Una nueva técnica para la interpolación simultánea de una función y sus derivadas

Marcelino Lázaro, Ignacio Santamaría, Carlos Pantaleón, Jesús Ibáñez

Departamento de Ingeniería de Comunicaciones, ETSII y Telecomunicación
Universidad de Cantabria, Av los Castros s/n, 39005 Santander
Tlf: 942 201392 Ext 15, Fax: 942 201488 e-mail: marce@gtas.dicom.unican.es

Abstract

En esta comunicación se presenta una nueva técnica para la interpolación simultánea de una función y sus derivadas. En una primera etapa el método realiza la interpolación discreta de las secuencias de la función y sus derivadas empleando filtros específicos. En una segunda etapa se realiza la reconstrucción analógica de la función. El resultado final es equivalente a una interpolación con "splines"en la que se han introducido puntos de ruptura adicionales. El método es local y computacionalmente muy eficiente.

1 Introducción

Existe una serie de problemas que requieren la aproximación simultánea de una función y sus derivadas, como por ejemplo el modelado de dispositivos cuando se quiere tener en cuenta la intermodulación. Hay varias alternativas para la reconstrucción de una función a partir de muestras de la misma y de sus derivadas. Entre las más conocidas tendríamos la extensión del teorema de muestreo de Shannon a la reconstrucción exacta de una señal limitada en banda cuando se dispone de muestras de las derivadas [1], o la reconstrucción mediante algoritmos de tipo iterativo, para el caso de muestreo irregular [2]. Sin embargo estas alternativas presentan varios problemas. Por un lado precisan una elevada carga computacional y por otro son métodos bastante sensibles al efecto del ruido. Además son métodos globales, con lo que para estimar la función en un punto hay que tener en cuenta todo el conjunto de muestras, y son exclusivos para señales limitadas en banda.

En esta comunicación se propone un nuevo método de reconstrucción que solventa estos inconvenientes.

2 Descripción del método

En esta sección se presenta el método propuesto. Para empezar se describe el problema que se trata de resolver. Dado un conjunto de N medidas de una función y sus primeras P derivadas,

$$x_i^{n)} = x^{n)}(iT), \quad i = 0, ..., N-1; \quad n = 0, ..., P$$

se desea reconstruir la función $x(t)$, de tal manera que tanto la función como las P derivadas cumplan las condiciones de interpolación anteriores.

La idea general del método es la siguiente. Si se realiza la interpolación discreta, por un factor $P+1$, de las secuencias de muestras de la función y las P derivadas, es decir, que se insertan P nuevos valores entre cada dos muestras consecutivas, se puede plantear un modelo en el que la P-ésima derivada sea lineal a tramos sobre la secuencia interpolada correspondiente. Entonces, a partir de la derivada de orden P se pueden calcular mediante integración las demás derivadas y la función. De la aplicación de las $2 \times (P+1)$ condiciones de interpolación a este sistema se pueden obtener los únicos valores de función y derivadas en los nuevos instantes introducidos por la interpolación que se ajustan al modelo planteado. Una vez calculados, la reconstrucción de la función es inmediata. El sistema es totalmente local, y se puede plantear de forma independiente para cada dos muestras consecutivas.

Se puede comprobar que el modelo resultante es equivalente a un spline que ajusta la secuencia así interpolada de las muestras de la función, con las condiciones adicionales de la primera derivada en los extremos del intervalo de muestreo.

A continuación se presentan las expresiones concretas para el caso particular de reconstrucción a partir de las muestras de la función y de las dos primeras derivadas, en el que el modelo resultante es equivalente a un spline cúbico. Por comodidad en la notación se plantea para el caso de muestreo regular con intervalo de muestreo T. La extensión a muestreo irregular, al ser el método local, es directa.

En primer lugar se definen las secuencias expandidas con ceros como las secuencias de longitud $3N-2$

$$\hat{x}_i^{n)} = \begin{cases} x_i^{n)}(\frac{i}{3}); & i = 0, 3, ..., 3(N-1). \\ x_i^{n)} = 0; & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

donde n=0,1,2. A partir de estas secuencias se definen las secuencias interpoladas mediante las siguientes expresiones

- para i=0,3,...,3(N-1)

$$\tilde{x}_i^{n)} = \hat{x}_i^{n)}; \qquad n = 0, 1, 2$$

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por la Comisión Europea y el Gobierno Español a través del proyecto 1FD97-1863-C02-01

- para i=1,4,...,3N-5

$$\tilde{x}_i^{2)} = \frac{\hat{x}_{i+2}-\hat{x}_{i-1}}{T_n^2} - \frac{2\hat{x}_{i-1}^{1)}}{T_n} - \frac{5\hat{x}_{i-1}^{2)}}{6} - \frac{\hat{x}_{i+2}^{1)}}{T_n} + \frac{\hat{x}_{i+2}^{2)}}{3}$$

$$\tilde{x}_i^{1)} = \hat{x}_{i-1}^{1)} + \frac{\hat{x}_{i-1}^{2)}+\tilde{x}_i^{2)}}{2}T_n$$

$$\tilde{x}_i = \hat{x}_{i-1} + \hat{x}_{i-1}^{1)}T_n + \frac{\hat{x}_{i-1}^{2)}}{2}T_n^2 + \frac{\tilde{x}_i^{2)}-\hat{x}_{i-1}^{2)}}{6}T_n^2$$

- para i=2,5,...,3N-4

$$\tilde{x}_i^{2)} = \frac{\hat{x}_{i+1}^{1)}-\hat{x}_{i-2}^{1)}}{T_n} - \frac{\hat{x}_{i+1}^{2)}+\hat{x}_{i-2}^{2)}}{2} - \tilde{x}_{i-1}^{(2)}$$

$$\tilde{x}_i^{1)} = \hat{x}_{i+1}^{1)} - \frac{\tilde{x}_i^{2)}+\hat{x}_{i+1}^{(2)}}{2}T_n$$

$$\tilde{x}_i = \tilde{x}_{i-1} + \tilde{x}_{i-1}^{1)}T_n + \frac{\tilde{x}_{i-1}^{2)}}{2}T_n^2 + \frac{\tilde{x}_i^{2)}-\tilde{x}_{i-1}^{2)}}{6}T_n^2$$

donde T_n es el espacio entre las muestras de la señal interpolada, en este caso $T/3$. Una vez calculados estos valores, la función, para un punto situado entre las muestras i e $i+1$ de la señal interpolada, se calcula mediante la sucesiva integración de las derivadas (partiendo de que la segunda derivada es lineal a tramos) como

$$y(t) = \tilde{x}_i + \tilde{x}_i^{(1)}\Delta t + \tilde{x}_i^{(2)}\frac{\Delta t^2}{2} + \frac{\tilde{x}_{i+1}^{(2)} - \tilde{x}_i^{(2)}}{6T_n}\Delta t^3$$

donde $\Delta t = t - (i-1)T_n$ es la distancia entre t y el instante i-ésimo. Este modelo es equivalente a un spline cúbico que ajuste $\tilde{x}_i$, pero con la ventaja de que la localidad reduce significativamente la carga computacional de esta formulación.

3 Resultados

A continuación se van a presentar los resultados obtenidos con el modelo propuesto en la sección anterior y se compararán con los que se obtendrían mediante el método de generalización del teorema de muestreo descrito en [1].

En la Figura 1 se pueden apreciar los resultados de relación señal a ruido (SNR) obtenidos en la reconstrucción de la función para una SNR en las muestras de la función de 30 dB, en función de varios valores de SNR en las muestras de las derivadas primera (SNR1) y segunda (SNR2). La señal a reconstruir es una combinación lineal de sinusoides. Se puede apreciar que el modelo propuesto obtiene resultados superiores al método [2], excepto en el caso en que la SNR de la derivada primera esté muy por debajo de la de las muestras de la señal, en cuyo caso los resultados son ligeramente inferiores. Resultados similares se obtienen también en las estimas de las dos derivadas.

Para ilustrar la ventaja de utilizar muestras de las derivadas obtenidas a una velocidad de muestreo inferior, se ha comparado el modelo propuesto con un spline cúbico convencional obtenido a partir de muestras de la función tomadas a una velocidad de muestreo 3 veces superior. En este caso, aunque sin ruido

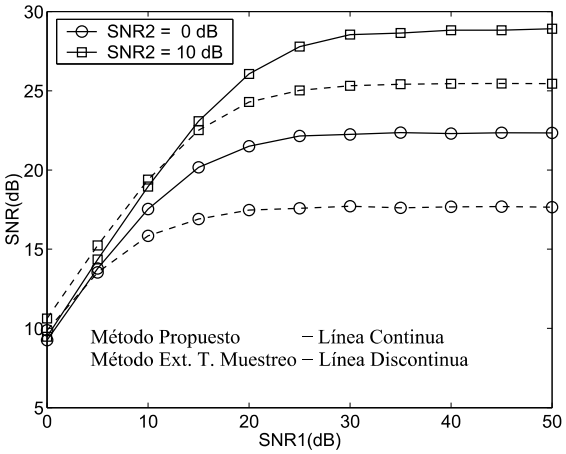

Figura 1: Comparación de la SNR de la reconstrucción en función de la SNR de las muestras de las derivadas primera (SNR1) y segunda (SNR2). Las muestras de la señal original tienen una SNR=30 dB

el spline cúbico convencional proporciona, como era lógico esperar, mejores resultados tanto en la estima de la función como de las derivadas, en el caso de que las muestras sean ruidosas, el modelo propuesto proporciona mejores resultados, sobre todo en la estima de las derivadas, siempre que los niveles de SNR en las muestras de las derivadas, especialmente en las de la primera, no sean muchísimo peores (al menos 10 dB) que la de las muestras de la señal.

4 Conclusiones

Se ha presentado una nueva técnica para la interpolación simultánea de una función y sus derivadas. La solución resultante es equivalente a un spline. Los grados de libertad necesarios para asegurar las condiciones de interpolación en la función y las derivadas se consigen mediante la expansión e interpolación de las secuencias de muestras disponibles. Este modelo presenta una mayor inmunidad frente al ruido que los métodos habitualmente utilizados en este tipo de problemas a la vez que debido a su localidad presenta una carga computacional reducida. Es aplicable tanto para muestreo regular como para irregular y no está restringido a señales limitadas en banda.

Referencias

[1] A.J. Jerri. “The Shannon sampling theorem - Its various extension and applications: A tutorial review”*Proceedings of the IEEE*, vol 65, No 11, pp 1565-1596, 1977.

[2] H.N. Razafinjatovo. “Iterative recontructions in irregular sampling with derivatives.”*Journ. Fourier Anal. Appl.*, Vol.1,3:281-295, 1995.