# Álgebra Lineal y Geometría

# 1. Sistemas de ecuaciones lineales

Formas de expresar el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 6 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

- Forma matricial $Ax = b$ y matriz ampliada

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & -1 & 3 & 6 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

- Forma vectorial: resolver el sistema consiste en encontrar cómo expresar $b$ como combinación lineal de las columnas de la matriz $A$.

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} x_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Para resolver un sistema, se construye la **forma escalonada**

- Todas las filas distintas de cero están encima de cualquier fila de ceros.
- Cada **pivote** de una fila (la entrada diferente de cero que se encuentra más a la izquierda) está situada a la derecha del pivote de la fila superior. Llamamos **rango** de la matriz al número de pivotes de su forma escalonada.

de la matriz ampliada mediante **operaciones elementales** (no modifican las soluciones del sistema)

- Intercambiar dos filas.
- Sumar a una fila un múltiplo de otra fila.
- Multiplicar una fila por un número distinto de cero.

utilizando el algoritmo de **eliminación de Gauss-Jordan**:

- Empieza con la columna distinta de cero situada más a la izquierda. Selecciona como pivote una entrada distinta de cero. Coloque el pivote en la fila superior (si es necesario, intercambia filas).
- Utiliza operaciones elementales para hacer ceros debajo del pivote.
- Aplica el proceso anterior a submatriz formada por las filas que queden debajo. Repite hasta que la matriz esté en forma escalonada.

**Ejercicio 1.1** Diseña una dieta con un contenido de 50 g de grasa, 200 g de carbohidratos y 100 g de proteínas a base de pollo (cada filete tiene 5 g de grasa y 30 g de proteínas), arroz (cada taza tiene 50 g de carbohidratos y 5 g de proteínas) y aguacate (cada unidad tiene 30 g de grasa, 15 g de carbohidratos y 5 g de proteínas).

(a) Escribe el sistema de ecuaciones que permite determinar el número de filetes, tazas de arroz y aguacates que hay que tomar para satisfacer los niveles objetivo de grasa, carbohidrato y proteína.
(b) Escribe el sistema en forma matricial.
(c) Escribe el sistema en forma vectorial.
(d) Escalona la matriz del sistema mediante transformaciones elementales.
(e) Resuelve el sistema. ¿Qué significado tiene la solución en relación con las columnas de la matriz correspondiente?

■

**Ejercicio 1.2** Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix},$$

si el vector $b$ es la suma de las cuatro columnas de $A$, escribe una solución para $Ax = b$ sin realizar ningún cálculo.

■

# 2. Conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineal

Para estudiar el número de soluciones que tiene un sistema hay que responder las siguientes preguntas utilizando la forma escalonada de la matriz ampliada:

1º) ¿Tiene solución el sistema?

- Hay pivote en la última columna: no hay solución
- No hay pivote en la última columna: hay solución.

Ejemplos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \mathbf{3} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{2} \end{array}\right]$$

2º) En caso de tener solución: ¿cuántas soluciones tiene?

- Hay pivote en todas las columnas de $A$ (no hay variables libres): una solución.
- No hay pivote en todas las columnas de $A$ (hay variables libres): infinitas soluciones.

Ejemplos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \mathbf{6} & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{2} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

**Aspectos generales sobre las soluciones de los sistemas lineales**:

- Sistemas homogéneos ($Ax = 0$): siempre tienen solución.
  - No puede haber pivote en la última columna de la matriz ampliada.
  - Al menos el vector $x = 0$ siempre será solución. Aparte de esta solución, habrá más soluciones (infinitas) si hay variables libres.
- Sistemas no homogéneos ($Ax = b$):
  - Si la solución no es única, el conjunto de soluciones se puede expresar como $x = x_p + x_h$, donde:
    - $x_p$ es una solución particular del sistema.
    - $x_h$ es cualquier solución del sistema homogéneo $Ax = 0$.
  - Para que el sistema tenga solución para cualquier valor de $b$, la forma escalonada de la matriz $A$ debe tener pivote en todas sus filas (de esta forma, no podría haber un nuevo pivote en la última columna de la matriz ampliada).

**Ejercicio 2.1** Considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcl} -x_1+x_2+h\,x_3 & = & 5 \\ x_1+x_3 & = & 1 \\ 2x_1+x_2-x_3 & = & 0 \end{array}\right\}.$$

(a) Define una matriz adecuada $A$ y reformula el problema en términos de sus columnas.
(b) Determina para qué valores de $h$ el sistema tendría solución para cualquier valor del término independiente.
(c) Determina para qué valores de $h$ el sistema tiene: ninguna solución, una solución e infinitas soluciones.

■

**Ejercicio 2.2** Considera el sistema de ecuaciones lineales

$$Mx=b, \qquad M=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & h \end{bmatrix}, \qquad b=\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Discute razonadamente el número de soluciones de los sistemas $Mx=b$ y $Mx=0$ en función del parámetro $h$.
(b) Toma un valor de $h$ para el que el sistema $Mx=b$ sea compatible y calcula, para ese valor de $h$, todas las soluciones de $Mx=b$ y $Mx=0$.

■

**Ejercicio 2.3** Decide si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa justificando adecuadamente tu respuesta, es decir,

- da un argumento apropiado si la afirmación es verdadera, o
- da un contraejemplo si la afirmación es falsa.

(a) Si un sistema de ecuaciones lineales $Ax=b$ es compatible, entonces $Ax=0$ también es compatible.
(b) Sea $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ y $b\in\mathbb{R}^m$. Entonces, el sistema lineal $Ax=b$ tiene infinitas soluciones si y solo si el rango de $A$ es menor que $n$.
(c) Si un sistema de ecuaciones lineales $Ax=0$ tiene soluciones no triviales, entonces $Ax=b$ tendrá infinitas soluciones para cualquier vector $b$.
(d) Sea $Ax=b$, un sistema lineal incompatible con $x\in\mathbb{R}^2, b\in\mathbb{R}^3$. Entonces, al menos una de las columnas de $A$ no es una columna pivote.

■

# 3. Dependencia e independencia lineal

Se dice que un conjunto de vectores es **linealmente dependiente** si es posible expresar alguno de ellos como combinación lineal del resto (linealmente independiente si no es posible).

Para determinar si un conjunto de vectores

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

es linealmente independiente o dependiente hay que estudiar el número de soluciones de la ecuación

$$v_1\, x_1 + v_2\, x_2 + \ldots + v_n\, x_n = 0.$$

- Si la única solución obtenida es la trivial (todas las $x_i$ igual a cero), no hay formas de expresar ninguno de los elementos del conjunto como combinación lineal del resto: el conjunto es linealmente independiente.
- Si se obtienen más soluciones: el conjunto es linealmente dependiente. Ejemplo: si

  $$-v_1 + 3v_2 + 2v_4 = 0$$

  es una de las soluciones, podremos expresar $v_1$, $v_2$ o $v_4$ como combinación lineal de las otras:

  $$v_1 = 3v_2 + 2v_4, \quad v_2 = \frac{1}{3}v_1 - \frac{2}{3}v_4, \quad v_4 = \frac{1}{2}v_1 - \frac{3}{2}v_2.$$

**Relación con el número de soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales** $Ax = b$:

En caso de haber solución, esta será única si las columnas de $A$ son linealmente independientes (y no lo será si las columnas de $A$ son linealmente dependientes).

**Ejercicio 3.1** Sea $S$ el conjunto de vectores

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ h \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

(a) ¿Para qué valores de $h$ el conjunto $S$ es linealmente dependiente?
(b) ¿Para qué valores de $h$ el conjunto $S$ genera cualquier vector de $\mathbb{R}^3$?
(c) Escoge un valor de $h$ para el cual el conjunto sea linealmente dependiente, y escribe una relación de dependencia entre sus vectores ($\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_4 u_4 = 0$ con algún $\alpha_i$ distinto de cero).

■

**Ejercicio 3.2** Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcula la forma escalonada de $A$.
(b) ¿Son las columnas de $A$ linealmente independientes? Justifica.
(c) Resuelve el sistema homogéneo $Ax = 0$.
(d) Discute el número de soluciones del sistema $Ax = b$ en términos de las entradas de $b = [b_1, b_2, b_3]^T$.

■

**Ejercicio 3.3** Decide si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa justificando adecuadamente tu respuesta, es decir,

- da un argumento apropiado si la afirmación es verdadera, o
- da un contraejemplo si la afirmación es falsa.

(a) Si un conjunto de vectores $\{a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n\}$ es linealmente dependiente, entonces la ecuación $Ax = 0$ (donde $A = [a_1\ a_2\ \ldots\ a_n]$) tiene infinitas soluciones.
(b) Si $Ax = b$ tiene solución única, entonces las columnas de $A$ son linealmente independientes.
(c) Si las columnas de $A$ son linealmente independientes el sistema $Ax = b$ tendrá solución para cualquier valor de $b$.
(d) Para que el sistema $Ax = b$ tenga infinitas soluciones es necesario que las columnas de $A$ sean linealmente dependientes.
(e) Es necesario que el sistema $Ax = b$ tenga más incógnitas que ecuaciones para que las columnas de $A$ puedan ser linealmente dependientes.

■

# 4. Espacios vectoriales

Llamamos **espacio vectorial** a todo conjunto de elementos $V$ que cumpla las siguientes condiciones:

- Si dos elementos $a$ y $b$ pertenecen al conjunto, entonces su suma $a+b$ también pertenecerá al conjunto.

$$a \in V \quad \text{y} \quad b \in V \quad \Rightarrow \quad a+b \in V$$

- Si un elementos $a$ pertenece al conjunto, entonces cualquier múltiplo de $a$ también pertenecerá al conjunto.

$$a \in V \quad \Rightarrow \quad a \in V \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Propiedad adicional: todo espacio vectorial contiene el elemento cero. Esta propiedad es consecuencia de las dos anteriores. Cualquier conjunto quo no contenga el elemento cero no es un espacio vectorial.

Ejemplos reseñables de espacios vectoriales:

- El conjunto de todos los vectores de tamaño $n$ ($\mathbb{R}^n$).
- El conjunto de todas las matrices de tamaño $m \times n$ ($\mathbb{R}^{m\times n}$).
- El conjunto de todos los polinomios de grado $\leq n$ ($\mathbb{P}_n$).

Llamamos **subespacio vectorial** a cualquier subconjunto de otro espacio vectorial ($\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbb{P}_n$...) que cumpla también con las propiedades de un espacio vectorial. Ejemplos:

- El conjunto de todos los múltiplos del vector $[1,2]^T$.
- El conjunto de todas las matrices triangulares superiores $3 \times 3$.
- El conjunto de todos los polinomios de grado $\leq 3$ que pasan por el origen de coordenadas.
- **Espacio columna** (Col) de una matriz $A$: el conjunto de todos los vectores que son combinación lineal de las columnas de $A$.
- **Espacio nulo** (Nul) de una matriz $A$: el conjunto de todos los vectores que son solución del sistema $Ax = 0$.

**Ejercicio 4.1** Determina si los siguientes conjuntos son espacios vectoriales. En caso afirmativo, describe una forma de expresar cada elemento del espacio como un vector. Para determinar si un conjunto es o no un espacio vectorial:

- si lo es, demuestra que cumple con las propiedades de la definición de espacio vectorial.
- si no lo es, da un ejemplo que contradiga alguna propiedad de los espacios vectoriales.

(a) El conjunto de matrices triangulares superiores de dimensión $n \times n$.
(b) El conjunto de todas las matrices simétricas (aquellas tales que $A = A^T$) de tamaño $n \times n$.
(c) El conjunto de todas las funciones de la forma $f(x) = A\sin x + B\cos x$.
(d) El conjunto de todos los polinomios de grado uno que pasan por el punto $(1,1)$.
(e) Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, el conjunto de todos los vectores $b \in \mathbb{R}^m$ para los cuales el sistema $Ax = b$ es compatible.

■

**Ejercicio 4.2** Decide si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa justificando adecuadamente tu respuesta.

(a) Si $W$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$, entonces existe una matriz $3\times 3$ $A$ tal que $W$ es el espacio columna de $A$.
(b) Si $\hat{x}$ es una solución para el sistema $Ax = b$, cualquier vector $y = \hat{x} + z$, donde $z \in Nul(A)$, también es una solución.

■

# 5. Base, dimensión, sistemas de coordenadas

Se llama **base** $\mathscr{B}$ de un espacio vectorial $V$ a cualquier conjunto de elementos $\{b_1, b_2, ..., b_n\}$ que pertenecen a dicho espacio y cumplen las siguientes condiciones:

- Generan el espacio completo: cualquier elemento del espacio puede ser expresado como combinación lineal de los elementos de la base.

$$V = \text{Gen}\{b_1, b_2, ..., b_n\}$$

- Son linealmente independientes: esto asegura que la forma de expresar cada elemento del espacio como combinación lineal de los elementos de la base sea única.

Cada base de un espacio vectorial define un sistema de coordenadas que permite caracterizar cada elemento $x$ del espacio mediante unas coordenadas $[x]_{\mathscr{B}}$. En notación matricial:

$$x = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ b_1 & b_2 & ... & b_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} [x]_{\mathscr{B}}.$$

Se llama **dimensión** de un espacio vectorial al número máximo de elementos linealmente independientes dentro del espacio. Cualquier base de dicho espacio tendrá tantos elementos como dimensión tenga el espacio.

Procedimiento para obtener una base a partir de un conjunto de vectores que genere un espacio: descartar aquellos que sean linealmente dependientes de los otros. Para ello:

- Colocar los vectores como columnas en una matriz.
- Escalonar la matriz mediante operaciones elementales.
- Tomar los vectores correspondientes a las columnas **de la matriz original** que tengan pivote en la forma escalonada.

**Ejercicio 5.1** Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 3 & 9 \end{bmatrix}.$$

(a) Encuentra una base $\mathscr{B}$ para su espacio columna $Col(A)$.
(b) Encuentra una base $\mathscr{C}$ para su espacio nulo $Nul(A)$.

■

**Ejercicio 5.2** Expresa el polinomio $p(x) = 3x^2 + 1$ en términos de potencias de $(x-1)$. Pista: construye una base de $\mathbb{P}_2$ compuesta por potencias de $(x-1)$.

■

**Ejercicio 5.3** Considera el subconjunto

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} : \begin{array}{c} a - 2b + c = 0 \\ b - c + d = 0 \end{array} \right\} \subset \mathbb{R}^4.$$

(a) Demuestra que $W$ es un subespacio de $\mathbb{R}^4$.
(b) Encuentra una base para $W$.
(c) Encuentra las coordenadas del vector $[0\,,1\,,2\,,1]^T$ con respecto a la base obtenida en el apartado anterior.

■

# 6. Distancias, ángulos y proyecciones

Se llama producto interno entre los elementos de un espacio vectorial a cualquier operación que cumpla las siguientes propiedades:

$$u \cdot (v+w) = u \cdot v + u \cdot w, \quad u \cdot v = v \cdot u, \quad u \cdot u > 0 \ \forall u \neq 0.$$

Permite definir

- Longitudes: $||u|| = \sqrt{u \cdot u}$.
- Distancias: $\text{dist}(u,v) = ||u-v||$.
- El ángulo $\alpha$ formado por los elementos de un espacio vectorial:

$$u \cdot v = ||u|| \ ||v|| \ \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arccos \frac{u \cdot v}{||u|| \ ||v||}.$$

Ejemplos importantes de producto interno:

- En un espacio formado por vectores de $n$ componentes:

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n = u^T v.$$

- En un espacio formado por funciones definidas en un intervalo $[a,b]$:

$$f \cdot g = \int_a^b f(x) g(x) \ \text{dx}.$$

Se dice que dos elementos de un espacio vectorial son **ortogonales** si su producto interno es cero (forman un ángulo de 90º).

Se llama **complemento ortogonal** $V^\perp$ al espacio formado por todos los vectores que son ortogonales a todos los elementos de $V$.

$$V = Col(A) \quad \Rightarrow \quad V^\perp = Nul(A^T)$$

Proyección de un vector $u$ sobre un subespacio $V$: decomponer $u$ como la suma de un vector en $V$ y otro en el complemento ortogonal de $V$.

$$u = \text{Proy}_V u + \text{Proy}_{V^\perp} u, \quad ||u||^2 = ||\text{Proy}_V u||^2 + ||\text{Proy}_{V^\perp} u||^2$$

Proyección de un vector $u$ sobre el espacio generado por otro vector $w$:

$$\text{Proy}_w u = \frac{u \cdot w}{w \cdot w} w.$$

**Ejercicio 6.1** Dados los vectores

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} h \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

(a) Calcula, en función del parámetro $h$, la longitud de ambos y el ángulo que forman entre si.
(b) ¿Para qué valores de $h$ son ortogonales?
(c) Para $h = 1$, calcula la proyección de $u$ sobre $v$.
(d) Para $h = 1$, encuentra una base del complemento ortogonal del espacio generado por los vectores $u$ y $v$.

■

**Ejercicio 6.2** Decide si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa justificando adecuadamente tu respuesta.

(a) Si dos vectores son ortogonales, entonces son linealmente independientes.
(b) El conjunto de todos los vectores en $\mathbb{R}^n$ ortogonales a un vector fijo $v$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.
(c) Un espacio vectorial $W$ y su complemento ortogonal no tienen vectores en común.
(d) Si $W$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$, entonces todo $x \in \mathbb{R}^n$ satisface

$$\|x\|^2 = \|\text{proy}_W x\|^2 + \|x - \text{proy}_W x\|^2.$$

■

# 7. Bases ortogonales y factorización QR

- **Base ortogonal**: base formada por elementos ortogonales entre sí.
- **Base ortonormal**: base ortogonal en la que la longitud de todos sus elementos es 1.

Las bases ortogonales nos permiten proyectar vectores sobre subespacios de dimensión $>1$: si $\{o_1, o_2, \ldots, o_n\}$ es una base ortogonal de $V$, entonces

$$\mathrm{Proy}_V u = \mathrm{Proy}_{o_1} u + \mathrm{Proy}_{o_2} u + \ldots + \mathrm{Proy}_{o_n} u.$$

**Construcción de bases ortogonales** (método de Gram-Smidth):

Dada la base $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ de $V$, podemos construir una base ortogonal $\{o_1, o_2, \ldots, o_n\}$ de $V$ aplicando el siguiente procedimiento:

$$\begin{aligned}
o_1 &= w_1 \\
o_2 &= w_2 - \mathrm{Proy}_{o_1} w_2 \\
o_3 &= w_3 - \mathrm{Proy}_{o_1} w_3 - \mathrm{Proy}_{o_2} w_3 \\
&\vdots \\
o_n &= w_n - \mathrm{Proy}_{o_1} w_n - \mathrm{Proy}_{o_2} w_n - \ldots - \mathrm{Proy}_{o_{n-1}} w_n.
\end{aligned}$$

Si deseamos que la base sea también ortonormal basta con dividir cada uno de los vectores obtenidos por su longitud.

**Factorización QR**:

Las operaciones realizadas al aplicar el método de Gram-Smidth se pueden utilizar para expresar la matriz cuyas columnas son los vectores $w_i$ como producto de una matriz $Q$ cuyas columnas son la base ortogonal resultante por una matriz triangular superior $R$

$$\begin{bmatrix} | & | & & | \\ w_1 & w_2 & \ldots & w_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ o_1 & o_2 & \ldots & o_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} & \ldots & r_{1,n} \\ 0 & r_{2,2} & r_{1,3} & \ldots & r_{2,n} \\ 0 & 0 & r_{3,3} & \ldots & r_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & r_{n,n} \end{bmatrix},$$

donde

$$r_{i,j} = w_j \cdot \frac{o_i}{||o_i||}.$$

La forma habitual de solicitar a un programa numérico que aplique el proceso de Gram-Schmidt es pedirle que realice una factorización QR.

**Ejercicio 7.1** Dado el espacio vectorial $V$ y el vector $b = [0,1,0,1]^T$

$$V = Gen\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

(a) Encuentra una base ortogonal para $V$.
(b) Encuentra una base ortonormal para el complemento ortogonal $V^{\perp}$.
(c) ¿Cuál es el vector en $V$ más cercano al vector $b$?
(d) Encuentra la proyección ortogonal de $b$ sobre el complemento ortogonal de $V$ utilizando el resultado obtenido en el apartado anterior.
(e) Utiliza el resultado obtenido en (a) para encontrar la factorización QR de la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

■

# 8. Solución aproximada de sistemas incompatibles

Dado un sistema de ecuaciones incompatible $Ax = b$, podemos plantear el problema de encontrar el vector $\hat{x}$ que minimiza la distancia entre los vectores $A\hat{x}$ y $b$.

- Primera forma de abordar este problema: sustituir el vector $b$ por la proyección de $b$ sobre el espacio columna de $A$,

$$A\hat{x} = \text{Proy}_{Col(A)}b.$$

- Segunda forma de abordar este problema: como el error cometido es ortogonal al espacio columna de $A$, el producto escalar del vector $A\hat{x} - b$ con cada una de las columnas $a_i$ de la matriz $A$ será cero,

$$(A\hat{x} - b) \perp Col(A) \quad \Rightarrow \quad a_i \cdot (A\hat{x} - b) = 0 \quad \Rightarrow \quad A^T(A\hat{x} - b) = 0.$$

  Teniendo esto en cuenta, podemos resolver el problema sin necesidad de calcular la proyección de $b$ sobre el espacio columna de $A$, encontrando las soluciones de la ecuación

$$A^T A\hat{x} = A^T b,$$

  que nunca será un sistema incompatible:
  - En caso de que la matriz $A^T A$ tenga rango completo el sistema tendrá solución única, que a veces se encuentra expresada como

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b.$$

  - En caso de que $A^T A$ no tenga rango completo el sistema tendrá infinitas soluciones y la fórmula anterior no será válida.

La magnitud del error cometido utilizando la solución aproximada la determina la distancia entre el vector $b$ y el vector $A\hat{x}$:

$$\text{error} = ||b - A\hat{x}|| = \sqrt{e_1^2 + e_2^2 + \ldots + e_n^2}\,,$$

donde llamamos $e_i$ al error cometido en cada una de las ecuaciones del sistema. A las soluciones obtenidas de esta forma se les llama **soluciones de mínimos cuadrados** dado que minimizan la suma de los cuadrados de los errores.

**Ejercicio 8.1** Dadas la matriz $A$ y el vector $y$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Encuentra una base ortogonal del espacio columna, $Col(A)$.
(b) Calcula la proyección ortogonal del vector $y$ sobre el espacio columna de $A$.
(c) ¿Es $Ax = y$ un sistema compatible? ¿Cuántas soluciones de mínimos cuadrados tiene el sistema $Ax = y$? Responde a estas cuestiones utilizando argumentos basados en los resultados obtenidos en los apartados (a) y (b).

■

**Ejercicio 8.2** Decide si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa justificando adecuadamente tu respuesta.

(a) Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y un vector $b \in \mathbb{R}^m$, el sistema $Ax = b$ tiene infinitas soluciones en sentido de mínimos cuadrados si y solo si el rango de $A$ es menor que $n$.
(b) Si $\hat{x}$ es solución de mínimos cuadrados de un sistema $Ax = b$, cualquier vector $v = \hat{x} + z$, con $z \in Nul(A)$, será también solución de mínimos cuadrados.

■

# 9. Proyección ortogonal de funciones

Se llama $L^2([a,b])$ al conjunto de todas las funciones cuyo cuadrado es integrable en el intervalo $[a,b]$, es decir

$$L^2([a,b]) = \left\{ f(x) \; : \; \int_a^b |f(x)|^2 \, \mathrm{dx} < \infty \right\}.$$

Este conjunto es un espacio vectorial. Utilizando el producto interno

$$f \cdot g = \int_a^b f(x)g(x) \, \mathrm{dx}$$

se pueden definir longitudes (como $f \cdot f < \infty$ las longitudes serán finitas), ángulos y hacer proyecciones igual que en otros espacios vectoriales.

**Aproximación de funciones por polinomios:**
Para encontrar la mejor forma de aproximar una función $f(x)$ como combinación lineal de las funciones 1, $x$, $x^2$,... en el intervalo $[a,b]$ hay que

1. Construir una base ortogonal del espacio generado por 1, $x$, $x^2$,... utilizando el método de Gram-Smidth.
2. Proyectar $f$ sobre dicho espacio utilizando la base ortogonal.

**Aproximación de funciones por polinomios trigonométricos:**
La mejor aproximación de una función $f(x)$ por una función del tipo $\mathrm{sen}(nx)$ o $\cos(nx)$ en el intervalo $[0,2\pi]$ viene dada por las respectivas proyecciones

$$\mathrm{Proy}_{\mathrm{sen}(nx)} f(x) = \frac{\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{sen}(nx) \, \mathrm{dx}}{\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}^2(nx) \, \mathrm{dx}} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{sen}(nx)\mathrm{dx},$$

$$\mathrm{Proy}_{\cos(nx)} f(x) = \frac{\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx) \, \mathrm{dx}}{\int_0^{2\pi} \cos^2(nx) \, \mathrm{dx}} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\mathrm{dx}.$$

Como el conjunto de funciones

$$S = \{1, \mathrm{sen}(x), \mathrm{sen}(2x), \mathrm{sen}(3x), \ldots, \cos(x), \cos(2x), \cos(3x), \ldots\}$$

es una base orgotonal de $L^2([0,2\pi])$:

- La proyección sobre el espacio generado por varios elementos de $S$ es la suma de las proyecciones sobre cada uno de los elementos individuales (no es necesario aplicar Gram-Smidth).
- Si proyectamos sobre todos los elementos de $S$ la aproximación se convierte en una igualdad, conocida como serie de Fourier de $f$.

**Ejercicio 9.1** Deseamos aproximar la función $f(x) = x^3$ en el intervalo $[0,1]$ mediante una función de la forma $g(x) = A + Bx$.

(a) Demuestra que el conjunto de todas las funciones de la forma $g(x) = A + Bx$ es un espacio vectorial.

(b) Encuentra una base ortogonal de dicho espacio utilizando el producto escalar

$$f \cdot g = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx.$$

(c) Calcula la proyección ortogonal de $f(x)$ sobre este espacio vectorial.

■

**Ejercicio 9.2** Explica por qué la mejor aproximación de una función $f(x)$ por una suma de cosenos $\sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx)$ en el intervalo $[0,2\pi]$ es aquella en la que los coeficientes $a_n$ se calculan como

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx.$$

■

# 10. Transformaciones lineales

Una transformación

$$T : V \to W$$

es una función que toma elementos $x$ de un espacio vectorial $V$ y devuelve elementos $y = T(x)$ de un espacio vectorial $W$. Se dice que $T$ es una transformación **lineal** si y solo si cumple las siguientes dos conciones:

$$T(u+v) = T(u) + T(v)$$
$$T(\alpha u) = \alpha T(u)$$

De forma análoga a las condiciones de espacio vectorial, como consecuencia de estas propiedades se puede deducir que $T(0) = 0$. Si una transformación no cumple esta condición, se puede asegurar sin más comprobación que no es una transformación lineal.

**Matriz de una transformación lineal**:

Si expresamos los elementos de los espacios $V$ y $W$ como vectores, toda transformación lineal puede expresarse a través de una matriz $A$ como $T(x) = Ax$. La matriz $A$ se construye como

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ T(e_1) & T(e_2) & \dots & T(e_n) \\ | & | & & | \end{bmatrix},$$

donde $e_i$ son las columnas de la matriz identidad.

**Composición de transformaciones lineales**:

Dadas las transformaciones $T_1 : U \to V$ y $T_2 : V \to W$ podemos definir la transformación compuesta $T_2 \circ T_1 : U \to W$ como

$$T_2 \circ T_1(x) = T_2(T_1(x)) \quad \forall x \in U.$$

- La transformación resultante también es lineal.
- La matriz correspondiente a $T_2 \circ T_1$ es el producto de las matrices $A$ y $B$ correspondientes a $T_2$ y $T_1$. Como $T_1(x) = b_1x_1 + \dots + b_nx_n$ y $T_2(T_1(x)) = AT_1(x) = Ab_1x_1 + \dots + Ab_nx_n$, el producto de matrices se obtiene multiplicando la primera matriz por cada una de las columnas de la segunda,
$$AB = [Ab_1\ Ab_2\ \dots\ Ab_n].$$
- La composición de transformaciones y el producto de matrices **no** son operaciones conmutativas.

**Ejercicio 10.1** Determina si los siguientes conjuntos son transformaciones lineales entre espacios vectoriales $T : V \to W$. En ese caso, escribe una matriz $T$ para la cual $T(v) = Tv$.

(a) La derivada de un polinomio $p \in \mathbb{P}_2$, que devuelve polinomios en $\mathbb{P}_1$.

$$T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_1$$
$$p \longmapsto \frac{dp}{dx}.$$

(b) La integral de un polinomio $p \in \mathbb{P}_1$, que devuelve polinomios en $\mathbb{P}_2$.

$$T : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_2$$
$$p \longmapsto \int_0^x p(t)\,dt.$$

■

**Ejercicio 10.2** Considera la transformación lineal $T$ tal que $T(x) = Ax$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & h \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

¿Para qué valores de $h$ existe algún $x \in \mathbb{R}^4$ tal que $T(x) = [1,\ 0,\ 0]^T$?

■

**Ejercicio 10.3** Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Calcula el valor de

$$T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right).$$

■

**Ejercicio 10.4** Dadas las transformaciones lineales

$$T_1\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 + x_3 \end{bmatrix}, \qquad T_2\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix},$$

obtén las matrices correspondientes a $T_1$, $T_2$ y la composición $T_2 \circ T_1$. ■

# 11. Núcleo, imagen, inyectividad y supraectividad

Dada la transformación
$$T : V \to W,$$

- Decimos que $T$ es **inyectiva** cuando no hay valores diferentes de $x \in V$ que devuelvan el mismo valor $T(x)$.
- Decimos que $T$ es **suprayectiva** cuando para cualquier $y \in W$ existe algún $x \in V$ tal que $T(x) = y$.
- Decimos que $T$ es **biyectiva** cuando es tanto inyectiva como suprayectiva.

**Núcleo (Ker) de una transformación lineal**:

Es el conjunto de todos los $x \in V$ para los cuales $T(x) = 0$,

$$Ker(T) = \{x \in V \mid T(x) = 0\}.$$

- Se calcula obteniendo las soluciones del sistema $Ax = 0$, donde $A$ es la matriz correspondiente a $T$. Es equivalente al espacio nulo de $A$.
- $T$ es inyectiva si y solo si $Ker(T) = 0$, es decir, si $Ax = 0$ solo tiene la solución 0 ($A$ tiene pivote en todas sus columnas).

**Imagen (Im) de una transformación lineal**:

Es el conjunto de todos los posibles valores $T(x)$ para algún $x \in V$,

$$Im(T) = \{T(x) \mid x \in V\}.$$

- Es equivalente al espacio columna de $A$.
- $T$ es suprayectiva si y solo si $Im(T) = W$, es decir, si $Ax = y$ tiene solución para cualquier $y$ ($A$ tiene pivote en todas sus filas).

**Ejercicio 11.1** Dada la transformación lineal

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcula $T([1,1,1]^T)$ y $T([1,0,0]^T)$.
(b) Utiliza el hecho de que $T$ es lineal y los resultados obtenidos en (a) para encontrar $T([2,2,2]^T)$ y $T([0,1,1]^T)$.
(c) Calcula $T^{-1}(0)$, es decir, todos los vectores $x \in \mathbb{R}^3$ para los cuales $T(x) = 0$.
(d) Encuentra una matriz $A$ tal que $T(x) = Ax$.
(e) ¿Es $T$ inyectiva y/o suprayectiva? Justifica.

■

**Ejercicio 11.2** Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Resuelve el sistema homogéneo $Ax = 0$.
(b) Discute el número de soluciones del sistema $Ax = b$ en términos de las entradas de $b = [b_1, b_2]^T$.
(c) Usa los resultados obtenidos en (a) y (b) para determinar si la transformación lineal $T$ tal que $T(x) = Ax$ es inyectiva y/o suprayectiva.

■

**Ejercicio 11.3** Decide si cada una de las tres siguientes afirmaciones es verdadera o falsa justificando adecuadamente tu respuesta.

(a) Si $A$ es la matriz de una transformación lineal suprayectiva, el sistema de ecuaciones $Ax = b$ es compatible para cualquier $b$.
(b) Si $A = [a_1\ a_2\ \cdots\ a_n]$ es la matriz de una transformación lineal $T$, y el conjunto de vectores $\{a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n\}$ es linealmente dependiente, entonces $T$ es inyectiva.

■

# 12. Transformación inversa, cálculo de matrices inversas

**Definición**:

- Llamamos transformación lineal inversa $T^{-1}$ a aquella que "deshace" el efecto de $T$:
$$T^{-1}(T(x)) = x, \quad T(T^{-1}(x)) = x.$$
- Si $A$ es la matriz asociada a $T$, llamamos matriz inversa $A^{-1}$ a la matriz asociada a $T^{-1}$. La matriz inversa cumple que
$$A^{-1}A = AA^{-1} = \mathbb{I}.$$

Para que exista la inversa $T$ debe ser inyectiva y suprayectiva $\rightarrow$ su matriz $A$ debe tener pivote en todas las filas y todas las columnas (para lo que debe también ser cuadrada).

**Cálculo de la matriz inversa:**

La forma más eficiente de calcular una matriz inversa es resolviendo la ecuación
$$AA^{-1} = \mathbb{I} \quad \Rightarrow \quad A \begin{bmatrix} | & | & & | \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ e_1 & e_2 & \dots & e_n \\ | & | & & | \end{bmatrix},$$
donde $i_1, \dots, i_n$ son las columnas de la inversa y $e_1, \dots, e_n$ son las columnas de la matriz identidad. Esto equivale a $n$ sistemas de ecuaciones
$$Ai_1 = e_1, \quad Ai_2 = e_2, \quad \dots, \quad Ai_n = e_n$$
que pueden ser resueltos simultáneamente transformando $A$ en la matriz identidad mediante transformaciones elementales
$$[\, A \mid \mathbb{I} \,] \sim [\, \mathbb{I} \mid A^{-1} \,].$$
Recordatorio: si $Ax = b$ (solución única), entonces
$$[\, A \mid b \,] \sim [\, \mathbb{I} \mid x \,].$$

**Aplicaciones de la matriz inversa:**

- Revertir el efecto de una transformación lineal.
- Resolver un sistema de ecuaciones $Ax = b$ cuando $A$ es cuadrada e invertible: $x = A^{-1}b$.
- El uso de matrices inversas es ineficiente e inestable numéricamente comparado con otros métodos. Su utilidad es más teórica que práctica.

**Ejercicio 12.1** Encuentra la inversa de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

si existe, usando transformaciones elementales por filas. Utiliza el resultado obtenido para resolver el sistema $Ax = b$ si $b = [1,1,1]^T$.

■

**Ejercicio 12.2** Calcula la segunda columna de $A^{-1}$ sin calcular las otras.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

■

**Ejercicio 12.3** Calcula la tercera columna de $A^{-1}$ sin hacer ningún cálculo.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

■

**Ejercicio 12.4** Decide si cada una de las tres siguientes afirmaciones es verdadera o falsa justificando adecuadamente tu respuesta.

(a) El conjunto de todas las matrices invertibles de dimensión $n$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^{n\times n}$.

(b) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Si el sistema lineal $Ax = e_i$ tiene una solución única para $i = 1,2,\ldots,n$, donde $e_i$ son las columnas de la matriz identidad $n \times n$, entonces $A$ es invertible.

■

# 13. Determinantes

**Definición**:

El determinante $|A|$ de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es el volumen orientado del paralelepípedo $n$-dimensional generado por las columnas de $A$.

**Propiedades**:

- El determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de su diagonal.
- Sumar a una fila un múltiplo de otra no cambia el valor del determinante.
- Multiplicar una fila por un escalar $\alpha$ hace que el determinante se multiplique también por $\alpha$.
- Permutar dos filas de una matriz cambia el signo del determinante.
- $|A| = |A^T|$, por lo que las propiedades relacionadas con las filas aplican también a las columnas.
- Determinante del producto = producto de determinantes, $|AB| = |A||B|$.

**Cálculo de determinantes:**

- Podemos calcular $|A|$ como el producto de las entradas diagonales de la forma escalonada de $A$, multiplicado por $-1$ si el número de permutaciones que han sido necesarias para escalonar $A$ es impar.
- Desarrollo por cofactores (aplicable a cualquier fila $i$):

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}|A_{i,j}|,$$

  donde $a_{i,j}$ es el elemento de $A$ situado en la fila $i$ y columna $j$ y $A_{i,j}$ es la matriz resultante de eliminar la fila $i$ y columna $j$ de $A$.

**Aplicaciones prácticas de los determinantes:**

- Estudio de la invertibilidad de matrices ($A$ invertible $\Leftrightarrow |A| \neq 0$).
- Cálculo de volúmenes.
- Solución de sistemas de solución única (regla de Cramer):

$$Ax = b \quad \Rightarrow \quad x_i = \frac{|A_i(b)|}{|A|},$$

  donde $A_i(b)$ es la matriz resultante de sustituir la columna $i$ de $A$ por $b$.
- El cálculo de determinantes para matrices grandes es muy costoso, lo que hace que su utilidad sea limitada en la práctica. Son especialmente útiles en sistemas pequeños que dependen de algún parámetro.

**Ejercicio 13.1** Calcula el volumen del paralelepípedo formado por los vectores

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

■

**Ejercicio 13.2** Obtén una fórmula explícita para la dependencia de las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones lineal

$$\begin{cases} \gamma x_1 + \varepsilon x_2 + x_3 = 1 \\ \varepsilon x_1 + \gamma x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + (\varepsilon + \gamma) x_3 = 0 \end{cases}$$

con los parámetros $\gamma$ y $\varepsilon$. ■

**Ejercicio 13.3** Decide si cada una de las tres siguientes afirmaciones es verdadera o falsa justificando adecuadamente tu respuesta.

(a) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $|A^3| = 1$. Entonces, $|A| = 1$.
(b) Sea $A$ una matriz invertible tal que $A = BC$ ($A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$). Entonces, tanto $B$ como $C$ también son invertibles.
(c) Sea $A$ una matriz idempotente, es decir, una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $A^2 = A$. Entonces, $|A| = 1$.
(d) Sea $A$ una matriz $n \times n$ con $n$ impar tal que $A^T = -A$. Entonces, el determinante de $A$ es cero.
(e) Sea $A$ una matriz nilpotente, es decir, una matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $A^k = 0$ para algún índice positivo $k$. Entonces, el determinante de $A$ debe ser cero.

■

# 14. Cambios de base

Dada una base $\mathscr{B} = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ de $\mathbb{R}^n$, podemos construir una matriz

$$P_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

de forma que

$$x = P_{\mathscr{B}}[x]_{\mathscr{B}}, \quad [x]_{\mathscr{B}} = P_{\mathscr{B}}^{-1}x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Análogamente, si tenemos otra base $\mathscr{C} = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$, podemos construir una matriz análoga $P_{\mathscr{C}}$. La relación entre $x$, sus coordenadas en $\mathscr{B}$ y sus coordenadas en $\mathscr{C}$ viene dada por

$$x = P_{\mathscr{B}}[x]_{\mathscr{B}} = P_{\mathscr{C}}[x]_{\mathscr{C}}.$$

Podemos transformar de forma directa las coordenadas de $x$ en la base $\mathscr{B}$ a la base $\mathscr{C}$ y viceversa aplicando respectivamente

$$[x]_{\mathscr{C}} = P_{\mathscr{C}}^{-1}P_{\mathscr{B}}[x]_{\mathscr{B}},$$

$$[x]_{\mathscr{B}} = P_{\mathscr{B}}^{-1}P_{\mathscr{C}}[x]_{\mathscr{C}}.$$

Llamamos **matriz de cambio de base** de $\mathscr{B}$ a $\mathscr{C}$ a la matriz

$$\underset{\mathscr{C} \leftarrow \mathscr{B}}{P} = P_{\mathscr{C}}^{-1}P_{\mathscr{B}}$$

y matriz de cambio de base de $\mathscr{C}$ a $\mathscr{B}$ a la matriz

$$\underset{\mathscr{B} \leftarrow \mathscr{C}}{P} = P_{\mathscr{B}}^{-1}P_{\mathscr{C}}.$$

**Cálculo de las matrices de cambio de base:**

La forma más eficiente de calcular las matrices $\underset{\mathscr{C} \leftarrow \mathscr{B}}{P}$ y $\underset{\mathscr{B} \leftarrow \mathscr{C}}{P}$ es mediante transformaciones elementales:

$$[\, P_{\mathscr{B}} \mid P_{\mathscr{C}} \,] \sim [\, I \mid P_{\mathscr{B}}^{-1}P_{\mathscr{C}} \,],$$

$$[\, P_{\mathscr{C}} \mid P_{\mathscr{B}} \,] \sim [\, I \mid P_{\mathscr{C}}^{-1}P_{\mathscr{B}} \,].$$

**Ejercicio 14.1** Dadas las siguientes bases para $\mathbb{R}^2$:

$$\mathscr{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \qquad \mathscr{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

(a) Calcula $[x]_{\mathscr{C}}$, sabiendo que

$$[x]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Calcula $[y]_{\mathscr{B}}$, sabiendo que

$$[y]_{\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

■

**Ejercicio 14.2** Dadas las siguientes dos bases para $\mathbb{R}^2$,

$$\mathscr{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \qquad \mathscr{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\},$$

(a) Encuentra la matriz $\underset{\mathscr{C} \leftarrow \mathscr{B}}{P}$ del cambio de base de $\mathscr{B}$ a $\mathscr{C}$, es decir, una matriz $P$ tal que $[x]_{\mathscr{C}} = P[x]_{\mathscr{B}}$ para cualquier $x \in \mathbb{R}^2$.
(b) Encuentra la matriz $\underset{\mathscr{B} \leftarrow \mathscr{C}}{P}$ del cambio de base inverso, de $\mathscr{C}$ a $\mathscr{B}$.
(c) Calcula $[y]_{\mathscr{C}}$, siendo $y$ el vector cuyas coordenadas en la base $\mathscr{B}$ son

$$[x]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

■

**Ejercicio 14.3** Decide si cada una de las tres siguientes afirmaciones es verdadera o falsa justificando adecuadamente tu respuesta.

(a) Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ dos bases diferentes para un espacio vectorial $V$. La matriz de cambio de base $P_{\mathscr{B} \leftarrow \mathscr{A}}$ es invertible.
(b) Sean $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ y $\mathscr{C}$ tres bases diferentes para un espacio vectorial $V$. Entonces, $P_{\mathscr{C} \leftarrow \mathscr{A}} = P_{\mathscr{C} \leftarrow \mathscr{B}} P_{\mathscr{B} \leftarrow \mathscr{A}}$.

■

# 15. Matrices semejantes y equivalentes

**Matrices semejantes**:

Se dice que $A$ y $A'$ son matrices semejantes si son las matrices de la misma transformación lineal $T: V \to V$ expresada en diferentes bases.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "A"] & T(x) \arrow[d, "P_{\mathscr{B}}^{-1}"] \\ {[x]_{\mathscr{B}}} \arrow[u, "P_{\mathscr{B}}"] \arrow[r, "A'"'] & {[T(x)]_{\mathscr{B}}} \end{tikzcd}$$

Aplicar $A'$ es equivalente a aplicar $P_{\mathscr{B}}$, después $A$ y después $P_{\mathscr{B}}^{-1}$ sobre el vector $[x]_{\mathscr{B}}$, de forma que

$$A' = P_{\mathscr{B}}^{-1} A P_{\mathscr{B}}.$$

Como consecuencia,

$$A = P_{\mathscr{B}} A' P_{\mathscr{B}}^{-1}.$$

**Matrices equivalentes**:

Se dice que $A$ y $A'$ son matrices semejantes si son las matrices de la misma transformación lineal $T: V \to W$ expresada en diferentes bases.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "A"] & T(x) \arrow[d, "P_{\mathscr{C}}^{-1}"] \\ {[x]_{\mathscr{B}}} \arrow[u, "P_{\mathscr{B}}"] \arrow[r, "A'"'] & {[T(x)]_{\mathscr{C}}} \end{tikzcd}$$

Aplicar $A'$ es equivalente a aplicar $P_{\mathscr{B}}$, después $A$ y después $P_{\mathscr{C}}^{-1}$ sobre el vector $[x]_{\mathscr{B}}$, de forma que

$$A' = P_{\mathscr{C}}^{-1} A P_{\mathscr{B}}.$$

Como consecuencia,

$$A = P_{\mathscr{C}} A' P_{\mathscr{B}}^{-1}.$$

**Ejercicio 15.1** Dada una transformación lineal $T$ tal que

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\qquad T\left(\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}.$$

(a) Encuentra una matriz $A$ tal que $T(x)=Ax$ para todo $x\in\mathbb{R}^2$.
(b) Encuentra una matriz $B$ tal que $[T(x)]_{\mathscr{B}}=B[x]_{\mathscr{B}}$ para todo $x\in\mathbb{R}^2$, siendo

$$\mathscr{B}=\left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right\}.$$

(c) Encuentra una matriz $C$ tal que $[T(x)]_{\mathscr{C}}=C[x]_{\mathscr{C}}$ para todo $x\in\mathbb{R}^2$, siendo

$$\mathscr{C}=\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right\}.$$

■

**Ejercicio 15.2** Sea $T:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida para cada $x=[x_1,x_2,x_3]^T$ por $T(x)=[x_1\,,x_1-x_2]^T$.

(a) Encuentra la matriz estándar para $T$, es decir, una matriz $A$ tal que $T(x)=Ax$ para todo $x\in\mathbb{R}^2$.
(b) Considera las bases

$$\widetilde{B}=\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\},\qquad \widetilde{C}=\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente. Encuentra la matriz $M$ tal que $[T(x)]_{\widetilde{C}}=M[x]_{\widetilde{B}}$ para cualquier vector $x\in\mathbb{R}^3$.

■

# 16. Cálculo de valores y vectores propios

Dada una matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ¿para qué vectores $v$ su transformación lineal nos devuelve un múltiplo de ese propio vector?

$$Av = \lambda v$$

- Llamamos **valor propio o autovalor** de una matriz $A$ a cualquier número complejo $\lambda$ para el cual la ecuación $(A-\lambda\mathbb{I})v = 0$ tenga soluciones no triviales ($v \neq 0$). Llamamos **ecuación característica** a la ecuación
$$|A-\lambda\mathbb{I}| = 0,$$
cuyas soluciones son los valores propios de $A$ (para matrices grandes se utilizan otros métodos para estimar los valores propios). La **multiplicidad algebraica** (m.a.) de un valor propio es el número de veces que el valor propio es solución de la ecuación característica. Como $|A-\lambda\mathbb{I}|$ es un polinomio de grado $n$, la ecuación característica tendrá $n$ soluciones (reales o complejas), por lo que
$$\sum \text{m.a.} = n.$$
- Llamamos **vector propio o autovector** de una matriz asociado al vector propio $\lambda^*$ a cualquier solución de la ecuación
$$(A-\lambda^*\mathbb{I})v = 0.$$
Un **espacio propio** de $\lambda^*$ es el conjunto de todos los vectores propios asociados al valor propio $\lambda^*$ (es decir, el conjunto de soluciones de la ecuación anterior). La **multiplicidad geométrica** (m.g.) de un valor propio es la dimensión del espacio propio correspondiente. Para cada valor propio se cumple que
$$\text{m.g.} \leq \text{m.a.}$$

**Propiedades de los valores y vectores propios**

- Los vectores propios asociados a valores propios diferentes son linealmente independientes entre sí.
- El producto de todos los valores propios de una matriz es igual a su determinante.
- Si $A$ es una matriz de números reales y $\lambda$ es un valor propio complejo de $A$, entonces el complejo conjugado de $\lambda$ también será valor propio de $A$ (por ser $\lambda$ raíz de un polinomio con coeficientes reales).

**Ejercicio 16.1** Dada la matriz
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Encuentra sus valores propios.
(b) Encuentra los espacios propios correspondientes.
(c) ¿Sería posible construir alguna base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de $A$?

■

**Ejercicio 16.2** Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Encuentra los valores propios de $A$. ¿Cuál es la multiplicidad algebraica y geométrica de cada uno?
(b) ¿Es $A$ invertible? Explica tu respuesta tomando en cuenta los valores propios.

■

**Ejercicio 16.3** Decide si cada una de las tres siguientes afirmaciones es verdadera o falsa justificando adecuadamente tu respuesta.

(a) Dos vectores propios correspondientes al mismo valor propio son siempre linealmente dependientes.
(b) Si $A$ es una matriz triangular superior sus valores propios son iguales a sus entradas diagonales.

■

# 17. Diagonalización de matrices

Objetivo: construir una base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^n$ formada por vectores propios de $A$.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "A"] \arrow[d, "P^{-1}"] & T(x) \\ {[x]_{\mathscr{B}}} \arrow[r, "D"'] & {[T(x)]_{\mathscr{B}}} \arrow[u, "P"'] \end{tikzcd}$$

$$A = PDP^{-1}, \quad P = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

- La condición para que $A$ sea diagonalizable es que la multiplicidad geométrica sea igual a la multiplicidad algebraica para todos sus valores propios.
- En la práctica, casi todas las matrices son diagonalizables. Una matriz elegida al azar tiene probabilidad cero de no ser diagonalizable.
- Potencias de una matriz diagonalizable:

$$A^n = PDP^{-1}PDP^{-1}\dots PDP^{-1} = PD^nP^{-1}.$$

**Diagonalización de matrices simétricas**:

- Todos los valores propios son reales.
- Siempre son diagonalizables.
- Los vectores propios asociados a diferentes valores propios son ortogonales entre sí $\Rightarrow$ se pueden diagonalizar utilizando una base ortonormal. Para construir dicha base se debe aplicar Gram-Smidth en cada uno de los espacios propios de dimensión $> 1$.

Descomposición espectral de matrices simétricas: si las columnas $v_i$ de $P$ son ortonormales, entonces $P^{-1} = P^T$ y la diagonalización se puede expresar como

$$A = PDP^T = \lambda_1 v_1 v_1^T + \dots + \lambda_n v_n v_n^T.$$

**Ejercicio 17.1** Dada la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, cuya matriz correspondiente es

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcula una base ortonormal $\mathscr{B}$ para la cual la matriz correspondiente de $T$ en la base $\mathscr{B}$ sea diagonal.

(b) Calcula las coordenadas de $y = [1,0]^T$ en la base $\mathscr{B}$.

(c) Utiliza los resultados obtenidos en (a) y (b) para calcular las coordenadas en la base $\mathscr{B}$ de un vector $x \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(x) = y$.

■

**Ejercicio 17.2** Dada la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, y su matriz estándar correspondiente

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Encuentra una base ortonormal $\mathscr{B}$ para $\mathbb{R}^3$ tal que $[T(x)]_{\mathscr{B}} = D[x]_{\mathscr{B}}$, donde $D$ es una matriz diagonal.

(b) Calcula $A^k$ para cualquier entero positivo $k$.

■

**Ejercicio 17.3** Decide si cada una de las tres siguientes afirmaciones es verdadera o falsa justificando adecuadamente tu respuesta.

(a) Cualquier matriz diagonalizable de dimensión $n \times n$ tiene $n$ valores propios distintos.

(b) Todas las matrices diagonalizables son invertibles.

(c) Si una matriz $A$ es diagonalizable, entonces $A^k$ también es diagonalizable para cualquier $k = 2,3,4...$

(d) Dada una matriz diagonalizable $A$, la matriz diagonalizadora $P$, es decir, una matriz $P$ tal que $A = PDP^{-1}$, con $D$ diagonal, es única.

■

# 18. Transformaciones lineales isométricas

- Se dice que una transformación lineal $T : V \to V$ es isométrica cuando no altera la longitud de los vectores,

$$||T(x)|| = ||x|| \quad \forall x \in V.$$

- Una matriz $A$ corresponde a una transformación lineal isométrica si y solo si sus columnas forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$. Como consecuencia, $A^{-1} = A^T$.
- Toda transformación lineal isométrica es una combinación de rotaciones y reflexiones.

**Construcción de matrices de rotación:**

Para construir una matriz de rotación $R$ debemos calcular la rotación de cada una de las columnas de la matriz identidad.

- En $\mathbb{R}^2$, la rotación de un ángulo $\theta$ en sentido positivo (antihorario) se construye rotando los vectores $[1,0]^T$ y $[0,1]^T$, obteniendo la matriz

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\ \theta \\ \text{sen}\ \theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

- En espacios de dimensión $> 2$ se debe escoger en cada caso el plano sobre el que se desee hacer la rotación.

**Construcción de matrices de reflexión:**

Dado un subespacio vectorial $V \subset \mathbb{R}^n$ podemos construir una matriz $H$ que, al aplicarse a un vector en $\mathbb{R}^n$, devuelva la reflexión especular de dicho vector respecto al subespacio $V$. Dicha matriz se calcula como

$$H = \mathbb{I} - 2P,$$

donde $P$ es la matriz de proyección sobre $V^\perp$, es decir, la matriz que cumple

$$Px = \text{proy}_{V^\perp} x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

La matriz de proyección sobre un subespacio $W$ se calcula como $P = QQ^T$, donde $Q$ es una matriz cuyas columnas forman una base ortonormal de $W$.

**Ejercicio 18.1** Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal que rota cualquier vector en el plano un ángulo de $\pi/3$ radianes en el sentido de las agujas del reloj.

(a) Calcula $T(e_1)$, donde $e_1 = [1,0]^T$.
(b) ¿Es $T$ inyectiva? ¿Es $T$ suprayectiva? Razona sin hacer cálculos.
(c) Calcula la matriz $A$ tal que $T(x) = Ax$.

■

**Ejercicio 18.2** Sea $W$ el subespacio generado por los vectores $u = [2,\ 2,\ 0]^T$ y $v = [1,\ 1,\ 1]^T$.

(a) Calcula la matriz de proyección $P$ que proyecta cualquier vector sobre el espacio $W^\perp$.
(b) Calcula la matriz de reflexión $H$ que refleja cualquier vector respecto al subespacio $W$.
(c) ¿Son las transformaciones asociadas a las matrices $P$ y $H$ inyectivas? ¿Y suprayectivas? Razona sin hacer cálculos.

■

**Ejercicio 18.3** Decide si cada una de las tres siguientes afirmaciones es verdadera o falsa justificando adecuadamente tu respuesta.

(a) Si $A$ es una matriz de rotación entonces $|A| = 1$.
(b) Si $P$ es una matriz de proyección y $Q = \mathbb{I} - 2P$, entonces $Q^2 = \mathbb{I}$.
(c) La composición de transformaciones isométricas es también una transformación isométrica.

■

# 19. Descomposición en valores singulares

Toda matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ se puede descomponer como $A = U\Sigma V^T$, donde $U$ y $V$ son las matrices de dos isometrías en $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$ respectivamente y $\Sigma$ es una matriz diagonal de las mismas dimensiones que $A$. Si $A$ no es cuadrada,

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ó} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \sigma_m & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

- Las columnas de $U$ y $V$ se llaman **vectores singulares** izquierdos y derechos de $A$ y forman bases ortogonales de $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$ respectivamente.
- Los valores $\sigma_i$ se llaman **valores singulares** de la matriz $A$, y son siempre números reales no negativos.

**Forma reducida de la DVS**: se puede expresar la DVS utilizando únicamente los vectores singulares asociados a los valores singulares no nulos

$$A = U_r\Sigma V_r^T = \sigma_1 u_1 v_1^T + \dots + \sigma_p u_p v_p^T,$$

donde $U_r = [u_1 \dots u_p] \in \mathbb{R}^{m\times p}$ y $V_r = [v_1 \dots v_p] \in \mathbb{R}^{n\times p}$ contienen las columnas de $U$ y $V$ asociadas a los valores singulares no nulos $\sigma_1, \dots, \sigma_p$.

**Cálculo de la DVS:** la diagonalización de $AA^T$ ó $A^TA$, que son matrices simétricas y por tanto diagonalizables ortogonalmente, nos permite calcular los valores y los vectores singulares izquierdos o derechos respectivamente:

$$AA^T = U\Sigma V^T(U\Sigma V^T)^T = U\Sigma V^T V\Sigma^T U^T = U\Sigma\Sigma^T U^T,$$

$$A^TA = (U\Sigma V^T)^T U\Sigma V^T = V\Sigma^T U^T U\Sigma V^T = V\Sigma^T\Sigma V^T.$$

- Los autovalores de $AA^T$ ó $A^TA$ en $\Sigma\Sigma^T$ ó $\Sigma^T\Sigma$ contienen los cuadrados de los valores singulares de $A$.
- Una vez tenemos los valores y los vectores singulares izquierdos o derechos, podemos utilizarlos para calcular las columnas de $U_r$ o de $V_r$

$$u_i = \frac{1}{\sigma_i}Av_i, \quad v_i = \frac{1}{\sigma_i}A^T u_i.$$

**Aplicación de la DVS**: la mejor aproximación de una matriz $A$ por otra de rango más bajo $r$ es aquella que resulta de la suma de sus $r$ valores singulares más grandes: $A \approx \sigma_1 u_1 v_1^T + \dots + \sigma_r u_r v_r^T$.

**Ejercicio 19.1** Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcula los valores singulares de $A$ y $B$.
(b) Obtén las descomposiciones en valores singulares de $A$ y $B$ en forma reducida.
(c) Obtén la mejor aproximación de $A$ y $B$ utilizando matrices de rango 1.

■

**Ejercicio 19.2** Se denomina pseudoinversa de una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ cuya descomposición en valores singulares reducida sea $A = \sigma_1 u_1 v_1^T + \ldots + \sigma_p u_p v_p^T$ a la matriz que se obtiene transponiendo $A$ e invirtiendo sus valores singulares distintos de cero,

$$A^+ = \sigma_1^{-1} v_1 u_1^T + \ldots + \sigma_p^{-1} v_p u_p^T.$$

Demuestra que, si $A$ es invertible, $A^{-1} = A^+$. ■

**Ejercicio 19.3** Decide si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa justificando adecuadamente tu respuesta.

(a) Si $A$ es una matriz cuadrada, su determinante será el producto de sus valores singulares.
(b) Es posible almacenar toda la información contenida en una matriz $A \in \mathbb{R}^{500\times 100}$ de rango 10 en una memoria con capacidad para almacenar 8192 números decimales (sin tener en cuenta errores de redondeo).

■

# 20. Caso práctico I: resolución de sistemas mediante factorización LU y de Cholesky

Las operaciones realizadas al escalonar una matriz se pueden utilizar para realizar la **factorización LU** $PA = LU$, donde:

- $P$ se obtiene aplicando a la matriz identidad las mismas permutaciones
- $L$ es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal y los factores de eliminación en las posiciones subdiagonales.
- $U$ es la matriz $A$ en forma escalonada.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \overset{f_1 \leftrightarrow f_2}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \overset{f_3 - \frac{1}{2} f_1}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = U,$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si la matriz es simétrica y definida positiva (todos los autovalores son positivos) se puede hacer la **factorización de Cholesky** $A = C^T\, C$, donde $C$ es una matriz triangular superior, que requiere menos operaciones y uso de memoria. Los elementos de $C$ se calculan utilizando las siguientes reglas para $i = j$ e $i \neq j$:

$$c_{i,i} = \sqrt{a_{i,i} - \sum_{k=1}^{i-1} c_{k,i}^2}, \qquad c_{i,j} = \frac{a_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} c_{k,i} c_{k,j}}{c_{i,i}}.$$

**Solución del sistemas $Ax = b$ aprovechando la factorización de $A$**

- Utilizando LU: $PAx = Pb \quad \Rightarrow \quad LUx = Pb$
  1. Llamar $y = Ux$ y resolver $Ly = Pb$.
  2. Con el valor de $y$ obtenido, resolver $Ux = y$.
- Utilizando Cholesky: $C^T Cx = b$
  1. Llamar $y = Cx$ y resolver $C^T y = b$.
  2. Con el valor de $y$ obtenido, resolver $Cx = y$.

Código Matlab:

```
x=A\b; % De forma directa
[L,U,P]=lu(A); y=L\(P*b); x=U\y; % Utilizando LU
C=chol(A); y=C'\b; x=C\y; % Utilizando Cholesky
x_p=A\b; x_h=null(A); % En caso de haber infinitas soluciones
```

**Ejercicio 20.1** Considera el sistema de ecuaciones $Ax = b$, con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Reduce la matriz ampliada a forma escalonada y resuelve el sistema.
(b) Utiliza las operaciones elementales que ha requerido resolver el sistema en el apartado anterior para factorizar la matriz a su forma LU.
(b) Utiliza la factorización LU de $A$ para resolver el sistema $Ax = p$, donde $p = [0,\ 3,\ 6]^T$.

■

**Ejercicio 20.2** Utiliza MATLAB para resolver las siguientes cuestiones:

(a) Crea una matriz $A$ de tamaño $4 \times 5$ y un vector columna $b$ de tamaño $4 \times 1$ cuyos elementos sean números aleatorios utilizando el comando `rand`. Describe el conjunto de soluciones de los sistemas de ecuaciones $Ax = 0$ y $Ax = b$.
(b) Crea otra matriz aleatoria $M$ de tamaño $2000 \times 2000$ y resuelve el sistema $Sx = c$, donde $S = M^T M$ y $c$ es un vector cuyos elementos valen todos 2.
(c) Resuelve el sistema $Sx = c$ utilizando la factorización LU de $S$. Comprueba que la solución obtenida es la misma que la que se obtuvo resolviendo el sistema de forma directa utilizando el comando `norm`.
(d) Comprueba que puedes hacer la factorización de Cholesky de $S$ y resuelve el sistema $Sx = c$ utilizando dicha factorización. Comprueba que la solución obtenida sigue siendo la misma.
(e) Compara el tiempo que tarda el ordenador en resolver el sistema de forma directa, utilizando la factorización LU y utilizando la factorización de Cholesky. Mide el tiempo de computación con los comandos `tic, toc`.

■

# 21. Caso práctico II: ajuste de una nube de puntos

Los sistemas de ecuaciones a resolver para encontrar el mejor ajuste posible de una serie de puntos en el plano $(x_1, y_1)$, $(x_2,\ y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ a varios tipos de funciones sencillas se exponen a continuación.

- Ajuste a un polinomio:

$$y = A + Bx + Cx^2 + \ldots \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

- Ajuste a una función exponencial:

$$y = Ae^{Bx} \quad \Rightarrow \quad \log y = \log A + Bx \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \log y_1 \\ \log y_2 \\ \vdots \\ \log y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \log A \\ B \end{bmatrix}.$$

- Ajuste a una ley de potencias:

$$y = Ax^B \ \Rightarrow \ \log y = \log A + B \log x \ \Rightarrow \ \begin{bmatrix} \log y_1 \\ \log y_2 \\ \vdots \\ \log y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \log x_1 \\ 1 & \log x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \log x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \log A \\ B \end{bmatrix}.$$

Código Matlab:

```
% Polinomio (grado 3)
M=[ones(length(x),1) x x.^2 x.^3];
coef=(M'*M)\(M'*y);
A=coef(1); B=coef(2); C=coef(3); D=coef(4);
% Exponencial
M=[ones(length(x),1) x];
coef=(M'*M)\(M'*y);
A=exp(coef(1)); B=coef(2);
% Ley de potencias
M=[ones(length(x),1) log(x)];
coef=(M'*M)\(M'*log(y));
A=exp(coef(1)); B=coef(2);
```

**Ejercicio 21.1** Dados los puntos $(1,0)$, $(2,2)$ y $(3,3)$, determina:

1. La recta que mejor se ajusta a esos puntos.
2. La función con la forma $y = A + Bx^2$ que mejor se ajusta a esos puntos.
3. ¿Cuál de los dos ajustes tiene una mayor desviación respecto de los puntos originales?

■

**Ejercicio 21.2** Utiliza MATLAB para determinar el mejor ajuste del siguiente conjunto de puntos a los tipos de funciones que se describen a continuación. Representa gráficamente los puntos junto a los diferentes ajustes obtenidos.

| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 1 | 1.5 | 2.5 | 3 | 5 | 6.5 | 8 |

1. Una recta $y = A + Bx$.
2. Una parábola $y = A + Bx + Cx^2$.
3. Una exponencial $y = Ae^{Bx}$.
4. Una ley de potencias $y = Ax^B$.

■

# 22. Caso práctico III: aplicaciones de la diagonalización

Código Matlab: `[P,D]=eig(A)`

**Desacoplamiento de ecuaciones diferenciales**:

La solución de la ecuación diferencial $f' = \lambda f$ es inmediata, $f(t) = f(0)e^{\lambda t}$. Esto no es posible en un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas de la forma $f' = Af$, con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $n > 1$, a no ser que $A$ sea diagonal. Sin embargo, si $A$ es diagonalizable, podemos expresar el sistema como

$$f' = PDP^{-1}f \quad \Rightarrow \quad P^{-1}f' = DP^{-1}f.$$

Si expresamos $f$ y $f'$ utilizando la base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^n$ formada por los autovectores contenidos en $P$, obtenemos

$$[f]'_{\mathscr{B}} = D[f]_{\mathscr{B}},$$

donde ahora cada ecuación se puede resolver por separado utilizando como condiciones iniciales $[f]_{\mathscr{B}}(0) = P^{-1}f(0)$. Deshaciendo el cambio de variable, obtenemos el vector $f$ para cualquier instante del tiempo como

$$f(t) = P[f]_{\mathscr{B}}(t).$$

**Análisis de redes**:

Una red de $N$ nodos interconectados puede ser caracterizada por una matriz $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ denominada matriz de adyacencia, donde cada entrada (fila $i$ columna $j$) indica el flujo o número de conexiones del nodo $i$ al $j$.

Si aplicamos la matriz $A$ a un vector aleatorio $x$ obtenemos cómo se moverían cantidades aleatorias entre los nodos de la red. Considerando que $A$ es diagonalizable, podríamos expresar el vector $x$ como combinación lineal de autovectores $v_1, \ldots, v_n$ de $A$,

$$x = c_1v_1 + \ldots + c_nv_n.$$

Tras aplicar $A$ sucesivamente $m$ veces, podríamos expresar $A^m x$ como

$$A^m(c_1v_1 + \ldots + c_nv_n) = c_1A^m v_1 + \ldots + c_nA^m v_n = c_1\lambda_1^m v_1 + \ldots + c_n\lambda^m v_n,$$

donde el término con el autovalor de módulo más alto prevalece sobre todos los demás cuando $m \to \infty$. Las entradas de dicho autovector (denominado **autovector principal** de A) indican la probabilidad de acabar en el nodo correspondiente y, por tanto, su importancia relativa en la red. Este resultado puede extenderse también a matrices que no sean diagonalizables.

**Ejercicio 22.1** Considera el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{bmatrix} f_1' \\ f_2' \\ f_3' \\ f_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}.$$

Utiliza MATLAB para resolver las siguientes cuestiones:

(a) Calcula los autovalores de la matriz del sistema.
(b) Comprueba que se puede construir una base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^4$ con los autovectores de la matriz.
(c) Expresa el sistema en las coordenadas definidas por la base de autovectores $\mathscr{B}$.
(d) Calcula las coordenadas en la base $\mathscr{B}$ de la condición inicial

$$\begin{bmatrix} f_1(0) \\ f_2(0) \\ f_3(0) \\ f_4(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(e) Resuelve las ecuaciones diferenciales expresadas en base $\mathscr{B}$.
(f) Calcula el valor que toma el vector $f$, expresado en coordenadas $\mathscr{B}$, en $t = 2$.
(g) Deshaz el cambio de coordenadas (de la base $\mathscr{B}$ a la base canónica) para calcular el valor de $f_1$, $f_2$, $f_3$ y $f_4$ en $t = 2$.

■

**Ejercicio 22.2** La siguiente tabla muestra los flujos de pasajeros promedio (en miles de pasajeros por día) entre las estaciones de la red de metro de una ciudad.

| | Estación 1 | Estación 2 | Estación 3 | Estación 4 | Estación 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Estación 1 | 0 | 5.0 | 4.3 | 8.6 | 2.3 |
| Estación 2 | 8.2 | 0 | 4.4 | 9.8 | 2.2 |
| Estación 3 | 7.3 | 4.6 | 0 | 0.9 | 3.1 |
| Estación 4 | 9.1 | 8.3 | 0.4 | 0 | 1.2 |
| Estación 5 | 1.4 | 7.2 | 1.1 | 1.1 | 0 |

Se plantea la posibilidad de construir un intercambiador que conecte la red de metro con autobuses interurbanos en una de dichas estaciones. Utiliza MATLAB para estudiar cuál sería la mejor estación para hacerlo en términos de centralidad estructural dentro de la red de metro. ■