Facultad de Ciencias

PRODUCTO INFINITO DE NÚMEROS COMPLEJOS

(Infinite product of complex numbers)

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autora: Maider Uria Almena
Director: Daniel Lear Claveras
Febrero - 2025

Resumen

Esta memoria introduce el estudio de los productos infinitos en el ámbito de los números complejos, abordando la convergencia de estos productos y analizando diversos métodos para determinarla. Se explora, además, la relación entre la convergencia de los productos infinitos y las series asociadas, incluyendo la convergencia absoluta.

Para profundizar en los productos infinitos de funciones holomorfas, se introduce el Criterio M de Weierstrass, que establece que, bajo ciertas condiciones de acotación, un producto infinito de funciones es absolutamente convergente. Este criterio se aplica a ejemplos específicos, como la función zeta de Riemann y las funciones seno y coseno, para ilustrar su utilidad.

Finalmente, se presenta el Teorema de Factorización de Weierstrass, que permite expresar cualquier función entera (es decir, una función holomorfa en todo el plano complejo) como un producto infinito basado en sus ceros. Este resultado facilita el análisis y comprensión de la estructura de las funciones enteras.

Palabras clave: Producto infinito, Criterio M de Weierstrass, Teorema de Factorización.

Abstract

This manuscript introduces the study of infinite products in the context of complex numbers, addressing their convergence and analyzing various methods to determine it. Additionally, it explores the relationship between the convergence of infinite products and the associated series, including absolute convergence.

To delve deeper into infinite products of holomorphic functions, Weierstrass's M-criterion is introduced. This criterion establishes that, under certain boundedness conditions, an infinite product of functions is absolutely convergent. Specific examples, such as the Riemann zeta function and the sine and cosine functions, are analyzed to illustrate its utility.

Finally, the Weierstrass Factorization Theorem is presented, which provides a way to express any entire function (that is, a holomorphic function on the entire complex plane) as an infinite product based on its zeros. This result facilitates the analysis and understanding of the structure of entire functions.

Key words: Infinite product, Weierstrass M-test, Factorization Theorem.

Índice general

Capítulo 1

Producto infinito de números complejos

Tras haber trabajado durante el grado con series infinitas de números reales o complejos y haber estudiado los criterios que determinan su convergencia, surge la pregunta natural de qué sucede si en lugar de sumar infinitos términos, los multiplicamos. Este planteamiento da lugar al concepto de producto infinito de números complejos, que se expresa matemáticamente como:

$$\prod_{n=1}^{\infty} z_n,$$

donde $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números complejos.

Para hacer esta memoria nos hemos basado fundamentalmente en los apuntes [5], complementándolos con [1], [2] y con los apuntes de las asignatura de Variable Compleja [3].

1.1. Introducción

Por analogía con las series, podríamos decir que el producto infinito de números complejos converge si y solo si la sucesión de productos parciales converge. Pero al ser un producto, si encontramos al menos un cero, el producto será cero sin importar el resto de los términos. Es por ello que la definición será diferente para el producto infinito.

Por ello, comenzamos distinguiendo en la definición la convergencia del producto infinito en función de si éste tiene o no factores z_j nulos.

Definición 1.1.1 (Convergencia del producto infinito). *Sea* $(z_n)_{n\geq 1}$ *una sucesión de números complejos, siguiendo* [2] *tenemos:*

- *Sea* $z_n \neq 0$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$. *Si el límite* $\lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n} z_j$ *existe y es distinto de cero, entonces se dice que el producto infinito* $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ *converge y su valor es:*

$$\prod_{n=1}^{\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n} z_j.$$

- *Si la sucesión tiene un número finito de ceros, se dice que el producto infinito converge sólo si el producto infinito cuando se quitan los factores nulos converge.*

- *Si la sucesión tiene infinitos ceros, se dice que el producto infinito diverge.*

Observación 1.1.1. *Al igual que ocurre con las series, la convergencia de un producto infinito no depende de sus primeros factores. Esto es, dadas dos sucesiones* $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ *y* $(w_n)_{n=1}^{\infty}$ *de números complejos, si para un cierto* $N \geq 1$ *se tiene que* $z_n = w_n$ *para* $n \geq N$, *entonces*

$$\prod_{n=1}^{\infty} z_n \text{ converge} \quad \iff \quad \prod_{n=1}^{\infty} w_n \text{ converge.}$$

Además, al igual que las series tienen como condición necesaria de convergencia que el término general tienda a cero. El producto infinito tiene como condición necesaria de convergencia, que el término general tienda a la unidad.

Antes de proseguir con la demostración del criterio de convergencia para productos infinitos de números complejos, es conveniente enfatizar que en el resto del capítulo asumiremos que $z_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Lema 1.1.1. *Si el producto* $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ *converge, entonces* $\lim_{n\to\infty} z_n = 1$.

Demostración. Como por hipótesis tenemos que el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ converge, es claro que también lo hacen las sucesiones de productos parciales $(s_m)_{m=1}^{\infty}$ definidas por

$$s_m := \prod_{n=1}^{m} z_n.$$

Como sabemos que

$$\lim_{m\to\infty} s_m = \lim_{m\to\infty} \prod_{n=1}^{m} z_n = \prod_{n=1}^{\infty} z_n,$$
$$\lim_{m\to\infty} s_{m-1} = \lim_{m\to\infty} \prod_{n=1}^{m-1} z_n = \prod_{n=1}^{\infty} z_n,$$

tomando el cociente entre ambas expresiones y usando que $\prod_{n=1}^{\infty} z_n \neq 0$ tenemos que

$$\lim_{m\to\infty} z_m = \lim_{m\to\infty} \frac{\prod_{n=1}^{m} z_n}{\prod_{n=1}^{m-1} z_n} = 1.$$

□

Observación 1.1.2. *Por la condición necesaria de convergencia de un producto infinito, en lo sucesivo, los factores del producto los escribiremos de la forma*

$$z_n = (1 + w_n) \quad \textit{donde} \quad \lim_{n\to\infty} w_n = 0.$$

La condición de convergencia expuesta anteriormente es necesaria, pero no es suficiente.

Contraejemplo. Sea el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})$. Estudiando la sucesión de los productos parciales, tenemos tras aplicar las simplificaciones que

$$s_m = \prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{m+1}{m} = m+1.$$

Entonces el producto infinito diverge

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{m\to\infty}\prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{m\to\infty} s_m = \lim_{m\to\infty} m+1 = \infty,$$

a pesar de que

$$\lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

Junto a la condición necesaria de convergencia, otra propiedad que vamos a utilizar de aquí en adelante para estudiar la convergencia del producto es la siguiente:

Lema 1.1.2. *Sea $(z_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ tal que $|z_n - 1| < 1$, para cada $n \geq 1$. Entonces, el producto*

$$\prod_{n=1}^{\infty} z_n \ \textit{converge} \iff \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log}(z_n) \ \textit{converge}.$$

Demostración. Como por hipótesis tenemos $|z_n - 1| < 1$, entonces $z_n \neq 0$, para cada $n \geq 1$. Dividiremos la demostración en dos partes:

$\Longleftarrow$) Si por hipótesis asumimos que $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log}(z_n)$ converge, se tiene que

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \operatorname{Log}(z_n) = a \in \mathbb{C}.$$

Aplicando que el logaritmo del producto es la suma de los logaritmos tenemos que

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \operatorname{Log}(z_n) = a \quad \Longrightarrow \quad \lim_{m\to\infty} \operatorname{Log}\left(\prod_{n=1}^{m} z_n\right) = a,$$

además, usando la continuidad del logaritmo, el limite del logaritmo es igual al logaritmo del límite, obteniendo

$$\lim_{m\to\infty} \operatorname{Log}\left(\prod_{n=1}^{m} z_n\right) = a \quad \Longrightarrow \operatorname{Log}\left(\lim_{m\to\infty} \prod_{n=1}^{m} z_n\right) = a.$$

Tomando la exponencial en ambos lados de la expresión anterior llegamos finalmente a que

$$\lim_{m\to\infty} \prod_{n=1}^{m} z_n = e^a.$$

Como $a \in \mathbb{C}$, la exponencial es distinta de cero, entonces se obtiene que $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ converge.

$\Longrightarrow$) Suponemos por hipótesis que $\exists P \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que

$$\prod_{n=1}^{\infty} z_n = P.$$

Por el Lema 1.1.1, se tiene $\lim_{n\to\infty} z_n = 1$, y utilizando la notación de la exponencial compleja tenemos que cada factor puede escribirse como

$$z_n = r_n e^{i\theta_n} \text{ con } r_n = |z_n| > 0 \text{ y } \theta_n \in (-\pi, \pi].$$

Con todo ello, se tiene $\lim_{n\to\infty} r_n e^{i\theta_n} = 1$, concluyendo que

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 1 \quad y \quad \lim_{n\to\infty} \theta_n = 0.$$

Entonces demostramos

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\operatorname{Log}(z_n) &= \lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\operatorname{Log}\left(r_n e^{i\theta_n}\right) = \lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\operatorname{Log}\left(|z_n| e^{i\theta_n}\right)\\ &= \lim_{m\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{m}\ln|z_n| + i\sum_{n=1}^{m}\theta_n\right) = \lim_{m\to\infty}\left(\ln\prod_{n=1}^{m}|z_n| + i\sum_{n=1}^{m}\theta_n\right).\end{aligned}$$

Por hipótesis tenemos $\prod_{n=1}^{\infty} z_n = P$, y aplicando valor absoluto a ambos lados llegamos a

$$\left|\prod_{n=1}^{\infty} z_n\right| = \prod_{n=1}^{\infty}|z_n| = |P|,$$

con esto deducimos

$$\prod_{n=1}^{\infty} z_n = \prod_{n=1}^{\infty}|z_n| e^{i\theta_n} = |P|\prod_{n=1}^{\infty} e^{i\theta_n} = P \quad \Rightarrow \quad \prod_{n=1}^{\infty} e^{i\theta_n} = \frac{P}{|P|}.$$

Entonces tenemos que

$$\prod_{n=1}^{\infty} e^{i\theta_n} = e^{i\sum_{n=1}^{\infty}\theta_n} = \frac{P}{|P|}.$$

Como la función exponencial converge si y solo si converge el exponente, deducimos que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\theta_n = \phi.$$

Y concluimos

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\operatorname{Log}(z_n) = \ln\left(\lim_{m\to\infty}\prod_{n=1}^{m}|z_n|\right) + \lim_{m\to\infty} i\sum_{n=1}^{m}\theta_n = \ln|P| + i\phi.$$

□

1.2. Criterio de Cauchy para productos infinitos

Para estudiar la convergencia de las series se utiliza el criterio de Cauchy. De la misma manera, obtendremos un resultado análogo para estudiar la convergencia del producto infinito.

Proposición 1.2.1. *Sea* $(z_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}\setminus\{0\}$. *El producto infinito* $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ *converge si y solo si*

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists N\ :\ \left|\prod_{j=n+1}^{m} z_j - 1\right| \leq \epsilon \text{ para cualesquiera } n,\ m \text{ tales que } N \leq n < m. \tag{1.1}$$

Demostración. Dividiremos la prueba en dos partes:

$\Longrightarrow$) Suponemos que $\lim_{m\to\infty}\prod_{n=1}^{m} z_n = P$, con $P \neq 0$ y definimos el parámetro auxiliar

$$\mu = \inf\left\{ \left|\prod_{j=1}^{n} z_j\right| > 0 : n \geq 1 \right\}.$$

Si $1 \leq n < m$:

$$\left|\prod_{j=n+1}^{m} z_j - 1\right| = \left|\frac{1}{\prod_{j=1}^{n} z_j}\right| \left|\prod_{j=1}^{m} z_j - \prod_{j=1}^{n} z_j\right| \leq \frac{1}{\mu}\left|\prod_{j=1}^{m} z_j - \prod_{j=1}^{n} z_j\right| < \epsilon,$$

con ϵ tan pequeño como queramos si $N \leq n < m$. Ya que ambos productos parciales convergen al mismo valor cuando $N \to \infty$.

$\Longleftarrow$) Supongamos ahora que se cumple la condición (1.1), entonces se puede acotar la sucesión de productos parciales de la siguiente manera

$$|s_m - s_n| = \left|\prod_{j=1}^{m} z_j - \prod_{j=1}^{n} z_j\right| = \left|\prod_{j=1}^{n} z_j\right| \left|\prod_{j=n+1}^{m} z_j - 1\right| \leq \gamma \left|\prod_{j=n+1}^{m} z_j - 1\right| \leq \gamma\epsilon,$$

donde hemos utilizado el parámetro acotado

$$\gamma = \sup\left\{ \left|\prod_{j=1}^{n} z_j\right| : 1 \leq n < m \right\}.$$

Con ello, hemos probado que la sucesión de los productos parciales $(s_m)_{m=1}^{\infty}$ definida por $s_m = \prod_{j=1}^{m} z_j$ es una sucesión de Cauchy, entonces converge a un cierto $P \in \mathbb{C}$.

Falta probar que $P \neq 0$. Para ello, tomamos la condición (1.1) con $\epsilon = \frac{1}{2}$ se tiene que

$$\left|\lim_{m\to\infty}\prod_{j=N+1}^{m} z_j - 1\right| \leq \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \frac{1}{2} \leq \lim_{m\to\infty}\prod_{j=N+1}^{m} z_j \leq \frac{3}{2}.$$

Luego $\lim_{m\to\infty}\prod_{j=N+1}^{m} z_j$ está acotado superior e inferiormente por valores positivos. Como esto es cierto para un N fijo y $z_j \neq 0$ para todo j, es claro también que $\prod_{j=1}^{N} z_j \neq 0$. Entonces, combinando ambos productos obtenemos finalmente que $P \neq 0$. $\square$

Se ha visto que si el producto infinito converge, entonces el término general converge a la unidad. Ahora vamos a ver que el recíproco es cierto bajo ciertas condiciones extras. Más concretamente, si el término general tiende rápidamente a la unidad, entonces el producto infinito es convergente. Para poder demostrar esta propiedad, probamos primero el siguiente lema.

Lema 1.2.1. *Se satisface que:*

$$|\operatorname{Log}(1+z) - z| \leq |z|^2 \qquad \textit{para todo } |z| \leq \frac{1}{2}.$$

Demostración. El desarrollo en serie de potencias de $\operatorname{Log}(1+z)$ en el disco unidad D es:

$$\operatorname{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n.$$

Restando z a la expresión anterior, obtenemos:

$$|\operatorname{Log}(1+z) - z| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n - z \right| = \left| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n \right|.$$

Aplicando la desigualdad triangular sobre el sumatorio y acotando, llegamos a

$$\left| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n \right| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|z^n|}{n} \leq \frac{|z|^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} |z|^n,$$

por último, como $|z| < 1$, aplicamos que $\sum_{n=0}^{\infty} |z|^n$ es una suma geométrica y podemos concluir que

$$\frac{|z|^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} |z|^n = \frac{|z|^2}{2} \frac{1}{1-|z|} \leq |z|^2 \quad \text{ si } |z| \leq \frac{1}{2}.$$

□

Teniendo esto en cuenta, podemos enunciar y demostrar la siguiente proposición.

Proposición 1.2.2. *Sea $(z_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $z_n = w_n + 1$, para cada $n \geq 1$. Si*

- $\sum_{n=1}^{\infty} w_n < \infty$
- $\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|^2 < \infty$

entonces

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + w_n) = \prod_{n=1}^{\infty} z_n \quad \textit{converge.}$$

Demostración. Como por hipótesis tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|^2 < \infty$, existe un M suficientemente grande tal que $|w_n| \leq \frac{1}{2}$ con $n \geq M \geq 1$.

Por el Lema 1.2.1 se tiene

$$|\operatorname{Log}(1+w_n)-w_n|\leq |w_n|^2, \quad \text{para } n\geq M.$$

Usando el criterio de comparación, podemos deducir que

$$\sum_{n=M}^{\infty}|\operatorname{Log}(1+w_n)-w_n|\leq \sum_{n=M}^{\infty}|w_n|^2<\infty.$$

Como un número finito de sumandos no cambia la convergencia podemos concluir que

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\operatorname{Log}(1+w_n)-w_n| = \sum_{n=1}^{M-1}|\operatorname{Log}(1+w_n)-w_n| + \sum_{n=M}^{\infty}|\operatorname{Log}(1+w_n)-w_n|<\infty.$$

Además, por hipótesis tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ converge, entonces se satisface:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\operatorname{Log}(1+w_n)-w_n|<\infty \quad y \quad \sum_{n=1}^{\infty} w_n<\infty \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Log}(1+w_n)<\infty.$$

Aplicando el Lema 1.1.2 se tiene que $\prod_{n=1}^{\infty}(1+w_n)=\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ converge. $\square$

Esta proposición de convergencia es una condición necesaria, pero no suficiente.

Contraejemplo. Sea $(a_n)_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}$ con termino general $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$ y la sucesión $(z_n)_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{C}$ definida de la siguiente manera:

$$z_{2n-1}=1+a_n \quad y \quad z_{2n}=\frac{1}{1+a_n}.$$

Usando como en todo el trabajo la notación $z_n=1+w_n$ tenemos que

$$w_{2n-1}=a_n \quad \text{y} \qquad w_{2n}=\frac{-a_n}{1+a_n}.$$

Se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty}|w_{2n-1}|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\right|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty}|w_n|^2=\infty.$$

Por tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n=\sum_{n=1}^{\infty}(w_{2n-1}+w_{2n})=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{a_n}{1+a_n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2}{1+a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n(1+\sqrt{n})}.$$

Estudiamos su convergencia

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n(1+\sqrt{n})} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(1+\sqrt{n})} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \infty.$$

Entonces ni $\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|^2$ ni $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ convergen. Veamos si converge el producto infinito. Para ello, estudio por un lado el producto de potencias pares y por otro lado el de impares:
si n es par:

$$s_{2m} = z_1 z_2 z_3 ... z_{2m} = (1+a_n)\frac{1}{1+a_n}(1+a_n)\frac{1}{1+a_n}... = 1,$$

si n es impar:

$$s_{2m-1} = z_1 z_2 z_3 ... z_{2m-1} = (1+a_m)\frac{1}{1+a_m}(1+a_m)\frac{1}{1+a_m}...(1+a_m) = (1+a_m),$$

y tenemos $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, por tanto $\lim_{m\to\infty} s_{2m-1} = 1+0 = 1$, quedando

$$\prod_{n=1}^{\infty} z_n = 1.$$

Es decir, el producto infinito converge a 1.

1.3. Productos infinitos de números reales positivos.

Una vez que hemos estudiado la definición de convergencia del producto infinito y el Criterio de Cauchy para estudiar la convergencia del producto infinito de números complejos, en este punto se va a estudiar la relación entre la convergencia de los productos infinitos y las sucesiones de números reales. Estas relaciones nos van a ser útiles para estudiar más tarde la convergencia absoluta de productos infinitos de números complejos.

Para demostrar esta relación entre la convergencia del producto y de las sucesiones, es necesario demostrar previamente el siguiente lema.

Lema 1.3.1. *Para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene que*

$$1 + x \leq e^x. \tag{1.2}$$

Y para todo $x \in [0, 1/2]$ se tiene que

$$e^{-2x} \leq 1 - x \leq e^{-x}. \tag{1.3}$$

Demostración. Primero demostramos (1.2). Por el desarrollo de Taylor de la exponencial se tiene

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!}.$$

Si $x \geq 0$ ó $x \leq -1$, es claro que se satisface $1 + x \leq e^x$.

Y si $-1 < x < 0$. Se tiene

$$e^x - (1 + x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!}.$$

En los términos de la suma $\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!}$, para $-1 < x < 0$, se da una alternancia de positivos y negativos en función de la paridad de las potencias. Observamos que a medida que va aumentando n, el valor de $\frac{x^n}{n!}$ decrece debido al crecimiento del denominador, dando lugar a una dominancia de los términos pares (los positivos) frente a los impares (los negativos), quedando así

$$\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} \geq 0 \Rightarrow e^x \geq 1 + x.$$

Continuamos demostrando (1.3). Probamos cada una de las desigualdades por separado:

- $1 - x \leq e^{-x}$: Hemos demostrado $1 + x \leq e^x$, si se toma $x = -a$, se tiene $1 - a \leq e^{-a}$, y sin pérdida de generalidad podemos concluir $1 - x \leq e^{-x}$.

- $e^{-2x} \leq 1 - x$: Por el desarrollo de Taylor de e^{-2x} alrededor de $x = 0$, tenemos:

  $$e^{-2x} = 1 - 2x + \frac{(2x)^2}{2} - \frac{(2x)^3}{3!} + ... = 1 - 2x + R_2(x).$$

  Queremos demostrar $e^{-2x} \leq 1 - x$, esto es

  $$e^{-2x} \leq 1 - x \Leftrightarrow 1 - 2x + R_2(x) \leq 1 - x \Leftrightarrow R_2(x) \leq x,$$

  es decir, basta demostrar que $R_2(x) \leq x$, con

  $$R_2(x) = \frac{(2x)^2}{2} - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^4}{4!} - ...$$

Como $x \in [0, 1/2]$, notamos que a medida que aumenta el valor de n, $\frac{(2x)^n}{n!}$ decrece por la disminución del valor de la potencia y el crecimiento del denominador, dando lugar a una alternancia de positivos y negativos en función de la paridad de las potencias. Si empezamos la sucesión con $n = 3$, se tiene una dominancia de las potencias impares frente a las pares, quedando

$$-\frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^4}{4!} - ... \leq 0,$$

por lo tanto podemos acotar $R_2(x)$ por

$$R_2(x) = \frac{(2x)^2}{2} - \frac{(2x)^3}{3!} + ... \leq \frac{(2x)^2}{2} = 2x^2.$$

Y para todo $x \in [0, 1/2]$ se verifica la desigualdad $2x^2 \leq x$. Así queda demostrada la desigualdad que buscábamos, $e^{-2x} \leq 1 - x$.

$\square$

A partir de estas dos desigualdades, se puede demostrar las siguientes equivalencias sobre la convergencia de productos y sucesiones infinitas de números reales positivos.

Lema 1.3.2 (**Convergencia de productos infinitos de números reales positivos.**).
1) Si $x_n > 0$, para cada $n \geq 1$:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + x_n) \textit{ converge} \iff \sum_{n=1}^{\infty} x_n \textit{ converge.}$$

2) Si $0 \leq x_n < 1$, para cada $n \geq 1$:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 - x_n) \textit{ converge} \iff \sum_{n=1}^{\infty} x_n \textit{ converge.}$$

Demostración. Se empieza demostrando 1).

$\Longleftarrow$) Suponemos que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n < \infty$. Como por hipótesis tenemos $x_n \geq 0$, es claro que $1 + x_n \geq 1$ y además $P_n = \prod_{j=1}^{n}(1 + x_j)$ es una sucesión monótona no decreciente.

Entonces $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + x_n)$ converge si y solo si $\prod_{j=1}^{n}(1 + x_j)$ está acotada superiormente. Por el Lema 1.3.1 tenemos

$$s_n = \prod_{j=1}^{n}(1 + x_j) \leq e^{\sum_{n=1}^{\infty} x_n}.$$

Como por hipótesis

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n < \infty \quad \Rightarrow \quad e^{\sum_{n=1}^{\infty} x_n} < \infty,$$

hemos encontrado una cota superior y podemos concluir que $\prod_{n=1}^{\infty}(1+x_n)$ converge.

$\Longrightarrow$) Suponemos que $\prod_{n=1}^{\infty}(1+x_n)$ converge y $x_n \geq 0$, entonces se tiene

$$1 + \sum_{j=1}^{n} x_j \leq \prod_{j=1}^{n}(1+x_j) \quad \forall n \geq 1. \tag{1.4}$$

Se prueba esta desigualdad mediante inducción:

- Lo pruebo para $n = 1$ y $n = 2$:

  - $n = 1$: $1 + x_1 = 1 + x_1$.

  - $n = 2$: $1 + \sum_{j=1}^{2} x_j \leq \prod_{j=1}^{2}(1+x_j) \Longleftrightarrow 1 + x_1 + x_2 \leq 1 + x_1 + x_2 + x_1 x_2$.

- Hipótesis de inducción. Suponemos cierto para n, esto es

$$1 + \sum_{j=1}^{n} x_j \leq \prod_{j=1}^{n}(1+x_j).$$

- Lo probamos para $n+1$.

$$1 + \sum_{j=1}^{n+1} x_j \leq \prod_{j=1}^{n+1}(1+x_j) \quad \Longleftrightarrow \quad 1 + \sum_{j=1}^{n} x_j + x_{n+1} \leq \prod_{j=1}^{n}(1+x_j) + \prod_{j=1}^{n}(1+x_j)x_{n+1}.$$

  Por hipótesis de inducción tenemos que $1 + \sum_{j=1}^{n} x_j \leq \prod_{j=1}^{n}(1+x_j)$, por tanto solo falta probar

$$x_{n+1} \leq \prod_{j=1}^{n}(1+x_j)x_{n+1} \quad \Longleftrightarrow \quad 1 \leq \prod_{j=1}^{n}(1+x_j),$$

  y esto se satisface porque $x_n \geq 0$. Por tanto queda demostrada la desigualdad.

Como la desigualdad (1.4) se satisface para todo $n \geq 1$, podemos tomar límites cuando n tiende a infinito quedando

$$\lim_{n\to\infty} 1 + \sum_{j=1}^{n} x_j \leq \lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n}(1+x_j) \quad \Rightarrow \quad 1 + \sum_{j=1}^{\infty} x_j \leq \prod_{j=1}^{\infty}(1+x_j).$$

Por hipótesis tenemos la convergencia de $\prod_{j=1}^{\infty}(1+x_j)$, junto a lo probado anteriormente, se tiene la siguiente cadena de implicaciones

$$\prod_{j=1}^{\infty}(1+x_j) < \infty \quad \Rightarrow \quad 1+\sum_{j=1}^{\infty} x_j < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{\infty} x_j < \infty,$$

como queríamos demostrar.

Se continua probando 2).

$\Longrightarrow$) Suponemos por hipótesis que $\prod_{n=1}^{\infty}(1-x_n)$ converge con $0 \leq x_n < 1$. En primer lugar, notamos que se satisface $0 < 1-x_n \leq 1$, y por ello la sucesión $\prod_{j=1}^{n}(1-x_j)$ es monótona no creciente. Por la monotonía, sabemos que $\prod_{n=1}^{\infty}(1-x_n)$ converge si y solo si $\prod_{j=1}^{n}(1-x_j)$ está acotada inferiormente por una cota positiva. Luego tenemos que

$$1 \geq \prod_{j=1}^{n}(1-x_j) \geq c > 0.$$

Por el Lema 1.3.1, aplicando el producto a ambos lados tenemos que

$$1-x \leq e^{-x} \Rightarrow \prod_{j=1}^{n}(1-x_j) \leq e^{-\sum_{j=1}^{n} x_j} \quad \Rightarrow \quad -\ln\left(\prod_{j=1}^{n}(1-x_j)\right) \geq \sum_{j=1}^{n} x_j,$$

y por hipótesis tenemos

$$1 \geq \prod_{n=1}^{\infty}(1-x_n) > 0 \Rightarrow \quad 1 \geq \prod_{j=1}^{n}(1-x_j) > 0 < \infty \Rightarrow \quad -\ln\left(\prod_{j=1}^{n}(1-x_j)\right) < \infty.$$

Por tanto podemos concluir

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \leq -\ln\left(\prod_{j=1}^{n}(1-x_j)\right) < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} x_j < \infty.$$

Como esto es cierto para todo $n \in \mathbb{N}$, basta tomar el límite para terminar la demostración.

$\Longleftarrow$) Suponemos que $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ converge, entonces $x_j \to 0$ y por lo tanto existe N suficientemente grande tal que $0 \leq x_j \leq 1/2$ para $j > N$. Aplicando la desigualdad $e^{-2x} \leq 1-x$ para

$x \in [0, 1/2]$ del Lema 1.3.1, y tomando $n < N$, obtenemos

$$\prod_{j=1}^{n}(1-x_j) = \prod_{j=1}^{N}(1-x_j) \prod_{j=N+1}^{n}(1-x_j) \geq \prod_{j=1}^{N}(1-x_j)e^{-2\sum_{j=N+1}^{n} x_j}$$
$$\geq \prod_{j=1}^{N}(1-x_j)e^{-2\sum_{j=1}^{\infty} x_j}.$$

Recordamos que por hipótesis tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n < \infty \quad \Rightarrow \quad e^{-2\sum_{j=1}^{\infty} x_j} < \infty \quad \Rightarrow \quad \prod_{j=1}^{N}(1-x_j)e^{-2\sum_{j=1}^{\infty} x_j} > 0,$$

y se ha encontrado una cota estrictamente inferior positiva de los productos parciales. Utilizando el mismo argumento que para la primera implicación de 1), se concluye que $\prod_{n=1}^{\infty}(1-x_n)$ converge. □

1.4. Convergencia absoluta de productos infinitos.

Una vez estudiada la convergencia del producto infinito de números complejos y la relación entre la convergencia de productos infinitos y de sucesiones infinitas de números reales. Vamos a estudiar la convergencia absoluta de productos infinitos de números complejos. Para introducir dicha convergencia, se deben establecer determinadas acotaciones para estos productos infinitos.

Lema 1.4.1. *Si $z_1, z_2, ..., z_n \in \mathbb{C}$. Se satisface:*

$$\left|\prod_{j=1}^{n}(1+z_j) - 1\right| \leq \prod_{j=1}^{n}(1+|z_j|) - 1. \tag{1.5}$$

$$\left|\prod_{j=1}^{n} z_j - 1\right| \leq \prod_{j=1}^{n}(1+|z_j - 1|) - 1. \tag{1.6}$$

Demostración. Comenzamos con la prueba de (1.5). Expandiendo el producto tenemos

$$\prod_{j=1}^{n}(1+z_j) - 1 = 1 + \sum_{j=1}^{n} z_j + \sum_{\substack{j,i=1\\ i\neq j}}^{n} z_i z_j + \sum_{\substack{j,i,k=1\\ i\neq j\neq k}}^{n} z_i z_j z_k + ... - 1.$$

Tomando valor absoluto y aplicando la desigualdad triangular se llega a:

$$\begin{aligned}
\left|\prod_{j=1}^{n}(1+z_j)-1\right| &\leq \left|\sum_{j=1}^{n} z_j\right| + \left|\sum_{\substack{j,i=1\\ i\neq j}}^{n} z_i z_j\right| + \left|\sum_{\substack{j,i,k=1\\ i\neq j\neq k}}^{n} z_i z_j z_k\right| + \ldots \\
&\leq \sum_{j=1}^{n}|z_j| + \sum_{\substack{j,i=1\\ i\neq j}}^{n}|z_i||z_j| + \sum_{\substack{j,i,k=1\\ i\neq j\neq k}}^{n}|z_i||z_j||z_k| + \ldots \\
&= 1+\sum_{j=1}^{n}|z_j| + \sum_{\substack{j,i=1\\ i\neq j}}^{n}|z_i||z_j| + \sum_{\substack{j,i,k=1\\ i\neq j\neq k}}^{n}|z_i||z_j||z_k| + \ldots - 1 \\
&= \prod_{j=1}^{n}(1+|z_j|)-1.
\end{aligned}$$

Continuamos ahora con la prueba de (1.6). Demostramos esta desigualdad mediante inducción.

- Para $n=1$: $|z_1-1| \leq (1+|z_1-1|)-1$.

- Hipótesis de inducción. Supongo cierto para n:

$$\left|\prod_{j=1}^{n} z_j - 1\right| \leq \prod_{j=1}^{n}(1+|z_j-1|)-1.$$

- Demostramos la desigualdad para $n+1$:

$$\left|\prod_{j=1}^{n+1} z_j - 1\right| = \left|\prod_{j=1}^{n} z_j z_{n+1} - 1\right| = \left|\left(\prod_{j=1}^{n} z_j\right)(z_{n+1}-1) + \left(\prod_{j=1}^{n} z_j - 1\right)\right|,$$

  Aplicando la desigualdad triangular, se tiene

$$\left|\left(\prod_{j=1}^{n} z_j\right)(z_{n+1}-1) + \left(\prod_{j=1}^{n} z_j - 1\right)\right| \leq \left|\prod_{j=1}^{n} z_j\right| |z_{n+1}-1| + \left|\prod_{j=1}^{n} z_j - 1\right|.$$

  Usando que

$$|z_j| = |z_j+1-1| \leq 1+|z_j-1| \Rightarrow \left|\prod_{j=1}^{n} z_j\right| \leq \prod_{j=1}^{n} 1+|z_j-1|$$

y la hipótesis de inducción llegamos a

$$\begin{aligned}\left|\prod_{j=1}^{n} z_j\right| |z_{n+1}-1| + \left|\prod_{j=1}^{n} z_j - 1\right| &\leq \prod_{j=1}^{n}(1+|z_j-1|)|z_{n+1}-1| + \prod_{j=1}^{n}(1+|z_j-1|) - 1 \\ &= \prod_{j=1}^{n}(1+|z_j-1|)(1+|z_{n+1}-1|) - 1 \\ &= \prod_{j=1}^{n+1}(1+|z_j-1|) - 1.\end{aligned}$$

Queda así demostrada la desigualdad por inducción. □

A partir de este lema podemos demostrar el siguiente corolario, el cual nos da una cota para la diferencia de productos finitos.

Corolario 1.4.1. *Si $z_1, z_2, ..., z_m \in \mathbb{C}$, entonces para $1 \leq n \leq m$, se tiene:*

$$\left|\prod_{j=1}^{m}(1+z_j) - \prod_{j=1}^{n}(1+z_j)\right| \leq e^{\sum_{j=1}^{n}|z_j|}\left(e^{\sum_{j=n+1}^{m}|z_j|} - 1\right). \tag{1.7}$$

Demostración. Aplicando el Lema 1.4.1 obtenemos

$$\begin{aligned}\left|\prod_{j=1}^{m}(1+z_j) - \prod_{j=1}^{n}(1+z_j)\right| &= \left|\prod_{j=1}^{n}(1+z_j)\right|\left|\prod_{j=n+1}^{m}(1+z_j) - 1\right| \\ &\leq \prod_{j=1}^{n}(1+|z_j|)\left(\prod_{j=n+1}^{m}(1+|z_j|) - 1\right).\end{aligned}$$

Además, si aplicamos el Lema 1.3.1 con $x = |z_j|$ concluimos

$$\prod_{j=1}^{n}(1+|z_j|)\left(\prod_{j=n+1}^{m}(1+|z_j|) - 1\right) \leq e^{\sum_{j=1}^{n}|z_j|}\left(e^{\sum_{j=n+1}^{m}|z_j|} - 1\right).$$

□

Una vez que se han establecido unas cotas para el producto infinito de números complejos. Vamos a definir la convergencia absoluta de dichos productos, para ello recordamos de nuevo que se toma $(z_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $z_n = 1 + w_n$ con $n \geq 1$.

Proposición 1.4.1. *Dado $\prod_{n=1}^{\infty}(1+w_j)$, se satisface a) $\Leftrightarrow$ b) $\Leftrightarrow$ c) $\Rightarrow$ d).*

a) La serie $\sum_{n=1}^{\infty}|w_n|$ converge.

b) $\exists N \in \mathbb{N}$ *tal que la serie* $\sum_{j=N+1}^{\infty} |\operatorname{Log}(1+w_j)|$ *converge.*

c) *El producto* $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|w_n|)$ *es convergente.*

d) *El producto* $\prod_{n=1}^{\infty}(1+w_n)$ *es convergente.*

Demostración. Se demuestran las equivalencias $a) \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow c) \Rightarrow d)$

$a \Leftrightarrow b)$. Por hipótesis tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|$ converge, por tanto podemos asegurar que $|w_n| \to 0$ para n muy grande.

Aplicando el desarrollo en serie de potencias de $\operatorname{Log}(1+w_j)$ para $|w_j| < 1$ tomando j suficientemente grande, y dividiendo por w_j, se tiene

$$\frac{\operatorname{Log}(1+w_j)}{w_j} = 1 - \frac{w_j}{2} + \frac{w_j^2}{3} - ... + \frac{(-1)^n w_j^{n-1}}{n} + ...$$

por ello obtenemos que

$$\lim_{j\to 0} \frac{\operatorname{Log}(1+w_j)}{w_j} = 1.$$

Con esto, por definición de límite, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| \frac{\operatorname{Log}(1+w_j)}{w_j} - 1 \right| < \frac{1}{2}, \quad \forall j \geq N.$$

Entonces para $j \geq N$ se tiene

$$\frac{1}{2} < \left| \frac{\operatorname{Log}(1+w_j)}{w_j} \right| < \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{|w_j|}{2} < |\operatorname{Log}(1+w_j)| < \frac{3|w_j|}{2}.$$

De este modo tengo que $\sum_{j=N+1}^{\infty} |\operatorname{Log}(1+w_j)|$ está acotada superior e inferiormente por la serie convergente por hipótesis $\sum_{n=1}^{\infty} |w_j|$, aplicando la regla de sándwich se tiene que

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} |\operatorname{Log}(1+w_j)| < \infty.$$

Lo cual nos da la implicación, $a \Rightarrow b$.

De la misma manera, si tenemos por hipótesis que $\sum_{j=N+1}^{\infty} |\operatorname{Log}(1+w_j)| < \infty$, tenemos que la sucesión $\sum_{n=1}^{\infty} |w_j|$ está acotada superiormente por una sucesión convergente, dando lugar a su convergencia, quedando demostrada la otra implicación, $b \Rightarrow a$.

$a \Leftrightarrow c)$. Queda demostrado por el Lema 1.3.2.

$c \Rightarrow d$). Se supone que $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|w_j|) < \infty$, entonces el producto parcial $\prod_{j=1}^{n}(1+|w_j|)$ también converge. Por el Lema 1.4.1 se tiene

$$\left|\prod_{j=1}^{n}(1+w_j)-1\right| \leq \prod_{j=1}^{n}(1+|w_j|)-1,$$

o equivalentemente

$$-\left(\prod_{j=1}^{n}(1+|w_j|)-1\right) \leq \prod_{j=1}^{n}(1+w_j)-1 \leq \prod_{j=1}^{n}(1+|w_j|)-1.$$

Escribiéndolo de una manera más adecuada, tenemos

$$2-\prod_{j=1}^{n}(1+|w_j|) \leq \prod_{j=1}^{n}(1+w_j) \leq \prod_{j=1}^{n}(1+|w_j|).$$

Aplicando la regla del sándwich, se tiene que $\prod_{j=1}^{n}(1+w_j)$ está acotado superior e inferiormente.

Como esto es cierto para cualquier $n \in \mathbb{N}$ hemos visto que los productos parciales convergen y por tanto podemos concluir que $\prod_{j=1}^{\infty}(1+w_j)$ es convergente. $\square$

A partir de esta proposición definimos el producto infinito de números complejos absolutamente convergente.

Definición 1.4.1 (Producto infinito absolutamente convergente, [1]-[2]). *Diremos que el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty}(1+w_n)$ es absolutamente convergente si se satisface alguna de las condiciones a), b) o c) de la Proposición 1.4.1.*

Observación 1.4.1. *Notar que*

$$\textit{absolutamente convergente} \quad \Longrightarrow \quad \textit{convergente},$$

pero el recíproco no es cierto.

Contraejemplo. Se considera el producto infinito

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+w_n) \quad \text{con} \quad (w_n)_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \ldots\right\}.$$

Primero vemos si es absolutamente convergente. Usando las series armónicas tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |w_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n}\right| + \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{-1}{n}\right| = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty,$$

entonces por la Proposición 1.4.1 tenemos que $\prod_{n=1}^{\infty}(1+w_n)$ no es absolutamente convergente. A continuación se estudia su convergencia:

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{\infty}(1+w_n) &= \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{-1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{-1}{3}\right)... \\ &= \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)... = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right).\end{aligned}$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$ converge por ser una serie armónica con $\alpha = 2 > 1$, la Proposición 1.4.1 nos da que

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right) \text{ converge} \quad \Longrightarrow \quad \prod_{n=1}^{\infty}(1+w_n) \text{ converge.}$$

Capítulo 2

Productos infinitos de funciones holomorfas

Una vez estudiado el producto infinito de números complejos y los criterios para estudiar su convergencia. En este capítulo nos centramos en estudiar el *"Criterio M de Weierstrass"*, una herramienta para estudiar la convergencia uniforme de productos infinitos de funciones complejas. Este criterio se va a aplicar sobre diferentes casos relevantes, como la función zeta de Riemann y otras funciones periódicas como son el seno y el coseno, destacando cómo los productos infinitos permiten construir y analizar estas funciones.

2.1. Criterio M de Weierstrass

Antes de enunciar el Criterio M de Weierstrass, recordamos la definición de la multiplicidad de z como cero de f e introducimos la notación que vamos a utilizar en este capítulo.

Definición 2.1.1 (Multiplicidad de z como cero de f). *Para cada $z \in Z(f)$ existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^{(n)}(z) \neq 0$. Se dice que $m = min\{n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(z) \neq 0\}$, con $m \in \mathbb{N}$, es la multiplicidad de z como cero de f.*

Observación 2.1.1. *El conjunto de los ceros de f, es un conjunto discreto.*

De aquí en adelante, denotaremos el conjunto de ceros de f por $Z(f)$ y la multiplicidad de z como cero de f por $m(f, z)$.

El Criterio M de Weierstrass, que se enuncia a continuación, es el criterio principal para estudiar la convergencia absoluta y uniforme de un producto infinito.

Teorema 2.1.1 (Criterio M de Weierstrass). *Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones holomorfas en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$, tales que ninguna de ellas se anula. Se supone que para cada compacto $K \subseteq \Omega$ y $n \geq 1$, existe $M_n > 0$ de modo que*

$$\textit{CONDICIÓN } M: \quad |1 - f_n(z)| \leq M_n \quad \forall z \in K \quad \text{ y } \quad \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty.$$

Entonces para cada $z \in \Omega$, tenemos que

$$\prod_{n=1}^{\infty} f_n(z) \quad \textit{converge absolutamente.}$$

Además, la función $F(z) := \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ satisface:

1. *F es holomorfa en Ω.*

2. *Si $F_N(z) := \prod_{n=1}^{N} f_n(z)$ es el producto parcial N-ésimo de las f_n, entonces $(F_N)_{N\geq 1}$ converge uniformemente sobre compactos de Ω hacia F cuando $N \to \infty$.*

3. *$Z(F) = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z(f_n)$ y $m(F, z) = \sum_{n=1}^{\infty} m(f_n, z) \quad \forall z \in \Omega$.*

4. *Para cada $z \in \Omega \setminus Z(f)$ se tiene*

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)} = \frac{F'(z)}{F(z)}.$$

Demostración. Primero se prueba que $\prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge absolutamente. Por la condición M tenemos que para cada compacto $K \subseteq \Omega$ y $z \in K$ se tiene que $|1 - f_n(z)| \leq M_n$ y sabiendo que $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$ podemos concluir que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |1 - f_n(z)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty.$$

Por tanto $\sum_{n=1}^{\infty} |1 - f_n(z)| < \infty$ y por la Proposición 1.4.1 se concluye que

$$\prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

converge absolutamente para todo $z \in K$. Como se satisface para todo $z \in K$, con K conjunto compacto arbitrario de Ω, entonces se satisface en todo Ω.

A continuación se prueba cada una de las características que satisface $F(z)$:

2. Se fija un $z \in \Omega$ y la sucesión M_n asociada a él. A partir del Corolario 1.4.1 obtenemos

$$|F_m - F_N| = \left|\prod_{n=1}^{m} f_n(z) - \prod_{n=1}^{N} f_n(z)\right| = \left|\prod_{n=1}^{m}(1+(f_n(z)-1)) - \prod_{n=1}^{N}(1+(f_n(z)-1))\right|$$
$$\leq e^{\sum_{n=1}^{N}|f_n(z)-1|}\left(e^{\sum_{n=N+1}^{m}|f_n(z)-1|}-1\right).$$

Si además tenemos en cuenta la condición M, llegamos a

$$e^{\sum_{n=1}^{N}|f_n(z)-1|}\left(e^{\sum_{n=N+1}^{m}|f_n(z)-1|}-1\right) \leq e^{\sum_{n=1}^{N} M_j}\left(e^{\sum_{n=N+1}^{m} M_j}-1\right),$$

y haciendo tender m a infinito, con $z \in K$ fijo, llegamos a

$$|F(z) - F_N(z)| \leq e^{\sum_{n=1}^{N} M_n}\left(e^{\sum_{n=N+1}^{\infty} M_n}-1\right).$$

Teniendo en cuenta que $\sum_{n=1}^{N} M_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} M_n := H$, se continua

$$e^{\sum_{n=1}^{N} M_n}\left(e^{\sum_{n=N+1}^{\infty} M_n}-1\right) \leq e^{\sum_{n=1}^{\infty} M_n}\left(e^{\sum_{n=N+1}^{\infty} M_n}-1\right) = e^{H}\left(e^{\sum_{n=N+1}^{\infty} M_n}-1\right).$$

Por último si hacemos tender N a infinito, se tiene:

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=N+1}^{\infty} M_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{N\to\infty} e^{\sum_{n=N+1}^{\infty} M_n} = 1,$$

y concluimos con $\lim_{N\to\infty} e^{H}\left(e^{\sum_{n=N+1}^{\infty} M_n}-1\right) = 0$, luego

$$\lim_{N\to\infty}|F(z) - F_N(z)| \leq 0.$$

Por tanto, F_N converge uniforme y absolutamente a F sobre K cuando N tiende a infinito.

1. Ahora se quiere probar que F es holomorfa en Ω. Por lo que acabamos de ver en (2) se tiene que F_n converge uniforme y absolutamente sobre compactos a F, y además, F_n es holomorfa por hipótesis. Entonces por el Teorema de convergencia de Weierstrass [1], F es holomorfa en Ω.

3. Por definición de convergencia de productos finitos, $F(z) = 0$ si y solo si $f_n(z) = 0$ para

algún $n \geq 1$, entonces se tiene que

$$Z(F) = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z(f_n).$$

Falta probar

$$m(F,z) = \sum_{n=1}^{\infty} m(f_n, z) \quad \forall z \in \Omega.$$

Sin pérdida de generalidad, se supone que b es un cero de F, por tanto es un cero de un número finito de f_n. Reordenando los factores, se tiene: $f_j(b) = 0$ si $1 \leq j \leq n$ y $f_j(b) \neq 0$ si $j > n$, por ello se llega a

$$G(z) = \prod_{j>N} f_j(z) \ : \quad G(b) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad m(G,b) = 0.$$

$$H(z) = \prod_{j=1}^{n} f_j(z) \quad \text{tiene en } b \text{ un cero de orden } m(H,b) = \sum_{j=1}^{n} m(f_j, z).$$

Multiplicando ambas:

$$F(z) = G(z)H(z) \Rightarrow m(F,b) = m(H,b) + m(G,b) = \sum_{j=1}^{n} m(f_j,b) + 0 = \sum_{j=1}^{n} m(f_j,b),$$

y concluimos $m(F,z) = \sum_{j=1}^{n} m(f_j,z)$ $\forall z \in \Omega$.

4. Por (2), F_N converge a F sobre compactos y por el Teorema de convergencia de Weierstrass [1], como F_N y F son holomorfas, se tiene que F'_N converge uniformemente a F' sobre compactos.

Dado $z \in \Omega \setminus Z(f)$ existe un compacto K tal que $z \in K \subset \Omega \setminus Z(f)$. Si tomamos este conjunto compacto $K \subset \Omega \setminus Z(f)$, en el cual no se anulan los denominadores, cuando $N \to \infty$, se tiene que $\frac{F'_N}{F_N}$ converge a $\frac{F'}{F}$ sobre el compacto K.
Por otro lado, para cada N, si $z \notin Z(F_N)$, en particular $z \notin Z(F)$, se tiene

$$F_N(z) = \prod_{j=1}^{N} f_j(z) \quad y \quad F'_N(z) = \sum_{j=1}^{N} f'_j(z) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} f_j(z),$$

entonces

$$\frac{F'_N(z)}{F_N(z)} = \frac{\sum_{i=1}^{N} f'_i(z) \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} f_j(z)}{\prod_{j=1}^{N} f_j(z)} = \sum_{i=1}^{N} \frac{f'_i(z)}{f_i(z)},$$

y como $\frac{F'_N}{F_N}$ converge a $\frac{F'}{F}$ sobre el compacto K cuando $N \to \infty$, entonces se concluye que:

$$\frac{F'}{F} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{f'_n(z)}{f_n(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f'_n(z)}{f_n(z)} \quad \forall z \in K.$$

Como se satisface para todo $z \in K \subset \Omega \setminus Z(f)$ entonces se satisface para todo $z \in \Omega \setminus Z(f)$. $\square$

2.2. Ejemplos de funciones como productos infinitos.

En esta sección vamos a analizar ejemplos y expresiones, como la función zeta de Riemann, el seno o el coseno, relacionadas con productos infinitos de números complejos, con el objetivo de explorar su comportamiento y propiedades. A partir de los conceptos previamente estudiados, como el Criterio M de Weierstrass, se desarrollarán aplicaciones que permiten garantizar la convergencia de dichos productos en el plano complejo.

2.2.1. Función ζ como producto infinito.

La función zeta de Riemann se define como

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \quad \forall z \in H_1. \tag{2.1}$$

Esta función es holomorfa en H_1, donde H_1 es el semiplano de la forma

$$H_\sigma = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) > \sigma\} \quad \text{con } \sigma = 1.$$

La función $\zeta(z)$ se puede escribir como producto infinito por la representación de Euler, esta es

$$\zeta(z) = \prod_p \frac{1}{1 - 1/p^z} \quad \forall z \in H_1, \tag{2.2}$$

donde $\prod_p$ es el producto infinito indexado con la sucesión de números primos ordenados de forma creciente.

El objetivo de esta sección es ver cómo se obtiene dicha representación. Para ello, se simplifica la notación denotando $F(z) = \prod_p(1 - \frac{1}{p^z})$. Para obtener esta representación, vamos a utilizar las dos observaciones siguientes:

Observación 2.2.1. *Si $a \in \mathbb{R}$ y $a > 0$, entonces $a^z = e^{\operatorname{Log} a^z} = e^{z \operatorname{Log} a}$. De esta manera,*

$$f : z \in \mathbb{C} \longrightarrow a^z$$

es una función entera no nula tal que $f(z) \neq 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$, por ser $a > 0$.

Además, satisface $|a^z| = a^{Re(z)}$. Esta expresión se deduce a partir de la fórmula de Euler, con la cual se llega a

$$|a^z| = |a^{Re(z)}||a^{Im(z)}|,$$

además, como $a > 0$ entonces $|a^{Re(z)}| = a^{Re(z)}$ y $|a^{Im(z)}| = |a^{iy}| = e^{iy \ln a}$ pertenece al círculo unitario, por tanto $|a^{Im(z)}| = 1$.

Observación 2.2.2. *Si p es un número primo, entonces $g : z \in \mathbb{C} \longrightarrow 1 - \frac{1}{p^z}$ es una función entera y se anula si*

$$1 - \frac{1}{p^z} = 0 \;\Leftrightarrow\; 1 - \frac{1}{e^{z \ln p}} = 0 \;\Leftrightarrow\; e^{z \ln p} = 1$$
$$\Leftrightarrow\; \ln(p)z = \ln(1) \;\Leftrightarrow\; \ln(p)z = 2\pi i k \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Finalmente se obtiene $z = \frac{2\pi i k}{\ln(p)}$ con $k \in \mathbb{Z}$, es decir, $g(z)$ solo se anula en el eje imaginario.

Notación. Se va a utilizar la notación p_n, para expresar el n-ésimo número primo, con $n \geq 1$. Es decir, $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5$,...

Para justificar la expresión de $\zeta(z)$, se siguen dos pasos:

1. Analizar $F(z) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{1}{p_n^z})$ como función holomorfa de H_1.

2. Comprobar que $\zeta(z) = \frac{1}{F(z)}$.

1. Analizamos $\prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{1}{p_n^z})$ como función holomorfa de H_1.

Para cada $n \geq 1$, se define

$$f_n(z) = 1 - \frac{1}{p_n^z},$$

la cual es una función entera y por la Observación 2.2.2, solo se anula en el eje imaginario. Fijada una abscisa $\sigma > 1$, para cada $z \in H_\sigma$, se tiene por la Observación 2.2.1 que

$$|1 - f_n(z)| = \left|1 - 1 + \frac{1}{p_n^z}\right| = \left|\frac{1}{p_n^z}\right| = \frac{1}{p_n^{Re(z)}},$$

como $z \in H_\sigma$, por definición de H_σ, tenemos que $Re(z) > \sigma$, entonces

$$\frac{1}{p_n^{Re(z)}} \leq \frac{1}{p_n^\sigma} < \frac{1}{n^\sigma} \quad \text{donde } p_n > n \text{ y } \sigma > 1.$$

Sea $M_n = \frac{1}{n^\sigma}$, satisface $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\sigma} < \infty$ por ser una serie armónica con $\sigma > 1$, por tanto se cumple la condición M del Criterio M de Weierstrass.

Por ello, en cada compacto $K \subset H_1$ aplicando el Criterio M de Weierstrass (ver (2.1.1)), para cada $z \in K$, $\prod_{n=1}^\infty f_n(z)$ converge absolutamente y es holomorfa en H_σ, con $\sigma > 1$. Como se satisface en todo compacto K de H_σ, entonces para todo punto que se tome de H_σ, se puede tomar un compacto que lo satisfaga. Por tanto, $\prod_{n=1}^\infty f_n(z)$ es holomorfa en H_1.

2. Se comprueba que $\zeta(z) = \frac{1}{F(z)}$, es decir, $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^z} = \frac{1}{\prod_p \left(1 - \frac{1}{p^z}\right)}$.
Para cada $N \in \mathbb{N}$, se define el conjunto

$$S_N = \{1, n \in \mathbb{N} : \text{en su factorización solo intervienen los } N \text{ primeros primos}\}.$$

Se define $F_N(z) = \prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{1}{p_n^z}\right)$, y se tiene

$$\frac{1}{F_N(z)} = \frac{1}{\prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{1}{p_n^z}\right)} = \prod_{n=1}^N \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p_n^z}\right)} = \prod_{n=1}^N \left(1 + \frac{1}{p_n^z} + \frac{1}{p_n^{2z}} + ...\right),$$

la última igualdad se obtiene a partir del desarrollo en serie $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ...$ para $|x| < 1$. En este caso se tiene $|x| = \left|\frac{1}{p_n^z}\right| = \frac{1}{p_n^{Re(z)}} < 1$ ya que $z \in H_1$, entonces $Re(z) > 1$ y p_n es un número primo mayor que 1.

Continuando la igualdad, se obtiene

$$\prod_{n=1}^N \left(1 + \frac{1}{p_n^z} + \frac{1}{p_n^{2z}} + ...\right) = \sum_{\alpha_1 \geq 0} ... \sum_{\alpha_N \geq 0} \left(\frac{1}{p_1^{\alpha_1} ... p_N^{\alpha_N}}\right)^z.$$

Demostramos esta igualdad por el principio de inducción.

- Para $N = 2$.

$$\prod_{n=1}^{2}\left(1+\frac{1}{p_n^z}+\frac{1}{p_n^{2z}}+...\right)=\left(1+\frac{1}{p_1^z}+\frac{1}{p_1^{2z}}+...\right)\left(1+\frac{1}{p_2^z}+\frac{1}{p_2^{2z}}+...\right)$$
$$=1+\frac{1}{p_1^z}+\frac{1}{p_2^z}+\frac{1}{p_1^{2z}}+\frac{1}{p_2^{2z}}+\frac{1}{p_1^zp_2^z}+\frac{1}{p_1^zp_2^{2z}}+\frac{1}{p_1^{2z}p_2^z}+\frac{1}{p_1^{2z}p_2^{2z}}+...$$
$$=\sum_{\alpha_1\geq 0}\sum_{\alpha_2\geq 0}\left(\frac{1}{p_1^{\alpha_1 z}p_2^{\alpha_2 z}}\right)=\sum_{\alpha_1\geq 0}\sum_{\alpha_2\geq 0}\left(\frac{1}{p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}}\right)^z.$$

- Hipótesis de inducción. Supongo cierto para $N-1$, esto es

$$\prod_{n=1}^{N-1}\left(1+\frac{1}{p_n^z}+\frac{1}{p_n^{2z}}+...\right)=\sum_{\alpha_1\geq 0}...\sum_{\alpha_{N-1}\geq 0}\left(\frac{1}{p_1^{\alpha_1}...p_{N-1}^{\alpha_{N-1}}}\right)^z.$$

- Aplicamos el principio de inducción:

$$\prod_{n=1}^{N}\left(1+\frac{1}{p_n^z}+\frac{1}{p_n^{2z}}+...\right)=\prod_{n=1}^{N-1}\left(1+\frac{1}{p_n^z}+\frac{1}{p_n^{2z}}+...\right)\left(1+\frac{1}{p_N^z}+\frac{1}{p_N^{2z}}+...\right)$$
$$=\sum_{\alpha_1\geq 0}...\sum_{\alpha_{N-1}\geq 0}\left(\frac{1}{p_1^{\alpha_1}...p_{N-1}^{\alpha_{N-1}}}\right)^z\left(1+\frac{1}{p_N^z}+\frac{1}{p_N^{2z}}+...\right)$$
$$=\sum_{\alpha_1\geq 0}...\sum_{\alpha_{N-1}\geq 0}\left(\frac{1}{p_1^{\alpha_1}...p_{N-1}^{\alpha_{N-1}}}\right)^z\sum_{\alpha_N\geq 0}\left(\frac{1}{p_N^{\alpha_N}}\right)^z$$
$$=\sum_{\alpha_1\geq 0}...\sum_{\alpha_N\geq 0}\left(\frac{1}{p_1^{\alpha_1}...p_N^{\alpha_N}}\right)^z.$$

  La última igualdad se obtiene por el mismo argumento que el último paso del caso $N = 2$. De esta manera queda probada la igualdad por inducción.

Volviendo a la igualdad que se estaba probando, se concluye, siendo $k = p_1^{\alpha_1}...p_N^{\alpha_N}$ con $\alpha_i \geq 0$:

$$\prod_{n=1}^{N}\left(1+\frac{1}{p_n^z}+\frac{1}{p_n^{2z}}+...\right)=\sum_{\alpha_1\geq 0}...\sum_{\alpha_N\geq 0}\left(\frac{1}{p_1^{\alpha_1}...p_N^{\alpha_N}}\right)^z=\sum_{k\in S_N}\frac{1}{k^z}.$$

Entonces se ha probado que

$$\frac{1}{F_N(z)}=\sum_{k\in S_N}\frac{1}{k^z}.$$

Una vez conocida esta expresión, estudiamos la convergencia de la diferencia entre $F_N(z)$ y

$\zeta(z)$:

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{F_N(z)}-\zeta(z)\right| &= \left|\sum_{n\in S_N}\frac{1}{n^z}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}\right| = \left|\sum_{n\in S_N}\frac{1}{n^z}-\left(\sum_{n\in S_N}\frac{1}{n^z}+\sum_{n\notin S_N}\frac{1}{n^z}\right)\right| \\ &= \left|\sum_{n\notin S_N}\frac{1}{n^z}\right| \leq \sum_{n\notin S_N}\frac{1}{|n^z|} = \sum_{n\notin S_N}\frac{1}{n^{Re(z)}} \leq \sum_{n>N}\frac{1}{n^{Re(z)}},\end{aligned}$$

donde hemos vuelto a usar la Observación 2.2.1 y el hecho de que $n\notin S_N \Rightarrow n>p_N>N$ y por tanto se concluye

$$\lim_{N\to\infty}\left|\frac{1}{F_N(z)}-\zeta(z)\right| = \lim_{N\to\infty}\sum_{n>N}\frac{1}{n^{Re(z)}} = 0 \quad \text{con } z\in H_1.$$

Probamos $n\notin S_N \underset{1.}{\Rightarrow} n>p_N \underset{2.}{\Rightarrow} n>N$.

1. Por reducción al absurdo suponemos que $n\leq p_N$. Como $n\notin S_N$, existe un primo $q>p_N$, tal que $n=q^bk$ con $b\geq 1$ y $k\in S_N$. Por tanto,

$$n=q^bk>(p_N)^bk\geq p_N \quad\Longrightarrow\quad n>P_N \quad\Rightarrow\ \text{absurdo.}$$

2. Si $n>p_N$ y $p_N>N$, debido a que los números primos crecen a mayor velocidad que los naturales, entonces $n>p_N>N$, por tanto $n>N$.

Fijado $z\in H_1$, se ha llegado a

$$\lim_{N\to\infty}\left|\frac{1}{F_N(z)}-\zeta(z)\right|=0, \quad\Longrightarrow\quad \lim_{N\to\infty}\frac{1}{F_N(z)}-\zeta(z)=0.$$

Por tanto

$$\zeta(z)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{F_N(z)}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{1}{p_n^z}\right)}=\frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_n^z}\right)},$$

y concluimos la expresión que estábamos buscando:

$$\zeta(z)=\prod_p\left(1-\frac{1}{p^z}\right) \quad \text{para cada } z\in H_1.$$

Como consecuencia del resultado anterior se deducen de manera sencilla los siguientes resultados.

Proposición 2.2.1. *La función ζ no se anula en H_1.*

Demostración. De la representación de Euler de la función ζ, se tiene:

$$\zeta(z) = \frac{1}{F(z)} \quad \Rightarrow \quad \zeta(z)F(z) = 1 \quad \text{para cada} \;\; z \in H_1.$$

Es claro que ninguno de los dos valores puede tomar valor nulo. Por ello, ζ no se anula en H_1. □

Proposición 2.2.2. *Sea p un número primo. Entonces, la suma de los inversos de todos los números primos diverge, es decir:*

$$\sum_p \frac{1}{p} = \infty. \tag{2.3}$$

Demostración. Para todo $x \in \mathbb{R}$, se satisface por la representación de Euler de la función ζ:

$$\zeta(x)F(x) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \zeta(x)\prod_p \left(1 - \frac{1}{p^x}\right) = 1.$$

Como $p_1 = 2$ y $x > 1$, entonces $p^x > 2$, y se tiene que $\frac{1}{p^x} < \frac{1}{2}$ y podemos aplicar del Lema 1.3.1, la expresión $e^{-2a} \leq 1 - a \leq e^{-a}$ con $a = \frac{1}{p^x}$, tal que:

$$e^{-2\frac{1}{p^x}} \leq 1 - \frac{1}{p^x} \Rightarrow e^{-2\sum_p \frac{1}{p^x}} \leq \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^x}\right) \quad \Rightarrow \quad \zeta(x) = \frac{1}{\prod_p \left(1 - \frac{1}{p^x}\right)} \leq e^{2\sum_p \frac{1}{p^x}},$$

aplicando logaritmos y teniendo en cuenta que la función del logaritmo es creciente, se llega a:

$$2\sum_p \frac{1}{p^x} \geq \ln\left(\frac{1}{\prod_p (1 - \frac{1}{p^x})}\right) = \ln(\zeta(x)),$$

y como $x > 1$, tenemos:

$$\ln(\zeta(x)) \leq 2\sum_p \frac{1}{p^x} \leq 2\sum_p \frac{1}{p} \quad \Rightarrow \quad \zeta(x) \leq e^{2\sum_p \frac{1}{p}}.$$

Estudiamos la convergencia de la expresión $\zeta(x)$,

$$\lim_{x \to 1^-} \zeta(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{\prod_p (1 - \frac{1}{p^x})},$$

se observa que $\zeta(x)$ tiene una singularidad en $x = 1$, por tanto, en este punto la función se comporta de forma asintótica, entonces a medida que $x \to 1^-$, el producto diverge, es decir:

$$\lim_{x\to 1^-} \zeta(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\prod_p \left(1 - \frac{1}{p^x}\right)} = \infty \quad y \quad \zeta(x) \le e^{2\sum_p \frac{1}{p}} \implies \quad e^{2\sum_p \frac{1}{p}} = \infty,$$

y sabiendo que el límite de una exponencial diverge si el exponente diverge, se concluye

$$\sum_p \frac{1}{p} = \infty.$$

□

2.2.2. La función seno.

Otra función que podemos obtener a partir de productos infinitos de números complejos es la factorización del seno. El cual se expresa como

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \qquad \forall z \in \mathbb{C}. \tag{2.4}$$

El objetivo de esta sección es ver cómo se ha obtenido dicha expresión. Para ello, primero se estudia dónde se anula cada uno de los términos:

- $\sin(\pi z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{Z}$.
- $\pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) = 0$ en $z = 0$ y $z = \pm n$ con $n \in \mathbb{N}$, entonces, se anula para todo $z \in \mathbb{Z}$.

Es decir, ambos términos se anulan para todo $z \in \mathbb{Z}$, como era de esperar.
Se analiza el producto infinito

$$\pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Para cada $n \ge 1$, se define $f_n(z) = 1 - \frac{z^2}{n^2}$ el cual se anula en $z = \pm n$. Definimos $f(z)$ como

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Fijado un $R > 0$ arbitrario, tenemos que para todo $z \in \overline{D(0,R)}$ cerrado y acotado, luego compacto, se tiene

$$|1 - f_n(z)| = \left|1 - 1 + \frac{z^2}{n^2}\right| = \left|\frac{z^2}{n^2}\right| \le \frac{R^2}{n^2}.$$

Consideramos la sucesión con término general $M_n = \frac{R^2}{n^2}$, la cual satisface que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^2}{n^2} = R^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

por ser una serie armónica con $\alpha = 2 > 1$.

Por el Criterio M de Weierstrass, $F(z)$ es holomorfa en todo el disco $\overline{D(0,R)}$. Además, tomando R tan grande como se quiera, se sigue satisfaciendo el resultado, entonces $F(z)$ será holomorfa en $\mathbb{C}$, es decir, $F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$ es una función entera, que se anula una vez en cada entero no nulo.

Sabiendo que $F(z)$ es una función entera, comparamos $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$ con $\sin(\pi z)$. Para ello se define la función auxiliar

$$G(z) = \pi z F(z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Es claro que $G(z)$ es una función entera, por ser el producto de $F(z)$, función entera, con el polinomio πz. Además se anula en $z \in \mathbb{Z}$ con multiplicidad uno. Entonces, tanto $G(z)$ como $\sin(\pi z)$ se anulan en $\mathbb{Z}$ con multiplicidad uno, y gracias a esto el cociente

$$\frac{\sin(\pi z)}{G(z)},$$

es una función entera que no se anula en $\mathbb{C}$, puesto que los ceros de ambas funciones se cancelan.

Como $\mathbb{C}$ es simplemente conexo y la función $e^{H(z)}$ es entera si $H(z)$ es una función entera, entonces se puede escribir

$$\frac{\sin(\pi z)}{G(z)} = e^{H(z)} \quad \Rightarrow \quad \sin(\pi z) = G(z) e^{H(z)} \quad \forall z \in \mathbb{C}. \tag{2.5}$$

Aqui, hemos usado sin demostración el resultado, ver [4], que una función f entera cualquiera que no se anula en un dominio simplemente conexo tiene una rama del logaritmo $\mathrm{Log}(f)$ entera de modo que

$$f = e^{\mathrm{Log}(f)}.$$

Vamos a suponer que $H(z)$ es constante, esto es $H(z) = H$, lo cual se va a probar más tarde.

Recordamos que

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) e^{H} \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Dividiendo a ambos lados por πz, nos queda

$$\frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) e^{H}.$$

Si tomamos el límite en ambos lados cuando z tiende a cero, obtenemos $1 = 1e^{H}$. Por tanto, para demostrar la igualdad inicial, (2.4), basta ver que

$$e^{H(z)} = 1.$$

Probamos que $H(z)$ es una función constante. Para ello partimos de la expresión

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) e^{H(z)} \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

y derivando logarítmicamente obtenemos que

$$\frac{\pi\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \frac{\pi \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right) e^{H(z)} + \pi z \left(\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)\right)' e^{H(z)} + \pi z \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right) e^{H(z)} H'(z)}{\pi z \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right) e^{H(z)}}.$$

Simplificándolo, llegamos a

$$\pi \operatorname{cotg}(\pi z) = \frac{1}{z} + \frac{\left(\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)\right)'}{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)} + H'(z).$$

Calculamos aparte

$$\frac{\left(\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)\right)'}{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-2z}{n^2}\prod_{\substack{m=1\\ m\neq n}}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{m^2}\right)\right)}{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)} = \frac{-2z\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\frac{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)}{1-\frac{z^2}{n^2}}\right)}{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)}$$
$$= -2z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2z}{n^2-z^2}.$$

Uniendo todo se obtiene:

$$\pi \operatorname{cotg}(\pi z) = \frac{1}{z} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{n^2 - z^2} + H'(z), \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}.$$

Como las funciones $\operatorname{cotg}(\pi z)$, $\frac{1}{z}$ y $-2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{n^2-z^2}$ son funciones impares, entonces

$$H'(z) = \pi cotg(\pi z) - \frac{1}{z} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{n^2 - z^2},$$

es una función impar, por ser la suma y resta de funciones impares. Por ello, se verifica

$$H'(-z) = -H'(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Vuelvo a derivar la expresión, cada parte de la igualdad por separado

1.
$$\left(\frac{\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}\right)' = \frac{-\pi^2 \sin^2(\pi z) - \pi^2 \cos^2(\pi z)}{\sin^2(\pi z)} = \frac{-\pi^2}{\sin^2(\pi z)}.$$

2.
$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{z} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{n^2 - z^2} + H'(z)\right)' &= \frac{-1}{z^2} - \left(2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{n^2 - z^2}\right)' + H''(z) \\ &= \frac{-1}{z^2} - \sum_{n\neq 0} \frac{1}{(n+z)^2} + H''(z).\end{aligned}$$

donde en el último paso hemos usado que

$$\left(2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{n^2 - z^2}\right)' = \left(\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-z} - \frac{1}{n+z}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-z)^2} - \frac{1}{(n+z)^2} = \sum_{n\neq 0} \frac{1}{(n+z)^2}.$$

Uniendo ambas partes y aplicando que $H'(-z) = -H'(z)$ tenemos que

$$\frac{-\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \frac{1}{z^2} + \sum_{n\neq 0} \frac{1}{(n+z)^2} + H''(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(n+z)^2} + H''(z).$$

A partir de esta expresión, se observan dos cosas:

1. Si $H''(z) = 0$, entonces

$$\frac{-\pi^2}{sen^2(\pi z)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(n+z)^2} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}.$$

Luego es claro que ambos lados de la expresión tienen un polo en cada $z \in \mathbb{Z}$, estas son singularidades evitables. Por lo tanto,

$$H''(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(n+z)^2} - \frac{-\pi^2}{sen^2(\pi z)},$$

es una función entera.

2. Para acabar la demostración, basta probar que $H'' = 0$. Notar que si $H'' = 0$, es claro que H' es una función constante y, como además es una función impar, satisface $H'(-z) = -H'(z)$; por lo tanto, H' es constantemente 0 y $H(z)$ es constante.

Además, $H''(z)$ tiene dos propiedades de invarianza. Probamos cada una de ellas:

- Periodicidad. $H''(z) = H''(z+1)$.

$$\begin{aligned}
H''(z+1) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(n+(z+1))^2} - \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi(z+1))} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{((n+1)+z))^2} - \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z+\pi)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(n+z)^2} - \frac{\pi^2}{(-\sin(\pi z))^2} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(n+z)^2} - \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = H''(z).
\end{aligned}$$

- Simetría. $H''(-z) = H''(z)$.

$$\begin{aligned}
H''(-z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(-z+n)^2} - \frac{\pi^2}{\sin^2(-\pi z)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^2} - \frac{\pi^2}{(-\sin(\pi z))^2} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^2} - \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = H''(z).
\end{aligned}$$

En lo que continúa, consideramos la región

$$\mathcal{R} = \{z \in \mathbb{C} : |Re(z)| \leq \frac{1}{2}, Im(z) \geq 0\}.$$

Para ver que $H''(z) = 0$, tenemos que probar:

$$\lim_{\substack{|z|\to\infty \\ z\in\mathcal{R}}} |H''(z)| = \lim_{\substack{Im(z)\to\infty \\ z\in\mathcal{R}}} |H''(z)| = 0. \tag{2.6}$$

Como la región $\mathcal{R}$ es una banda vertical en el plano complejo, es lo mismo probar el límite cuando $|z| \to \infty$ que cuando $Im(z) \to \infty$ con $z \in \mathcal{R}$.

Además en la región $\mathcal{R}$, si se prueba que $H''(z) = 0$, por las dos propiedades de invarianza vistas anteriormente, podemos concluir que $H''(z) = 0$ en todo el plano complejo. Es decir, $H''(z)$ tendrá el mismo comportamiento en todo el plano complejo que en la región $\mathcal{R}$.

Para probar $H''(z) = 0$, se estudia cada sumando de $H''(z)$ como un límite individual, es decir

$$\lim_{\substack{Im(z)\to\infty \\ z\in\mathcal{R}}} |H''(z)| = \lim_{\substack{Im(z)\to\infty \\ z\in\mathcal{R}}} \left|\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}\right| + \lim_{\substack{Im(z)\to\infty \\ z\in\mathcal{R}}} \left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^2}\right| = 0. \tag{2.7}$$

Se comprueba que cada uno de los límites se anulan, por separado:

(1) $\lim_{\substack{Im(z)\to\infty \\ z\in\mathcal{R}}} \left|\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}\right|$.

Para calcular el límite, tenemos en cuenta la desigualdad:

$$|\sin(\pi z)|^2 \geq \sinh^2(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi^2}{|\sin(\pi z)|^2} \leq \frac{\pi^2}{\sinh^2(y)}.$$

Demostramos esta desigualdad. Se tiene:

- $\sin(z) = \sin(x+iy) = \sin(x)\cos(iy) + \cos(x)\sin(iy) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)$.
- $|\sin(z)|^2 = \sin(z)\overline{\sin(z)}$.
- $\overline{\sin(z)} = \sin(x)\cosh(y) - i\cos(x)\sinh(y)$.

Con todo esto se llega a:

$$\begin{aligned} |\sin(z)|^2 = \sin(z)\overline{\sin(z)} &= \sin^2(x)\cosh^2(y) + \cos^2(x)\sinh^2(y) \\ &= \sin^2(x)(1+\sinh^2(y)) + \cos^2(x)\sinh^2(y) \\ &= \sin^2(x) + \sinh^2 y(\cos^2(x) + \sin^2(x)) = \sin^2(x) + \sinh^2(y) \end{aligned}$$

Y se concluye que $|\sin(z)|^2 \geq \sinh^2(y)$. A partir de esta desigualdad y la expresión del $\sinh(\cdot)$ como diferencia de exponenciales, llegamos a:

$$\lim_{\substack{Im(z)\to\infty \\ z\in\mathcal{R}}} \left|\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}\right| \leq \lim_{\substack{y\to\infty \\ y\geq 0}} \frac{\pi^2}{\sinh^2(\pi y)} = \lim_{\substack{y\to\infty \\ y\geq 0}} \frac{\pi^2}{\left(\frac{e^{\pi y}-e^{-\pi y}}{2}\right)^2} = \lim_{\substack{y\to\infty \\ y\geq 0}} \frac{4\pi^2}{e^{2\pi y} - e^{-2\pi y}},$$

como $y \to \infty$, entonces $e^{2\pi y} \to \infty$ y $e^{-2\pi y} \to 0$, tal que:

$$\lim_{\substack{Im(z)\to\infty \\ z\in\mathcal{R}}} \left| \frac{\pi^2}{\sinh^2(\pi z)} \right| \leq \lim_{\substack{y\to\infty \\ y\geq 0}} \frac{4\pi^2}{e^{2\pi y} - e^{-2\pi y}} = 0.$$

(2) $\quad \lim_{\substack{Im(z)\to\infty \\ z\in R}} \left| \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^2} \right|$.

Para probar la convergencia de este límite, fijamos un $N \geq 1$, de modo que podemos dividir el sumatorio en dos partes y aplicar la desigualdad triangular, quedando

$$\left| \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^2} \right| \leq \sum_{|n|\leq N} \frac{1}{|z+n|^2} + \sum_{|n|>N} \frac{1}{|z+n|^2}.$$

Para estudiar la convergencia, analizamos cada sumatorio por separado:

- Si $|n| \leq N$. Conforme el valor de $|z|$ tienda a infinito, como el valor de N es fijo, $|z+n|$ tenderá también a infinito, por tanto $\frac{1}{|z+n|^2} \to 0$, quedando

$$\limsup_{\substack{|z|\to\infty \\ z\in\mathcal{R}}} \sum_{|n|\leq N} \frac{1}{|z+n|^2} = 0.$$

- Si $|n| > N$. Conforme $|z|$ tienda a infinito, como además $|n| > N$, $|z+n|$ tomará valores cada vez mayores. Cuando esto sucede podemos tomar $|z+n| \geq |n|$, dando lugar a la siguiente cadena de implicaciones

$$|z+n| \geq |n| \;\Rightarrow\; \frac{1}{|z+n|^2} \leq \frac{1}{|n|^2} \;\Rightarrow\; \sum_{|n|>N} \frac{1}{|z+n|^2} \leq \sum_{|n|>N} \frac{1}{|n|^2}.$$

  El sumatorio $\sum_{|n|>N} \frac{1}{|n|^2}$, como n^2 no depende del signo de n, es igual a:

$$\sum_{|n|>N} \frac{1}{|n|^2} = 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

  Sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge por ser una serie armónica con $\alpha = 2 > 1$, entonces $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ para un N fijo también convergerá.

Uniendo ambas partes podemos concluir

$$\begin{aligned}\limsup_{\substack{|z|\to\infty\\ z\in\mathcal{R}}}\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(z+n)^2}\right| &\leq \limsup_{\substack{|z|\to\infty\\ z\in\mathcal{R}}}\sum_{|n|\leq N}\left|\frac{1}{(z+n)^2}\right| + 2\sum_{n=N+1}\frac{1}{n^2}\\ &= 2\sum_{n=N+1}\frac{1}{n^2}\underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Hemos probado que los dos límites, (1) y (2) tienden a 0, entonces queda probada la ecuación (2.7). Por tanto, $H''(z) = 0$, como se quería probar para concluir la factorización del seno en productos infinitos.

2.2.3. La función coseno

Otra función que podemos obtener a partir de la factorización de productos infinitos es el coseno.

$$\cos(\pi z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{4z^2}{(2n-1)^2}\right) \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Obtenemos esta igualdad a partir de la factorización del seno. Para su obtención tenemos en cuenta la fórmula del ángulo doble

$$\sin(2\pi z) = 2\sin(\pi z)\cos(\pi z).$$

Teniendo en cuenta que

$$\sin(\pi z) = \pi z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \qquad \text{y} \qquad \sin(2\pi z) = 2\pi z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{4z^2}{n^2}\right),$$

llegamos a

$$2\pi z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{4z^2}{n^2}\right) = 2\pi z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)\cos(\pi z).$$

Despejando el coseno y separando el producto del numerador en productos pares e impares, concluimos

$$\begin{aligned}\cos(\pi z) &= \frac{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{4z^2}{n^2}\right)}{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)} = \frac{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{4z^2}{(2n-1)^2}\right)}{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)}\\ &= \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{4z^2}{(2n-1)^2}\right) \quad \forall z \in \mathbb{C}.\end{aligned}$$

Capítulo 3

Funciones enteras con ceros prefijados

En este capítulo vamos a estudiar la existencia y construcción de funciones enteras que tengan un conjunto de ceros predeterminado. El objetivo es entender cómo, dado un conjunto de puntos $\{a_n : n = 1, 2, 3, \ldots\}$, finito o infinito, podemos construir una función entera f que se anule exactamente en esos puntos.

Si el conjunto de ceros $a_1, a_2, ..., a_m$ es finito, la función buscada es el polinomio

$$P(z) = \prod_{n=1}^{m} (z - a_n),$$

el cual es una función entera por ser producto finito de factores lineales. Sin embargo, el caso interesante es ver cómo se puede construir una función entera f que tenga como ceros justamente los puntos del conjunto infinito $(a_n)_{n\geq 1}$.

Estas funciones se expresan generalmente como

$$f(z) = P(z)e^{g(z)},$$

donde $P(z)$ es un producto infinito que se anula en los ceros prefijados $(a_n)_{n\geq 1}$ y $g(z)$ es una función entera arbitraria.

Para construir la función entera con ceros prefijados, es necesario que la sucesión $(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{C}$ satisfaga las siguientes condiciones:

- $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$. Si $\lim_{n\to\infty} |a_n| < \infty$, se tiene un punto de acumulación de la sucesión

$(a_n)_{n\geq 1}$ de ceros. Por el principio de los ceros aislados, ver [1], la única función sería $f = 0$.

- Por simplicidad, asumiremos que $a_n \neq 0$ para todo $n \geq 1$. Si $a_n = 0$ para algun valor de n, bastaria considerar $f(z) = z^k P(z)e^{g(z)}$, donde k será la multiplicidad de $z = 0$ como raiz.

En este capítulo vamos a ver que dada una sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ que cumpla ambas condiciones, existe una función entera f que se anula exactamente en los a_n.

Para ello, estudiamos dos casos de sucesiones:

1. Las sucesiones que satisfacen

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{|a_n|} < \infty. \tag{3.1}$$

Para cada $n \geq 1$, se define $f_n(z) = 1 - \frac{z}{a_n}$, la cual se anula en a_n. Entonces tenemos

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right).$$

Fijamos un $R > 0$. Entonces para cada $z \in D(0, R)$ se cumple:

$$|f_n(z) - 1| = \left|1 - \frac{z}{a_n} - 1\right| = \left|\frac{z}{a_n}\right| \leq \frac{R}{|a_n|}.$$

Sea $M_n = \frac{R}{|a_n|}$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R}{|a_n|} = R\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|} < \infty.$$

Hemos encontrado una sucesión M_n convergente, por tanto para cada compacto del disco $D(0, R)$, se satisface el Criterio M de Weierstrass, es decir, para todo $z \in D(0, R)$, $f(z)$ es holomorfa. Como se satisface para todo $R > 0$, y se puede tomar R tan grande como queramos, entonces f es holomorfa en $\mathbb{C}$, es decir, f es una función entera y se anula en la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$.

A partir de esta expresión, se puede obtener también la expresión del seno que obtuvimos en el capítulo anterior, ver (2.4). Sea $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)$ con $a_n = n^2$, se tiene:

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n^2}\right).$$

Tomamos $f(z^2)$, es una función entera por serlo $f(z)$, como hemos probado anteriormente, y se anula en $\mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Basta observar que

$$f(z^2)=0 \iff \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)=0 \iff \exists z: 1-\frac{z^2}{n^2}=0 \iff \exists z: z=\pm n \text{ con } n\geq 1.$$

Por último multiplicando a $f(z^2)$ por πz, llegamos a:

$$\operatorname{sen}(z)=\pi z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right),$$

la cual es una función entera por ser el producto de dos funciones enteras y se anula en los $z\in\mathbb{Z}$, como hemos probado en la sección 2.2.2.

2. Las sucesiones que satisfacen

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{|a_n|^2}<\infty. \tag{3.2}$$

Para cada $n\geq 1$, se define

$$f_n(z)=\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}}.$$

Esta función satisface:

- $f_n(z)$ es entera. Porque $e^{\frac{z}{a_n}}$ es entera por ser una función exponencial, además hemos demostrado previamente que $\left(1-\frac{z}{a_n}\right)$ es entera. Y el producto de funciones enteras es una función entera.

- Fijado un $z\in\mathbb{C}$, $f_n(z)$ se anula en a_n. Esto es,

$$f_n(z)=0 \iff \left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}}=0 \iff \left(1-\frac{z}{a_n}\right)=0 \iff z=a_n.$$

Para seguir con la construcción de las funciones que estamos buscando, introducimos el siguiente lema, el cual será útil para controlar el comportamiento de ciertos términos en resultados posteriores.

Lema 3.0.1. *Para todo $z\in D$, se tiene que:*

$$|1-(1-z)e^z|\leq |z|^2.$$

Demostración. Para demostrar la desigualdad, empezamos desarrollando como serie de potencias la exponencial $e^z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, y multiplicándolo por $(1-z)$, llegando a

$$\begin{aligned}(1-z)e^z &= (1-z)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = (1-z)\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+...+\frac{z^n}{n!}+...\right)\\ &= 1+z^2\left(\frac{1}{2!}-1\right)+z^3\left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{2!}\right)+...=1+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n-1)!}\right)z^n,\end{aligned}$$

y restándoselo a 1, llegamos a

$$1-(1-z)e^z = 1-\left(1+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n-1)!}\right)z^n\right) = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}\right)z^n,$$

donde los coeficientes de la serie $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}\right)z^n$ son positivos debido a que $n! > (n-1)!$. Entonces, acotando la expresión inicial se tiene

$$|1-(1-z)e^z| = \left|\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}\right)z^n\right| \leq \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}\right)|z|^n = 1-(1-z)e^{|z|}.$$

Recordamos del Lema 1.3.1 la desigualdad

$$(1+x) \leq e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nos restringiremos a $|x| < 1$. Entonces, multiplicando a ambos lados por $(1-x)$, para que se mantenga la desigualdad tenemos que

$$(1+x)(1-x) \leq e^x(1-x) \quad \Rightarrow \quad 1-x^2 \leq e^x(1-x).$$

Entonces, si $|z| \leq 1$, aplicando esta desigualdad se obtiene

$$|1-(1-z)e^z| \leq 1-(1-z)e^{|z|} \leq 1-(1-|z|^2) = |z|^2.$$

□

Una vez que hemos probado este lema, vamos a estudiar la convergencia del producto infinito cuando los ceros tienen la forma de las sucesiones del tipo (3.2).

Tenemos $f_n(z) = \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n}}$ y $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{|a_n|^2} < \infty$, por tanto

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n}}.$$

Para estudiar su convergencia, tomamos un $R > 0$, y $z \in \mathbb{C}$, tal que $|z| \leq R$ y $|a_n| \geq R$, por tanto $\left|\frac{z}{a_n}\right| \leq 1$, entonces acotando y aplicando el Lema 3.0.1 tenemos

$$|1 - f_n(z)| = \left|1 - \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n}}\right| \leq \left|\frac{z}{a_n}\right|^2 \leq \frac{R^2}{|a_n|^2}.$$

Sea $M_n = \frac{R^2}{|a_n|^2}$, se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^2}{|a_n|^2} = R^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^2} < \infty.$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$, aplicando el Criterio M de Weierstrass sobre los compactos dentro de $D(0, R) \subset \mathbb{C}$ tenemos que el producto infinito

$$\prod_{\substack{n=1 \\ |a_n| \geq R}}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n}},$$

converge absolutamente en $D(0, R)$ y define una función holomorfa que no se anula.

Si añadimos al producto el conjunto finito de factores con $|a_n| < R$, entonces

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n}}$$

converge en $D(0, R)$ y solo se anula en los $a_n \in D(0, R)$. Como se satisface para todo $R > 0$ y podemos tomar R tan grande como queramos, f es holomorfa en $\mathbb{C}$. Por tanto, f es una función entera y se anula exactamente en los a_n.

Hemos demostrado cómo la convergencia de las sucesiones $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{|a_n|}$ y $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{|a_n|^2}$ garantizan la convergencia de productos infinitos construidos a partir de ceros prefijados. Este resultado remarca la relación entre la distribución de ceros y la estructura del producto infinito en el plano complejo, permitiendo un control sobre la convergencia de estas construcciones.

3.1. Factores primarios.

Estudiadas estas sucesiones, ahora nos vamos a centrar en los factores primarios, estas funciones desempeñan un papel importante en la construcción de funciones enteras a partir de ceros dados, proporcionando un método para regular el comportamiento de los productos infinitos. Vamos a analizar su definición, sus propiedades principales y su importancia en la teoría de funciones enteras.

Definición 3.1.1 (Factor primario). *Para cada entero $k \geq 1$, el k-ésimo factor primario o k-ésimo factor elemental se define como la función entera dada por:*

$$E_k(z) = (1-z)\exp\left(\sum_{j=1}^{k} \frac{z^j}{j}\right) \quad \forall z \in \mathbb{C}. \tag{3.3}$$

Para $k = 0$ y $k = 1$, se tienen los factores primarios:

$$E_0(z) = 1 - z \quad y \quad E_1(z) = (1-z)e^z.$$

Los factores primarios tienen las siguientes propiedades:

- $E_k(z) = 0 \iff z = 1$.
- Para todo $k \geq 0$, $E_k(0) = 1$.

Explicamos la obtención de la expresión de los factores primarios más adelante. Para ello, enunciamos sin demostración el *Teorema de la Aplicación Conforme de Riemann.*

Teorema 3.1.1 (Teorema de la aplicación conforme de Riemann, [6]). *Si Ω es un dominio simplemente conexo de $\mathbb{C}$ y $\Omega \neq \mathbb{C}$, entonces existe una función biholomorfa (función holomorfa biyectiva cuya inversa también es holomorfa.) $f : D \longrightarrow \Omega$.*

Por el Teorema de la aplicación conforme de Riemann, $f(z) = \frac{1}{1-z}$ lleva el disco unidad en el semiplano $H_{1/2}$. Además $f(z)$ es una función meromorfa en $\mathbb{C} \setminus \{z = 1\}$, punto donde tiene un polo. Pero como $z \in D$, entonces $f(z)$ es holomorfa en D.

Ahora aplicando el logaritmo sobre la función $f(z)$, tenemos $\mathrm{Log}(f(z))$, y conocemos que la función logaritmo es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

Conocido esto, quiero ver que $\mathrm{Log}(f(z))$ es holomorfa en D. Como $f : D \mapsto H_{1/2}$, entonces $\mathrm{Re}(f(z)) > 1/2$, por tanto $f(z)$ no se encuentra en el eje real negativo. Resumiendo, $f(z)$ es holomorfa en D, $\mathrm{Log}(z)$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ y $f(z) \in H_{1/2}$, con todo ello, por la regla de la cadena $\mathrm{Log}(f(z))$ es holomorfa en D.

Por otro lado, sabiendo que $\mathrm{Log}\left(\frac{1}{1-z}\right) = -\mathrm{Log}(1-z)$ y aplicando su desarrollo de Taylor, tenemos que

$$-\mathrm{Log}(1-z) = -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{-z^j}{j} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{j} \quad \forall z \in D.$$

Igualando ambas expresiones llegamos a

$$\begin{aligned} \mathrm{Log}\left(\frac{1}{1-z}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{j} \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{1-z} = \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{j}\right) \\ &\Rightarrow \quad 1 = (1-z)\exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{j}\right) \quad \forall z \in D. \end{aligned}$$

Por tanto, podemos concluir

$$\lim_{k\to\infty} (1-z)\exp\left(\sum_{j=1}^{k} \frac{z^j}{j}\right) = \lim_{k\to\infty} E_k(z) = 1 \quad \forall z \in D.$$

Una vez que conocemos la expresión de los factores primarios y sabemos de dónde se obtienen, podemos trabajar con ellos. En el siguiente lema estudiamos cómo se pueden acotar.

Lema 3.1.1. *Para todo $z \in D$ y para todo $k \geq 0$, se tiene*

$$|1 - E_k(z)| \leq |z|^{k+1}.$$

Demostración. Fijamos un $k \geq 0$ y sea $P_k(z) = \sum_{j=1}^{k} \frac{z^j}{j}$ de modo que

$$E_k(z) = (1-z)e^{P_k(z)}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Restándole la unidad y hallando su derivada, llegamos a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}(1-E_k(z)) = \frac{d}{dz}(1-e^{P_k(z)}+ze^{P_k(z)}) &= -P_k'(z)e^{P_k(z)}+e^{P_k(z)}+zP_k'(z)e^{P_k(z)}\\ &= e^{P_k(z)}(-P_k'(z)+1+zP_k'(z)) = e^{P_k(z)}(P_k'(z)(z-1)+1)\\ &= e^{P_k(z)}\left(\frac{1-z^k}{1-z}(z-1)+1\right) = z^k e^{P_k(z)},\end{aligned}$$

donde en el penúltimo paso hemos usado que

$$P_k'(z) = \left(\sum_{j=1}^{k}\frac{z^j}{j}\right)' = \sum_{j=1}^{k} z^{j-1} = \frac{1-z^k}{1-z}.$$

Una vez calculada la derivada, veremos que los coeficientes del desarrollo de Taylor de $1-E_k$ son no negativos para $j \geq k+1$. Suponiendo que su desarrollo de Taylor es

$$1-E_k(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j z^j,$$

veamos que los coeficientes b_j son no negativos.

Partimos de que los coeficientes del polinomio $P_k(z)$, son no negativos, por ser de la forma $\frac{1}{j}$ con $j \in [1,k]$, por tanto los coeficientes de $e^{P_k(z)}$ son también no negativos, siendo su desarrollo de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{z^j}{j}\right)^n$ con $n,j \geq 0$. Es por ello que también serán no negativos los coeficientes de $z^k e^{P_k(z)}$, es decir, los coeficientes de $\frac{d}{dz}(1-E_k(z))$.

Para ver que los coeficientes de $1-E_k(z)$ son no negativos, integramos su derivada, obteniendo

$$\frac{d}{dz}(1-E_k(z)) = z^k e^{P_k(z)} \quad \Rightarrow \quad 1-E_k(z) = \int_0^z s^k e^{P_k(s)}\,ds,$$

la integral de un polinomio con coeficientes no negativos preserva la no negatividad y se tiene que $1-E_k(0)=0$, asegurando que no hay problemas con términos negativos. Queda así probado que los coeficientes b_j de $1-E_k(z)$ son no negativos.

Además la derivada de $1-E_k(z)$ en $z=0$ tiene un cero de orden k, haciendo que el desarrollo de Taylor de $1-E_k(z)$ comience en $j=k+1$, quedando

$$1-E_k(z) = \sum_{j=k+1}^{\infty} b_j z^j \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Una vez que conocemos que los coeficientes b_j son no negativos para $j \geq k+1$ y que

$E_k(1) = 0$, se cumple

$$1 - E_k(1) = \sum_{j=k+1}^{\infty} b_j 1^j \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=k+1}^{\infty} b_j = 1.$$

Teniendo en cuenta todo lo anterior, para $z \in D$, se tiene

$$\begin{aligned} |1 - E_k(z)| &= \left| \sum_{j=k+1}^{\infty} b_j z^j \right| \leq \sum_{j=k+1}^{\infty} b_j |z|^j = \sum_{j=k+1}^{\infty} b_j |z|^j |z|^{(k+1)-(k+1)} \\ &= |z|^{k+1} \sum_{j=k+1}^{\infty} b_j |z|^{j-(k+1)} \leq |z|^{k+1} \sum_{j=k+1}^{\infty} b_j = |z|^{k+1}. \end{aligned}$$

□

Hemos visto que a partir de la convergencia de las sucesiones (3.1) y (3.2) se garantiza la convergencia de productos infinitos asociados a un conjunto de ceros predeterminado. A partir del Lema 3.1.1, veamos que se puede generalizar este resultado para $k \geq 1$.

Lema 3.1.2. *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{k+1}} < \infty$, *entonces* $\prod_{n=1}^{\infty} E_k\left(\frac{z}{a_n}\right)$ *converge y define una función entera que se anula exactamente en los* a_n*.*

Demostración. Estudiamos primero la convergencia. Sea $R > 0$ tal que $|z| \leq R$ y $|a_n| \geq R$, por tanto $\left|\frac{z}{a_n}\right| < 1$ y definimos $f_n(z) = E_k\left(\frac{z}{a_n}\right)$ para cada $n \geq 1$.

Aplicando el Lema 3.1.1 se tiene que

$$|1 - f_n(z)| = \left|1 - E_k\left(\frac{z}{a_n}\right)\right| \leq \left|\frac{z}{a_n}\right|^{k+1} \leq \frac{R^{k+1}}{|a_n|^{k+1}}.$$

Tomando $M_n = \frac{R^{k+1}}{|a_n|^{k+1}}$, se cumple

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^{k+1}}{|a_n|^{k+1}} = R^{k+1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{k+1}} < \infty.$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, aplicando el *Criterio M de Weierstrass*, tenemos que

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

converge y es holomorfa en los compactos contenidos en $\overline{D(0,R)}$. Como además se cumple para todo $R > 0$, entonces f converge y es holomorfa en todo $\mathbb{C}$, por tanto f es una función entera.

Una vez estudiada la convergencia, falta ver dónde se anula. Notar que

$$\begin{aligned} f\left(\frac{z}{a_n}\right)=0 \;\Leftrightarrow\; \prod_{n=1}^{\infty} f_n\left(\frac{z}{a_n}\right)=0 \;\Leftrightarrow\; \prod_{n=1}^{\infty} E_k\left(\frac{z}{a_n}\right)=0 \;\Leftrightarrow\; \exists n\geq 1: E_k\left(\frac{z}{a_n}\right)=0 \\ \Leftrightarrow\; \exists n\geq 1: \left(1-\frac{z}{a_n}\right)\exp\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(z/a_n)^j}{j}\right)=0 \Leftrightarrow\; \exists n\geq 1: 1-\frac{z}{a_n}=0 \\ \Leftrightarrow\; z=a_n. \end{aligned}$$

Es decir, se anula exactamente en los $z=a_n$. □

3.2. Teorema de Weierstrass

Una vez que conocemos lo que son los factores primarios, cómo se obtienen y sus propiedades, podemos enunciar y demostrar el Teorema de Factorización de Weierstrass, uno de los resultados centrales en la teoría de funciones enteras.

Teorema 3.2.1. *Sea $(a_n)_{n\geq 1}\subset\mathbb{C}$ tal que $\lim_{n\to\infty}|a_n|=+\infty$. Entonces, existe una función entera f que se anula exactamente en los a_n.*

Demostración. Sea $(a_n)_{n\geq 1}\subset\mathbb{C}$. Sea k el número de $a_n=0$ y $g(z)$ una función entera la cual se anula en los $a_n\neq 0$, definimos la función

$$f(z)=z^k g(z).$$

Como la función f se anula en todos los a_n dados por construcción, veremos que se puede escribir como el producto infinito

$$f(z)=\prod_{n=1}^{\infty} E_n\left(\frac{z}{a_n}\right).$$

Estudiamos su convergencia para todo $z\in\mathbb{C}$. Probamos primero la convergencia en el disco $D(0,R)$ con $R>0$. Como por hipótesis $\lim_{n\to\infty}|a_n|=+\infty$, entonces existe un $N_R\in\mathbb{N}$ tal que $|a_n|>2R$ con $n>N_R$. Se toma $|a_n|>2R$, para asegurar la convergencia, haciendo que los a_n estén lejos de $D(0,R)$. Tomando estos parámetros y aplicando el Lema 3.1.1, tenemos:

$$|1-f_n(z)|=\left|1-E_n\left(\frac{z}{a_n}\right)\right|\leq\left|\frac{z}{a_n}\right|^{n+1}\leq\frac{R^{n+1}}{|a_n|^{n+1}}\leq\frac{R^{n+1}}{2^{n+1}R^{n+1}}=\frac{1}{2^{n+1}}.$$

Sea $M_n=\frac{1}{2^{n+1}}$, tenemos la serie geométrica de razón $1/2$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}<\infty$.

Por tanto, aplicando el Criterio M de Weierstrass, $f(z) = \prod_{n>N_R}^{\infty} E_n\left(\frac{z}{a_n}\right)$ converge y es holomorfa en $D(0,R)$ para los $n > N_R$. Si se añade el conjunto finito de factores con $n \leq N_R$, el resultado no se altera, obteniendo que $f(z)$ es holomorfa y converge en $D(0,R)$. Como se satisface para todo $R > 0$ y podemos tomar R tan grande como queramos, entonces $f(z)$ es holomorfa y converge en todo $\mathbb{C}$, siendo $f(z)$ es una función entera. Ademas, por la propiedad de los factores primarios $E_n(1) = 0$, f se anula en cada a_n. $\square$

Ahora ya estamos listos para enunciar el resultado fundamental de la memoria.

Teorema 3.2.2 (**Teorema de factorización de Weierstrass.**). *Toda función entera f se puede expresar de la forma*

$$f(z) = z^k e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_n\left(\frac{z}{a_n}\right),$$

donde k es el orden de $z = 0$ como cero de f, los a_n son los ceros no nulos de f y g es una función entera.

Demostración. Como f es una función entera, se puede escribir como

$$f(z) = h(z)e^{g(z)},$$

donde:

- $g(z)$ es una función entera que no tiene ceros.
- $h(z)$ es una función entera con los ceros de $f(z)$. Tal que
    - $f(z)$ tiene orden k en $z = 0$. De aquí obtenemos z^k.
    - $f(z)$ se anula en los a_n con $a_n \neq 0$, entonces por la demostración del Lema 3.1.1, tenemos el producto infinito

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_n\left(\frac{z}{a_n}\right).$$

  Entonces $h(z)$ se define como $h(z) = z^k \prod_{n=1}^{\infty} E_n\left(\frac{z}{a_n}\right)$.

Por tanto, uniendo todo se define $f(z)$ como

$$f(z) = z^k e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_n\left(\frac{z}{a_n}\right).$$

$\square$

Bibliografía

[1] L. Ahlfors, *Complex Analysis.* 3rd. McGraw-Hill, Inc., 1979.

[2] J. Back y D. J. Newman, *Complex Analysis*, 3rd. Springer, 2010.

[3] C. Beltran, *Apuntes Variable Compleja.* Universidad de Cantabria, 2021.

[4] J. B. Conway, *Functions of One Complex Variable I*, 2nd. Springer, 1995.

[5] J. L. Fernández, *Variable Compleja II.* Universidad Autónoma de Madrid, 2018.

[6] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, 3rd. Boston: McGraw Hill, 1987.