotado un ángulo  $\alpha$ , un analizador alineado con el eje de abscisas y un detector, como se muestra en la Figura 3.2. A continuación, se presentan las matrices de Jones asociadas a cada uno de los elementos atravesados, en el orden en que la luz interactúa con ellos, poniendo de manifiesto el orden con el que se colocan las matrices de dichos elementos.

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_p \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde el orden seguido es el contrario al orden de interacción. Primero la matriz del analizador, luego la rotación del eje del polarizador respecto del eje de abscisas y, finalmente, el polarizador.

Desarrollando el cálculo matricial, se llega a que la intensidad del campo detectado resulta en la expresión de la Ley de Malus, que tiene la forma de:

$$I = |E_x|^2 = |E_p|^2 \cdot \cos^2 \alpha$$

## Apéndice III

### Comportamiento de la luz en el sistema RAE

Empleando matrices de Jones sencillas, el instrumento elipsométrico de configuración PSAr se expresa como:

$$L_{out} = A \cdot R(A) \cdot S \cdot R(-P) \cdot P \cdot L_{in}$$

donde  $L_{out}$  representa el vector de Jones de la luz detectada,  $L_{in}$  muestra el vector de Jones correspondiente a la luz incidente y  $A$  en la matriz de rotación  $R(A)$  representa el ángulo de rotación del analizador, mientras que  $P$  es el ángulo de rotación del polarizador. Dado que los vectores de Jones no pueden describir luz despolarizada (natural), la descripción de la luz incidente se expresa normalizada y su orientación se toma directamente paralela al eje de transmisión del polarizador. Asimismo, puesto que solo la luz que atraviesa el polarizador se toma en cuenta, en la expresión que describe el paso de la onda por el polarizador,  $R(-P)PR(P)$ , puede simplificarse el término  $R(P)$ . De forma similar, la matriz de rotación  $R(-A)$  se elimina de la expresión,  $R(-A)AR(A)$ , dado que la luz transmitida del analizador se detecta independientemente de la coordenada de rotación.

Se tendrá entonces que:

$$\begin{bmatrix} E_A \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos A & \sin A \\ -\sin A & \cos A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin \psi \cdot e^{i\Delta} & 0 \\ 0 & \cos \psi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos P & -\sin P \\ \sin P & \cos P \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Realizando el cálculo matricial se obtiene que:

$$E_A = \cos P \cdot \cos A \cdot \sin \psi \cdot e^{i\Delta} + \sin P \cdot \sin A \cdot \cos \psi$$

Y como la intensidad es igual a  $I = |E_A|^2$ , operando y aplicando las identidades trigonométricas necesarias se llega a:

$$\begin{aligned} I &= |E_A|^2 = E_A \cdot E_A^* = \\ &= (\cos P \cdot \cos A \cdot \sin \psi \cdot e^{i\Delta} + \sin P \cdot \sin A \cdot \cos \psi) \cdot (\cos P \cdot \cos A \cdot \sin \psi \cdot e^{-i\Delta} + \sin P \cdot \sin A \cdot \cos \psi) = \\ &= \cos^2 P \cdot \cos^2 A \cdot \sin^2 \psi + \sin^2 P \cdot \sin^2 A \cdot \cos^2 \psi + \sin P \cos P \cdot \sin A \cos A \cdot \cos \psi \sin \psi \cdot (e^{i\Delta} + e^{-i\Delta}) = \\ &\quad [(e^{i\Delta} + e^{-i\Delta}) = 2 \cdot \cos \Delta \quad ; \quad \sin 2A = 2 \sin A \cos A] \\ &= \cos^2 P \cdot \cos^2 A \cdot \sin^2 \psi + \sin^2 P \cdot \sin^2 A \cdot \cos^2 \psi + \frac{1}{4} \cdot \sin 2P \cdot \sin 2A \cdot \cos 2\psi \cdot \cos \Delta = \\ &\quad [\cos^2 A = \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos 2A) \quad ; \quad \sin^2 A = \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos 2A)] \\ &= \frac{1}{8} \cdot (1 + \cos 2P) \cdot (1 + \cos 2A) \cdot (1 - \cos 2\psi) + \frac{1}{8} \cdot (1 - \cos 2P) \cdot (1 - \cos 2A) \cdot (1 + \cos 2\psi) \\ &\quad + \frac{1}{4} \cdot \sin 2P \cdot \sin 2A \cdot \cos 2\psi \cdot \cos \Delta \end{aligned}$$

Desarrollando los dos primeros términos se obtiene,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{8} \cdot (1 + \cos 2P + \cos 2A + \cos 2P \cdot \cos 2A - \cos 2\psi - \cos 2A \cdot \cos 2\psi - \cos 2P \cdot \cos 2\psi - \cos 2P \cdot \cos 2A \cdot \cos 2\psi + 1 \\ &\quad - \cos 2P - \cos 2A + \cos 2P \cdot \cos 2A + \cos 2\psi - \cos 2A \cdot \cos 2\psi - \cos 2P \cdot \cos 2\psi + \cos 2P \cdot \cos 2A \cdot \cos 2\psi) \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{4} \cdot \sin 2P \cdot \sin 2A \cdot \cos 2\psi \cdot \cos \Delta$$

Se simplifica la expresión,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{8} \cdot (2 + 2 \cdot \cos 2P \cdot \cos 2A - 2 \cdot \cos 2A \cdot \cos 2\psi - 2 \cdot \cos 2P \cdot \cos 2\psi) \\ &\quad + \frac{1}{4} \cdot \sin 2P \cdot \sin 2A \cdot \cos 2\psi \cdot \cos \Delta = \\ &= \frac{1}{4} \cdot ((1 - \cos 2P \cdot \cos 2\psi) + (\cos 2P - \cos 2\psi) \cdot \cos 2A + (\sin 2P \cdot \cos 2\psi \cdot \cos \Delta) \cdot \sin 2A) \end{aligned}$$

Finalmente, la expresión resultante para la intensidad en un elipsómetro con analizador rotatorio (RAE), en función del ángulo del analizador se escribe como:

$$I(A) = \frac{1}{4} \cdot \left( 1 + \frac{(\cos 2P - \cos 2\psi)}{(1 - \cos 2P \cdot \cos 2\psi)} \cdot \cos 2A + \frac{(\sin 2P \cdot \cos 2\psi \cdot \cos \Delta)}{(1 - \cos 2P \cdot \cos 2\psi)} \cdot \sin 2A \right)$$

Expresándose en su versión más simplificada como:

$$I = I_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \cos 2A + \beta \cdot \sin 2A)$$

donde  $\alpha = \frac{(\cos 2P - \cos 2\psi)}{(1 - \cos 2P \cdot \cos 2\psi)}$  y  $\beta = \frac{(\sin 2P \cdot \cos 2\psi \cdot \cos \Delta)}{(1 - \cos 2P \cdot \cos 2\psi)}$ .

## Apéndice IV

### Estudio de la intensidad que atraviesa dos polarizadores

A la hora de llevar a cabo las calibraciones del dispositivo experimental, se observa que la acción simultánea de los polarizadores disminuye la intensidad del haz. Según el concepto de polarizador, se conoce que su funcionamiento no debería afectar a la pérdida de esta magnitud. Sin embargo, tal como se aprecia en la Figura 8.2, se alcanza hasta un 44 % en pérdidas.

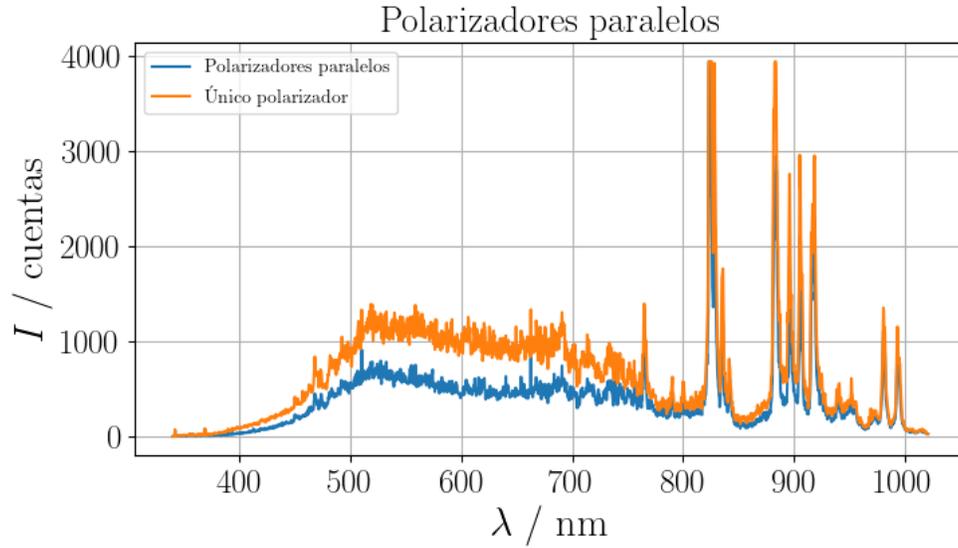


Figura 8.2: Comparación de la intensidad transmitida al emplear un solo polarizador frente a dos polarizadores paralelos, mostrando la atenuación observada en el sistema experimental.

## Apéndice V

### Algoritmos del código: Python

#### AV.1 Simulación y análisis de las medidas

```

1
2 # Funciones a usar en el programa principal
3 # Autora: Natalia Romero Sanchez
4
5 # Importamos las librerias necesarias
6 import numpy as np
7 import matplotlib.pyplot as plt
8 import sympy as sp
9
10 # Para la simulacion de los resultados se han definido las siguientes funciones
    -----
11
12 # Obtener la constante dielctrica para n y k conocidos
13 def epsilon_simula(n,k):
14     return (n + 1j*k)**2
15
16 # Obtener el parametro rho a partir de la constante dielctrica, con phi_0 conocido
17 def sacar_rho_simula(epsilon, phi_0):
18     c = np.sqrt(epsilon - np.sin(phi_0)**2) / (np.sin(phi_0) * np.tan(phi_0))
19     return (1 - c) / (1 + c)
20
21 # Obtener los parmetros psi y Delta asociados a las propiedades opticas de la muestra
22 def psi_simula(rho):
23     return np.arctan(np.sqrt(rho * rho.conjugate()))
24
25 def delta_simula(rho):
26     return np.angle(rho)
27
28 # Con todos estos parmetros y fijando el ngulo del polarizador P,
29 # variando el ngulo del analizador A, se obtiene la intensidad simulada:
30
31 def sacar_intensidad_simula(P, A, psi, delta):
32     a = (np.cos(2*P) - np.cos(2*psi)) / (1 - np.cos(2*P) * np.cos(2*psi))
33     b = (np.sin(2*P) * np.sin(2*psi) * np.cos(delta)) / (1 - np.cos(2*P) * np.cos(2*psi)
34         )
35     return 1/4 * (1 + a * np.cos(2*A) + b * np.sin(2*A))
36
37 # Para el anilisis del espectro de intensidad frente a longitud de onda
    -----
38
39 # Ajustamos la curva de intensidad frente a longitud de onda
40 # con una funcion de la forma I= I_0 + alpha*cos(2A) + beta*sin(2A)
41
42 def ajuste_intensidad(x, I_0, alpha, beta):
43     return I_0*(1 + alpha*np.cos(2*x) + beta*np.sin(2*x))
44
45 # Obtener los parametros asociados a la muestra, psi y Delta, a aprtir de los valores
46 # del ajuste
47 def psi_exp(alpha, P):
48     return np.arctan(np.sqrt((1+alpha)/(1-alpha))*np.abs(np.tan(P)))

```

```

49
50 def delta_exp(alpha,beta,P):
51     return np.arccos(beta/np.sqrt(1-alpha**2)*(np.tan(P))/np.abs(np.tan(P)))
52
53 # Analisis alternativo derivado del analisis de Fourier, hacer el sumatorio de las
    medidas de intensidad discreta
54
55 def parametro_suma(I,angulo,P):
56     I_dc= np.sum(I)/len(I)
57     I_c= np.sum(I*2*np.cos(2*angulo))/len(I)
58     I_s= np.sum(I*2*np.sin(2*angulo))/len(I)
59     alpha=I_c/I_dc
60     beta=I_s/I_dc
61     psi=np.arctan(np.sqrt((I_dc+I_c)/(I_dc-I_c))*np.abs(np.tan(P)))
62     delta=np.arccos(I_s/np.sqrt(I_dc**2-I_c**2)*(np.tan(P))/np.abs(np.tan(P)))
63     return alpha, beta, psi, delta
64
65 # Obtener el parametro rho del analisis
66 def sacar_rho_exp(psi,delta):
67     return np.tan(psi)*np.exp(1j*delta)
68
69 # Obtener la constante dielectrica del analisis
70 def sacar_epsilon_exp(phi_0, rho):
71     return np.sin(phi_0)**2+ np.sin(phi_0)**2*np.tan(phi_0)**2*((1-rho)/(1+rho))**2
72
73 # Los resultados para el ndice de refraccin y el coeficiente de extincion
74 # a partir de su relacin con la constante dielectrica obtenida del analisis
75
76 def n_exp(epsilon_exp):
77     return np.real((np.sqrt(epsilon_exp)+np.sqrt(epsilon_exp).conjugate())/2)
78
79 def k_exp(epsilon_exp):
80     return np.real(np.abs((np.sqrt(epsilon_exp)-np.sqrt(epsilon_exp).conjugate())/(2*1j
        )))
81
82
83 # Funcion de analisis COMPLETA para MEDIDAS SIMULADAS
84
85 def calcular_nk(n_au,k_au,P_simula,P,A_simula,A,phi_0_simula,phi_0):
86     epsilon = fe.epsilon_simula(n_au, k_au)
87     rho = fe.sacar_rho_simula(epsilon, phi_0_simula)
88     psi = fe.psi_simula(rho)
89     delta = fe.delta_simula(rho)
90     intensidad = fe.sacar_intensidad_simula(P_simula, A_simula, psi, delta)
91     popt, _ = curve_fit(fe.ajuste_intensidad, A, intensidad)
92     alpha = popt[1]
93     beta = popt[2]
94     psi_exp = fe.psi_exp(alpha, P)
95     delta_exp = fe.delta_exp(alpha, beta, P)
96     rho_exp = fe.sacar_rho_exp(psi_exp, delta_exp)
97     epsilon_exp = fe.sacar_epsilon_exp(phi_0, rho_exp)
98     n=fe.n_exp(epsilon_exp)
99     k=fe.k_exp(epsilon_exp)
100    return n, k

```

Listing 8.1: Funciones para la simulación de la intensidad reflejada por una muestra de propiedades ópticas conocidas: cálculo de  $\epsilon$ ,  $\rho$ ,  $\psi$ ,  $\Delta$  e intensidad simulada,  $I$ . Funciones de análisis para ambas metodologías de análisis espectral.

## AV.2 Análisis de las medidas experimentales

```

1
2
3 # Importamos las librerías necesarias
4 import os
5 import Funciones_elipso as fe
6 import matplotlib.pyplot as plt
7 import numpy as np
8 import sympy as sp
9 from scipy.optimize import curve_fit
10 from scipy.signal import savgol_filter
11
12 # Funcion de analisis total para MEDIDAS EXPERIMENTALES: medida de sustrato de oro '
13   Au4_2_5_25'
14 # Se selecciona la carpeta con los datos de la muestra y scanea los ficheros que
15   empiezan por 'au_exp'
16 contenido ='Au4_2_5_25'
17 with os.scandir(contenido) as ficheros:
18     ficheros = [fichero.name for fichero in ficheros if fichero.is_file() and fichero.
19                 name.startswith('au_exp')]
20
21 # Lee los datos de cada fichero y los guarda en una lista
22 intensidad=[]
23 for fichero in ficheros:
24     fich= open('Au4_2_5_25/'+fichero)
25     datos=fich.readlines()
26     datos= [i.split() for i in datos]
27     longitud_onda=[]
28     for i in range(len(datos)):
29         datos[i]= [float(j) for j in datos[i]]
30     intensidad.append([i[1] for i in datos])
31     longitud_onda.append([i[0] for i in datos])
32
33 # USO DE SVAITZKY-GOLAY filter
34 intensidad_suavizada=[]
35 for i in range(len(intensidad)):
36     intensidad_suavizada.append(savgol_filter(intensidad[i],51,1))
37
38 # Escribe los datos en un archivo de texto nuevo con todo ordenado por filas
39 f=open('Au4_2_5_25/experimental_completo.txt','w')
40 f.write(f'Longitud de onda (nm) \t {'\t'.join([str(4*i) for i in range(46)])} \n')
41 for i in range(len(longitud_onda[0])):
42     f.write(f'{longitud_onda[0][i]} \t {'\t'.join([str(j[i]) for j in
43         intensidad_suavizada])} \n')
44 f.close()
45
46 # Una vez los datos ya estan ordenados
47 -----
48 # Abrimos el archivo con los datos experimentales
49 fichero= open('Au4_2_5_25/experimental_completo.txt')
50 datos= fichero.readlines()
51 datos= [i.split('\t') for i in datos]
52
53 # guardamos la longitud de onda en una lista
54 # y convertimos los valores a float
55 longitud_onda= [i[0] for i in datos]
56 # quitar el primer elemento que es el texto 'longitud de onda'

```

```

53 longitud_onda= longitud_onda[1:]
54 longitud_onda= [float(i) for i in longitud_onda]
55
56 # ahora se sacan los valores de la intensidad y los angulos
57 # primero les convertimos a float
58 valores_tabla= [i[1:] for i in datos]
59 valores_tabla= [[float(j) for j in i] for i in valores_tabla]
60
61 # separar los datos de intensidad para cada longitud de onda
62 valores_tabla= np.array(valores_tabla)
63
64 angulo=[float(valores_tabla[0,i]) for i in range(len(valores_tabla[0]))] #con paso de 4
        grados
65
66 # Se tiene ahora que la intensidad atribuida a cada longitud de onda depende de la
        posicion
67 intensidades= valores_tabla[1,:,:]
68
69 # Ahora la informacion del archivo experimental esta en listas
        -----
70
71 # Los parametros con los que debemos trabajar son: (recordar que numpy trabaja con
        radianes)
72 P=45*np.pi/180
73 phi_0=67.5*np.pi/180
74 angulo_rad= np.array(angulo)*np.pi/180
75
76 #definimos listas que llenaremos con los resultados de cada longitud de onda
77 n_exp_au4=[]
78 k_exp_au4=[]
79 longitud_asociada_au4=[] #no en todas las longitudes se puede ajustar (ruido)
80
81 for l in range(len(longitud_onda)):
82     unica_intensidad= [float(intensidades[l,i]) for i in range(len(intensidades[0]))]
83     media_intensidad= np.mean(unica_intensidad)
84     if media_intensidad>=10: # marca las medidas donde el ruido permite obtener un
        valor fiable
85         # ahora se obtienen los valores de n y k
86         # ajustamos la curva
87         popt, pcov= curve_fit(fe.ajuste_intensidad, angulo_rad+A_corrige[l],
            unica_intensidad)
88         # los parametros alpha y beta salen del ajuste
89         alpha= popt[1]
90         beta= popt[2]
91         # es entonces cuando se empiezan a obtener parametros
92         psi_exp= fe.psi_exp(alpha, P+P_corrige[l])
93         delta_exp= fe.delta_exp(alpha, beta,P+P_corrige[l])
94         rho_exp= fe.sacar_rho_exp(psi_exp, delta_exp)
95         epsilon_exp= fe.sacar_epsilon_exp(phi_0, rho_exp)
96         # y finalmente se meten esos resultados en las listas
97         n_exp_au4.append(fe.n_exp(epsilon_exp))
98         k_exp_au4.append(fe.k_exp(epsilon_exp))
99         longitud_asociada_au4.append(longitud_onda[l])
100
101 # Las medidas antes de ser graficadas vuelven a suavizarse empleando el savgol_filter()

```

Listing 8.2: Ejemplo de análisis de medidas tomadas en el laboratorio.

## AV.3 Código MAE y RMSE

```

1
2 # Tengo todos los resultados de los pasos 4, 18 y 12 grados
3 # Y tengo los resultados de Palik, JC y elipsmetro comercial
4
5 import numpy as np
6 from scipy.interpolate import interp1d
7
8 def calcular_mae_rmse(wl1, n1, k1, wl2, n2, k2, rango=(400, 800)):
9     # donde wl=wavelength
10    # Convertir todo a arrays
11    wl1, n1, k1 = map(np.array, (wl1, n1, k1))
12    wl2, n2, k2 = map(np.array, (wl2, n2, k2))
13
14    # Filtrar el rango de longitud de onda
15    filtro1 = (wl1 >= rango[0]) & (wl1 <= rango[1])
16    filtro2 = (wl2 >= rango[0]) & (wl2 <= rango[1])
17    wl1, n1, k1 = wl1[filtro1], n1[filtro1], k1[filtro1]
18    wl2, n2, k2 = wl2[filtro2], n2[filtro2], k2[filtro2]
19
20    # Determinar cu l tiene m s puntos (mayor densidad)
21    if len(wl1) > len(wl2):
22        interp_n = interp1d(wl1, n1, kind='linear', bounds_error=False, fill_value="
23            extrapolate")
24        interp_k = interp1d(wl1, k1, kind='linear', bounds_error=False, fill_value="
25            extrapolate")
26        n1_interp = interp_n(wl2)
27        k1_interp = interp_k(wl2)
28        base_n, base_k = n2, k2
29        comp_n, comp_k = n1_interp, k1_interp
30    else:
31        interp_n = interp1d(wl2, n2, kind='linear', bounds_error=False, fill_value="
32            extrapolate")
33        interp_k = interp1d(wl2, k2, kind='linear', bounds_error=False, fill_value="
34            extrapolate")
35        n2_interp = interp_n(wl1)
36        k2_interp = interp_k(wl1)
37        base_n, base_k = n1, k1
38        comp_n, comp_k = n2_interp, k2_interp
39
40    # MAE y RMSE
41    def mae(a, b):
42        return np.mean(np.abs(a - b))
43
44    def rmse(a, b):
45        return np.sqrt(np.mean((a - b) ** 2))
46
47    mae_n = mae(base_n, comp_n)
48    rmse_n = rmse(base_n, comp_n)
49
50    mae_k = mae(base_k, comp_k)
51    rmse_k = rmse(base_k, comp_k)
52
53    return mae_n, rmse_n, mae_k, rmse_k

```

Listing 8.3: Código para obtener las magnitudes MAE y RMSE en los resultados que se comparan.

## Apéndice VI

### Descripción del filtro de Savitzky-Golay

El método de SavitzkyGolay es una técnica de suavizado que permite reducir el ruido presente en una señal experimental sin distorsionar significativamente su forma original. Su funcionamiento se basa en aplicar una regresión polinomial local: en torno a cada punto de la señal se ajusta un polinomio de grado  $n$  a un subconjunto de puntos equiespaciados, y se reemplaza el valor central por el valor predicho por ese polinomio.

Para aplicar correctamente este filtro es importante tener en cuenta dos parámetros, el orden del polinomio y el tamaño de la ventana. Un valor bajo de  $n$ , como  $n=1$ , aproxima la señal con líneas rectas entre los puntos. Esto elimina el ruido sin alterar sustancialmente las tendencias generales, y es adecuado cuando se espera que los datos varíen de forma aproximadamente lineal en ventanas pequeñas, como es el caso. Para determinar cuántos puntos se utilizan en cada ajuste, este valor debe ser lo suficientemente grande como para cubrir la escala del ruido que se quiere eliminar, pero no tan grande como para borrar detalles importantes de la señal. Si la ventana es demasiado amplia, se pueden suavizar en exceso transiciones reales de la medida. La selección de este parámetro se simplifica a un proceso visual, graficando los resultados para distintas ventanas.

En base a estas consideraciones, teniendo en cuenta la forma esperada de la señal y la resolución espectral, se emplea un filtro SavitzkyGolay de orden 1, ya que los valores obtenidos son aproximadamente lineales en los rangos estudiados. Además, se escoge una ventana de 121 puntos, que representa una variación espectral de aproximadamente 45 nm, lo cual es adecuado para preservar las tendencias reales observadas sin modificar la señal.