

***Facultad
de
Ciencias***

**Espacios de Peano
(Peano spaces)**

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autor: Alejandro Macías Pastor

Directora: Nuria Corral Pérez

Febrero - 2025

Agradecimientos

Casi año y medio después de terminar el Grado en Física, y habiendo obtenido un título de Máster entre medias, este trabajo representa el demorado fin de mi etapa universitaria. Al igual que la última vez, no querría dejar pasar la oportunidad de mencionar a las personas que han contribuido a que alcance esta meta.

En primer lugar, agradecer a Nuria tanto el motivarme a terminar el Grado como el especial esfuerzo de estas últimas semanas. Gracias a su guía y dirección he podido terminar con buen sabor de boca mis estudios en una disciplina tan bella como son las Matemáticas.

Tengo la enorme suerte de que el resto de las personas a las que debo agradecerles este hito prácticamente no haya cambiado desde la última vez. A mis padres y a mi hermano, que aún desde la distancia me siguen apoyando incondicionalmente. A Joseba, Jorge y Laura, que aunque ahora nos encontremos algo más repartidos, los kilómetros no han podido deshacer lo que el Doble Grado unió. A Leire y Antía, que tomaron sin rechistar el relevo de aguantar mis quejas en cualquier rincón de nuestro piso. A Yeri, que aun habiendo visto la peor cara de mi frustración nunca permitió que me rindiera. Y como no podía ser de otra manera, a Elisa, que sigue siendo imprescindible.

En Madrid, a 12 de febrero de 2025.

Resumen

El Teorema de Hahn-Mazurkiewicz permite afirmar que un espacio Hausdorff es imagen continua del intervalo unidad si y sólo si es un espacio compacto, conexo y localmente conexo. Para la demostración de este teorema resultan clave el teorema de Hausdorff que caracteriza los espacios métricos compactos, y el resultado que caracteriza el intervalo unidad en términos de aquellos puntos que en cierta manera lo desconectan.

En este trabajo se desarrollan los conceptos y resultados necesarios para proporcionar una demostración autocontenida del Teorema de Hahn-Mazurkiewicz. Para ello, se realizará un estudio de la conexión y la compacidad. También se estudiarán los espacios métricos y la convergencia de sucesiones sobre ellos. Tras presentar la construcción geométrica de la curva de Peano, se estudiarán las propiedades del conjunto de Cantor, demostrando el resultado ya mencionado. Esto nos servirá para introducir la curva de Lebesgue, que otorgará ideas que posteriormente se aprovecharán en el último capítulo para la demostración del teorema central a este trabajo. Antes de poder demostrarlo, se presentarán los espacios conocidos como continuos métricos, de los cuales el intervalo unidad es un caso concreto.

Palabras clave: curva de Peano, conjunto de Cantor, continuos métricos, espacios de Peano, Teorema de Hahn-Mazurkiewicz.

Abstract

The Hahn-Mazurkiewicz theorem identifies the continuous images of the unit interval as compact, connected and locally connected spaces. The proof of this theorem requires a characterization obtained by Hausdorff that connects all compact metric spaces with continuous images of the Cantor set, as well as a result that characterizes the unit interval in terms of those points that somehow disconnect it.

In this work those concepts and results required to provide a self-contained proof of the Hahn-Mazurkiewicz theorem are developed. To that aim, a study of the topological properties known as compactness and connectedness will be carried out. Metric spaces, as well as the convergence of sequences over them, will also be studied. After providing the reader with the geometrical construction of the Peano curve, the properties of the Cantor set will be studied, providing a proof of the already-mentioned theorem. This will allow us to present the construction of the Lebesgue curve, ideas of which will be leveraged for the proof of the main theorem in the last chapter. Before doing so, the spaces known as metric continua will be presented, out of which the unit interval is an example.

Keywords: Peano curve, Cantor set, metric continua, Peano spaces, Hahn-Mazurkiewicz Theorem.

Índice general

1. Introducción	1
2. Conceptos básicos	3
2.1. Topologías, bases y continuidad	3
2.2. Compacidad	8
2.3. Conexión	11
2.4. Espacios métricos	13
2.5. Convergencia en espacios métricos	18
3. Una curva que rellena espacios	25
3.1. El método de Hilbert	25
3.2. La curva de Peano	26
4. Un método ajeno al argumento geométrico	29
4.1. El conjunto de Cantor	29
4.2. La curva de Lebesgue	33
5. Caracterización del intervalo unidad	35
5.1. Algunos resultados previos	35
5.2. Continuos métricos	39
6. Espacios de Peano	45
Bibliografía	51

Capítulo 1

Introducción

En 1878, Cantor sorprendió a la comunidad matemática, e incluso a si mismo, mostrando que el intervalo unidad y el cuadrado unidad tenían el mismo cardinal, yendo contra la intuición geométrica general al demostrar que había una correspondencia biunívoca entre dos variedades de distinta dimensión [2]. Ante la pregunta de si se podía conseguir que dicha biyección fuese continua, Netto probó en 1879 que la respuesta era negativa [13]. No obstante, seguía cuestionándose qué podía ocurrir si se dejaba de exigir la inyectividad de tal aplicación. Esto fue resuelto por Peano en 1890, año en el que presentó su construcción de la primera aplicación continua y sobreyectiva del intervalo unidad al cuadrado unidad [14]. El año siguiente Hilbert presentó un argumento geométrico que asentaría un método general de generación de curvas que rellenaban espacios [5]. Esto permitiría a múltiples matemáticos, tales como Moore, Sierpiński o el mismo Hilbert, construir sus propias versiones de la curva de Peano [11] [17]. Entre las curvas obtenidas en los años posteriores a Peano, destacó la obtenida por Lebesgue al aprovechar un resultado relacionado con el conjunto de Cantor obtenido por Hausdorff, lo que le permitió alejarse del argumento geométrico de Hilbert.

Las contribuciones de estos matemáticos suscitaron el interés por el estudio de las cualidades de aquellos espacios que son imágenes continuas del intervalo unidad. Este proceso conllevaría un estudio minucioso de las propiedades topológicas de la conexión y la compacidad, nociones todavía sin asentar en aquellos momentos. No sería hasta 1913 que, de manera independiente, Hahn y Mazurkiewicz obtendrían un resultado determinante en este campo: un espacio es imagen del intervalo unidad si y sólo si es compacto, conexo y localmente conexo [3] [10]. Tras esta primera demostración, ambos matemáticos continuarían su trabajo en este tema, obteniendo incluso nuevas demostraciones del mismo resultado [4].

El objetivo de este trabajo será precisamente desarrollar los conceptos y resultados necesarios para presentar una demostración autocontenida del Teorema de Hahn-Mazurkiewicz. Para ello, estructuraremos el trabajo en cinco capítulos, culminando el último de ellos en la prueba de dicho teorema.

En el Capítulo 2 presentaremos las nociones básicas de topología general que requeriremos en el resto del trabajo. Dada la importancia de la compacidad y la conexión, estudiaremos algunas de las múltiples propiedades con las que cada una de estas cualidades dotan a los espacios que las poseen. En este mismo capítulo se estudiarán también los espacios métricos y la noción de convergencia que se puede definir sobre ellos, incluyendo las variaciones que existen sobre los espacios métricos de funciones. Esto último

nos permitirá en el capítulo posterior reproducir la construcción de la curva de Peano.

Los Capítulos 3 y 4 estarán dedicados a dos ejemplos de curvas que se han considerado de especial relevancia. En el primero de ellos, como hemos adelantado, simularemos la construcción de la curva de Peano. Evitaremos los argumentos utilizados por Peano que, aunque pioneros, podrían resultar poco claros. En su lugar, enunciaremos y utilizaremos el método publicado por Hilbert, que nos otorgará una construcción de la curva de Peano más intuitiva. En el capítulo siguiente presentaremos la construcción original de Lebesgue de la curva que acabará llevando su nombre. Esta nos otorgará argumentos que podremos reciclar de cara a la demostración del Teorema de Hahn-Mazurkiewicz. Dado que la construcción requiere del conocimiento de algunas propiedades del conjunto de Cantor, dedicaremos parte de este capítulo al estudio de este conjunto. Entre los resultados que demostraremos destacará el teorema de Hausdorff que caracteriza todos los espacios métricos compactos como imágenes continuas de este conjunto.

Con el objetivo de caracterizar el intervalo unidad, en el Capítulo 5 presentaremos nociones de la teoría de continuos métricos, es decir, de los espacios métricos que son a la vez compactos y conexos. Para poder llevar a cabo la caracterización deseada será necesario introducir algunos conceptos y resultados previos, tales como el Teorema de Isomorfismo de Orden de Cantor o la noción de corte de Dedekind.

Finalmente, el Capítulo 6 tratará sobre los espacios de Peano, continuos métricos que serán además localmente conexos, y su caracterización a través del Teorema de Hahn-Mazurkiewicz. La caracterización del intervalo unidad dada en el capítulo previo nos permitirá demostrar que de hecho estos espacios son conexos por arcos. Además, introduciremos las nociones de conexión local uniforme y conexión por arcos local uniforme que, como veremos, también satisfarán este tipo de espacios. Serán estas propiedades precisamente las que nos permitirán extender la construcción de Lebesgue a espacios más generales.

El texto utilizado principalmente para la confección de este trabajo ha sido *General Topology* de Stephen Willard [20], que ha inspirado la estructura general y del que se han extraído la mayoría de enunciados ajenos a los conceptos básicos. Estos se han complementado mediante consultas al texto *Space-filling curves* de Hans Sagan, cuyas demostraciones considerablemente más autocontenidas se han considerado más ilustrativas. Aunque con menor frecuencia, también han sido consultados los clásicos textos de topología general de J.R. Munkres y de J.G. Hocking y G.S. Young [12] [6].

Notación

Antes de proceder con el desarrollo de este trabajo, fijemos algunos aspectos de la notación que utilizaremos. Algunos conjuntos de especial relevancia vendrán dados por letras caligráficas, tales como $\mathcal{I} = [0, 1]$ o $\mathcal{C}$ para denotar el conjunto de Cantor. Denotaremos por Y^X el conjunto de aplicaciones entre X e Y , es decir, $Y^X = \{f : X \rightarrow Y : f \text{ es aplicación}\}$. Con respecto a la inclusión entre conjuntos, esta vendrá dada por el símbolo $\subseteq$. Cuando se quiera representar una inclusión estricta utilizaremos el símbolo $\subsetneq$. Cuando no se de la inclusión, utilizaremos el símbolo $\not\subseteq$.

Por otra parte, dado un número $x \in \mathbb{R}$ denotaremos su representación en base $b \in \mathbb{N}$ mediante $x = (a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 . x_1 x_2 x_3 \dots)_b = \sum_{k=0}^n a_k b^k + \sum_{k=1}^{\infty} x_k b^{-k}$. Por otra parte, si $t \in [0, 1]$, siguiendo la notación de [15], expresaremos su representación en base b como $t = 0_i t_1 t_2 t_3 \dots$.

Capítulo 2

Conceptos básicos

A lo largo de este capítulo introduciremos los conceptos y resultados de topología general que serán utilidad en las secciones siguientes. Se supondrán conocidas nociones básicas de teoría de conjuntos tales como las propiedades de las operaciones entre conjuntos o las relaciones que se pueden definir sobre ellos. Por lo general, no incluiremos las demostraciones de aquellos resultados que se han visto en el Grado. Este capítulo está basado principalmente en [12], junto a algunos detalles obtenidos de [20].

2.1. Topologías, bases y continuidad

Podemos comenzar por recordar los conceptos más básicos de los espacios topológicos junto a algunos resultados asociados.

Definición 2.1. Una *topología* τ sobre un espacio X es una familia de subconjuntos de X tal que cumple las siguientes condiciones:

1. $\emptyset, X \in \tau$
2. Si $\{U_i\}_{i \in I} \subseteq \tau$, entonces $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$,
3. Si $\{U_i\}_{i=1}^n \subseteq \tau$, entonces $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \tau$.

Los elementos de τ se denominan *conjuntos abiertos*, y el par (X, τ) se denomina *espacio topológico*.

Si $U \in \tau$ es un conjunto abierto, diremos que su complementario $X \setminus U$ es un *conjunto cerrado*. Cualquier topología puede ser definida también en términos de sus conjuntos cerrados.

Ejemplos.

Dado un conjunto no vacío X , veamos algunos ejemplos de topologías definidas en X :

- $\tau_{\text{trivial}} = \{\emptyset, X\}$ se conoce como la topología trivial.
- $\tau_{\text{disc}} = \mathcal{P}(X)$, donde $\mathcal{P}(X)$ denota el conjunto de partes de X , se conoce como la topología discreta.

- $\tau_{\text{cof}} = \{A \subseteq X : X \setminus A \text{ es finito}\} \cup \{X\}$ se conoce como topología cofinita.

Sobre un mismo conjunto se pueden definir varias topologías distintas, y en ocasiones puede ser interesante compararlas. Dadas dos topologías τ_1 y τ_2 definidas sobre un mismo conjunto X , diremos que τ_1 es *más fina* que τ_2 si se cumple que $\tau_2 \subseteq \tau_1$.

Por otra parte, definir de manera exhaustiva una topología puede ser extremadamente complicado. Por ello, conviene conocer el concepto de base de una topología, que nos permitirá describirla a partir de una familia de abiertos que de alguna manera ‘generará’ la topología.

Definición 2.2. Sea (X, τ) un espacio topológico. Una *base* para la topología τ es una colección $\mathcal{B} \subseteq \tau$ tal que todo abierto de τ puede expresarse como unión de elementos de $\mathcal{B}$.

También puede ocurrir que contemos con un conjunto X sin topología y queramos generar una topología para X a partir de una colección de subconjuntos $\mathcal{B}$. En general, $\mathcal{B}$ no tiene por qué formar una base. Para poder comprobar si cumple las condiciones necesarias para serlo, contamos con el siguiente resultado:

Proposición 2.3. Sean X un conjunto y $\mathcal{B}$ una colección de subconjuntos de X . La colección $\mathcal{B}$ es una base para una topología sobre X si cumple las siguientes condiciones:

1. Para todo $x \in X$, existe $B \in \mathcal{B}$ con $x \in B$.
2. Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y $x \in B_1 \cap B_2$, entonces existe $B_3 \in \mathcal{B}$ cumpliendo que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

La correspondiente topología generada por la colección $\mathcal{B}$ se obtiene a partir de todas las posibles uniones de elementos de la base.

Ejemplos.

- La topología usual en $\mathbb{R}$ puede obtenerse a partir de la base formada por los intervalos abiertos, es decir, $\mathcal{B}_{\text{usual}} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$.
- Una base de la topología discreta definida para un conjunto X es la formada por los conjuntos unipuntuales $\mathcal{B}_{\text{disc}} = \{\{x\} : x \in X\}$.

Al igual que ocurre en el caso de las topologías sobre un conjunto X , también se pueden definir varias bases para un conjunto X , e incluso puede ocurrir que bases distintas generen la misma topología. El siguiente resultado permite comparar más cómodamente las topologías generadas por dos bases distintas.

Proposición 2.4. Sean $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ bases para las topologías τ_1 y τ_2 sobre el espacio X , respectivamente. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. τ_2 es más fina que τ_1 .
2. Para cada elemento de la base $B_1 \in \mathcal{B}_1$ y cada elemento $x \in B_1$, existe un elemento de la base $B_2 \in \mathcal{B}_2$ tal que $x \in B_2 \subseteq B_1$.

Otra familia de conjuntos de interés es la de los entornos, ya que también es posible describir una topología en función de ellos.

Definición 2.5. Sean (X, τ) un espacio topológico y $x \in X$. Un *entorno* de x es un conjunto $U \subseteq X$ tal que existe un abierto $V \in \tau$ con $x \in V \subseteq U$.

En este trabajo también aparecerá en ocasiones el concepto de clausura de un conjunto, que se define de la siguiente manera:

Definición 2.6. Dado un subconjunto A de un espacio topológico, definiremos su *clausura*, que denotaremos por $\bar{A}$, como la intersección de todos los conjuntos cerrados que lo contienen.

Nótese que esto implica que la clausura de un conjunto es el menor cerrado que lo contiene. Veamos algunas propiedades de interés de este conjunto que permiten entenderlo mejor.

Proposición 2.7. Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Entonces:

1. $x \in \bar{A}$ si y sólo si para cualquier abierto U que contenga a x , se tiene que $U \cap A \neq \emptyset$.
2. $x \in \bar{A}$ si y sólo si todo entorno de x interseca a A .
3. Si $\mathcal{B}$ es una base de la topología τ , entonces $x \in \bar{A}$ si y sólo si todo elemento de $\mathcal{B}$ que contiene a x interseca a A .
4. A es cerrado si y sólo si $A = \bar{A}$.

Cercano al concepto de clausura encontramos el concepto de punto de acumulación.

Definición 2.8. Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Un punto $x \in A$ es un *punto de acumulación* de A si para cualquier entorno U de x , $A \cap (U \setminus \{x\}) \neq \emptyset$.

A continuación mostramos dos casos particulares en los que la clausura de un conjunto se utiliza para definir una propiedad.

Definición 2.9. Sea X un espacio topológico. Un subconjunto $A \subseteq X$ se dice *denso* en X si cumple que $\bar{A} = X$.

Definición 2.10. Un espacio topológico X es *separable* si cuenta con un subconjunto $D \subseteq X$ que es numerable y denso.

Otro concepto importante en los espacios topológicos son los llamados axiomas de separación. Estos son una serie de propiedades que puede cumplir un espacio topológico y que repercuten en las propiedades que se pueden encontrar en ellos.

Definición 2.11. Sea X un espacio topológico. Diremos que (X, τ) :

1. Es un *espacio T_2* o *Hausdorff* si dados dos puntos distintos $x, y \in X$ existen abiertos disjuntos $U, V \in \tau$ con $x \in U$ e $y \in V$.
2. Es un *espacio regular* si dados un conjunto cerrado $F \subseteq X$ y un punto $p \notin F$, existen dos abiertos disjuntos U, V tales que $F \subseteq U$ y $p \in V$.
3. Es un *espacio normal* si dados dos conjuntos cerrados disjuntos $F, G \subseteq X$, existen abiertos disjuntos U, V con $F \subseteq U$ y $G \subseteq V$.

En particular, la siguiente caracterización de los espacios regulares nos será útil en capítulos posteriores.

Lema 2.12. *Sea X un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. X es regular.
2. Si U es un abierto de X y $x \in U$, existe un conjunto abierto V tal que $x \in V$ y $\bar{V} \subseteq U$.

Demostración.

1) $\Rightarrow$ 2): Sea X un espacio regular y U un abierto de X con $x \in U$. Entonces $X \setminus U$ es cerrado en X y $x \notin X \setminus U$. Como X es regular, existen abiertos disjuntos V y W con $x \in V$ y $X \setminus U \subseteq W$. Se cumple pues que $V \subseteq X \setminus W \subseteq U$ y, en particular como $X \setminus W$ es cerrado, se tiene que $\bar{V} \subseteq U$.

2) $\Rightarrow$ 1): Sean F un cerrado de X y $x \notin F$. Se cumple que $X \setminus F$ es un abierto al que pertenece x , luego existe un conjunto abierto V tal que $x \in V$ y $\bar{V} \subseteq X \setminus F$. Por otra parte, $X \setminus \bar{V}$ es un abierto tal que $F \subseteq X \setminus \bar{V}$, que además es disjunto con respecto a V , luego X es regular. ■

También lo será el siguiente resultado relacionado con los espacios T_2 .

Lema 2.13. *Sea X un espacio Hausdorff. Entonces para cualquier $x \in X$, el conjunto $\{x\}$ es un conjunto cerrado.*

Otras propiedades que influyen en gran manera en el comportamiento y las propiedades de un espacio topológico son los Axiomas de Numerabilidad. En este trabajo en particular sólo nos interesaremos por el segundo de ellos.

Definición 2.14. Diremos que un espacio topológico X verifica el *segundo axioma de numerabilidad* si posee una base numerable. Para abreviar, diremos que un espacio que cumple esta propiedad es *II-AN*.

El siguiente resultado muestra una consecuencia del II-AN en espacios topológicos.

Teorema 2.15. *Todo espacio topológico II-AN es separable.*

Demostración.

Sea X un espacio topológico II-AN. Entonces existe una base numerable $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ para su topología. Para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos elegir $x_n \in B_n$. Consideremos el conjunto numerable $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ y veamos que es denso.

Sean $x \in X \setminus D$ y U un abierto con $x \in U$. Por definición de base, existirá algún $n_0 \in \mathbb{N}$ con $B_{n_0} \subseteq U$, luego $x_{n_0} \in B$ y como $x_{n_0} \in D$, se tendrá que $U \cap D \neq \emptyset$ para cualquier abierto U con $x \in U$. Por lo tanto, tenemos que $x \in \bar{D}$ y $\bar{D} = X$. ■

Veamos ahora algunos ejemplos de topologías que aparecen frecuentemente. Podemos comenzar por considerar la estructura que un subconjunto puede heredar del espacio topológico en el que está contenido.

Definición 2.16. Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$ un subconjunto. Si $\mathcal{B}$ es una base para la topología de X , entonces la colección

$$\mathcal{B}_A = \{B \cap A : B \in \mathcal{B}\}$$

forma una base para una topología τ_A sobre A . La topología generada por esta base se denomina la *topología de subespacio*.

El siguiente resultado nos permite relacionar de manera clara y concisa los abiertos y cerrados de un espacio topológico con los de sus subespacios.

Teorema 2.17. *Sea A un subespacio de un espacio topológico X . Entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

1. $V \subseteq A$ es abierto en A si y sólo si existe un abierto U en X con $V = U \cap A$.
2. $F \subseteq A$ es cerrado en A si y sólo si existe un cerrado K en X con $F = K \cap A$.

Ejemplos.

1. La topología de $\mathbb{N}$ como subespacio de $\mathbb{R}$ coincide con la topología discreta.
2. Si consideramos $A = [0, 1)$ como subespacio de $\mathbb{R}$, tenemos por ejemplo que $[0, \frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \cap A$ es abierto en A pero no en $\mathbb{R}$. De manera análoga, $[\frac{1}{2}, 1)$ es cerrado en A pero no en $\mathbb{R}$.

También podemos partir de un conjunto sobre el que ya se ha definido alguna relación. Por ejemplo, dado un conjunto ordenado, existe una manera estándar de definir una topología a partir de su relación de orden.

Definición 2.18. Sea $(X, \leq)$ un conjunto ordenado con más de un elemento. Sea $\mathcal{B}_{\leq}$ la familia formada por los siguientes conjuntos:

1. Todos los intervalos abiertos $(a, b) = \{x \in X : a < x < b\}$ de X .
2. Todos los intervalos semi-abiertos de la forma $[a_0, b) = \{x \in X : a_0 \leq x < b\}$, donde a_0 es el menor elemento de X , si existe.
3. Todos los intervalos semi-abiertos de la forma $(a, b_0] = \{x \in X : a < x \leq b_0\}$, donde b_0 es el mayor elemento de X , si existe.

Entonces $\mathcal{B}_{\leq}$ es una base para una topología sobre X . Esta topología se denomina *topología inducida por la relación de orden $\leq$* .

Cuando no exista elemento mínimo o máximo, no se incluirán en $\mathcal{B}_{\leq}$ los intervalos semi-abiertos de la forma correspondiente.

Ejemplos.

- La topología inducida por la relación de orden usual sobre $\mathbb{R}$ coincide con la topología usual presentada anteriormente.

Finalmente, son de gran interés las propiedades de las aplicaciones que podemos definir entre dos espacios topológicos.

Definición 2.19. Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación entre dos espacios topológicos. Se dice que f es una *aplicación continua en un punto x* si para cualquier abierto V de Y con $f(x) \in V$, $f^{-1}(V)$ es un abierto de X . La aplicación f se dice *continua en X* si lo es en cada punto x de X .

Cuando una aplicación $f : X \rightarrow Y$ continua sea biyectiva, y además su aplicación inversa $f^{-1} : Y \rightarrow X$ sea continua, diremos que es un *homeomorfismo*.

Dados dos espacios topológicos X e Y , denotaremos el conjunto de aplicaciones continuas entre ellos como $\mathcal{C}(X, Y)$. A continuación se muestra una útil caracterización de las aplicaciones continuas:

Teorema 2.20. *Sean X e Y dos espacios topológicos, y $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación entre ellos. Entonces son equivalentes:*

1. *f es continua en X .*
2. *Para todo $F \subset Y$ cerrado, el conjunto $f^{-1}(F)$ es cerrado en X .*

Aunque en ocasiones no es tan fácil comprobar la continuidad de una aplicación, el siguiente resultado nos permite construir aplicaciones continuas a partir de otras cuya continuidad es conocida.

Teorema 2.21 (Lema de pegado). *Sea $X = A \cup B$ con A, B conjuntos o bien ambos abiertos, o bien ambos cerrados. Sean $f : A \longrightarrow Y$, $g : B \longrightarrow Y$ dos aplicaciones continuas. Si $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A \cap B$, entonces la aplicación $h : X \longrightarrow Y$ dada por:*

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ g(x) & x \in B \end{cases}$$

es una aplicación continua.

Las aplicaciones continuas son piezas centrales al estudio de la topología. En el caso de este trabajo, existe un tipo de aplicación continua que nos será de especial de interés: la curva topológica.

Definición 2.22. Sea X un espacio topológico. Una *curva* sobre X es una aplicación $f : \mathcal{I} \longrightarrow X$ continua.

Otro caso especial de aplicación continua son las aplicaciones cociente que, aunque no ahondaremos en ellas, cuentan con propiedades muy interesantes.

Definición 2.23. Sean X e Y dos espacios topológicos y $p : X \longrightarrow Y$ una aplicación continua y sobreyectiva entre ellos. La aplicación p es una *aplicación cociente* si dado un subconjunto U de Y , el conjunto U es abierto en Y si y sólo si $p^{-1}(U)$ es abierto en X .

Lema 2.24. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación sobreyectiva cerrada y continua. Entonces f es una aplicación cociente.*

2.2. Compacidad

La compacidad es una de las propiedades topológicas de mayor interés. Esto se debe a que por una parte, al combinar la compacidad con algunas otras propiedades de la sección anterior, se obtienen espacios con propiedades muy buenas y a que, por otra, la compacidad permite la extensión de teoremas como el del valor extremo o de continuidad uniforme a espacios más generales.

Definición 2.25. Un *recubrimiento abierto* de un espacio topológico X es una familia de abiertos $\{U_i\}_{i \in I}$ que cumple $\bigcup_{i \in I} U_i = X$. Llamaremos *subrecubrimiento* a cualquier subfamilia de un recubrimiento que siga cumpliendo dicha condición.

Definición 2.26. Se dice que un espacio topológico X es *compacto* si dado cualquier recubrimiento abierto $\{U_i\}_{i \in I}$, existe un subrecubrimiento finito $\{U_{i_j}\}_{j=1}^n$.

Ejemplos.

- Cualquier espacio topológico X finito es compacto.
- Los intervalos cerrados y acotados de $\mathbb{R}$ son subespacios compactos. Este resultado se conoce como el Teorema de Heine-Borel.

Veamos algunas propiedades útiles de los conjuntos compactos.

Proposición 2.27. *Se tienen las siguientes propiedades:*

1. *La unión finita de conjuntos compactos es compacta.*
2. *Todo subconjunto cerrado de un compacto es compacto.*
3. *Todo conjunto compacto de un espacio Hausdorff es cerrado.*
4. *La imagen de un conjunto compacto por una aplicación continua es un conjunto compacto.*
5. *Una aplicación continua de un espacio compacto en un espacio Hausdorff es cerrada.*

Como consecuencia de las propiedades anteriores obtenemos los siguientes corolarios:

Corolario 2.28. *Sea X un espacio Hausdorff y $(K_i)_{i \in I}$ una familia de subconjuntos compactos de X . Entonces $\bigcap_{i \in I} K_i$ es un conjunto compacto.*

Corolario 2.29. *Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación continua biyectiva entre un espacio compacto X y un espacio Hausdorff Y . Entonces f es un homeomorfismo.*

Además, para el caso de los espacios compactos, veremos que los axiomas de separación están muy relacionados entre sí.

Proposición 2.30. *Un espacio topológico X compacto y Hausdorff es regular y normal.*

Demostración.

Sean F un cerrado de X y $x \notin F$. Como X es compacto, por la Proposición 2.27, el conjunto F es compacto. Al ser X un espacio Hausdorff, para cada $y \in F$ existen abiertos disjuntos V_y y U_y con $y \in V_y$ y $x \in U_y$. La familia $\{V_y\}_{y \in F}$ forma un recubrimiento abierto de F que, al ser compacto, poseerá un subrecubrimiento finito $\{V_{y_i}\}_{i=1}^n$. Definiendo $U = \bigcap_{i=1}^n U_{y_i}$ y $V = \bigcup_{i=1}^n V_{y_i}$, se cumple que U y V son abiertos al ser intersección finita de abiertos y unión de abiertos respectivamente. Además, son disjuntos entre sí y cumplen que $x \in U$ y $F \subseteq V$. Por tanto, X es regular.

Sean ahora F y G dos cerrados disjuntos de X . Como el espacio X es regular, para cada $f \in F$ existen abiertos disjuntos U_f, V_f con $f \in U_f$ y $G \subseteq V_f$. La familia $\{U_f\}_{f \in F}$ forma un recubrimiento abierto de F . Al ser F un conjunto cerrado contenido en un compacto, entonces F es también compacto, por lo que podemos extraer un subrecubrimiento finito $\{U_{f_i}\}_{i=1}^n$. Los conjuntos $U = \bigcup_{i=1}^n U_{f_i}$ y $V = \bigcap_{i=1}^n V_{f_i}$ son abiertos disjuntos tales que $F \subseteq U$ y $G \subseteq V$. ■

A continuación definimos una propiedad que nos servirá para caracterizar los espacios compactos y que además, nos será útil en capítulos posteriores cuando tomemos intersecciones arbitrarias de conjuntos en espacios con algunas propiedades concretas.

Definición 2.31. Diremos que una familia de conjuntos $\{A_i\}_{i \in I}$ tiene la *propiedad de la intersección finita* si cualquier subfamilia finita de ellos tiene intersección no vacía.

Teorema 2.32. *Un espacio X es compacto si y sólo si toda familia $\{A_i\}_{i \in I}$ de conjuntos cerrados con la propiedad de la intersección finita cumple que $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$.*

Demostración.

Supongamos que X es compacto y sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de cerrados con la propiedad de la intersección finita. Veamos que $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$. Supongamos lo contrario. Entonces tenemos que $\bigcup_{i \in I} (X \setminus A_i) = X$. Como los A_i son cerrados, $\{X \setminus A_i\}_{i \in I}$ forma un recubrimiento abierto de X . Como X es compacto, podemos obtener un subrecubrimiento finito $\{X \setminus A_{i_j}\}_{j=1}^n$. Entonces tendríamos que $X = \bigcup_{j=1}^n (X \setminus A_{i_j})$ o, equivalentemente, $\bigcap_{j=1}^n A_{i_j} = \emptyset$, lo que es una contradicción porque la familia $\{A_i\}_{i \in I}$ tiene la propiedad de la intersección finita.

Sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento abierto de X . Supongamos que $\mathcal{U}$ no tiene ningún subrecubrimiento finito de X . Entonces, para cada $J \subseteq I$ finito, existirá algún $x \in X$ con $x \notin \bigcup_{j \in J} U_j$ o, equivalentemente, $x \in \bigcap_{j \in J} (X \setminus U_j)$. Por tanto, $\{X \setminus U_i\}_{i \in I}$ será una familia de cerrados con la propiedad de la intersección finita. Por hipótesis, esto implicará que $\bigcap_{i \in I} (X \setminus U_i) \neq \emptyset$ o, equivalentemente, que $\bigcup_{i \in I} U_i \neq X$. Esto nos lleva a una contradicción ya que $\mathcal{U}$ recubre X . ■

Ejemplos.

- Cualquier familia de conjuntos $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ cumpliendo que $A_{n+1} \subseteq A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tiene la propiedad de la intersección finita.
- En el espacio topológico $[-1, 1]$ con la topología usual, podemos considerar la familia de cerrados $\left\{\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]\right\}_{n \in \mathbb{N}}$, que cumple la propiedad de la intersección finita por el punto anterior. Como $[-1, 1]$ es compacto, la intersección de esta familia será no vacía. De hecho, se tiene que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] = \{0\}$.

2.3. Conexión

La conexión es otra de las principales propiedades a estudiar en un espacio topológico. Pese a ser una propiedad enunciada de una manera algo intuitiva o ‘visual’, nos permitirá caracterizar espacios concretos, como veremos en el Capítulo 5.

Definición 2.33. Un espacio topológico X es *conexo* cuando no existen dos abiertos no vacíos U, V tales que $U \cup V = X$ con $U \cap V = \emptyset$.

De la definición anterior se deduce que tanto U como V son también cerrados. Por tanto, la conexión se puede enunciar equivalentemente en términos de conjuntos cerrados.

Definición 2.34. Dados un espacio topológico X y un punto $x \in X$, la *componente conexa* de x es el mayor subconjunto conexo $C_x \subseteq X$ que contiene a x .

Ejemplos.

- Cualquier intervalo de $\mathbb{R}$ es un conjunto conexo. De hecho, los intervalos son los únicos subconjuntos conexos de este espacio.
- Tomando $X = (0, 2) \cup (3, 5)$, tenemos que la componente conexa de 1 en X será $(0, 2)$, y la componente conexa de 4 en X será $(3, 5)$.

Veamos ahora un resultado que reforzará nuestra noción intuitiva de conexión.

Lema 2.35. Sea X un espacio topológico tal que $X = H \cup K$ con H, K abiertos disjuntos no vacíos. Si A es un subespacio conexo de X , entonces o bien $A \subseteq H$, o bien $A \subseteq K$.

Como se ha podido ver en el ejemplo previo, en general no se cumple que la unión de conexos de lugar a un conjunto conexo. Dado que en capítulos posteriores de este trabajo trataremos frecuentemente con subconjuntos conexos, nos interesa saber bajo qué condiciones podemos afirmar que esta operación produzca conjuntos conexos.

Proposición 2.36. Sea X un espacio topológico.

1. Supongamos que $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ con X_i conexo para cada $i \in I$. Si $\bigcap_{i \in I} X_i \neq \emptyset$, entonces X es conexo.
2. Supongamos que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ con X_n conexo para cada $n \in \mathbb{N}$. Si para cada $n \geq 2$ se cumple que $X_{n-1} \cap X_n \neq \emptyset$, entonces X es conexo.

Existen formulaciones ligeramente distintas de la conexión de un espacio topológico. Estas se pueden basar en aspectos locales, lo que llevará a hablar de espacios localmente conexos, o a la posibilidad de conectar dos puntos cualesquiera de un espacio ‘trazando’ un camino entre ellos. A continuación definiremos de manera más formal estas ideas que acabamos de introducir, comenzando por los espacios localmente conexos.

Definición 2.37. Un espacio topológico X es *localmente conexo* cuando para todo $x \in X$ y para todo entorno U_x de x , existe un entorno abierto conexo V_x de x tal que $x \in V_x \subseteq U_x$.

Los espacios localmente conexos pueden ser caracterizados a partir de sus componentes conexas.

Proposición 2.38. *Un espacio topológico es localmente conexo si y sólo si las componentes conexas de sus abiertos son abiertas.*

Demostración.

Sea X un espacio topológico y supongamos que X es un espacio localmente conexo. Sean $U \subseteq X$ un abierto, $x_0 \in U$ y $C_{x_0}^U$ la componente conexa de x_0 en U . Como X es localmente conexo, existe un conjunto abierto conexo V con $x \in V \subseteq U$, luego $V \subseteq C_{x_0}^U$ y $C_{x_0}^U$ será un conjunto abierto.

Para ver la implicación recíproca, supongamos que para cada abierto $U \subseteq X$ y cada punto $x \in U$, la componente conexa C_x^U de x en U es abierta. Sea $x \in X$. Como U es un entorno abierto de x en X , entonces la componente conexa C_x^U de x en U es un entorno abierto de x contenido en U . Por tanto, X será localmente conexo. ■

Introduzcamos ahora una tercera noción de conexión. Esta noción trata de definir la conexión trazando curvas (Definición 2.22) entre los puntos del espacio en cuestión.

Definición 2.39. Un espacio topológico X es *conexo por caminos* cuando para cualquier par de puntos $a, b \in X$ existe una aplicación continua $\sigma : \mathcal{I} \rightarrow X$ con $\sigma(0) = a, \sigma(1) = b$. A cada una de estas aplicación se le denomina un *camino* entre a y b .

Si σ es un homeomorfismo, el camino σ se denomina *arco*. Si dados dos puntos a, b de X siempre existe un arco con $\sigma(0) = a$ y $\sigma(1) = b$, se dice que X es un espacio *conexo por arcos*.

En ocasiones, utilizaremos la palabra camino (o arco) para referirnos al conjunto $\sigma(\mathcal{I})$ en vez de a la propia aplicación σ . Cabe destacar también que la definición de camino dada aquí y la de curva dada en la Definición 2.22 son extremadamente similares. En general, únicamente hablaremos de caminos cuando estemos en el contexto de la conexión y cuando se hayan especificado sus extremos, mientras que reservaremos el término curva para el resto de casos.

Asimismo, es necesario mencionar que es común en la bibliografía utilizar de manera equivalente los términos conexo por caminos y arco-conexo. En este trabajo, evitaremos el uso del término arco-conexo para no llevar a confusión, y distinguiremos según se ha explicado entre conexo por caminos y conexo por arcos, siendo la última una condición más fuerte.

Similar en idea a un camino entre dos puntos, podemos definir el concepto de cadena simple.

Definición 2.40. Sean $a, b \in X$. Una *cadena simple* conectando a y b es una sucesión de abiertos $U_1, \dots, U_n$ tales que $a \in U_1, b \in U_n$, y además $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ si y sólo si $|i - j| \leq 1$.

Si bien el concepto de recubrimiento abierto ha sido utilizado con mucha mayor frecuencia en la Sección 2.2, conviene recordarlo para enunciar el siguiente resultado. La combinación de conjuntos conexos y recubrimientos abiertos otorga una pista sobre cómo se combinarán las propiedades enunciadas hasta ahora en capítulo posteriores.

Teorema 2.41. Sean X un espacio conexo y $\mathcal{U}$ un recubrimiento abierto de X . Entonces para cada par de puntos $a, b \in X$ existe una cadena simple formada por elementos de $\mathcal{U}$.

Demostración.

Sea $a \in X$. Definamos Z como el conjunto de elementos de X unidos con a por una cadena simple formada por elementos de $\mathcal{U}$. Veamos que Z es un conjunto abierto y cerrado a la vez. Al ser X conexo, dado que $a \in Z$ trivialmente, esto implicará que $Z = X$.

Comencemos por ver que es abierto. Sea $z \in Z$, entonces existe una cadena simple $U_1, U_2, \dots, U_n$ de elementos de $\mathcal{U}$ uniendo z con a , con $z \in U_n$. Sea $u \in U_n$, con $u \neq z$, entonces se tiene que la misma cadena simple une u con a , por lo que de hecho $z \in U_n \subseteq Z$ y Z es un conjunto abierto.

Veamos ahora que Z es cerrado. Sea $z \in \bar{Z}$, entonces existe $V \in \mathcal{U}$ abierto con $z \in V$. Además, la intersección $Z \cap V$ no es vacía. Sea $b \in Z \cap V$, existe una cadena simple $U_1, U_2, \dots, U_n$ de elementos de $\mathcal{U}$ uniendo a con b . Si existe algún i tal que $z \in U_{i_0}$, entonces tomando $i_0 = \min\{i : z \in U_i\}$ la cadena simple $U_1, \dots, U_{i_0}$ une z con a . Si z no se encuentra en ningún elemento de la cadena, entonces tomando el menor índice k tal que $V \cap U_k \neq \emptyset$, se tiene que $U_1, U_2, \dots, U_k, V$ es una cadena simple uniendo z con a . En ambos casos, se tiene que $z \in Z$, por lo que $Z = \bar{Z}$ y Z es un conjunto cerrado. ■

Por otra parte, tenemos que las aplicaciones continuas, al igual que en el caso de la compacidad, se comportan bien con respecto a la conexión de los espacios topológicos.

Lema 2.42. La imagen de un espacio conexo por una aplicación continua es conexa.

No es cierto en general que esto se de para otros tipos de conexión tales como la conexión por caminos o la conexión local. Sin embargo, imponiendo condiciones más estrictas sobre la aplicación podemos obtener un buen comportamiento con respecto a la segunda.

Teorema 2.43. Sean X e Y dos espacios topológicos. Si X es localmente conexo y $p : X \rightarrow Y$ es una aplicación cociente, entonces Y también será localmente conexo.

Demostración.

Sea $p : X \rightarrow Y$ una aplicación cociente. Sean $U \subseteq Y$ un abierto, $y_0 \in U$ y $C_{y_0}^U$ la componente conexa de y_0 en U . Sea $x \in X$ con $p(x) = y_0$ y consideramos $C_x^{p^{-1}(U)}$ la componente conexa de x en $p^{-1}(U)$. Como $C_x^{p^{-1}(U)}$ es un conjunto conexo, por el Lema 2.42 $p(C_x^{p^{-1}(U)})$ será un conjunto conexo y $p(x) \in C_{y_0}^U$, luego $p(C_x^{p^{-1}(U)}) \subseteq C_{y_0}^U$. Por tanto, $x \in C_x^{p^{-1}(U)} \subseteq p^{-1}(C_{y_0}^U)$. Como $C_x^{p^{-1}(U)}$ es un conjunto abierto, $p^{-1}(C_{y_0}^U)$ es abierto en X y, como p es una aplicación cociente, el conjunto $C_{y_0}^U$ será abierto en Y . Por la Proposición 2.38, Y será localmente conexo. ■

2.4. Espacios métricos

Los espacios métricos nacieron inicialmente para poder extender la noción de continuidad, enunciada en los números reales mediante la definición $\varepsilon - \delta$, a espacios más

generales. Por tanto, son espacios centrales a la disciplina del análisis. Dado que aquí trataremos con funciones entre $\mathcal{I}$ y $\mathcal{I}^2$, nos serán de gran utilidad. Además, este tipo de espacios cuenta con una extensa serie de propiedades, algunas de las cuales enunciaremos.

Definición 2.44. Dado un conjunto X , una *métrica* o *distancia* es una aplicación $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ con las siguientes propiedades para cada $x, y, z \in X$:

1. $d(x, y) \geq 0$
2. $d(x, y) = 0 \iff x = y$
3. $d(x, y) = d(y, x)$
4. Desigualdad triangular: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Dado un espacio métrico (X, d) , llamaremos *bolas abiertas* (con respecto a la métrica d) de centro $x_0 \in X$ y radio $\varepsilon > 0$ a los conjuntos $B_d(x_0, \varepsilon) = \{x \in X : d(x_0, x) < \varepsilon\}$. Cambiando el símbolo de desigualdad estricta $<$ por $\leq$, obtenemos en cambio la *bola cerrada* con centro x_0 y radio ε , que denotaremos por $\overline{B}_d(x, \varepsilon)$. Cuando no haya dudas sobre la métrica con respecto a la cual construimos estos conjuntos, obviaremos los subíndices.

Definición 2.45. En un espacio métrico (X, d) , la *topología métrica* τ_d (asociada a la distancia d) es aquella generada por la base formada por las bolas abiertas, es decir, la base $\mathcal{B}_d = \{B(x, \varepsilon) : x \in X, \varepsilon \in \mathbb{R}^+\}$.

Ejemplos.

- Dado un conjunto X no vacío, la métrica discreta se puede definir según:

$$d_D(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

La topología inducida por esta distancia coincide, como cabría esperar, con la topología discreta τ_{disc} sobre X .

- Dado un espacio métrico (X, d) y $A \subseteq X$ un subconjunto, la restricción $d|_{A \times A}$ de d a $A \times A$ dota a A con estructura de espacio métrico. Se dice que $(A, d|_{A \times A})$ es un *subespacio métrico* de (X, d) .
- Dado $n \in \mathbb{N}$, podemos definir sobre $\mathbb{R}^n$ las siguientes distancias:

$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

$$d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - y_i|\}$$

Cuando $n = 1$, las tres distancias coinciden y $d_u(x, y) = |x - y|$ se denomina la distancia usual sobre $\mathbb{R}$.

Definición 2.46. Dado un espacio métrico (X, d) y un subconjunto A del mismo, se dice que A es un *conjunto acotado* si existe una constante $M \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x, y \in A$, $d(x, y) \leq M$. Además, cuando un conjunto A sea acotado, llamaremos *diámetro* al valor $\text{diam}(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$.

Para el caso específico del conjunto vacío, diremos que $\text{diam}(\emptyset) = 0$.

A partir de un espacio métrico (X, d) siempre podemos construir una nueva métrica sobre X que induce exactamente la misma topología que d , y con respecto a la que todos los subconjuntos de X son acotados. Denotaremos esta métrica por $\bar{d} : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ y viene dada por:

$$\bar{d}(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}$$

Denominaremos $\bar{d}$ como la *métrica acotada estándar* asociada a d .

Esta métrica nos permitirá definir un ejemplo de espacio métrico que será de especial importancia a lo largo de este trabajo. Este espacio será el formado por el conjunto Y^X , con X un espacio topológico e Y un espacio métrico.

Definición 2.47. Sean X un conjunto e Y un espacio métrico, la aplicación $\bar{\rho} : Y^X \times Y^X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$\bar{\rho}(f, g) = \sup\{\bar{d}(f(x), g(x)) : x \in X\}$$

se denominada *métrica uniforme* sobre Y^X .

Observemos que en esta definición es necesario utilizar la métrica acotada $\bar{d}$ para poder asegurar que el supremo sea finito y que $\bar{\rho}$ esté bien definida.

En parte de este trabajo nos centraremos en el caso en el que $X = \mathcal{I}$ e $Y = \mathbb{R}^2$, considerando en ambos casos sus estructuras como subespacios de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ con las topologías usuales. Específicamente, nos interesará el subconjunto formado por las funciones continuas entre estos dos conjuntos, $\mathcal{C}(\mathcal{I}, \mathbb{R}^2)$ o equivalentemente, las curvas sobre $\mathcal{I}^2$.

Tras haber visto algunos ejemplos de espacios métricos, enunciamos algunas propiedades de interés de este tipo de espacios.

Proposición 2.48. Sea X un espacio métrico. Se verifican las siguientes propiedades:

1. X es un espacio Hausdorff.
2. Si $K \subseteq X$ es un subconjunto compacto, entonces K es cerrado y acotado.

El segundo apartado de esta proposición nos permite redefinir en cierta manera la estructura de espacio métrica establecida sobre el conjunto $\mathcal{C}(X, Y)$. Si exigimos que X sea un espacio compacto y f sea continua, entonces $f(X)$ será también compacto, y será por tanto un conjunto acotado en Y . Esto nos libera de la necesidad de utilizar la métrica $\bar{d}$ en la Definición 2.47.

Definición 2.49. Sea X un espacio compacto e Y un espacio métrico. Entonces la métrica sobre $\mathcal{C}(X, Y)$ dada por

$$\rho(f, g) = \sup\{d(f(x), g(x)) : x \in X\}$$

se conoce como *métrica del supremo*.

Observación 2.50. Se cumple que $\bar{\rho}(f, g) = \min\{\rho(f, g), 1\}$

Nótese que las condiciones necesarias para la utilización de la métrica del supremo se dan cuando consideramos $X = \mathcal{I}$ e $Y = \mathcal{I}^2$.

Teorema 2.51. *Todo espacio métrico (X, d) compacto es también II-AN.*

Demostración.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ la familia $\mathcal{A}_n = \{B(x, \frac{1}{n}) ; x \in X\}$ es un recubrimiento abierto. Al ser X compacto, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un subrecubrimiento finito $\mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{A}_n$, que será de la forma $\mathcal{B}_n = \{B(x_1^n, \frac{1}{n}), B(x_2^n, \frac{1}{n}), \dots, B(x_{s_n}^n, \frac{1}{n})\}$. A partir de estos definimos $\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$, que al ser una unión numerable de conjuntos finitos es a su vez numerable. Veamos que $\mathcal{B}$ es en efecto una base para la topología métrica de X usando el resultado dado en la Proposición 2.3.

1. Fijado $n \in \mathbb{N}$, como $\mathcal{B}_n$ es un recubrimiento, para todo $x \in X$ existirá algún i con $1 \leq i \leq s_n$ tal que $x \in B(x_i^n, \frac{1}{n})$.
2. Dados $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, sean $x_i^{n_1}, x_j^{n_2} \in X$, y $x \in B(x_i^{n_1}, \frac{1}{n_1}) \cap B(x_j^{n_2}, \frac{1}{n_2})$. Al ser $B(x_i^{n_1}, \frac{1}{n_1})$ y $B(x_j^{n_2}, \frac{1}{n_2})$ abiertos en la topología métrica, su intersección es también abierta. Por tanto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subseteq B(x_i^{n_1}, \frac{1}{n_1}) \cap B(x_j^{n_2}, \frac{1}{n_2})$. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Al ser $\mathcal{B}_{2N}$ un recubrimiento abierto también, existirá $x_k^{2N} \in X$ cumpliendo que $x \in B(x_k^{2N}, \frac{1}{2N})$. Sea $y \in B(x_k^{2N}, \frac{1}{2N})$, entonces:

$$d(x, y) \leq d(x, x_k^{2N}) + d(x_k^{2N}, y) < \frac{1}{2N} + \frac{1}{2N} = \frac{1}{N} < \varepsilon,$$

luego $y \in B(x, \varepsilon)$ y, como $B(x, \varepsilon) \subseteq B(x_i^{n_1}, \frac{1}{n_1}) \cap B(x_j^{n_2}, \frac{1}{n_2})$, tenemos que $B(x_k^{2N}, \frac{1}{2N}) \subseteq B(x_i^{n_1}, \frac{1}{n_1}) \cap B(x_j^{n_2}, \frac{1}{n_2})$.

Por la Proposición 2.3, el conjunto $\mathcal{B}$ forma una base para una topología sobre X . Veamos que, en efecto, esta topología, que denotaremos como τ , coincide con la inducida por la distancia d .

Dado que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}_d$, es obvio que $\tau \subseteq \tau_d$. Para ver que $\tau_d \subseteq \tau$, haremos uso de la Proposición 2.4. Sean $x, y \in X$ y $\varepsilon > 0$ con $x \in B(y, \varepsilon) \in \mathcal{B}_d$. Existe $N \in \mathbb{N}$ con $B(x, \frac{1}{N}) \subseteq B(y, \varepsilon)$ y existe x_i^{2N} con $x \in B(x_i^{2N}, \frac{1}{2N}) \in \mathcal{B}_{2N}$. Hay que ver que $B(x_i^{2N}, \frac{1}{2N}) \subseteq B(y, \varepsilon)$. Sea $z \in B(x_i^{2N}, \frac{1}{2N})$:

$$d(x, z) \leq d(x, x_i^{2N}) + d(x_i^{2N}, z) < \frac{1}{2N} + \frac{1}{2N} = \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Por tanto, $z \in B(x, \frac{1}{N})$ y como $B(x, \frac{1}{N}) \subseteq B(y, \varepsilon)$, tenemos que $z \in B(y, \varepsilon)$. ■

Si bien el siguiente resultado no será utilizado expresamente hasta el Capítulo 6, en su momento nos permitirá obtener propiedades muy útiles de espacios que combinan la estructura métrica con la compacidad.

Teorema 2.52. (*Lema del número de Lebesgue*) Sea (X, d) un espacio métrico y $\mathcal{U}$ un recubrimiento abierto de X . Si X es compacto, entonces existe un número real positivo δ tal que, para todo subconjunto de X de diámetro menor que δ , existe un elemento de $\mathcal{U}$ que lo contiene.

Al valor $\delta > 0$ que aparece en este resultado se le llama *número de Lebesgue* asociado al recubrimiento $\mathcal{U}$.

Hasta ahora hemos considerado únicamente la relación entre espacios métricos y topológicos en una dirección: está claro que a partir de un espacio métrico podemos construir un espacio topológico fácilmente. Cabe considerar el orden inverso y preguntarnos si, a partir de un espacio topológico dado, podríamos construir un espacio métrico.

Definición 2.53. Sea (X, τ) un espacio topológico. Diremos que X es un *espacio metrizable* si existe una métrica sobre X cuya topología inducida coincida con τ .

Por las propiedades que hemos visto, todo espacio metrizable debe ser Hausdorff y verificar el segundo axioma de numerabilidad. El siguiente resultado nos da condiciones suficientes que nos permiten asegurar cuándo un espacio es metrizable.

Teorema 2.54. (*Teorema de metrización de Urysohn*) Todo espacio regular X que cumple el segundo axioma de numerabilidad es metrizable.

La demostración de este teorema es compleja y no se incluirá en este texto, pero puede ser consultada en [12] (Cap. 4, Sec. 34, págs. 215-217). No obstante, sí demostraremos el siguiente corolario de este teorema que nos será de utilidad más adelante.

Corolario 2.55. La imagen continua de un espacio métrico compacto en un espacio Hausdorff es metrizable.

Demostración.

Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación continua sobreyectiva de un espacio compacto X en un espacio Hausdorff Y .

Al ser imagen continua de un compacto, Y es compacto y, al ser Hausdorff, también es regular. Utilizando el Teorema de metrización de Urysohn (Teorema 2.54), basta ver que Y es II-AN. Para ello, sea $\mathcal{B}$ una base numerable de X , que existe al ser X métrico y compacto (Teorema 2.51), y sea $\mathcal{C}$ el conjunto de todas las uniones finitas de los elementos de $\mathcal{B}$. Entonces $\mathcal{D} = \{Y \setminus f(X \setminus C) : C \in \mathcal{C}\}$ es un conjunto numerable de conjunto abiertos de Y . Observemos también que, a consecuencia del apartado 5 de la Proposición 2.27, f es un aplicación cerrada. Veamos que $\mathcal{D}$ es una base para Y .

Sea U un abierto de Y y $p \in U$. Entonces se tiene que $f^{-1}(p) \subseteq f^{-1}(U)$ y además $f^{-1}(p)$ es compacto, siendo esto último consecuencia del Lema 2.13 y la Proposición 2.27. Por ser f continua, $f^{-1}(U)$ también es abierto en X y, al ser $\mathcal{B}$ base de X , podemos expresar cualquier abierto como unión de elementos de la base, luego $f^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} B_i$. Además, $f^{-1}(p) \subseteq f^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} B_i$ y como es compacto, existen conjuntos $B_1, B_2, \dots, B_n \in \{B_i\}_{i \in I}$ tales que $f^{-1}(p) \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_i \subseteq f^{-1}(U)$. Sea $C = \bigcup_{i=1}^n B_i$.

Entonces $C \in \mathcal{C}$ y $p \in Y \setminus f(X \setminus C) \subseteq U$. Por tanto, $\mathcal{D}$ es una base numerable para Y . ■

Finalmente, enunciamos la reformulación de la condición de continuidad mencionada al principio de esta sección. Esta nos será extremadamente cómoda tanto en la sección inmediatamente posterior como en los siguientes capítulos.

Proposición 2.56. Sea $f : (X, d_X) \longrightarrow (Y, d_Y)$ una aplicación entre dos espacios métricos. La aplicación f es continua en $x_0 \in X$ si dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cualquier $x \in X$ satisfaciendo que $d_X(x_0, x) < \varepsilon$, se cumple que $d_Y(f(x_0), f(x)) < \delta$.

Además, podemos introducir una noción más fuerte de continuidad que, junto a un resultado que también enunciaremos aquí, nos permitirá alcanzar el objetivo final de este trabajo en el Capítulo 6.

Definición 2.57. Sea (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos. Una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ es *uniformemente continua* si dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x_1, x_2 \in X$ cumplen que $d_X(x_1, x_2) < \delta$, entonces tenemos que $d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$.

Teorema 2.58 (Teorema de la continuidad uniforme). Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos y $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación continua. Si X es un espacio compacto, entonces f es uniformemente continua.

2.5. Convergencia en espacios métricos

Los espacios métricos también permitir definir el concepto de convergencia de una sucesión de manera cómoda. En términos generales, estaremos interesados en la convergencia de funciones y en la relación con su continuidad. Esto nos permitirá en el Capítulo 3 introducir el concepto central a este trabajo: las curvas que rellenan espacios. No obstante, en esta sección también encontraremos algunos resultados que nos serán de utilidad en otras partes de lo que resta de trabajo.

Definición 2.59. Sea (X, d) un espacio métrico. Diremos que x es el límite de la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cuando se cumpla que para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n, x) < \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq N.$$

Cuando x sea el límite de la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, lo denotaremos como $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

La noción de convergencia se puede expresar también en términos de la topología del espacio métrico como se describe en la siguiente observación:

Observación 2.60. Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión sobre un espacio métrico X . Las afirmaciones siguientes son equivalentes:

1. La sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a un punto x .
2. Para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$, se tiene que $x_n \in B(x, \varepsilon)$.
3. Para todo abierto U con $x \in U$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ para todo $n \geq N$.

Si bien la convergencia de una sucesión se puede definir íntegramente en términos de la topología de un espacio, los conceptos que introduciremos a continuación son exclusivos de los espacios métricos.

Definición 2.61. Sea (X, d) un espacio métrico. Una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una *sucesión de Cauchy* cuando dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \text{para todo } n, m \geq N.$$

Definición 2.62. Un espacio métrico (X, d) se dice *completo* si y sólo si cada una de sus sucesiones de Cauchy converge en X .

El hecho de que la completitud de un espacio dependa de su estructura métrica y no de la topología subyacente lleva a que existan espacios métricos que sean homeomorfos entre sí siendo uno de ellos completos y el otro no, como es el caso de $(0, 1)$ y $\mathbb{R}$ con sus topologías usuales.

El siguiente resultado presenta una caracterización de la clausura de un conjunto en un espacio métrico en términos de convergencia de sucesiones, lo que nos permitirá trazar relaciones entre los conjuntos cerrados o compactos y los espacios completos.

Lema 2.63. Sea X un espacio métrico. Dado $A \subseteq X$, entonces $a \in \bar{A}$ si y sólo si existe una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de A tal que $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Proposición 2.64. Un subconjunto cerrado de un espacio métrico completo es completo.

Demostración.

Sea X un espacio métrico completo y F un subconjunto cerrado. Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy formada por elementos de F . Como en F consideramos la estructura de subespacio métrico de X , la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ también será una sucesión de Cauchy sobre X , por lo que convergerá a un cierto elemento $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in X$. Como F es cerrado y $x_n \in F$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por el Lema 2.63 $x \in \bar{F} = F$. Luego F es completo. ■

Lema 2.65. Sean X un espacio métrico y $K \subseteq X$. Si K es un subconjunto compacto, entonces cualquier subconjunto infinito $S \subseteq K$ contiene un punto de acumulación en K .

Demostración.

Sean K un conjunto compacto y $S \subseteq K$ un subconjunto infinito. Supongamos que S no posee ningún punto de acumulación y veamos que esto lleva a una contradicción.

Como S no posee puntos de acumulación, para cada $x \in K$ existe $r_x > 0$ tal que $(B(x, r_x) \setminus \{x\}) \cap S = \emptyset$.

Para cada $x \in K$, podemos considerar la familia de abiertos dada por $\{B(x, r_x) : x \in K\}$, que cumple que $K \subseteq \bigcup_{x \in K} B(x, r_x)$, es decir, es un recubrimiento abierto de K . Como K es compacto, se puede obtener un subrecubrimiento finito. Sin embargo, por hipótesis cada abierto del recubrimiento inicial contiene únicamente un elemento de S y como $S \subseteq K$, no sería posible recubrir K con un número finito de los abiertos $\{B(x, r_x)\}_{x \in K}$. ■

Proposición 2.66. Sea X un espacio métrico. Si $K \subseteq X$ es un conjunto compacto, entonces K es completo.

Demostración.

Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en K , y consideramos el conjunto $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq K$ formado por sus términos.

Si A es un conjunto finito, necesariamente los términos de la sucesión deben ser constantes, ya que en otro caso tendría infinitos términos distintos y A no sería finito. Este valor constante $a \in A$ será el límite de la sucesión.

Supongamos ahora que A es infinito. Por el Lema 2.65, el conjunto A contiene un punto de acumulación $a \in K$. Veamos que la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a a .

Sean $\varepsilon > 0$. Por ser $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geq N$ entonces $d(a_m, a_n) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Además, como a es un punto de acumulación de A , se cumple que $(B(a, \frac{\varepsilon}{2}) \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset$ y que $a_m \in (B(a, \frac{\varepsilon}{2}) \setminus \{a\}) \cap A$. Por tanto, $d(a_m, a) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ y por la desigualdad triangular:

$$d(a_n, a) \leq d(a_n, a_m) + d(a_m, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Por tanto, la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $a \in K$ y K es completo. ■

Teniendo ya los resultados básicos sobre la completitud, podemos pasar a considerar los espacios de funciones. Nuestro objetivo será ver que bajo ciertas condiciones, el espacio de funciones continuas es completo.

Comencemos por introducir un nuevo concepto de convergencia que nos permitirá asegurar la continuidad de la aplicación límite de una sucesión de aplicaciones continuas.

Definición 2.67. Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de aplicaciones de un conjunto X a un espacio métrico (Y, d) . Decimos que la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge uniformemente* a la aplicación $f : X \rightarrow Y$ si dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

para todo $n > N$ y todo $x \in X$.

Teorema 2.68 (Teorema de convergencia uniforme). *Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de aplicaciones continuas de un espacio topológico X a un espacio métrico Y . Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a f , entonces f es continua.*

Demostración.

Sea $x_0 \in X$. Veamos que f es continua en x_0 . Sea V un abierto de Y con $f(x_0) \in V$. Queremos encontrar un entorno U de x_0 tal que $f(U) \subseteq V$.

Al ser V abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(f(x_0), \varepsilon) \subseteq V$. Como la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a f , existe N tal que para todo $n \geq N$ y todo $x \in X$ se cumple que $d(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Además, usando que f_N es continua en x_0 , existe $U \subset X$ entorno de x_0 tal que $f_N(U) \subseteq B(f_N(x_0), \frac{\varepsilon}{3})$. En resumen, tenemos que para todo $x \in U$ se tienen las siguientes desigualdades:

$$d(f(x), f_N(x)) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad d(f_N(x), f_N(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad d(f_N(x_0), f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} d(f(x), f(x_0)) &\leq d(f(x), f_N(x)) + d(f_N(x), f_N(x_0)) + d(f_N(x_0), f(x_0)) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

luego $f(U) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon) \subseteq V$. ■

El espacio de funciones que llegan a un espacio métrico completo es un espacio completo cuando se considera la métrica $\bar{\rho}$ dada en la Definición 2.47. Antes de poder demostrarlo, nos será útil comprobar la veracidad del siguiente resultado:

Proposición 2.69. *Y es un espacio métrico completo con respecto a una cierta métrica d si y sólo si también lo es con respecto a $\bar{d}$.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Sea $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy con respecto a $\bar{d}$. Entonces dado $\varepsilon > 0$ con $\varepsilon < 1$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N$, se tiene que $\bar{d}(y_n, y_m) < \varepsilon < 1$. Por definición, $\bar{d}(y_n, y_m) = \min\{d(y_n, y_m), 1\}$ y, como $\bar{d}(y_n, y_m) < 1$, debe ser $\bar{d}(y_n, y_m) = d(y_n, y_m)$. Por tanto, la sucesión $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy con respecto a la métrica d también. Como (Y, d) es completo, debe converger a un punto $y \in Y$ con respecto a d . Veamos que la sucesión $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a y con respecto a $\bar{d}$ también. Sea $\varepsilon > 0$:

- Si $\varepsilon > 1$, entonces como por definición $\bar{d}(y_n, y) \leq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\bar{d}(y_n, y) < \varepsilon$.
- Si $\varepsilon \leq 1$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ para el que si $n \geq N$ tenemos que $d(y_n, y) < \varepsilon \leq 1$. Por tanto, si $n \geq N$, tendremos también que $\bar{d}(y_n, y) = \min\{d(y_n, y), 1\} = d(y_n, y) < \varepsilon$.

En cualquier caso, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ se cumple que $d(y_n, y) < \varepsilon$, es decir, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ con respecto a $\bar{d}$.

$\Leftarrow$) Sea $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy con respecto a d . Dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N$ se cumple que $d(y_n, y_m) < \varepsilon$. Tomando $\varepsilon < 1$, para $n, m \geq N$ se cumple que $d(y_n, y_m) < \varepsilon < 1$, luego también $\bar{d}(y_n, y_m) = d(y_n, y_m) < \varepsilon < 1$. Por tanto, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy con respecto a la métrica $\bar{d}$. Como $(Y, \bar{d})$ es completo, esta sucesión convergerá con respecto a $\bar{d}$ a un elemento y . Por tanto, dado $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ se cumple que $\bar{d}(y_n, y) < \varepsilon$. Tomando $0 < \varepsilon < 1$, para $n \geq N$ se cumple que $\bar{d}(y_n, y) < \varepsilon < 1$, luego $\bar{d}(y_n, y) = d(y_n, y) < \varepsilon$. Por tanto, y también será el límite de $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con respecto a d y el espacio (Y, d) será completo. ■

Teorema 2.70. *Si el espacio métrico Y es completo con respecto a d , entonces el espacio Y^X es completo con respecto a la métrica $\bar{\rho}$ asociada a d .*

Demostración.

Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy con respecto a $\bar{\rho}$. Dado $\alpha \in X$, se cumple lo siguiente por definición de $\bar{\rho}$:

$$\bar{d}(f_n(\alpha), f_m(\alpha)) \leq \bar{\rho}(f_n, f_m) \quad \text{para todo } n, m \in \mathbb{N}.$$

Esto se traduce en que la sucesión $(f_n(\alpha))_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy sobre Y con respecto a $\bar{d}$. Observemos que como (Y, d) es completo, se cumple por la Proposición 2.69 que $(Y, \bar{d})$ también es completo. Por tanto, la sucesión $(f_n(\alpha))_{n \in \mathbb{N}}$ convergerá con respecto a $\bar{d}$ a un elemento de Y , que llamaremos y_α . Sea $f : X \rightarrow Y$ la aplicación definida por $f(\alpha) = y_\alpha$. Veamos que la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a f .

Sea $\varepsilon > 0$. Como $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy con respecto a $\bar{\rho}$, podemos encontrar $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geq N_1$, tenemos que $\bar{\rho}(f_n, f_m) < \frac{\varepsilon}{2}$. En consecuencia, tenemos también que $\bar{d}(f_n(\alpha), f_m(\alpha)) < \frac{\varepsilon}{2}$ para $\alpha \in X$ siempre y cuando $n, m \geq N_1$. Además, como la sucesión $(f_m(\alpha))_{m \in \mathbb{N}}$ converge a $y_\alpha = f(\alpha)$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq N_2$ se cumple que $\bar{d}(f_m(\alpha), f(\alpha)) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Fijando $n \geq N = \max\{N_1, N_2\}$ y $\alpha \in X$, y tomando m arbitrariamente grande, podemos ver que

$$\bar{d}(f_n(\alpha), f(\alpha)) \leq \bar{d}(f_n(\alpha), f_m(\alpha)) + \bar{d}(f_m(\alpha), f(\alpha)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Como esto se cumple para cualquier $\alpha \in X$ siempre y cuando $n \geq N$, tenemos también que

$$\bar{\rho}(f_n, f) < \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq N,$$

es decir, la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a f . ■

Como consecuencia, obtenemos que el espacio de aplicaciones continuas $\mathcal{C}(X, Y)$ también es completo.

Corolario 2.71. *Si Y es completo con respecto a d , entonces $\mathcal{C}(X, Y)$ es completo con respecto a la métrica $\bar{\rho}$ asociada a d .*

Demostración.

Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en Y^X que converge a una aplicación f con respecto a la métrica $\bar{\rho}$. Veamos que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a f (Definición 2.67) con respecto a la métrica $\bar{d}$.

Sean $\varepsilon > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, se cumple que $\bar{\rho}(f, f_n) < \varepsilon$. Bajo estas condiciones, si $x \in X$ y $n \geq N$:

$$\bar{d}(f_n(x), f(x)) \leq \bar{\rho}(f_n, f) < \varepsilon$$

Por lo tanto, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a f .

Sea $f \in \overline{\mathcal{C}(X, Y)}$. Entonces por el Lema 2.63, existe una sucesión de aplicaciones $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge a f con respecto a la distancia $\bar{\rho}$. Como hemos visto, esto significa que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a f con respecto a la métrica $\bar{d}$, y por el Teorema 2.68, se cumple que f es continua, luego $\overline{\mathcal{C}(X, Y)} = \mathcal{C}(X, Y)$ y el conjunto es cerrado.

Por la Proposición 2.64, se cumple que $\mathcal{C}(X, Y)$ será completo con respecto a la distancia $\bar{\rho}$. ■

Como se mencionó en la Sección 2.4, cuando X es compacto, podemos tratar con la métrica del supremo ρ en vez de con la métrica uniforme $\bar{\rho}$. Además, la combinación de la Observación 2.50 y Proposición 2.69 nos permite afirmar que $\mathcal{C}(X, Y)$ es completo con respecto a ρ si y sólo si lo es con respecto a $\bar{\rho}$. Dado que el caso que realmente nos interesa es aquel en el que $X = \mathcal{I}$, por comodidad en el siguiente capítulo trataremos con la métrica del supremo, dejando de lado la métrica uniforme.

Finalmente, enunciaremos y demostraremos un caso específico del Teorema de Intersección de Cantor para espacios métricos completos. Este será importante cuando en el Capítulo 4 caractericemos las imágenes continuas del conjunto conocido como conjunto de Cantor.

Teorema 2.72 (Teorema de intersección de Cantor). *Sea X un espacio métrico completo. Si $\{C_k\}_{k \geq 1}$ es una sucesión de conjuntos compactos, cerrados y no vacíos de X , cumpliendo la siguiente condición de cadena descendiente:*

$$C_0 \supsetneq C_1 \supsetneq \cdots \supsetneq C_n \supsetneq C_{n+1} \supsetneq \cdots$$

y verificando que $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(C_n) = 0$, entonces existe un $x \in X$ tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \{x\}$.

Demostración.

Como C_n es no vacío para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos tomar $x_n \in C_n$ para formar una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Sea $\varepsilon > 0$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(C_n) = 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ se cumple que $\text{diam}(C_n) < \varepsilon$. Entonces si $m, n \geq N$ tenemos lo siguiente:

$$x_n \in C_n \subseteq C_N, \quad x_m \in C_m \subseteq C_N,$$

por lo que $d(x_m, x_n) \leq \text{diam}(C_N) < \varepsilon$, es decir, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. Como X es completo, dicha sucesión poseerá un límite. Sea $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Veamos que

de hecho $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \{x\}$.

Como eliminar un número finito de elementos de una sucesión no afecta su convergencia, para cada $m \in \mathbb{N}$ la sucesión $(x_n)_{n=m}^{\infty}$ sigue convergiendo a x . Además, por la propiedad de cadena descendiente, $x_n \in C_n \subseteq C_m$ si $n \geq m$, de manera que la nueva sucesión está formada exclusivamente por términos de C_m . Por el Lema 2.63, se cumple que $x \in \overline{C_m}$, pero como C_m es cerrado por hipótesis, se tiene de hecho que $x \in C_m$. Como esto se cumple para cualquier $m \in \mathbb{N}$, se tiene que $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$.

Además, como $\bigcap_{m=1}^{\infty} C_m \subseteq C_n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, si existe $y \in \bigcap_{m=1}^{\infty} C_m$ con $x \neq y$ entonces $x, y \in C_n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Si $x \neq y$, entonces $d(x, y) = \varepsilon > 0$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(C_n) = 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\text{diam}(C_n) < \varepsilon$. Por lo tanto, $x = y$. En conclusión, $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \{x\}$. ■

Capítulo 3

Una curva que rellena espacios

Es ampliamente conocido el resultado de Georg Cantor mediante el que demostró la igualdad en términos de cardinal entre los conjuntos $\mathcal{I}$ e $\mathcal{I}^2$. Para llevar a cabo dicha prueba, no es necesario ningún argumento proveniente de la topología, sino ingeniosos razonamientos propios de la teoría de conjuntos. Este resultado inspiró a Peano en la persecución de algo aún más contraintuitivo: la existencia de una curva capaz de llenar el cuadrado unidad. Dicho matemático consiguió demostrar la existencia de este objeto en 1890 [14].

En este capítulo se presentará la construcción de la curva de Peano, demostrando que en efecto llena el cuadrado unidad. Para ello, introduciremos el método general de Hilbert para la construcción de este tipo de curvas. Además, demostraremos también el Teorema de Netto, que limita las propiedades que estas curvas pueden tener. Para ello, nos basaremos en una combinación de los textos [12] y [15].

3.1. El método de Hilbert

Si bien es verdad que en 1890 Peano fue el primer matemático en obtener una curva que rellenaba el cuadrado unidad, lo hizo utilizando argumentos aritméticos con una combinación de operadores y expresiones de números en base 3 que podría resultar algo engorrosa [14]. Con el fin de presentar de la manera más clara posible los conceptos que motivan la realización de este trabajo, utilizaremos argumentos geométricos que resultarán más intuitivos. Este enfoque fue presentado por Hilbert un año después de que Peano sorprendiera al mundo matemático con su construcción [5].

La premisa del método introducido por Hilbert es la siguiente: si existe una aplicación continua entre el intervalo unidad $\mathcal{I}$ y el cuadrado unidad $\mathcal{I}^2$, entonces tras dividir el intervalo unidad en k subintervalos de igual tamaño y el cuadrado unidad en k subcuadrados de igual tamaño, debe existir una aplicación continua de cada subintervalo a cada subcuadrado. A su vez, podemos dividir cada subintervalo en k subintervalos de igual tamaño y cada subcuadrado en k subcuadrados de igual tamaño, y se repite el argumento anterior. Este proceso se repite de manera infinita, obteniendo para cada $n \in \mathbb{N}$ un total de k^{2n} réplicas de igual tamaño. Hilbert demostró que los subcuadrados se pueden ordenar de manera que los subintervalos adyacentes entre sí se correspondan con subcuadrados adyacentes, y de manera que si un cuadrado está asociado a un intervalo, sus subcuadrados también lo estén a los subintervalos de ese intervalo. En la Figura 3.1 podemos observar el orden requerido en la primera subdivisión del cuadrado

unidad para la generación de la curva de Peano.

Mediante este proceso, obtenemos que cada $t \in \mathcal{I}$ viene determinado por una cadena de intervalos cerrados anidados $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(I_n) = 0$ por el Teorema 2.72. Esta sucesión de intervalos anidados tiene asociada una sucesión de cuadrados cerrados anidados $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cumpliendo también que $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(Q_n) = 0$. De nuevo por el Teorema 2.72, esta sucesión de cuadrados determinará un único punto $(x, y) \in \mathcal{I}^2$. Si definimos $f(t) = (x, y)$, entonces f (o $f(I)$ si se prefiere) será una curva que rellena el cuadrado unidad.

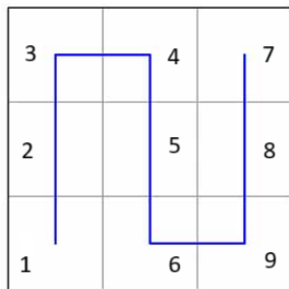


Figura 3.1: Primera iteración f_1 del proceso de construcción de la curva de Peano.

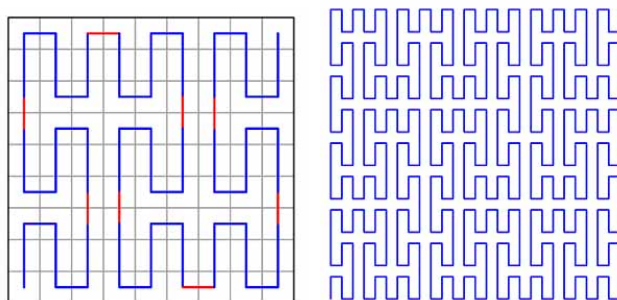


Figura 3.2: Iteraciones f_2 y f_3 de la sucesión de poligonales utilizadas en la construcción de la curva de Peano.

Aunque el argumento dado por Hilbert fue más intuitivo que los razonamientos aritméticos de Peano, este no deja de ser algo abstracto. No obstante, da pie a un proceso constructivo visual, que se muestra para la curva de Peano en la Figura 3.2. Dado $n \in \mathbb{N}$, podemos considerar la poligonal que une en el orden especificado por Hilbert los centros geométricos de los subcuadrados obtenidos en el paso n -ésimo. Si esta poligonal se extiende en el primer y último cuadrado de manera que alcance los puntos $(0, 0)$ y $(1, 1)$ respectivamente, entonces obtenemos una sucesión de curvas que, como veremos en la siguiente sección, convergerá uniformemente a la curva de Peano.

3.2. La curva de Peano

Llamemos f_n a la n -ésima poligonal obtenida en el proceso de construcción de curvas que rellenan espacios definido por Hilbert. Veamos primero que efectivamente la sucesión de curvas poligonales converge a una curva con respecto a la distancia ρ dada en la Definición 2.49, considerando en el espacio $\mathcal{I}^2$ la usual distancia euclídea.

Lema 3.1. *La sucesión de funciones $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forma una sucesión de Cauchy sobre $\mathcal{C}(\mathcal{I}, \mathcal{I}^2)$ con respecto a la distancia ρ .*

Demostración.

La clave de esta demostración está en el estudio del paso de f_n a f_{n+1} . Siguiendo el razonamiento de Hilbert, dado $t \in \mathcal{I}$ si $f_n(t)$ se encuentra en un cierto cuadrado, tenemos que $f_{n+1}(t)$ se encontrará en un subcuadrado contenido en ese cuadrado. Como en el n -ésimo paso cada cuadrado tiene lado $\frac{1}{3^n}$, se cumple lo siguiente:

$$\rho(f_n, f_{n+1}) = \sup\{d(f_n(t), f_{n+1}(t)) : t \in \mathcal{I}\} < \frac{\sqrt{2}}{3^n},$$

donde hemos acotado la distancia entre $f_n(t)$ y $f_{n+1}(t)$ usando la diagonal del cuadrado.

Por tanto, sean $n, k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \rho(f_n, f_{n+k}) &\leq \rho(f_n, f_{n+1}) + \dots + \rho(f_{n+k-1}, f_{n+k}) \leq \\ &\leq \frac{\sqrt{2}}{3^n} + \frac{\sqrt{2}}{3^{n+1}} + \dots + \frac{\sqrt{2}}{3^{n+k-1}} < \frac{2\sqrt{2}}{3^n}, \end{aligned}$$

habiendo utilizado que

$$\frac{1}{3^{n+1}} + \dots + \frac{1}{3^{n+k-1}} = \frac{1}{3^n} \sum_{\ell=1}^{k-1} \frac{1}{3^\ell} < \frac{1}{3^n} \cdot 1.$$

Dados $\varepsilon > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{2\sqrt{2}}{3^N} < \varepsilon$, tenemos que se cumple que si $n, m \geq N$ entonces $\rho(f_n, f_m) < \varepsilon$. Es decir, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy con respecto a la distancia ρ . ■

Por otra parte, dado que $\mathcal{I}^2$ es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^2$ es completo con respecto a la distancia euclídea, por la Proposición 2.64 el espacio $\mathcal{I}^2$ también es completo con respecto a la distancia euclídea. Por tanto, por el Corolario 2.71 y la Observación 2.50, se cumple que $\mathcal{C}(\mathcal{I}, \mathcal{I}^2)$ es completo con respecto a la métrica del supremo ρ . Dado que por definición en un espacio completo toda sucesión de Cauchy converge a un elemento del espacio, mediante el resultado anterior en realidad hemos probado que la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a una función límite $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ y que además ésta es continua, es decir, es una curva sobre $\mathcal{I}^2$.

Ahora que sabemos que la sucesión de curvas considerada converge a una curva, nos falta ver que efectivamente esta última rellena el cuadrado unidad.

Lema 3.2. *Sea $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$. Entonces f es suprayectiva.*

Demostración.

Sea $x \in \mathcal{I}^2$, veamos que $x \in f(\mathcal{I})$. Dado $n \in \mathbb{N}$, como la poligonal f_n atraviesa cada uno de los 3^{2n} subcuadrados en los que dividimos el cuadrado unidad, utilizando un argumento parecido al del lema anterior, tenemos que para cualquier $x \in \mathcal{I}^2$ existirá $t_0 \in \mathcal{I}$ con $d(x, f_n(t_0)) < \frac{\sqrt{2}}{3^n}$.

Sea $\varepsilon > 0$, podemos tomar $N_1 \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande para que $\frac{\sqrt{2}}{3^{N_1}} < \frac{\varepsilon}{2}$. Además, por la convergencia de la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, se cumple que existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal

que $\rho(f_n, f) < \frac{\varepsilon}{2}$ si $n \geq N_2$. Además si $\rho(f_n, f) < \frac{\varepsilon}{2}$, tendremos que $d(f_n(t), f(t)) < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $t \in \mathcal{I}$ y todo $n \geq N_2$. Por tanto, si $N \geq \max\{N_1, N_2\}$ entonces:

$$\begin{aligned} d(x, f(t_0)) &\leq d(x, f_N(t_0)) + d(f_N(t_0), f(t_0)) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3^N} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Es decir, $B(x, \varepsilon)$ interseca a $\underline{f(\mathcal{I})}$, o equivalentemente por el apartado 3 de la Proposición 2.7 tenemos que $x \in \underline{f(\mathcal{I})}$. Como $\mathcal{I}$ es compacto, por el apartado 4 de la Proposición 2.27 se cumple que $\underline{f(\mathcal{I})}$ también lo es por ser f continua. A su vez, por el apartado 3 del mismo teorema, esto implica que $\underline{f(\mathcal{I})}$ es cerrado al ser un subconjunto compacto de un espacio Hausdorff. En resumen, $\underline{f(\mathcal{I})} = f(\mathcal{I})$ y $x \in f(\mathcal{I})$. ■

Los resultados desarrollados en esta sección prueban que la construcción de la curva utilizada lleva a una curva con las características buscadas, lo que se puede resumir en el siguiente teorema:

Teorema 3.3. *Existe una aplicación $f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{I}^2$ continua y suprayectiva.*

Habiendo obtenido un ejemplo de este tipo de curva, cabría preguntarse si, al igual que Cantor obtuvo una biyección entre $\mathcal{I}$ e $\mathcal{I}^2$, podría obtenerse una biyección continua entre estos conjuntos. Netto probó que esto no era posible, antes incluso de que Peano obtuviese el primer ejemplo de curva que rellenaba el cuadrado unidad.

Teorema 3.4. (Netto) *Si $f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{I}^2$ es una aplicación biyectiva, entonces f no es continua.*

Demostración.

Supongamos que f es continua y biyectiva. Como $\mathcal{I}$ es un espacio compacto y el espacio $\mathcal{I}^2$ es un espacio Hausdorff, por el Corolario 2.29 tendríamos que f es un homeomorfismo.

Al ser f biyectiva, existirá un punto $p \in \mathcal{I}^2$ tal que $f^{-1}(p) = \frac{1}{2}$. Además, la restricción $f|_{\mathcal{I} \setminus \{\frac{1}{2}\}} : \mathcal{I} \setminus \{\frac{1}{2}\} \longrightarrow \mathcal{I}^2 \setminus \{p\}$ será también homeomorfismo. No obstante, $\mathcal{I} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ no es un espacio conexo y $\mathcal{I}^2 \setminus \{p\}$ sí lo es. Esto no puede ocurrir ya que por el Lema 2.42 la imagen de un espacio conexo por una aplicación continua es conexa, y $f^{-1}(\mathcal{I}^2 \setminus \{p\}) = \mathcal{I} \setminus \{\frac{1}{2}\}$. Por tanto, hemos llegado a una contradicción y f no puede ser continua. ■

Capítulo 4

Un método ajeno al argumento geométrico

Tomando un camino alternativo al mostrado en el Capítulo anterior, Lebesgue se basó en un resultado obtenido por Hausdorff, que caracterizaba las imágenes continuas del conjunto conocido como conjunto de Cantor, para obtener una de estas curvas [8]. De hecho, esta construcción asentó las bases que luego utilizó Hahn para generalizar estas curvas a los espacios más generales posibles, como veremos en el Capítulo 6.

En este capítulo presentaremos la construcción de la curva ideada por Lebesgue, para lo que previamente necesitaremos introducir el conjunto de Cantor junto a algunos resultados asociados, incluyendo el Teorema de Hausdorff ya mencionado. Tanto el desarrollo sobre el conjunto de Cantor como la construcción de la curva de Lebesgue provienen principalmente de [15].

4.1. El conjunto de Cantor

Al igual que las curvas vistas en el capítulo anterior, el conjunto de Cantor se puede construir mediante un proceso iterativo.

Comencemos tomando el intervalo $C_0 = \mathcal{I} = [0, 1]$, dividiéndolo en tres intervalos de igual tamaño y retirando el intervalo abierto intermedio $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ para obtener el conjunto $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. En la siguiente iteración, repetimos este proceso para cada uno de los dos intervalos cerrados resultantes, obteniendo el conjunto $C_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$. Así, en cada iteración se divide cada uno de los intervalos que forman el conjunto resultante del paso anterior en tres secciones y se retira de cada triplete el intervalo abierto intermedio. El conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ es el resultado de llevar a cabo este proceso de manera infinita, es decir:

$$\mathcal{C} = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n.$$

Este conjunto se puede expresar explícitamente de la siguiente manera:

$$\mathcal{C} = [0, 1] \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{3^n-1} \left(\frac{3k+1}{3^{n+1}}, \frac{3k+2}{3^{n+1}} \right).$$

Dicha expresión nos permite observar de manera directa algunas propiedades topológicas del conjunto de Cantor. Por ejemplo, $\mathcal{C}$ es un conjunto cerrado tanto en $\mathbb{R}$ como en $\mathcal{I}$. Además, como $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{I}$, la Proposición 2.27 nos permite afirmar que $\mathcal{C}$ es también compacto. Veamos en el siguiente resultado otra de sus propiedades:

Proposición 4.1. *Todo punto $t \in \mathcal{C}$ del conjunto de Cantor es un punto de acumulación.*

Demostración.

Sean $t \in \mathcal{C}$ y $\varepsilon > 0$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{3^n} < \varepsilon$. El conjunto C_n de la construcción anterior es una unión de intervalos de longitud $\frac{1}{3^n}$, a alguno de los cuales debe pertenecer el punto t . Sea I tal intervalo, entonces es claro que $I \subseteq B(t, \varepsilon)$.

Consideremos ahora el conjunto C_{n+1} , que estará formado por intervalos de longitud $\frac{1}{3^{n+1}}$, dos de los cuales serán subintervalos de I por construcción. Llamemos a estos dos intervalos I_1 e I_2 . Supongamos sin pérdida de generalidad que $x \in I_1$. Como I_2 es cerrado, tendremos por el Teorema 2.32 que $\mathcal{C} \cap I_2$ será no vacío (por ser $\{C_n \cap I_2\}_{n \in \mathbb{N}}$ una familia de cerrados con la propiedad de la intersección finita). Tomemos $y \in \mathcal{C} \cap I_2$. Entonces $y \in \mathcal{C} \cap (B(t, \varepsilon) \setminus \{t\})$. Luego t es un punto de acumulación de $\mathcal{C}$. ■

Observación 4.2. Debido a este resultado y a la propia construcción del conjunto de Cantor, se cumple que dados $t_0 \in \mathcal{C}$ y $\varepsilon > 0$, el entorno abierto $B(t_0, \varepsilon)$ siempre contendrá algún intervalo de los que se retiran de $\mathcal{I}$ para obtener $\mathcal{C}$. Esto se debe a que siempre existirá un $t \in \mathcal{C}$ con $|t - t_0| < \varepsilon$ y siempre habrá un intervalo entre ambos que se eliminará.

La construcción de $\mathcal{C}$ vista nos otorga una cierta intuición geométrica de este conjunto. Sin embargo, existe una descripción de este conjunto más útil a la hora de probar la caracterización de sus imágenes por aplicaciones continuas. Antes de enunciarla, nos será útil ver que si un cierto número tiene una representación en base 3 de la forma $0_3 a_1 a_2 \dots a_n 1$, se puede expresar equivalentemente como $0_3 a_1 a_2 \dots a_n 0\bar{2}$ gracias a que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{3}{2}$. En efecto:

$$\begin{aligned} 0_3 a_1 a_2 \dots a_n 0\bar{2} &= \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{3^k} + \frac{0}{3^{n+1}} + \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{2}{3^k} = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{3^k} + \frac{2}{3^{n+2}} \frac{3}{2} = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{3^k} + \frac{1}{3^{n+1}} \\ &= 0_3 a_1 a_2 \dots a_n 1. \end{aligned}$$

Tras estas observaciones, pasemos a considerar una forma distinta de ver el conjunto de Cantor.

Si representamos cada $t \in \mathcal{I}$ en base 3, $t = 0_3 t_1 t_2 t_3 \dots$, al eliminar el intervalo $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, sustraemos los números de la forma $0_3 1 t_2 t_3 t_4 \dots$ excepto $0_3 1$, que como hemos visto puede reescribirse como $0_3 0\bar{2}$. En el siguiente paso de la construcción de $\mathcal{C}$, se sustraen los números con representaciones $0_3 01 t_3 t_4 \dots$ o $0_3 21 t_3 t_4 \dots$, excepto $0_3 01$ y $0_3 21$, que podemos reescribir como $0_3 00\bar{2}$ y $0_3 20\bar{2}$ respectivamente. Así, cada iteración parece consistir en retirar aquellos elementos que cuentan con algún 1 en su representación en base 3. En el siguiente resultado veremos que, en efecto, el conjunto de Cantor es precisamente el subconjunto de $\mathcal{I}$ cuyos elementos tienen alguna representación en base 3 que no contiene ningún 1.

Teorema 4.3. Sea $t \in \mathcal{I}$. Se cumple que $t \in \mathcal{C}$ si y sólo si t tiene alguna representación en base 3 que no contiene ningún 1.

Demostración.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotemos por (p_n, q_n) los intervalos que se eliminan de $\mathcal{I}$ en el n -ésimo paso de la construcción de $\mathcal{C}$.

Hemos visto previamente a enunciar el resultado que para $n = 1$, (a_n, b_n) se elimina de $\mathcal{I}$ si $p_1 = 0_31$ y $q_1 = 0_32$. Para $n = 2$, los intervalos eliminados se corresponden con aquellos tales que $p_2 = 0_301$ y $q_2 = 0_302$ o $p_2 = 0_321$ y $q_2 = 0_322$. En general, probemos por inducción sobre n que los intervalos que se eliminan son aquellos para los que sus extremos p_n, q_n se pueden expresar de la siguiente forma:

$$p_n = 0_3(2p_1^n)(2p_2^n) \dots (2p_{n-1}^n)1, \quad q_n = 0_3(2p_1^n)(2p_2^n) \dots (2p_{n-1}^n)2.$$

donde tenemos que $p_j^n \in \{0, 1\}$.

Supongamos esto cierto para $n \in \mathbb{N}$. Veamos que se cumple para el paso $(n + 1)$ -ésimo. En dicho paso tenemos que

$$p_{n+1} = q_n + \frac{1}{3^{n+1}}, \quad q_{n+1} = p_{n+1} + \frac{1}{3^{n+1}},$$

por lo que, pasando a las expresiones en base 3, tendremos o bien que

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= 0_3(2p_1^n)(2p_2^n) \dots (2p_{n-1}^n)2 + \frac{1}{3^{n+1}} \\ &= 0_3(2p_1^n)(2p_2^n) \dots (2p_{n-1}^n)21, \\ q_{n+1} &= 0_3(2p_1^n)(2p_2^n) \dots (2p_{n-1}^n)21 + \frac{1}{3^{n+1}} \\ &= 0_3(2p_1^n)(2a_2^n) \dots (2p_{n-1}^n)22, \end{aligned}$$

o bien que

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n - \frac{2}{3^{n+1}} = 0_3(2p_1^n)(2p_2^n) \dots (2p_{n-1}^n)2 - \frac{1}{3^{n+1}} \\ &= 0_3(2p_1^n)(2p_2^n) \dots (2p_{n-1}^n)01, \\ q_{n+1} &= p_n - \frac{1}{3^{n+1}} = 0_3(2p_1^n)(2p_2^n) \dots (2p_{n-1}^n)21 + \frac{1}{3^{n+1}} \\ &= 0_3(2p_1^n)(2p_2^n) \dots (2p_{n-1}^n)02. \end{aligned}$$

En cualquiera de los casos, hemos obtenido expresiones similares a las tomadas como hipótesis de inducción pero cambiando n por $n + 1$, lo que demuestra su validez.

Sea $t \in (p_n, q_n)$, entonces:

$$t = 0_3(2t_1)(2t_2) \dots (2t_{n-1})1\tau_{n+1}\tau_{n+2} \dots \tau_{n+j} \dots,$$

con $t_j \in \{0, 1\}$. Si para todo $j \in \mathbb{N}$ se tiene que $\tau_{n+j} = 0$, entonces $t = p_n \notin (p_n, q_n)$. Por otra parte, si para todo $j \in \mathbb{N}$ se cumple que $\tau_{n+j} = 2$, entonces $t = q_n \notin (p_n, q_n)$. Por tanto, para algún $j \in \mathbb{N}$ debe ser $\tau_{n+j} \neq 0$ y $\tau_{n+j} \neq 2$. Por tanto, $t \in \mathcal{I}$ se elimina en el proceso de construcción de $\mathcal{C}$ si y sólo si alguna de sus representaciones en base 3 contiene un 1. ■

Habiendo obtenido esta representación para los elementos de $\mathcal{C}$, podemos proceder a caracterizar las imágenes de este conjunto por aplicaciones continuas.

Teorema 4.4. (Hausdorff) *Todo espacio métrico compacto es imagen por una aplicación continua del conjunto de Cantor.*

Demostración.

Sea K un espacio métrico compacto. Nótese que, al ser métrico, en particular será también Hausdorff por el apartado 1 de la Proposición 2.48 y que además al ser Hausdorff y compacto también será completo por el Teorema 2.66. Recordemos también que, por la Proposición 2.27, un subconjunto de K será compacto si y sólo si es cerrado.

Al ser K métrico, la familia $\{B(x, 1) : x \in K\}$ forma un recubrimiento abierto, que por ser K compacto podemos reducir a un subrecubrimiento finito $\{B(x_{i_1}, 1) : i_1 = 0, 1, \dots, 2^{n_1} - 1\}$. Se puede asumir que este subrecubrimiento cuenta con $2^{n_1} - 1$ elementos para algún $n_1 \in \mathbb{N}$ sin pérdida de generalidad ya que, de no ser así, bastaría con incluir el número necesario de conjuntos abiertos repetidos.

Sea $K_{i_1} = \overline{B}(x_{i_1}, 1) \cap K$ para cada $i_1 = 0, 1, \dots, 2^{n_1} - 1$, entonces por ser subrecubrimiento de K , se cumple que $\bigcup_{i_1} K_{i_1} = K$. Se cumple también que cada K_{i_1} es a su vez compacto. Cada K_{i_1} se puede recubrir mediante la familia $\{B(x, \frac{1}{2}) : x \in K_{i_1}\}$, para obtener para cada uno un subrecubrimiento finito dado por $\{B(x_{i_1 i_2}, \frac{1}{2}) : i_2 = 0, 1, \dots, 2^{n_2} - 1\}$. De nuevo, podemos suponer sin pérdida de generalidad que cada uno de estos nuevos subrecubrimientos finitos posee el mismo número de abiertos. Definiendo $K_{i_1 i_2} = \overline{B}(x_{i_1 i_2}, \frac{1}{2}) \cap K_{i_1}$, obtenemos una nueva familia de compactos. Repitiendo este proceso, recubriendo los compactos resultantes del paso $(k - 1)$ -ésimo por bolas de radio $\frac{1}{2^k}$.

Sea ahora $t \in \mathcal{C}$, por el Teorema 4.3 sabemos que puede escribirse de la siguiente manera:

$$t = 0_3(2t_1)(2t_2) \dots (2t_{n_1})(2t_{n_1+1}) \dots (2t_{n_1+n_2})(2t_{n_1+n_2+1}) \dots,$$

donde $t_j \in \{0, 1\}$.

Podemos definir una aplicación $f : \mathcal{C} \longrightarrow K$ dada por $f(t) = x$, siendo x tal que

$$\{x\} = K_{i_1} \cap K_{i_1 i_2} \cap K_{i_1 i_2 i_3} \cap K_{i_1 i_2 i_3 i_4} \cap \dots,$$

donde los conjuntos $K_{i_1 i_2 \dots i_j}$ que elegimos vienen determinados por los t_i de la expresión en base 3 de la forma siguiente: cada i_j corresponde al número en base 2 dado por

$$\begin{aligned} i_1 &= (t_1 t_2 \dots t_{n_1})_2, \\ i_2 &= (t_{n_1+1} t_{n_1+2} \dots t_{n_1+n_2})_2, \\ i_3 &= (t_{n_1+n_2+1} \dots t_{n_1+n_2+n_3})_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Nótese que por el Teorema de intersección de Cantor (Teorema 2.72), esta aplicación está bien definida, ya que $\mathcal{C}$ es completo, cada K_{i_k} es compacto, cerrado y no vacío, y cada sucesión posible de ellos cumple por construcción las condiciones de cadena descendiente y del diámetro.

Esta aplicación f es suprayectiva ya que los elementos de la cadena descendiente los hemos construido a partir de recubrimientos, de manera que para cada $x \in K$ podemos encontrar una sucesión de conjuntos que lo contenga. A su vez, esta sucesión se corresponde con una secuencia binaria y por tanto con un punto de $\mathcal{C}$. Veamos que también es continua.

Sean $n \in \mathbb{N}$, y $t', t'' \in \mathcal{C}$ tales que $|t' - t''| < \frac{1}{3^{n+1}}$, entonces como hemos visto coinciden en las primeras $2n$ cifras:

$$\begin{aligned} t' &= 0_3(2t_1)(2t_2) \dots (2t_n)(2t_{n+1})(2t_{n+2}) \dots \\ t'' &= 0_3(2t_1)(2t_2) \dots (2t_n)(2\tau_{n+1})(2\tau_{n+2}) \dots \end{aligned}$$

Si $n_1 + n_2 + \dots + n_k \leq n < n_1 + n_2 + \dots + n_j + n_{j+1}$, entonces $f(t'), f(t'') \in K_{i_1 i_2 \dots i_j} \subseteq \overline{B}(x_{i_1 \dots i_j}, \frac{1}{2^{j-1}})$, es decir, $d(f(t'), f(t'')) < \frac{1}{2^{j-2}}$. ■

4.2. La curva de Lebesgue

Para construir su curva, Lebesgue utilizó el conjunto de Cantor de la siguiente manera: como el espacio $\mathcal{I}^2$ es un conjunto compacto, el Teorema 4.4 implica que existe una aplicación continua $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{I}^2$. Lebesgue consideró la aplicación f definida de la siguiente manera:

$$f(0_3(2t_1)(2t_2)(2t_3) \dots) = \begin{pmatrix} 0_2 t_1 t_3 t_5 \dots \\ 0_2 t_2 t_4 t_6 \dots \end{pmatrix},$$

donde podemos afirmar que $t_j \in \{0, 1\}$ gracias al Teorema 4.3. Esta aplicación es trivialmente suprayectiva, ya que si consideramos la representación de cada coordenada de $(x, y) \in \mathcal{I}^2$ en base 2:

$$x = 0_2 x_1 x_2 x_3 \dots, \quad y = 0_2 y_1 y_2 y_3 \dots,$$

entonces $f(t) = (x, y)$ para $t = 0_3(2x_1)(2y_1)(2x_2)(2y_2) \dots \in \mathcal{C}$. Veamos que además esta aplicación es continua.

Proposición 4.5. *La aplicación $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{I}^2$ es continua.*

Demostración.

Veamos que la aplicación f es continua en $t_0 \in \mathcal{C}$. Dado $\varepsilon > 0$, tomamos n tal que $\frac{\sqrt{2}}{2^n} < \varepsilon$.

Si $t \in \mathcal{C}$ con $|t - t_0| < \frac{1}{3^{2n}}$, entonces t y t_0 deben coincidir en las primeras $2n$ cifras (en base 3), por lo que:

$$\begin{aligned} t_0 &= 0_3(2t_1)(2t_2) \dots (2t_{2n})(2t_{2n+1}) \dots, \\ t &= 0_3(2t_1)(2t_2) \dots (2t_{2n})(2\tau_{2n+1}) \dots \end{aligned}$$

Por tanto,

$$f(t) - f(t_0) = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau_{2n+2k+1} - t_{2n+2k+1}}{2^{n+2k+1}} \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tau_{2n+2k} - t_{2n+2k}}{2^{n+2k}} \end{pmatrix},$$

de manera que $d(f(t), f(t_0)) < \frac{1}{2^n} \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}} = \frac{\sqrt{2}}{2^n}$. ■

Lebesgue intentó extender esta aplicación $f : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{I}^2$ a todo el intervalo unidad $\mathcal{I}$ de manera continua. De conseguirlo, dado que f ya es suprayectiva, obtendría una curva que rellenaba el cuadrado unidad. Para ello, observó que necesitaba extender f sobre los intervalos que se eliminan en el proceso de construcción del conjunto de Cantor, para lo que utilizó interpolación lineal [8]. Si (p_n, q_n) es uno de los intervalos eliminados del conjunto de Cantor en el n -ésimo paso, entonces f se extiende a ese intervalo mediante:

$$f^*(t) = \frac{1}{q_n - p_n} [f(q_n)(q_n - t) + f(p_n)(t - p_n)], \quad t \in (p_n, q_n),$$

donde las distintas operaciones en realidad se realizan componente a componente.

Teorema 4.6. *La aplicación f^* definida por Lebesgue es continua.*

Demostración.

Si $t_0 \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{C}$, entonces por construcción f^* es continua en t_0 . Por tanto, sea $t_0 \in \mathcal{C}$. Observemos que como f es una aplicación continua sobre un compacto, f es una aplicación uniformemente continua por el Teorema 2.58. Por tanto, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $t_1, t_2 \in \mathcal{C}$ cumplen que $|t_1 - t_2| < \delta$, entonces $d(f(t_1), f(t_2)) < \varepsilon$.

Dado $t \in \mathcal{I}$, existen dos posibilidades: o bien $t \in \mathcal{C}$, o bien $t \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{C}$. Si $t \in \mathcal{C}$, entonces por la continuidad uniforme de f si $|t - t_0| < \delta$ tenemos que:

$$d(f^*(t), f^*(t_0)) = d(f(t_0), f(t)) < \varepsilon.$$

Ahora bien, si $t \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{C}$, entonces $t \in (p, q)$, donde (p, q) es uno de los intervalos que se ha eliminado en la construcción de $\mathcal{C}$, es decir, es tal que $p, q \in \mathcal{C}$ y $(p, q) \subseteq \mathcal{I} \setminus \mathcal{C}$. Por la definición de f^* :

$$f^*(t) - f^*(t_0) = \frac{1}{p - q} [(f(q) - f(t_0))(t - p) + (f(p) - f(t_0))(q - t)],$$

para cada $t \in (p, q)$. Por la Observación 4.2, sabemos que existen intervalos (p, q) arbitrariamente cerca de t_0 . Por tanto, si (p, q) es tal que $t_0 < p < q < t_0 + \delta$, entonces por la continuidad uniforme de f tendremos que:

$$d(f^*(t), f^*(t_0)) < \frac{1}{q - p} (t - p + q - t) \varepsilon = \varepsilon,$$

para todo $t \in (p, q) \subseteq \mathcal{I} \setminus \mathcal{C}$. También podría darse que $t_0 - \delta < p < q < t_0$, en cuyo caso una ligera modificación en la demostración bastaría. ■

Este método para la obtención de una curva que rellenaba el cuadrado unidad fue de hecho lo que inspiró a Hahn para desarrollar el teorema que generalizaría el concepto de curva de Peano y que acabaría llevando su nombre. Precisamente este será el teorema principal que demostraremos en el Capítulo 6.

Capítulo 5

Caracterización del intervalo unidad

Las bases teóricas asentadas en el Capítulo 2 nos han permitido motivar el desarrollo llevado a cabo en este trabajo. En este capítulo las utilizaremos de nuevo, combinándolas para introducir el concepto de continuo métrico. Este nos permitirá posteriormente abstraernos sobre la motivación presentada en los Capítulos 3 y 4 para extenderla a los espacios más generales posibles. Específicamente, tendrá especial importancia la caracterización del intervalo unidad $\mathcal{I}$ que la teoría de continuos métricos nos brindará.

La inspiración principal de este capítulo es el Capítulo 28 de [20].

5.1. Algunos resultados previos

Antes de introducir formalmente el concepto de continuo métrico y sus propiedades, conviene enunciar una serie de resultados que nos serán de utilidad en demostraciones posteriores.

Definición 5.1. Sean $(X, \leq_X)$ e $(Y, \leq_Y)$ dos conjuntos ordenados. Diremos que una aplicación $f : X \rightarrow Y$ es un *isomorfismo de orden* si es biyectiva y además se tiene que $x \leq_X y$ si y sólo si $f(x) \leq_Y f(y)$. Cuando exista un isomorfismo de orden entre dos conjuntos, diremos que los conjuntos son *isomorfos en orden*.

Combinando esta definición con la Definición 2.18, obtenemos como consecuencia directa la siguiente proposición:

Proposición 5.2. Sean X e Y dos conjuntos ordenados. Entonces todo isomorfismo de orden $f : X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo con respecto a las topologías inducidas sobre X e Y por sus respectivos órdenes.

Demostración.

Como f y f^{-1} cumplen las mismas propiedades respecto al orden, veamos que f es continua cuando en X e Y se consideran las topologías asociadas al orden.

Para ver que f es continua, basta con comprobar que la preimagen de los abiertos de una base de Y son abiertos en X . Suponiendo que ni X ni Y tienen elementos máximos ni mínimos, este resultado es directo sin más que ver que como f es isomorfismo de orden, la preimagen de $(a, b) = \{y \in Y : a < y < b\}$ es $f^{-1}((a, b)) = \{x \in X : f^{-1}(a) < x < f^{-1}(b)\} = (f^{-1}(a), f^{-1}(b))$. De tener X o Y elementos extremos, modificando adecuadamente los conjuntos considerados llegaríamos a la misma conclusión. ■

El siguiente teorema consiste en una aplicación del Teorema del Isomorfismo de Cantor a los números diádicos. Si bien este resultado se suele probar utilizando el método conocido como *back-and-forth argument*, falsamente atribuido a Cantor a pesar de haber sido introducido por Hausdorff [18], aquí utilizaremos por simplicidad el método unidireccional original de Cantor [1].

Teorema 5.3. *El conjunto $P = \{\frac{k}{2^n} : n \in \mathbb{N}, k \in \{1, \dots, 2^n - 1\}\}$ de los números diádicos contenidos en el intervalo $(0,1)$ verifica las siguientes propiedades:*

1. *P no tiene mínimo ni máximo.*
2. *Si $p, q \in P$ con $p < q$, existe $r \in P$ tal que $p < r < q$.*
3. *Teorema de Isomorfismo de Cantor: Cualquier conjunto numerable totalmente ordenado D que cumpla las dos propiedades anteriores es isomorfo en orden a P .*

Demostración.

1. Supongamos que P tiene mínimo. Entonces será de la forma $\min P = \frac{k}{2^n}$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y $k = 1, 2, \dots, 2^n - 1$. Sin embargo, es claro que el elemento $\frac{k}{2^{n+1}}$ está también en P y además $\frac{k}{2^{n+1}} < \frac{k}{2^n}$.

Si suponemos que P tiene un elemento máximo M , entonces será de la forma $M = \frac{2^n - 1}{2^n}$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Tenemos la siguiente cadena de desigualdades:

$$2^{n+1} > 2^n \iff 2^{2n+1} - 2^n > 2^{2n+1} - 2^{n+1} \iff \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}} > \frac{2^n - 1}{2^n}.$$

Es claro que el elemento $\frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}}$ también pertenece a P y es mayor que M , luego P no puede tener máximo.

2. Como $p < q$, tenemos que $q - p > 0$, y que $\frac{1}{q-p} \in \mathbb{R}$. Por la propiedad arquimediana de los números reales, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $m > \frac{1}{q-p}$. Además, nótese que $2^m > m > \frac{1}{q-p}$. Sea $\mathcal{M} = \{x \in \mathbb{N} : x > p2^m\}$. Como $\mathcal{M}$ es un subconjunto de los números naturales acotado inferiormente, por el Principio de Buen Orden posee un elemento mínimo $k = \min \mathcal{M}$. Al ser k el elemento mínimo de $\mathcal{M}$, se cumple que $k > p2^m$, por lo que $\frac{k}{2^m} > p$, y que $k - 1 \leq p2^m$. A partir de esta última desigualdad obtenemos:

$$k - 1 \leq p2^m \implies k \leq p2^m + 1 \implies \frac{k}{2^m} \leq p + \frac{1}{2^m} < p + (q - p) = q.$$

En resumen, obtenemos que $p < \frac{k}{2^m} < q$.

3. Sea D un conjunto numerable totalmente ordenado cumpliendo las dos propiedades anteriores. Como tanto P como D son numerables, podemos escribir los conjuntos $P = \{p_1, p_2, p_3, \dots\}$ y $D = \{d_1, d_2, d_3, \dots\}$. Observemos que el orden en el que aparecen los elementos en la escritura anterior no tiene por qué estar relacionado con las relaciones de orden de ninguno de los conjuntos. Construiremos un isomorfismo de orden $f : P \longrightarrow D$ entre ambos conjuntos definido elemento a elemento.

Definamos inicialmente $f(p_1) = d_1$. Ahora consideremos el elemento p_2 de P . Si $p_2 > p_1$, entonces definimos $f(p_2) = d_j$, donde j es el menor índice de la enumeración de D tal que $d_j > d_1$. Si por el contrario $p_2 < p_1$, elegimos un elemento de D acorde. Dado $n \in \mathbb{N}$, supongamos definida la aplicación f para los elementos p_i con índice $i < n$. Entonces definimos $f(p_n) = d_m$, donde d_m es el primer elemento de $\{d_1, d_2, d_3, \dots\} \setminus \{f(p_1), f(p_2), \dots, f(p_{n-1})\}$ tal que d_m cumple las mismas relaciones con respecto a los elementos del conjunto $\{f(p_1), f(p_2), \dots, f(p_{n-1})\}$ que p_n con respecto a los del conjunto $\{p_1, p_2, \dots, p_{n-1}\}$.

Explicuemos a qué nos referimos con esta última afirmación. Si se cumple que $p_i < p_n$ para todo $i < n$, entonces d_m debe ser el primer elemento de la enumeración de D (no utilizado ya en la construcción de f) tal que $f(p_i) < d_m$ para todo $i < n$. La observación es similar si $p_n < p_i$ para todo $i < n$. Si por otra parte resulta que existen índices i, j con $1 \leq i, j \leq n-1$ tales que $p_i < p_n < p_j$, entonces d_m debe ser el primer elemento de la enumeración de D (no utilizado ya en la construcción de f) tal que $f(p_i) < d_m < f(p_j)$.

Por construcción, esta aplicación es inyectiva. Veamos que también es suprayectiva. Sea d_m el primer elemento de la enumeración de D tal que d_m no es la imagen de ningún elemento de P . Entonces para todo $j < m$ existe $p \in P$ con $f(p) = d_j$. Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $f(p_k) = d_{m-1}$. Entonces los elementos $\{f(p_1), f(p_2), \dots, f(p_k)\}$ forman los extremos de $k+1$ intervalos en D . Suponiendo $p_1 < p_2 < \dots < p_k$, lo que podemos hacer simplemente reordenando la enumeración, tenemos que estos intervalos serán de la forma $(-\infty, f(p_1))$, $(f(p_k), \infty)$ o $(f(p_i), f(p_{i+1}))$ para $2 \leq i \leq k-1$. Dado que D es un conjunto totalmente ordenado, y_m pertenecerá a alguno de estos intervalos. Además, estos intervalos tienen sus correspondientes intervalos $(-\infty, p_1)$, (p_1, p_2) , $\dots$, (p_k, ∞) en P . Dado que para todo par de elementos $p, q \in P$ existe un elemento $r \in P$ con $p < r < q$, sabemos que en algún momento de la construcción encontraremos un elemento que se encuentre en el intervalo de P asociado al intervalo de D en el que se encuentra y_m . Si p_{i_0} es el primer elemento con $i_0 > k$ para el que esto ocurre, entonces basta con definir $f(p_{i_0}) = y_m$. ■

Corolario 5.4. *El conjunto P es homeomorfo al conjunto de los racionales $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$.*

Ya mencionamos en la Sección 2.3 que la unión de conexos en general no genera un espacio conexo. Esto mismo ocurre con la intersección. Los siguientes resultados dan condiciones bajo las que esta última operación entre conjuntos dará lugar a un espacio conexo.

Teorema 5.5. *Sean X un espacio métrico compacto y $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una familia de conjuntos no vacíos cerrados y conexos tales que $A_{n+1} \subseteq A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ es un espacio compacto y conexo.*

Demostración.

Hagamos varias observaciones:

- La familia $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene la propiedad de la intersección finita y como X es compacto, A será no vacío por el Teorema 2.32.

- A es cerrado por ser intersección de cerrados y X es compacto, luego A será compacto por el apartado 2 de la Proposición 2.27.
- Por la Proposición 2.30, X es normal al ser un espacio métrico (en particular, Hausdorff) y compacto.

Supongamos que A no es conexo. Entonces existen dos conjuntos disjuntos y no vacíos H y K que son cerrados en A (y por lo tanto también en X por ser A cerrado) tales que $A = H \cup K$. Como X es normal, existen dos conjuntos U y V abiertos en X y disjuntos tales que $H \subseteq U$ y $K \subseteq V$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $A_n \not\subseteq U \cup V$, porque en caso contrario, como $H = A \cap H \subseteq A \cap U \subseteq A_n \cap U$, y tendríamos que $A_n \cap U \neq \emptyset$ y de forma similar $A_n \cap V \neq \emptyset$, contradiciendo la conexión de A_n . Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos tomar $x_n \in A_n \setminus (U \cup V)$. De esta forma obtenemos una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en X . Por el Lema 2.65, el conjunto $S = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ tiene un punto de acumulación $x \in X$.

Tomamos W un entorno abierto de x , por la Observación 2.60 sabemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in W$ para todo $n \geq N$, y por lo tanto $W \cap A_n \neq \emptyset$ para todo $n \geq N$. Es decir, $x \in \overline{A_n} = A_n$ para todo $n \geq N$. Por lo tanto, $x \in A \subseteq U \cup V$. Pero tenemos que $U \cup V$ es un entorno abierto de x que no contiene a ningún elemento de la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ por la propia construcción de la sucesión. Entonces tenemos una contradicción, y por lo tanto, A debe ser conexo. ■

Se puede probar una versión más general del resultado anterior cuando tenemos una familia de conjuntos que forma un conjunto dirigido por la inclusión. Recordemos la definición de conjunto dirigido:

Definición 5.6. Un conjunto Λ es un conjunto dirigido si existe una relación $\leq$ en Λ verificando:

1. $\lambda \leq \lambda$ para cada $\lambda \in \Lambda$.
2. Si $\lambda_1 \leq \lambda_2$ y $\lambda_2 \leq \lambda_3$ entonces $\lambda_1 \leq \lambda_3$.
3. Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, entonces existe $\lambda_3 \in \Lambda$ con $\lambda_1 \leq \lambda_3$ y $\lambda_2 \leq \lambda_3$.

Así, el resultado que generaliza el Teorema 5.5 se puede enunciar de la forma siguiente:

Teorema 5.7. Sean X un espacio métrico compacto y $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de conjuntos no vacíos cerrados y conexos de X que forman un conjunto dirigido por la inclusión, entonces el espacio $A = \bigcap_{i \in I} A_i$ es compacto y conexo.

La demostración de este resultado es similar a la del Teorema 5.5 pero en ella se hace uso de la convergencia en espacios topológicos utilizando redes, que extienden la noción de sucesión a un espacio topológico cualquiera [7]. Una prueba de este teorema puede encontrarse en [20] (Cap.8, Sec. 28, pág. 203, Theorem 28.2).

El último concepto a introducir en esta sección es el de corte de Dedekind.

Definición 5.8. Un *corte de Dedekind* es un subconjunto $A \subseteq \mathbb{Q}$ cumpliendo las siguientes condiciones:

1. A es un subconjunto propio, es decir, A no es $\emptyset$ ni $\mathbb{Q}$.
2. Dados $p \in A$ y $q \in \mathbb{Q}$, si $q < p$, entonces $q \in A$.
3. Para todo $p \in A$, existe $q \in A$ con $p < q$.

Este concepto fue introducido por dicho matemático a finales del s. XIX con el objetivo de dar al análisis real un fundamento formal ajeno a la intuición geométrica. Así, los cortes de Dedekind permiten construir formalmente el conjunto de los números reales a partir de los racionales definiendo $\mathbb{R} = \{A \subseteq \mathbb{Q} : A \text{ es un corte de Dedekind}\}$ [19].

Ejemplos.

- Para incluir a los números racionales en $\mathbb{R}$, se identifica $q \in \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ con el corte de Dedekind $A_q = \{x \in \mathbb{Q} : x < q\}$.
- El número irracional $\sqrt{2}$ viene representado por el corte de Dedekind $A_{\sqrt{2}} = \{x \in \mathbb{Q} : x < 0 \text{ o } x^2 < 2\}$.

De hecho, aunque hemos definido los cortes de Dedekind con respecto a $\mathbb{Q}$, el Corolario 5.4 nos permite identificar cada corte de Dedekind de los racionales con un corte de Dedekind contenido íntegramente en el conjunto P definido en el enunciado del Teorema 5.3. Dado un isomorfismo de orden $f : P \rightarrow \mathbb{Q}$, podríamos identificar el corte de Dedekind $A_r \subseteq \mathbb{Q}$ asociado a $r \in \mathbb{R}$ con un nuevo corte de Dedekind $f^{-1}(A_r) \subseteq P$, de manera que podríamos construir los números reales a partir de los números diádicos contenidos en el intervalo $(0, 1)$. Específicamente para el resultado que caracterizará el intervalo unidad $\mathcal{I}$, nos bastará con utilizar este método para la construcción de los números reales contenidos en el propio $\mathcal{I}$.

5.2. Continuos métricos

Los continuos métricos combinan múltiples características de las vistas a lo largo del Capítulo 2, lo que les otorga gran cantidad de propiedades. Esto permite caracterizar conjuntos como el intervalo unidad o la circunferencia. La caracterización del primero será el objetivo de esta sección, tal y como se ha adelantado al introducir el capítulo. Al contar ya con los resultados necesarios, podemos definir el concepto al que esta sección está dedicada.

Definición 5.9. Un espacio métrico K es un *continuo métrico* si es compacto y conexo.

Ejemplos.

- El intervalo $\mathcal{I}$ es un continuo métrico. De hecho, dado que los intervalos son los únicos subconjunto conexos de $\mathbb{R}$, por el Teorema de Heine-Borel los únicos continuos métricos de $\mathbb{R}$ son los intervalos cerrados y acotados.
- La circunferencia unidad $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ es un continuo métrico.
- El producto de continuos métricos es un continuo métrico.

En el Capítulo 2 se mencionó la importancia que las propiedades de compacidad y conexión tenían en la topología general. Esto se pudo comprobar al ver la cantidad de resultados y propiedades con que estas dotaban a los espacios que las poseían por separado. Al combinarlas, obtenemos espacios con una amplia gama de propiedades de las cuales aquí nos limitaremos a presentar aquellas que nos permitirán caracterizar el intervalo unidad.

Corolario 5.10. *Todo continuo métrico es separable.*

Demostración.

Por definición, un continuo métrico es compacto y métrico. Por el Teorema 2.51, un espacio métrico compacto es II-AN, y por el Teorema 2.15 un espacio II-AN es separable. ■

La siguiente definición será vital para la caracterización de los continuos métricos. La nomenclatura que seguiremos para ella será la encontrada en [6].

Definición 5.11. Dado un espacio conexo X , diremos que $p \in X$ es un *punto separador* de X si $X \setminus \{p\}$ no es conexo. En caso contrario, diremos que p es un *punto no separador*. Una *cortadura* de X es un conjunto $\{p, U, V\}$, donde p es un punto separador y U, V son abiertos disjuntos no vacíos tales que $X \setminus \{p\} = U \cup V$.

Es clara la proximidad entre el concepto de cortadura que se acaba de definir y el de corte de Dedekind dado en la Definición 5.8. Por ejemplo, consideremos el corte de Dedekind $A_{\sqrt{2}} = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ asociado al número $\sqrt{2}$. Definiendo $B_{\sqrt{2}} = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 > 2\}$, tenemos que $\{\sqrt{2}, A_{\sqrt{2}}, B_{\sqrt{2}}\}$ es una cortadura de $\mathbb{R}$.

Continuemos estudiando las propiedades de los continuos métricos y, en particular, las del concepto que acabamos de definir.

Lema 5.12. *Sean K un continuo métrico y $\{p, U, V\}$ una cortadura de K . Entonces $U \cup \{p\}$ y $V \cup \{p\}$ son continuos métricos.*

Demostración.

Basta con probar este resultado para el conjunto $U \cup \{p\}$, ya que para $V \cup \{p\}$ se prueba de manera análoga.

Consideramos en $U \cup \{p\}$ la topología de subespacio de K y definimos la aplicación $f : K \rightarrow U \cup \{p\}$ de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in U \cup \{p\} \\ p & \text{si } x \in V \cup \{p\} \end{cases}$$

donde consideramos la topología de subespacio de K en ambos. Nótese que, como U, V son abiertos y $U \cup \{p\} \cup V = K$, entonces los conjuntos $U \cup \{p\}$ y $V \cup \{p\}$ son ambos cerrados, y además $(U \cup \{p\}) \cap (V \cup \{p\}) = \{p\}$. Como f actúa como la aplicación identidad sobre $U \cup \{p\}$ y como la aplicación constante sobre $V \cup \{p\}$, por el Lema de Pegado (Teorema 2.21), f es continua. Por tanto, $f(K) = U \cup \{p\}$ es conexo y compacto por el apartado 4 de la Proposición 2.27 y por el Lema 2.42. Además $U \cup \{p\}$ es un subespacio métrico de K . Luego $U \cup \{p\}$ es un continuo métrico. ■

Lema 5.13. *Sea K un continuo métrico y $\{p, U, V\}$ una cortadura de K . Entonces los abiertos U y V contienen cada uno al menos un punto no separador de K .*

Demostración.

Supongamos que para todo $x \in U$, el punto x es un punto separador de K y denotemos por $\{x, U_x, V_x\}$ la cortadura de K asociada al punto x . Si se cumple que $U_x \cap (V \cup \{p\}) \neq \emptyset$ y que $V_x \cap (V \cup \{p\}) \neq \emptyset$, entonces $V \cup \{p\}$ no sería conexo, lo que no puede ocurrir por el Lema 5.12. Por tanto, supongamos sin pérdida de generalidad que $U_x \subseteq U$. De nuevo por el Lema 5.12, tenemos que para cada $x \in U$, el conjunto $U_x \cup \{x\}$ es un continuo. Además, se cumple que el conjunto $\{U_x \cup \{x\} : x \in U\}$ es un conjunto dirigido por la inclusión (ver demostración en el Lema 5.14). Consideremos el conjunto $\bigcap_{x \in U} (U_x \cup \{x\})$.

Por el Teorema 2.32, tenemos que este conjunto es no vacío. Por el Corolario 2.28, este conjunto es también compacto. Finalmente, por el Teorema 5.7, se cumplirá que es conexo. Por tanto, el conjunto $\bigcap_{x \in U} (U_x \cup \{x\})$ es un continuo no vacío contenido en U .

Sea $q \in \bigcap_{x \in U} (U_x \cup \{x\})$, entonces $U_q \subseteq U$ y si $r \in U_q$, se cumple que $q \notin U_r$ ya que de otra manera $V_q \cup \{q\}$ no sería conexo. Por tanto, $q \notin U_r \cup \{r\}$, pero hemos tomado $q \in \bigcap_{x \in U} (U_x \cup \{x\})$, por lo que tenemos una contradicción, y debe existir al menos un punto no separador en U . ■

Con las hipótesis de la demostración del Lema 5.13, tenemos lo siguiente:

Lema 5.14. *El conjunto $\{U_x \cup \{x\} : x \in U\}$ es un conjunto dirigido.*

Demostración.

Queremos probar que dados $x, y \in U$ con $x \neq y$, se tiene que

$$\text{o bien } U_x \cup \{x\} \subseteq U_y \cup \{y\} \quad \text{o bien } U_y \cup \{y\} \subseteq U_x \cup \{x\} \quad (5.1)$$

Supongamos que ninguna de estas inclusiones se da. Supongamos que $y \notin U_x$, luego tenemos que

$$(U_x \cup \{x\}) \cap U_y \neq \emptyset \quad \text{y} \quad (U_x \cup \{x\}) \cap V_y \neq \emptyset$$

lo que contradice que el conjunto $U_x \cup \{x\}$ sea conexo. Si tenemos que $y \in U_x$, entonces podemos usar que

$$(U_y \cup \{y\}) \cap U_x \neq \emptyset \quad \text{y} \quad (U_y \cup \{y\}) \cap V_x \neq \emptyset$$

y en este caso tenemos una contradicción con el hecho de que $U_y \cup \{y\}$ sea conexo. ■

La Definición 5.11 da lugar a la siguiente noción, que resulta bastante intuitiva:

Definición 5.15. Sean X un espacio conexo, $a, b \in X$ y $p \in X$ un punto separador. Se dice que p separa a a de b si existe una cortadura $\{p, U, V\}$ con $a \in U$ y $b \in V$. Denotaremos por $E(a, b)$ al conjunto formado por a, b y todos los puntos que separan a a de b .

Esta propiedad es clara en el intervalo unidad: dados $p, q \in \mathcal{I}$, considerando cualquier elemento $r \in \mathcal{I}$ con $p < r < q$ podemos obtener una cortadura $\{p, [0, p), (p, 1]\}$ de manera que cada uno de los puntos p, q se encuentre en un abierto distinto. Observemos que hemos mezclado la relación de orden usual sobre $\mathcal{I}$ con la noción de separación en un continuo métrico. Tal y como veremos en las siguientes definiciones y resultados, resulta que el concepto de puntos separadores permite definir una relación de orden que será de gran importancia en los continuos métricos.

Definición 5.16. Se define la siguiente relación sobre $E(a, b)$:

$$p_1 \leq p_2 \iff p_1 = p_2, \text{ o } p_1 \text{ separa } a \text{ de } p_2.$$

La relación $\leq$ se denomina *orden de separación* sobre $E(a, b)$.

Veamos que en efecto la relación $\leq$ sobre $E(a, b)$ cumple las condiciones requeridas para ser una relación de orden parcial:

1. Reflexiva: Dado $p \in E(a, b)$, es obvio que $p \leq p$ por la propia definición de la relación.
2. Antisimétrica: Sean $p, q \in E(a, b)$ con $p \leq q$ y $q \leq p$. Siguiendo la notación utilizada hasta ahora, sean $\{p, U_p, V_p\}$ y $\{q, U_q, V_q\}$ las cortaduras asociadas a cada uno de los elementos. Como $p \leq q$, se cumple que $a \in U_p$ y $q \in V_q$. Análogamente, tenemos que $p \in V_q$. Por el Lema 5.12, tenemos que $\{p\} \cup V_p$ es conexo, luego debe ser $\{p\} \cup V_p \subseteq V_q$. De manera análoga, debe cumplirse que $\{q\} \cup V_q \subseteq V_p$. Por tanto, la única posibilidad es que sea $p = q$.
3. Transitiva: Sean $p, q, r \in E(a, b)$ con $p \leq q$ y $q \leq r$. Si $p = q$ o $q = r$, es obvio que la propiedad transitiva se da. Por tanto, supongamos que los tres elementos son distintos entre sí. Por definición, si $p \leq q$ entonces p separa a de q , es decir, podemos escribir $X \setminus \{p\} = U_p \cup V_p$ con $a \in U_p$ y $q \in V_p$. De igual manera, como q separa a de r , podemos escribir $X \setminus \{q\} = U_q \cup V_q$ con $a \in U_q$ y $r \in V_q$. Por el Lema 5.12, sabemos que $\{q\} \cup V_q$ es conexo. Como $\{q\} \cup V_q \subseteq X \setminus \{p\} = U_p \cup V_p$ y $q \in V_p$, entonces $\{q\} \cup V_q \subseteq V_p$. Luego $r \in V_p$, por lo que $p \leq r$.

De hecho, esta relación de orden sobre $E(a, b)$ da lugar a un orden total.

Proposición 5.17. *El orden de separación sobre $E(a, b)$ es un orden total.*

Demostración.

Sea $\{p, U_p, V_p\}$ una cortadura de X con $a \in U_p$ y $b \in V_p$ para cada $p \in E(a, b)$.

Sean $r, s \in E(a, b) \setminus \{a, b\}$ con $r \neq s$. Como $X = U_r \cup \{r\} \cup V_r$, se cumple que o bien $s \in U_r$, o bien $s \in V_r$. Si $s \in V_r$, entonces r separa a de s , por lo que $r < s$. Supongamos ahora que $s \in U_r$. El conjunto $V_r \cup \{r\}$ es conexo por el Lema 5.12 y como $V_r \cup \{r\} \subseteq U_s \cup V_s$, $V_r \cup \{r\}$ debe estar contenido exclusivamente en U_s o en V_s . Como $b \in V_r \cup \{r\}$, se tiene que $V_r \cup \{r\} \subseteq V_s$. Por tanto, s separa r de a , luego $s < r$. ■

El siguiente resultado relaciona la topología inducida por el orden de separación en el espacio $E(a, b)$ con la topología del espacio K bajo condiciones muy concretas. No obstante, un espacio que satisfará estas condiciones será precisamente el intervalo unidad, por lo que el siguiente lema resultará clave para su caracterización.

Lema 5.18. *Sea K un continuo métrico con exactamente dos puntos no separadores a y b . Entonces $E(a, b) = K$ y la topología τ sobre K coincide con la topología $\tau_{\leq}$ inducida por el orden de separación.*

Demostración.

Si $p \in K$ y no es ni a ni b , entonces es un punto separador, dando lugar a una cortadura $\{p, U_p, V_p\}$. Entonces por el Lema 5.13 cada uno de los abiertos de la cortadura contiene un punto separador, luego $p \in E(a, b)$ y se tiene que $E(a, b) = K$.

Veamos primero que $\tau_{\leq} \subseteq \tau$. Sea $p \in E(a, b)$ con cortadura asociada $\{p, U_p, V_p\}$. Como U_p y V_p son abiertos en K , tenemos que $U_p \cap E(a, b)$ y $V_p \cap E(a, b)$ serán abiertos en $E(a, b)$. Además, para cualquier $q \in U_p \cap E(a, b)$ con cortadura asociada $\{q, U_q, V_q\}$ se cumple que $a \in U_q$ y que, como $\{q\} \cup U_q$ es conexo, $\{q\} \cup U_q \subseteq U_p$, luego $p \in V_q$ y $q < p$. En resumen, $U_p \cap E(a, b) = \{q \in E(a, b) : q < p\}$. Análogamente, $V_p \cap E(a, b) = \{q \in E(a, b) : p < q\}$.

Veamos ahora que $\tau \subseteq \tau_{\leq}$. Como queremos ver que U es abierto en $\tau_{\leq}$ basta ver que dado $p \in U$, existe un intervalo $(r, s) = \{q \in K : r < q < s\}$ con $p \in (r, s) \subseteq U$ (Definición 2.18). Supongamos que existe $p \in U$ tal que no existe ningún intervalo que contenga a p y esté contenido en U . Entonces, para todo intervalo $[r, s] = \{q \in K : r \leq q \leq s\}$ con $p \in [r, s]$ se tiene que $[r, s] \cap (K \setminus U) \neq \emptyset$. Observemos que como ya hemos probado que $\tau_{\leq} \subseteq \tau$, los conjuntos $[r, s]$ son cerrados en (K, τ) , luego

$$C = \{[r, s] \cap (K \setminus U) : p \in (r, s), r, s \in K\}$$

es una familia de cerrados que tiene la propiedad de la intersección finita. Para ver esto último podemos considerar una subfamilia finita de estos conjuntos, $\{[r_i, s_i] \cap (K \setminus U)\}_{i=1}^m$. Tomando $R = \max\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ y $S = \min\{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ tenemos que

$$\bigcap_{i=1}^m ([r_i, s_i] \cap (K \setminus U)) = [R, S] \cap (K \setminus U)$$

Como K es compacto, por el Teorema 2.32 se tiene que la intersección de los conjuntos de la familia C es no vacía. Sin embargo, tenemos por una parte que

$$\bigcap_{\substack{p \in (r, s) \\ r, s \in K}} [r, s] = \{p\}$$

y por otra que $p \in U$, luego no es posible que

$$\bigcap_{\substack{p \in (r, s) \\ r, s \in K}} ([r, s] \cap (K \setminus U)) = \{p\}$$

■

Como hemos ido adelantando, el intervalo unidad tiene la característica de tener únicamente dos puntos no separadores. Precisamente esto es lo que nos permitirá caracterizarlo.

Teorema 5.19. *Sea K un continuo métrico con únicamente dos puntos no separadores. Entonces K es homeomorfo al intervalo unidad $\mathcal{I} = [0, 1]$.*

Demostración.

Sean a y b los dos puntos no separadores de K , y $D \subseteq K$ un subconjunto numerable denso tal que $a \notin D$ y $b \notin D$, que existe por el Corolario 5.10. Observamos que:

1. D no tiene elemento mínimo ni máximo. Si tuviera un máximo $M = \max D$, tendríamos que el conjunto $\{x \in K : x > M\}$ sería un abierto en K que no interseca a D , luego D no sería denso en K . Suponiendo que D tiene mínimo se llega a una contradicción similar.

2. Dados $p, q \in D$ con $p < q$, existe un elemento $r \in D$ con $p < r < q$. De no ser así, dados $p, q \in D$ incumpliendo la condición mencionada tendríamos que el abierto de K dado por (p, q) no intersecaría a D , y de nuevo D no sería denso en K .

Por el Teorema 5.3, D es homeomorfo al conjunto P de los número diádicos en el intervalo $(0, 1)$. Sea $f : D \rightarrow P$ un isomorfismo de orden.

Cada punto $p \in K$ con $p \neq a, b$ es un punto separador, luego podemos escribir $K \setminus \{p\} = U_p \cup V_p$ con U_p, V_p dos conjuntos abiertos disjuntos no vacíos tales que $a \in U_p$ y $b \in V_p$. Si $f(U_p \cap D)$ es un corte de Dedekind de los racionales diádicos, determinará un único elemento $F(p)$ de $(0, 1)$. Veamos que en efecto dicho conjunto cumple las condiciones para ser un corte de Dedekind dadas en la Definición 5.8:

1. Como U_p y V_p son no vacíos y abiertos, entonces $U_p \cap D$ es un subconjunto propio de D y por tanto $f(U_p \cap D)$ es un subconjunto propio de P .
2. Sean $x \in f(U_p \cap D)$ e $y \in P$ con $y < x$. Como f es isomorfismo de orden, se cumple que $f^{-1}(y) < f^{-1}(x)$, es decir, $f^{-1}(y)$ separa a de $f^{-1}(x)$ y podemos escribir $K \setminus \{f^{-1}(y)\} = U_{f^{-1}(y)} \cup V_{f^{-1}(y)}$ con $a \in U_{f^{-1}(y)}$ y $f^{-1}(x) \in V_{f^{-1}(y)}$. Como $f^{-1}(y) \cup V_{f^{-1}(y)}$ es conexo y $b \in \{f^{-1}(y)\} \cup V_{f^{-1}(y)}$, entonces $\{f^{-1}(y)\} \cup V_{f^{-1}(y)} \subseteq V_p$ y entonces $f^{-1}(x) \in V_p$, pero entonces $f(x) \in f(V_p \cap D)$ y esto contradice que $f(x) \in f(U_p \cap D)$.
3. Sea $x \in f(U_p \cap D)$. Supongamos que no existe $y \in f(U_p \cap D)$ con $x < y$. Entonces $x = \max f(U_p \cap D)$ y por tanto $f^{-1}(x) = \max\{U_p \cap D\}$. Sea $q \in U_p$ con $q < f^{-1}(x)$. Entonces si q tiene una cortadura asociada $\{q, U_q, V_q\}$, tenemos que $a \in U_q$ y $f^{-1}(x) \in V_q$. Además, como $b \in V_q$ y $\{q\} \cup V_q$ es conexo por el Lema 5.12, tendríamos que $\{q\} \cup V_q \subseteq B_p$. Por tanto, tendríamos que $f^{-1}(x) \in V_p$, pero $f^{-1}(x) \in U_p$ y $U_p \cap V_p = \emptyset$, luego hemos llegado a una contradicción.

Utilizando lo anterior y definiendo $F(a) = 0$ y $F(b) = 1$, finaliza la extensión de f a un isomorfismo de orden F entre K e $\mathcal{I}$, y por tanto a un homeomorfismo entre K e $\mathcal{I}$ por la Proposición 5.2. ■

Capítulo 6

Espacios de Peano

En este capítulo presentamos finalmente los espacios topológicos que dan título a este trabajo: los espacios de Peano. Para poder probar el Teorema de Hahn-Mazurkiewicz será necesario estudiar detalladamente las distintas nociones de conexión que satisfarán este tipo de espacios. Para obtener su demostración, reciclaremos en realidad los argumentos utilizados en el Capítulo 4. Si bien Lebesgue contó con la ventaja del buen comportamiento del espacio $\mathcal{I}^2$, la introducción de dos nuevas nociones de conexión local nos permitirán extender su método a espacios más generales. Como ya se mencionó en la introducción, seguiremos la estructura del Capítulo 31 del texto de S. Willard [20].

Sin más dilación, definamos los espacios de Peano.

Definición 6.1. Un *espacio de Peano* X es un espacio métrico compacto, conexo y localmente conexo.

Nótese que, a consecuencia de la Proposición 2.30, un espacio de Peano será también tanto regular como normal. Veamos otras propiedades que satisfacen los espacios de Peano.

Teorema 6.2. *Todo espacio de Peano es conexo por arcos.*

Demostración.

Sea X un espacio de Peano y consideramos $a, b \in X$. Como X es un espacio métrico, podemos considerar el recubrimiento de X dado por $\{B(x; \frac{1}{2}) : x \in X\}$. Podría suceder que alguna de las bolas $B(x; \frac{1}{2})$ no fuera conexa, entonces consideramos la componente conexa B_x de x en $B(x; \frac{1}{2})$ para cada x , que es abierta porque X es localmente conexa (Proposición 2.38). Por el Teorema 2.41 aplicado al recubrimiento $\{B_x\}_{x \in X}$, sabemos que existe una cadena simple uniendo a y b . Denotemos por $U_{11}, U_{12}, \dots, U_{1n_1}$ a los elementos del recubrimiento que forman la cadena simple. Observemos que por la Proposición 2.36, apartado 3, el abierto $U_1 = \bigcup_{i=1}^n U_{1i}$ es conexo.

Como X es un espacio regular, para cada $p \in U_{1i}$ existe un abierto V_p^1 con $p \in V_p^1 \subseteq \overline{V_p^1} \subseteq U_{1i}$ por el Lema 2.12. Además, podemos suponer que V_p^1 es conexo por ser X un espacio localmente conexo. También podemos exigir que V_p^1 tenga diámetro menor que $\frac{1}{2}$ porque en caso contrario, tendríamos que $p \in B(x, \frac{1}{4}) \subseteq V_p^1$ y podríamos sustituir V_p^1 por esta bola ya que cumpliría todas las condiciones.

Si tenemos un punto $U_{1i} \cap U_{1i+1}$, el abierto V_p^1 anterior se puede elegir de forma que $p \in V_p^1 \subseteq \overline{V_p^1} \subseteq U_{1i} \cap U_{1i+1}$. Haciendo esto para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, obtenemos

un recubrimiento $\{V_p^1\}_{p \in U_1}$ de U_1 y de nuevo podemos aplicar el Teorema 2.41 para cada par de puntos de U_1 . Tomemos $x_i \in U_{1i} \cap U_{1i+1}$ con $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ y denotemos $x_0 = a$, $x_n = b$. Entonces, podemos obtener una cadena simple formada por conjuntos V_p^1 uniendo x_i y x_{i+1} para cada $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Para obtener una cadena simple que una a con b hay que asegurarse de que se cumpla la condición sobre las intersecciones de términos consecutivos (Definición 2.40). Por ello, se deben tomar todos los elementos de la cadena uniendo a con x_1 hasta el primer abierto U que interseque algún elemento de la cadena uniendo x_1 con x_2 , omitiendo el resto de elementos de la primera cadena. Esto se debe repetir con cada una de las cadenas. Esto resulta en una cadena $U_{21}, U_{22}, \dots, U_{2n_2}$ de abiertos conexos de diámetro menor que $\frac{1}{2^2}$, cumpliendo que, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, existe un $j \in \{1, \dots, n_1\}$ tal que $\overline{U_{2j}} \subseteq U_{1i}$.

Para cada k , podemos considerar la unión de las clausuras de los elementos de la k -ésima cadena, es decir, $C_k = \bigcup_{i=1}^{n_k} \overline{U_{ki}}$. Nótese que cada C_k es unión finita de conjuntos cerrados, por lo que será también cerrado. Además, por el apartado 3 de la Proposición 2.36, cada C_k será también conexo. Sea $C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$. Como C es una intersección de cerrados, será también cerrado. Además, como X es un espacio de Peano, en particular es métrico, por lo que también es Hausdorff, y compacto. Por tanto, C también es compacto. Por otra parte, la familia $\{C_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ cumple las condiciones del Teorema 5.5 por construcción, por lo que C será además conexo. Por tanto, C es un continuo métrico. Si verificamos que a y b son los dos únicos puntos no separadores de C , entonces por el Teorema 5.19 tendremos que C es un arco entre a y b .

Sea $x \in C \setminus \{a, b\}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, tenemos que x pertenece como mucho a dos elementos de la k -ésima cadena, es decir, o existe $j \in \{1, 2, \dots, n_k\}$ con $x \in U_{kj}$, o bien $x \in U_{kj} \cap U_{k,j+1}$. Sean $A_k = \bigcup_{i=1}^{j-1} U_{ki}$ y $B_k = \bigcup_{i=j+1}^{n_k} U_{ki}$ o $B_k = \bigcup_{i=j+2}^{n_k} U_{ki}$, según se requiera. A partir de estos conjuntos podemos definir los siguientes:

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \cap C)$$

$$B = \bigcup_{k=1}^{\infty} (B_k \cap C)$$

Como para cada $k \in \mathbb{N}$ tanto A_k como B_k son uniones de conjuntos abiertos en X , ambos serán también abiertos en X y por tanto $A_n \cap C$ y $B_n \cap C$ serán abiertos en C con la topología de subespacio. Consecuentemente, tanto A como B serán abiertos en C . Ambos son no vacíos porque $a \in A$ y $b \in B$ y por construcción también son disjuntos. Además, $C \setminus \{x\} = A \cup B$, luego a, b son los únicos puntos no separadores de C . ■

De hecho, a raíz de este teorema podemos deducir que no sólo los espacios de Peano son conexo por arcos, sino que también lo es cualquiera de sus subconjuntos abiertos.

Corolario 6.3. *Sean X un espacio de Peano y $U \subseteq X$ un abierto conexo. Entonces U es conexo por arcos.*

Demostración.

Se puede adaptar todo lo hecho en la demostración del teorema anterior, tomando dos puntos $a, b \in U$. ■

Antes de proseguir, introduzcamos dos nuevas nociones de conexión, distintas aunque relacionadas con alguna de las tres ya presentadas en la Sección 2.3. Estas nociones fueron apareciendo tras la primera demostración del teorema central a este trabajo obtenida por Hahn, según matemáticos como Sierpiński o Mazurkiewicz continuaban estudiando este problema [9] [16]. Estas resultarían tan útiles en la demostración del Teorema de Hahn-Mazurkiewicz que incluso el propio Hahn mencionó que, de haberlas utilizado inicialmente como definición de conexión local, se habría ahorrado bastante trabajo [3].

Definición 6.4. Un espacio métrico X se dice *uniformemente localmente conexo* si dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo par de elementos $x, y \in X$ con $d(x, y) < \delta$, existe un conjunto conexo $A \subseteq X$ con $\text{diam}(A) < \varepsilon$ tal que $x, y \in A$. Si para cada par de puntos en vez de un conjunto conexo se tiene que hay un arco uniendo dichos puntos cumpliendo el resto de condiciones, entonces X se dice *uniformemente localmente conexo por arcos*.

Tendremos que de hecho los espacios de Peano poseen las dos propiedades que acabamos de definir.

Lema 6.5. *Si X es un espacio de Peano, entonces X es uniformemente localmente conexo.*

Demostración.

Sea $\varepsilon > 0$. Como X es un espacio métrico, podemos tomar un recubrimiento abierto del espacio mediante conjuntos abiertos de diámetro menor que ε ; bastaría tomar $\{B(x, \frac{\varepsilon}{3})\}_{x \in X}$. De hecho, como el espacio es localmente conexo, al igual que hemos hecho en la demostración del Teorema 6.2, podemos quedarnos con la componente conexa V_x de x en $B(x, \frac{\varepsilon}{3})$, que es abierta por la Proposición 2.38, y considerar el recubrimiento $\{V_x\}_{x \in X}$. Por compacidad, podemos obtener un subrecubrimiento finito $\{V_1, \dots, V_n\}$. Sea δ el número de Lebesgue asociado al subrecubrimiento finito (Teorema 2.52). Entonces, si $d(x, y) < \delta$, como se tiene que $x, y \in B(x, \frac{\delta}{2})$, debe existir $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tal que $x, y \in V_{i_0}$. ■

Proposición 6.6. *Si X es un espacio de Peano, entonces X es uniformemente localmente conexo por arcos.*

Demostración.

Por el Lema 6.5, X es uniformemente localmente conexo. Por tanto, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta$, existe un conjunto B conexo con $x, y \in B$ tal que $\text{diam}(B) < \frac{\varepsilon}{2}$. Como hemos hecho en la demostración del Teorema 6.5, para cada $x \in B$ podemos tomar un entorno abierto conexo U_x con $\text{diam}(U_x) < \frac{\varepsilon}{4}$. Entonces, $U = \bigcup_{x \in B} U_x$ es un abierto de X por ser unión de abiertos. Veamos que además U es conexo.

Como B y U_x son ambos conexos y tenemos que $U_x \cap B \neq \emptyset$ porque $x \in U_x \cap B$, por el apartado 1 de la Proposición 2.36 tendremos que el conjunto $B \cup U_x$ será conexo. Por otra parte, tenemos lo siguiente:

$$U = \bigcup_{x \in B} U_x = \left(\bigcup_{x \in B} U_x \right) \cup B = \bigcup_{x \in B} (U_x \cup B)$$

Cada $U_x \cup B$ es conexo por lo anterior, y además $\bigcap_{x \in B} (U_x \cup B) \neq \emptyset$ porque para cada $x \in B$ se tiene que $B \subseteq U_x \cup B$. Por tanto, de nuevo por la Proposición 2.36 tendremos que U es conexo.

Como U es un abierto conexo de un espacio de Peano, por el Corolario 6.3 será conexo por arcos. Por tanto, si $d(x, y) < \delta$, entonces x e y pertenecen en un subconjunto U conexo por arcos. Si se cumple que $\text{diam}(U) < \varepsilon$, entonces claramente cualquier arco tendrá diámetro menor que ε . Sean $a, b \in U$ con $a \in U_x$ e $b \in U_y$ para algún par $x, y \in B$. Entonces:

$$d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, y) + d(y, b) = \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

Por tanto, X es uniformemente localmente conexo por arcos. ■

Contamos ya con todas los conceptos y resultados necesarios para poder demostrar el teorema central de este capítulo, y de este trabajo. Como veremos, la prueba de este resultado no dista demasiado de la construcción de la curva de Lebesgue dada en la Sección 4.2. Esta enfoque fue tomado por Hahn años después de haber obtenido su primera demostración del teorema [4].

La ventaja con la que contó Lebesgue, y que a la vez limitaba la extensión de su construcción a otros espacios, fue que $\mathcal{I}^2$ es un conjunto convexo, lo que asegura que la extensión mediante interpolación lineal funciona correctamente. Si bien los espacios más generales tales como los espacios de Peano no tienen por qué contar con esta propiedad, la Proposición 6.6 nos permitirá utilizar un método parecido.

Teorema 6.7 (Teorema de Hahn-Mazurkiewicz). *Sea X un espacio Hausdorff. X es un espacio de Peano si y sólo si es la imagen por una aplicación continua del intervalo unidad $\mathcal{I}$.*

Demostración.

Sea $f : \mathcal{I} \rightarrow X$ una aplicación continua. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que f es suprayectiva. Por el apartado 4 de la Proposición 2.27 y por el Lema 2.42, tenemos que $f(\mathcal{I}) = X$ será compacto y conexo. Además, como X es Hausdorff, el Corolario 2.55 nos asegura que también será metrizable, luego será también un espacio métrico con respecto a una cierta distancia d . Por otra parte, como f es continua, $\mathcal{I}$ es compacto y X es Hausdorff, por el apartado 5 de la Proposición 2.27 tenemos que f será cerrada. A su vez, esto nos permite asegurar gracias al Lema 2.24 que f es de hecho una aplicación cociente, lo que por el Teorema 2.43 nos asegura que X es localmente conexo. En resumen, X es un espacio métrico compacto, conexo y localmente conexo, es decir, es un espacio de Peano.

Supongamos ahora que X es un espacio de Peano. Como es compacto, por el Teorema 4.4, sabemos que existe una aplicación continua y sobreyectiva $f : \mathcal{C} \rightarrow X$, donde $\mathcal{C}$ es el conjunto de Cantor. De hecho observemos que, como $\mathcal{C}$ es un espacio compacto, por el Teorema 2.58 la aplicación $f : \mathcal{C} \rightarrow X$ será uniformemente continua. El objetivo es obtener una extensión continua $f^* : \mathcal{I} \rightarrow X$. Recordemos que en la

sección 4.1 mencionamos que el conjunto de Cantor se podía expresar de la siguiente manera:

$$\mathcal{I} \setminus \mathcal{C} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{3^n-1} \left(\frac{3k+1}{3^{n+1}}, \frac{3k+2}{3^{n+1}} \right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n,$$

donde los I_n son los intervalos de $\mathcal{I} \setminus \mathcal{C}$ ordenados de mayor a menor tamaño, donde por tamaño entendemos $\text{diam}(I_n) = |q_n - p_n| = \frac{1}{3^{n+1}}$, y ordenados de izquierda a derecha los intervalos del mismo tamaño. Para extender f a todo $\mathcal{I}$ debemos extenderla de manera continua sobre cada $I_n = (p_n, q_n)$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $p_n, q_n \in \mathcal{C}$, luego ya están definidos los elementos $f^*(p_n), f^*(q_n) \in X$. Si $f(p_n) = f(q_n)$, para cada $p \in I_n$ definimos $f^*(p) = f(p_n)$. Como por la Proposición 6.6 el espacio X es uniformemente localmente conexo por arcos, dado $n \in \mathbb{N}$ existe $\delta_n > 0$ tal que si los puntos $x, y \in X$ cumplen que $d(x, y) < \delta_n$, entonces existe un arco de diámetro menor que $\frac{1}{2^n}$ uniéndolos. Además, por la continuidad uniforme de f sobre $\mathcal{C}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos encontrar $\eta_n > 0$ tal que si $p, q \in \mathcal{C}$ cumplen que $|q - p| < \eta_n$, entonces $d(f(p), f(q)) < \delta_n$.

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(I_n) = 0$, dado η_1 sólo hay un número finito de intervalos $I_1, I_2, \dots, I_{n_1}$ de tamaño mayor o igual que η_1 . Para cada intervalo $I_j = (p_j, q_j)$ con $1 \leq j \leq n_1$, podemos extender f a I_j de la siguiente manera. El espacio X es conexo por arcos por el Teorema 6.2. Entonces sea $\sigma_0 : \mathcal{I} \rightarrow X$ un arco en X entre $f(p_j)$ y $f(q_j)$, dado $p \in I_j$ definimos $f^*(p) = \sigma_0 \left(\frac{p-p_j}{q_j-p_j} \right)$.

De nuevo, habrá un número finito de intervalos $I_{n_1+1}, I_{n_1+2}, \dots, I_{n_2}$ con tamaños $\eta_2 \leq \text{diam}(I_j) < \eta_1$. Para estos intervalos se cumple que $|q_j - p_j| < \eta_1$ con $n_1 + 1 \leq j \leq n_2$, por lo que tendremos también que $d(f(p_j), f(q_j)) < \delta_1$. Sea σ_1 un arco de diámetro menor que $\frac{1}{2}$ uniendo $f(p_j)$ y $f(q_j)$. Extendemos f a los intervalos I_j con $n_1 + 1 \leq j \leq n_2$ definiendo $f^*(p) = \sigma_1 \left(\frac{p-p_j}{q_j-p_j} \right)$ para cualquier $p \in I_j$.

En general, dado $k \in \mathbb{N}$, para cada intervalo I_j con $n_k + 1 \leq j \leq n_{k+1}$ y tamaño $\eta_{k+1} \leq \text{diam}(I_j) < \eta_k$, extendemos f a I_j utilizando un arco σ_k de diámetro menor que $\frac{1}{2^k}$ y definiendo $f^*(p) = \sigma_k \left(\frac{p-p_j}{q_j-p_j} \right)$ para cada $p \in I_j$.

Hemos construido una aplicación $f^* : \mathcal{I} \rightarrow X$. Veamos que f^* es continua en cualquier $t_0 \in \mathcal{I}$. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon = \frac{1}{2^{n-1}}$.

Si $t_0 \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{C}$, existe un intervalo $I_j = (p_j, q_j)$ con diámetro menor que η_n tal que $t_0 \in I_j$. Luego para todo $t \in I_j$ se verifica que $d(f^*(t), f^*(t_0)) < \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ porque $f^*(t)$ y $f^*(t_0)$ son puntos del arco que une $f(p_j)$ y $f(q_j)$ que tiene diámetro menor que $\frac{1}{2^n}$. Hemos probado que $f(I_j) \subseteq B(f^*(t_0), \varepsilon)$.

Supongamos pues que $t_0 \in \mathcal{C}$. Si $t \in \mathcal{C}$, por la continuidad uniforme de $f = f^*|_{\mathcal{C}}$ tenemos que si $|t - t_0| < \eta_n$, entonces $d(f^*(t), f^*(t_0)) = d(f(t), f(t_0)) < \delta_n$. Por ser X uniformemente localmente conexo por arcos, $f(t)$ y $f(t_0)$ estarán unidos por un arco de diámetro menor que $\frac{1}{2^n}$ y tenemos que $d(f(t), f(t_0)) < \frac{1}{2^n} < \varepsilon$.

Por otra parte, si $t \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{C}$, entonces se cumple que $t \in I_j = (p_j, q_j)$ para algún $j \in \mathbb{N}$. Supongamos que $t_0 < p_j < q_j$. Por la Observación 4.2, sabemos que existe algún intervalo I con $I \subseteq B(t_0, \eta_n)$. Por tanto, si $I_j \subseteq B(t_0, \eta_n)$, entonces tenemos que $|q_j - t_0| < \eta_n$. Esto conlleva que $|t - p_j| < \eta_n$ para cualquier $t \in I_j$. Por la construcción de f^* , sabemos que $f^*(t)$ será un punto de un arco de diámetro menor que $\frac{1}{2^n}$ que une $f^*(p_j) = f(p_j)$ con $f^*(q_j) = f(q_j)$, por lo que $d(f^*(t), f^*(p_j)) < \frac{1}{2^n}$. Por

otra parte, también tenemos que $|q_j - t_0| < \eta_n$ implica que en particular $|p_j - t_0| < \eta_n$. Como $t_0, p_j \in \mathcal{C}$, podemos aplicar la continuidad uniforme de $f^*|_{\mathcal{C}} = f$ para afirmar que $d(f^*(p_j), f^*(t_0)) < \delta_n$, lo que a su vez conlleva que existe un arco de diámetro menor que $\frac{1}{2^n}$ entre ambos, luego de hecho $d(f^*(p_j), f^*(t_0)) < \frac{1}{2^n}$. Juntando estas desigualdades obtenemos:

$$d(f^*(t), f^*(t_0)) \leq d(f^*(t), f^*(p_j)) + d(f^*(p_j), f^*(t_0)) < \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}} = \varepsilon$$

Si por el contrario se cumpliera que $p_j < q_j < t_0$ la demostración sería muy similar, bastando con intercambiar los roles de p_j y q_j en las distintas desigualdades. ■

Podemos deducir el siguiente resultado a partir del teorema anterior.

Corolario 6.8. *Un espacio Hausdorff es conexo por caminos si y sólo si es conexo por arcos.*

Demostración.

Sea X un espacio Hausdorff. Claramente si X es un espacio conexo por arcos, como todo arco es un camino, X será conexo por caminos.

Supongamos ahora que X es conexo por caminos. Entonces dados $a, b \in X$ existirá una aplicación continua $\sigma : \mathcal{I} \rightarrow X$ con $\sigma(0) = a$ y $\sigma(1) = b$. Por el Teorema 6.7 tenemos que $\sigma(\mathcal{I})$ será un espacio de Peano lo que implica que este conjunto será conexo por arcos por el Teorema 6.2. Como $a, b \in \sigma(\mathcal{I})$, tendremos que existe un arco uniendo a con b , por lo que X será conexo por arcos. ■

En cierta medida, este último resultado justifica la utilización equivalente de los términos conexo por caminos y arco-conexo que tan común es en la literatura y de la cual prevenimos en la Sección 2.3. Tan básica es la propiedad de ser Hausdorff en los espacios de interés en otras áreas de las matemáticas que en ocasiones esta se llega hasta a imponer por definición en las definiciones de espacios topológicos.

Bibliografía

- [1] G. Cantor. «Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre». En: *Mathematische Annalen* 46 (1895), págs. 481-512.
- [2] F.Q. Gouvêa. «Was Cantor surprised?» En: *The American Mathematical Monthly* 118.3 (2011), págs. 198-209. DOI: 10.4169/amer.math.monthly.118.03.198.
- [3] H. Hahn. «Mengentheoretische Charakterisierung der stetigen Kurven». En: *Sitzungsberichte Akad. Wiss. Wien Abt. IIa* 123 (1914), págs. 2433-2489.
- [4] H. Hahn. «Über stetige Streckenbilder». En: *Atti del Congresso Internazionale dei Matematici*. 1928, págs. 217-220.
- [5] D. Hilbert. «Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück». En: *Mathematische Annalen* 38 (1891), págs. 157-160. DOI: 10.1007/BF01199431.
- [6] J.G. Hocking y G.S. Young. *Topology*. Addison-Wesley, 1961.
- [7] K.D. Joshi. *Introduction to General Topology*. New Age International, 1983. ISBN: 0-85226-444-5.
- [8] H. Lebesgue. *Leçons sur l'Intégration et la Recherche des Fonctions Primitives*, Gauthier-Villars, 1904, págs. 44-45.
- [9] S. Mazurkiewicz. «Sur une classification des points situés sur un continu arbitraire». En: *C.R. Soc. Sc. Varsovie* 9 (1916), págs. 441-442.
- [10] S. Mazurkiewicz. «Sur une courbe non quarrable». En: *Bulletin international de l'Académie des sciences de Cracovie* (1913), págs. 254-263.
- [11] E.H. Moore. «On certain crinkly curves». En: *Transactions of the American Mathematical Society* 1 (1900), págs. 72-90.
- [12] J.R. Munkres. *Topology*. Prentice-Hall, Inc., 2000. ISBN: 0-13-181629-2.
- [13] E. Netto. «Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre». En: *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle)* 86 (1879), págs. 263-268.
- [14] G. Peano. «Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane». En: *Mathematische Annalen* 36 (1890), págs. 157-160. DOI: 10.1007/BF01199438.
- [15] H. Sagan. *Space-Filling Curves*. Springer-Verlag, 1994. ISBN: 978-1-4612-0871-6. DOI: 10.1007/978-1-4612-0871-6.
- [16] W. Sierpiński. «Sur une condition pour qu'un continu soit une courbe jordanienne». En: *Fund. Math.* 1 (1920), págs. 44-60.
- [17] W. Sierpiński. «Sur une nouvelle courbe continue qui remplit toute une aire plane». En: *Bulletin international de l'Académie des sciences de Cracovie* (Sciences mathématique et naturelles, Série A) (1912), págs. 462-478.

- [18] C.L. Silver. «Who invented Cantor's back-and-forth argument?» En: *Modern Logic* 4.1 (1994), págs. 74-78.
- [19] I. Weiss. «The real numbers – A survey of constructions». En: *The Rocky Mountain Journal of Mathematics* 45.3 (2015), págs. 737-762. DOI: 10.1216/RMJ-2015-45-3-737.
- [20] S. Willard. *General Topology*. Addison-Wesley, 1970.