Facultad de Ciencias

Coloraciones de Grafos:

grafos planos y polinomio cromático

Trabajo de Fin de Grado para acceder al

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autor: Gabriel Villegas Solar

Director: Francisco Santos Leal

Febrero - 2025

Índice general

Resumen

Colorear un grafo significa asignar “colores” a sus vértices de modo que dos vértices adyacentes nunca tengan el mismo color. Se trata de un problema muy clásico por su relación por ejemplo con las coloraciones de mapas y el famoso Teorema de los Cuatro Colores, pero tiene también aplicaciones prácticas, por ejemplo cuando se quiere dividir un conjunto en grupos pero hay ciertas incompatibilidades entre elementos, que no pueden estar en el mismo grupo.

El Teorema de los Cuatro Colores, a su vez, relaciona las coloraciones con la planaridad y con los teoremas de Kuratowski y Wagner, que la caracterizan.

En este trabajo, después de introducir los conceptos fundamentales, tenemos dos objetivos:

- Por un lado, dar la demostración completa de los Teoremas de Kuratowski y Wagner.
- Por otro lado, estudiar el polinomio cromático de un grafo, que nos dice de cuántas maneras se puede colorear. Para su cálculo usaremos técnicas de borrado y contracción en algunos ejemplos concretos.

Palabras clave: Grafos, coloraciones, polinomio cromático, grafos planos, contracción y borrado.

Abstract

Coloring a graph means assigning “colors” to its vertices so that two adjacent vertices never have the same color. This is a very classical problem because of its relation to, for example, map colorings and the famous Four Color Theorem, but it also has practical applications, for example when you want to divide a set into groups but there are certain incompatibilities between elements, which cannot be in the same group.

The Four Color Theorem, in turn, relates colorings to planarity and to Kuratowski's and Wagner's theorems, which characterize it.

In this work, after introducing the fundamental concepts, we have two objectives:

- On the one hand, to give the complete proof of Kuratowski's and Wagner's Theorems.
- On the other hand, to study the chromatic polynomial of a graph, which says how many different colorings it has. To compute it we use deletion and contraction techniques in some specific examples.

Keywords: Graphs, colorations, chromatic polynomial, flat graphs, contraction and erasure.

Capítulo 1

Introducción

La coloración de grafos es un problema clásico de la teoría de grafos que surge del estudio de la coloración de mapas. Su origen se remonta a 1852, cuando Francis Guthrie propuso la conjetura de que cualquier mapa podía colorearse con cuatro colores, asegurando que regiones fronterizas no compartieran el mismo color. Esta afirmación llevó al desarrollo del Teorema de los Cuatro Colores, uno de los resultados más importantes en matemática discreta. Sin embargo, debido a la complejidad de su demostración, para la que se necesita usar ordenador, en este trabajo se aborda una versión más accesible: el Teorema de los Cinco Colores, que garantiza que cualquier grafo planar puede colorearse con, a lo sumo, cinco colores. Este teorema es más sencillo de demostrar y permite comprender mejor las técnicas utilizadas en la teoría de coloraciones.

Además de la coloración de grafos, otro aspecto fundamental en este trabajo es la planaridad. Un grafo planar es aquel que puede dibujarse en el plano sin que sus aristas se crucen. Sobre este tema, destacan dos resultados fundamentales: los Teoremas de Kuratowski y Wagner, que establecen condiciones necesarias y suficientes para que un grafo sea no planar.

Por último, se introduce el polinomio cromático, una herramienta algebraica que describe el número de formas en que un grafo puede ser coloreado en función del número de colores disponibles. Este polinomio tiene propiedades interesantes y se puede calcular mediante diversas técnicas, como el método de borrado y contracción, el cual descompone el grafo en subgrafos más simples para facilitar el cálculo.

En cuanto a la estructura del trabajo, está dividido en tres partes fundamentales. En el Capítulo 2, se desarrollan las nociones fundamentales de la teoría de grafos necesarias para comprender los resultados posteriores. Se definen conceptos clave como grafos conexos y k-conexos, el número cromático, los grafos bipartitos y las estrategias básicas para la coloración de grafos. Se presentan también algunos ejemplos concretos y resultados preliminares que serán útiles para los capítulos siguientes.

El Capítulo 3 está dedicado al análisis de los grafos planares y sus propiedades. Se presentan demostraciones completas de los Teoremas de Kuratowski y

Wagner, los cuales vienen a decir que un grafo es planar si y solo si no contiene ciertas configuraciones específicas, los grafos K_5 y $K_{3,3}$. La diferencia entre los dos teoremas está en qué se considera "contener" a un subgrafo. Luego, se desarrolla la demostración del Teorema de los Cinco Colores, utilizando herramientas como la fórmula de Euler para grafos planos, que también se demuestra.

Finalmente, el Capítulo 4 se centra en el polinomio cromático, una función matemática que cuenta el número de formas en que un grafo puede colorearse según el número de colores disponibles. Se presentan métodos para calcularlo, como la técnica de borrado y contracción, y se analizan algunas de sus propiedades fundamentales. También se introducen técnicas y argumentos específicos para determinar el polinomio cromático de varios ejemplos de grafos.

En conclusión, este trabajo ofrece un análisis detallado de la coloración de grafos y su planaridad, abordando sus fundamentos teóricos y algunos aspectos avanzados mediante la demostración de resultados importantes como la fórmula de Euler para grafos planos, el teorema de los cinco colores, los teoremas de Kuratowski y Wagner y la fórmula fundamental del polinomio cromático.

Capítulo 2

Preliminares sobre teoría de grafos

2.1. Propiedades generales

Comencemos con algunas definiciones básicas:

Definición 2.1 (Grafo). *Un **grafo** G es un par (V, A) en el que V es un conjunto de vértices y A es un conjunto formado por pares de vértices de V.*
Observación: En realidad, estamos definiendo grafos simples, que no tienen ni lazos ni aristas paralelas. Estos van a ser los que se tengan en cuenta en este trabajo. Pero existe una definición más general de grafo, que consiste en considerar la terna (V, A, F), en la que V es un conjunto de vértices, A es un conjunto de aristas y F es una aplicación que asocia cada arista a un par de vértices.

Definición 2.2 (Grado de un vértice). *El **grado de un vértice** es el número de aristas que inciden sobre él.*

Definición 2.3 (Subgrafo). *Sean H y G grafos. Se dice que H es un **subgrafo** de G si $V(H) \subseteq V(G)$ y $A(H) \subseteq A(G)$, y se escribe $H \subseteq G$.*

Definición 2.4 (Subgrafo inducido). *Sea $G = (V, A)$ un grafo. Sea S un subconjunto de V. El **subgrafo inducido** por S en G es el grafo cuyo conjunto de vértices es S y cuyo conjunto de aristas está formado por todas las aristas de A que inciden por ambos extremos en vértices de S.*

Relacionados con estos conceptos, existen algunas definiciones y resultados interesantes y útiles a la hora de clasificar los diferentes tipos de grafos que existen.

Proposición 2.5. *En todo grafo simple con más de un vértice hay al menos dos vértices del mismo grado.*

Demostración. Sea G un grafo simple con más de un vértice. Supongamos que tiene n vértices. Sea x un vértice del grafo. Los grados de x pueden ser: $0, 1, 2, 3, ..., n-1$. Como el grafo es simple, si x tiene grado 0, no puede haber ningún vértice de grado $n-1$. Así que G tiene n vértices, y para el grado de cada vértice sólo hay $n-1$ opciones. Entonces, por el Teorema del Palomar, habrá dos vértices con el mismo grado. □

Teorema 2.6. *La suma de todos los grados de los vértices de un grafo es dos veces el número de aristas de ese grafo.*

Demostración. Se sigue inmediatamente de considerar que el grado de un vértice es el número de aristas que inciden en él, y que cada arista conecta dos vértices. □

Definición 2.7 (Grafo regular)**.** *Un grafo se dice **regular** si todos sus vértices tienen el mismo grado.*

Cuando comenzamos a dibujar algunos grafos, es posible que nos demos cuenta de que se puede obtener un grafo diferente a partir de otro mediante el borrado de una arista, de un vértice, o incluso identificando vértices entre sí. Estos procesos son empleados muchas veces en teoría de grafos, formando parte en muchas ocasiones de algunos algoritmos que se verán más adelante.

Definición 2.8 (Borrado de una arista)**.** *Sea G un grafo y uv la arista de G que une los vértices u y v. El grafo $G \setminus uv$ es el resultante de eliminar la arista uv del grafo, sin eliminar los vértices que une.*

Definición 2.9 (Borrado de un vértice)**.** *Sea G un grafo y v un vértice de G. El grafo $G \setminus v$ es el resultante de eliminar el vértice v, así como todas las aristas de G adyacentes a v.*

Definición 2.10 (Contracción de una arista)**.** *Sea G un grafo y e una arista de G que une los vértices u y v. Se denota por $G//e$ al grafo obtenido después de identificar los vértices u y v como un solo vértice z y eliminar la arista e, de manera que todas las aristas adyacentes a u y a v en G son ahora adyacentes a z en $G//e$. (Si u y v tenían algún vecino común y, las aristas uy y vy se convierten en una única arista zy, de modo que el grafo siga siendo simple).* [1]

Como se ha dicho anteriormente, mediante estas operaciones en grafos que se acaban de definir, se obtienen grafos nuevos a partir de un grafo G existente. Estos grafos nuevos se conocen como *menores* de G.

Definición 2.11 (Menor)**.** *Sean G y H dos grafos. Se dice que H es un **menor** de G si puede formarse mediante el borrado de vértices y/o aristas de G, así como mediante la contracción de aristas de G.*

[1] Si no se eliminan las aristas repetidas, de modo que la contracción puede ser un grafo no simple, se la suele denotar G/e. La notación $G//e$ para la contracción "simple" está tomada del libro [4, Página 12].

Una vez definido lo que es un grafo, podemos pensar en las diferentes maneras en las que se pueden recorrer las aristas para llegar desde un vértice hasta otro. En realidad, hay muchas formas diferentes de hacerlo, en función de si se quiere pasar dos veces por la misma arista, o por el mismo vértice, o si se desea acabar el recorrido en el mismo vértice en el que se empezó. De esta idea, nacen las siguientes definiciones:

Sea $G = (V, A)$ un grafo. Entonces:

Definición 2.12 (Recorrido)**.** *Un* ***recorrido*** *en* G *es una sucesión* $[v_0, a_1, v_1, a_2, v_2, a_3, ...v_k - 1, a_k, v_k]$*, en la que* v_i *son vértices de* G *y* a_i *es la arista* $\{v_{i-1}, v_i\}$*, para todo* i *perteneciente a* $[0, ..., k]$*. Se dice 'recorrido cerrado' si acaba en el mismo vértice en el que empieza, es decir, si* $v_0 = v_k$*. Se dice 'recorrido simple' si no hay vértices repetidos (salvo quizás el primero y el último).*

Definición 2.13 (Camino)**.** *Un* ***camino*** *es un recorrido en el que todas las aristas son distintas.*

Definición 2.14 (Circuito)**.** *Un* ***circuito*** *es un camino cerrado.*

Definición 2.15 (Ciclo)**.** *Un* ***ciclo*** *es un camino simple cerrado no trivial, es decir, que no es un lazo.*
Observación: Si un grafo no tiene ningún ciclo, se llama 'bosque'.

Es importante mencionar que las anteriores definiciones pueden variar dependiendo del autor. En este caso, me he basado en mis apuntes de Matemática Discreta. Llegados a este punto, podemos pensar en un montón de condiciones y características que podemos añadir a la definición de grafo. Por ejemplo: ¿Puede haber vértices con grado 0? ¿Lo que se ve en la imagen 2.1 es un grafo, o son dos?

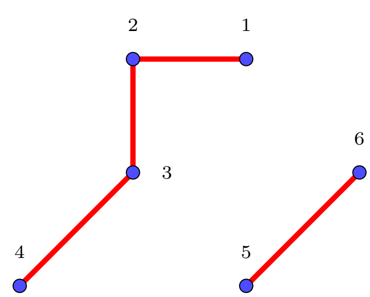

Figura 2.1: ¿Dos grafos... o uno solo?

Respondiendo a la primera pregunta: sí, no hay ningún problema si un vértice tiene grado 0. Esto quiere decir que ninguna arista incide sobre él, y por lo tanto se encontrará desconectado del resto de los vértices del grafo (en el caso de que existan).

También, puede suceder que para cada par de vértices de un grafo, exista una arista que los conecte.

Definición 2.16 (Grafo completo)**.** *Grafo simple donde cada par de vértices está conectado por una arista.*

Proposición 2.17. *El número de aristas de un grafo completo con n vértices es $n(n-1)/2$.*

Demostración. Como en un grafo completo cada par de vértices está conectado por una arista, el cardinal del conjunto de aristas (que son pares de vértices) es en realidad la cantidad de maneras diferentes de elegir dos elementos de un conjunto de n elementos. □

Por supuesto, se puede considerar un grafo en el que todos sus vértices tengan grado 0.

Definición 2.18 (Grafo vacío)**.** *Grafo que no tiene aristas.*

¿Y qué hay de la imagen 2.1? ¿Se representa sólo un grafo, o dos? Alguien podría decir que se trata de dos grafos diferentes, ya que el vértice 1 y el vértice 6 (por ejemplo) no pueden conectarse mediante un camino. Sin embargo, ¿necesita un grafo que cada par de vértices esté conectado por un camino para cumplir con la definición de grafo? La verdad es que no. Los grafos en los que esto sucede, se denominan 'grafos conexos'.

2.2. Grafos conexos y k-conexos

Definición 2.19 (Grafo conexo)**.** *Grafo en el cada par de vértices están conectados por un camino.*
Observación: Un bosque conexo recibe el nombre de 'árbol'.

Por lo tanto, se podría decir que en la imagen 1 aparece un grafo no conexo. Y también se podría decir que aparecen dos grafos conexos. Si se dice que aparece un solo grafo no conexo, entonces se observa que aparecen representadas dos componentes conexas de este grafo.

Definición 2.20 (Componentes conexas)**.** *Una **componente conexa** de un grafo es un subgrafo maximal en el que cada par de vértices está conectado mediante un camino. En ocasiones nos referiremos a las componentes conexas simplemente como **componentes**.*

Observación 2.21. *No debe dar lugar a confusiones la definición que se ha dado de* camino *con el conocido como* grafo camino *(ver Imagen 2.2), que se define a continuación.*

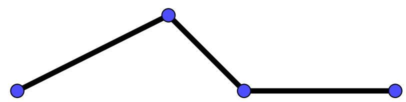

Figura 2.2: Grafo camino de 4 vértices

Definición 2.22 (Grafo camino)**.** *Se llama* ***grafo camino*** *al grafo conexo de n vértices que no contiene ciclos y en el que todos sus vértices tienen grado* 2 *salvo dos de ellos, que tienen grado* 1*.*

Al representar diferentes grafos, puede llamarnos la atención que algunos de ellos parecen estar formados por grafos más pequeños que se conectan entre sí mediante un vértice solamente, o solo mediante una arista, de manera que si ese vértice o esa arista desaparecieran, tendríamos dos componentes conexas disjuntas. Esto es exactamente lo que sucedería en el grafo de la imagen 2.3 si borrásemos el vértice V (en rojo) y sus aristas adyacentes o la arista a (en verde).

Pues bien, esas estructuras más pequeñas que se unen entre sí mediante un vértice o una arista reciben el nombre de *bloque*.

Definición 2.23 (Bloque)**.** *Sea G un grafo. Se define la siguiente relación de equivalencia en el conjunto A de aristas de G: $e_1 \sim e_2$ si $e_1 = e_2$ o G tiene un ciclo que contiene e_1 y e_2. Una clase de equivalencia junto con todos los vértices que están en las aristas de la clase, es un subgrafo de G llamado* ***bloque****.*

Observación 2.24. *Un bloque es conexo por definición, ya que si dos vértices cualesquiera x e y pertenecen al mismo bloque, esto quiere decir que las aristas adyacentes a x están en (al menos) un mismo ciclo con cada una de las aristas adyacentes a y, y por tanto existe un camino entre esos dos vértices.*

Observación 2.25. *Dos bloques B_1 y B_2 distintos no tienen aristas en común. Si la tuvieran, esa misma arista formaría parte de un ciclo (al menos) con cada arista de B_1 y de otro con cada arista de B_2. Por lo tanto, las aristas de B_1 y las de B_2 estarían relacionadas, y B_1 y B_2 serían el mismo bloque.*

Una vez hechas estas observaciones, se pueden definir ahora esos vértices y aristas que unen bloques entre sí, como se comentaba anteriormente.

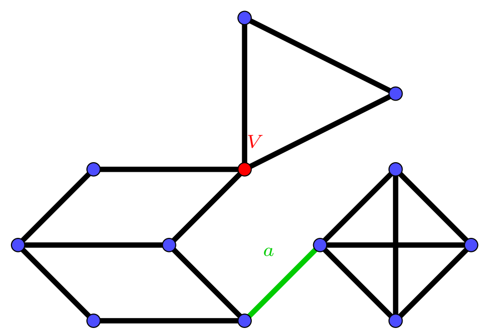

Figura 2.3: Bloques de un grafo

Definición 2.26 (Vértice de corte)**.** *Vértice de un grafo que pertenece a más de un bloque.*

Definición 2.27 (Arista de corte)**.** *Arista de un grafo que no es equivalente a otra arista.*

Proposición 2.28 ([4, Proposition 1.3.1])**.** *Sea G un grafo. Entonces:*

1. *Una arista a de G es una arista de corte si y solo si los vértices que une pertenecen a distintas componentes de $G \setminus a$.*

2. *Un vértice v de G es un vértice de corte si y solo si $G \setminus v$ tiene más componentes que G.*

3. *Si $\{u,v\}$ es un par de vértices en un bloque B con más de una arista, entonces B tiene un ciclo que contiene a u y a v.*

4. *Dos bloques de G tienen como mucho un vértice en común, y ese vértice en común es un vértice de corte de G.*

5. *Si B_1,B_2,...,B_k ($k \geq 3$) son bloques distintos de G tales que $B_i \cap B_{i+1} \neq \emptyset$ para $i \in \{1, 2, ..., k-1\}$ y $B_1 \cap B_2$, $B_2 \cap B_3$, ..., $B_{k-1} \cap B_k$ son vértices distintos, entonces $B_1 \cap B_k = \emptyset$.*

Demostración. 1) Sea a una arista de G y sean x e y los vértices que une. Decir que a es una arista de corte de G es, por definición, decir que a no es equivalente a ninguna otra arista de G. En otras palabras, a no pertenece a ningún ciclo de G. Esto sucede si y solo si el único camino que une los vértices x e y es precisamente la arista a. Es decir, x e y pertenecen a distintas componentes de $G \setminus a$.

2) Podemos suponer sin pérdida de generalidad que G es conexo, porque pasar de G a $G \setminus v$ solo afecta a la componente conexa de G que contiene a v.

Supongamos que v es un vértice de corte en G. Entonces $v \in B_1 \cap B_2$, siendo B_1 y B_2 bloques distintos de G. Sean $x \in B_1 \setminus v$ e $y \in B_2 \setminus v$. Como las aristas xv y yv están en bloques distintos, no están en ningún ciclo común. Así que no existe en G ningún camino que conecte x e y y que no contenga a v. Por lo tanto, $G \setminus v$ no es conexo.

Supongamos ahora que $G \setminus v$ tiene más componentes que G, es decir, $G \setminus v$ no es conexo. Como G sí era conexo, cada componente de $G \setminus v$ tiene que contener algún vecino de v en G. Sean x e y dos vértices vecinos de v en G pertenecientes a componentes distintas de $G \setminus v$. Como G sí es conexo, existe en G un camino de x a y que necesariamente tiene que pasar por v. Se observa que xv y vy no están en el mismo bloque, porque si no, igual que en el apartado 1, habría un camino de x a y que no pasa por v, es decir, un camino en $G \setminus v$. Así que v es un vértice de corte en G.

3) Sean u y v dos vértices que pertenecen a un bloque B. Primero se considera el caso en que uv es una arista. Como B tiene al menos otra arista, esas dos aristas deben formar parte del mismo ciclo, que también contiene a u y a v. Se considera ahora una arista incidente en u y otra arista incidente en v, ambas pertenecientes a B y distintas. Precisamente por pertenecer ambas aristas a B, están relacionadas entre sí, es decir, forman parte de un ciclo en B que las contiene. Ese mismo ciclo es el que contiene a u y a v.

4) Supongamos que B_1 y B_2 son bloques distintos con los vértices u, v en común ($u \neq v$), como puede verse en la imagen 2.4 (B_1 en amarillo y B_2 en verde en la figura de la izquierda). Por 3), B_i tiene un ciclo C_i que contiene a u y v para $i \in \{1, 2\}$. Cada C_i lo podemos entender como dos caminos de u a v. Tomando uno de los caminos de C_1 y uno de los de C_2 tenemos un ciclo (en rojo en la figura de la derecha) que contiene al menos una arista de C_1 y una arista de C_2, lo que es una contradicción porque las aristas de C_1 están en distinto bloque que las de C_2.

El vértice común v es un vértice de corte por definición, al estar en más de un bloque.

5) Supongamos que $B_1 \cap B_k \neq \emptyset$. Por 4), sabemos que la intersección entre dos bloques correlativos es como mucho un vértice; supongamos, por reducción al absurdo, que $B_1 \cap B_k = \{u_0\}$ y llamemos $B_i \cap B_{i+1} = \{u_i\}$, para $i = 1, \ldots, k-1$. Como cada bloque es conexo podemos construir un recorrido $u_0 \ldots u_1 \ldots u_2 \ldots \;\ldots u_k \ldots u_0$, donde cada porción $u_i \ldots u_{i+1}$ es un camino contenido en B_i. Como los bloques no tienen aristas comunes y no tienen más vértices comunes que los u_i, que son todos distintos, ese recorrido es un ciclo. Eso es imposible porque el ciclo tendría aristas de todos los bloques.

□

En cuanto a los grafos conexos, se puede observar que existen grafos a los que si se les extrae un vértice, dejan de ser conexos. Pero también existen grafos que

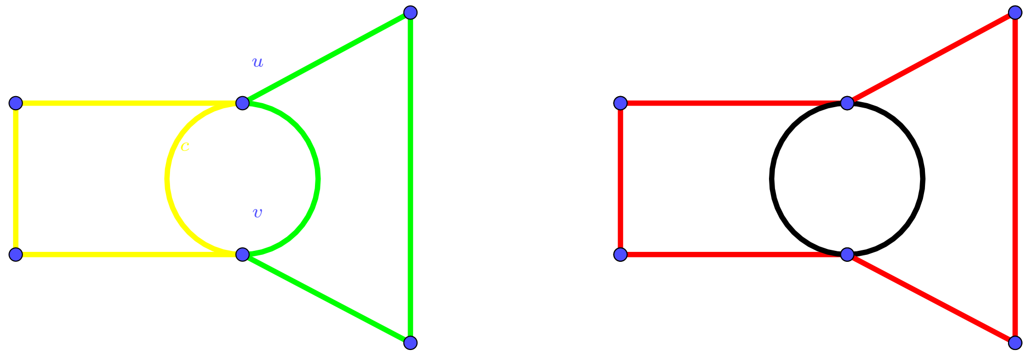

Figura 2.4: Dos bloques no pueden tener más de un vértice en común

siguen siendo conexos si se les extraen uno, dos o varios vértices. Esta propiedad da pie a la siguiente definición.

Definición 2.29 (Grafo k-conexo)**.** *Sea k un número natural y G un grafo con más de k vértices. Se dice que G es k-**conexo** si para todo conjunto S de vértices de G con a lo sumo $k-1$ vértices, $G \setminus S$ es conexo.*

Observación 2.30. *Evidentemente, para que G sea k-conexo debe tener al menos $k+1$ vértices. Además, ser conexo es equivalente a ser 1-conexo.*
*Otros autores emplean la siguiente definición de grafo k-conexo: Sea G un grafo y k un número natural. Se dice que G es k-**conexo** si para cada par de vértices $\{u,v\}$ hay k caminos disjuntos entre u y v.*
Por supuesto, ambas definiciones son equivalentes. De hecho, eso es exactamente lo que prueba el Teorema de Menger (ver Menger's Theorem en [4, Sección 1.4])

Definición 2.31 (Conectividad)**.** *La **conectividad** de un grafo G, es el mayor número natural k tal que G es k-conexo.*

2.3. Coloraciones en grafos

Hasta ahora, hemos visualizado y representado los grafos sin considerar el problema de asignar un color a cada vértice. Como se explicaba en la introducción, este problema tiene su origen en otro problema: la coloración de mapas.

Colorear un mapa en el que se representan varias regiones consiste en asignar colores a cada región, de manera que dos regiones fronterizas nunca tengan el mismo color. En realidad, los mapas aportan mucha más información de la que se necesita para analizar este problema. Por ejemplo, indican la geografía de las diferentes regiones, su extensión, etc. Sin embargo, para colorearlo tan solo se necesita conocer el número de regiones, cuáles son colindantes entre sí y cuáles no lo son.

Por eso, una manera esquemática de pensar en el problema de colorear un mapa es asignar a cada región un vértice de un grafo, y conectar mediante aristas aquellos vértices que representen regiones fronterizas. Teniendo en cuenta esto, no es difícil comprender la definición de coloración de un grafo.

Definición 2.32 (Coloración de un grafo)**.** *Asignación de k colores a los vértices de un grafo, de manera que ningún par de vértices adyacentes tenga el mismo color.*
Observación: ¿Qué quiere decir asignación*? En este caso, se refiere a una aplicación $z : V \longrightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ del conjunto de vértices en los números naturales menores o iguales que k, entendiendo que cada número de este conjunto representa un único color.*

Por lo comentado en la introducción, es lógico pensar que será posible colorear cualquier grafo con 4 colores (ya que se puede colorear cualquier mapa con 4 colores). No obstante, no hay que olvidar que existen grafos que pueden ser coloreados con menos de 4 colores, como se puede ver en la imagen 2.5.

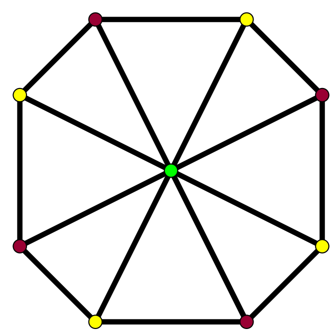

Figura 2.5: Coloración de un grafo con tres colores

Como vimos en la sección anterior, los vértices de cada componente conexa de un grafo están conectados entre sí, pero podríamos pensar en un grafo cuyos vértices también se dividieran en dos subconjuntos, de manera que los vértices de un mismo subconjunto no estén conectados entre sí. Este tipo de grafos se conocen como 'grafos bipartitos'.

Definición 2.33 (Grafo bipartito)**.** *Grafo $G = (V, A)$ cuyo conjunto de vértices puede separarse en dos subconjuntos disjuntos, es decir, $V = X \dot{\cup} Y$, de manera que toda arista tiene un vértice en X y el otro en Y.*

Teorema 2.34 (König)**.** *Un grafo es bipartito si y solo si no existen ciclos de longitud impar.*

Demostración. Sea G un grafo bipartito, y sean V_1 y V_2 los dos subconjuntos de vértices en los que se separan sus vértices. Por ser bipartito, cada arista de este grafo conecta un vértice del conjunto V_1 con otro del conjunto V_2. Por lo tanto, si se construye un recorrido de longitud impar comenzando en un vértice de V_1, el recorrido siempre terminará en un vértice de V_2. Así, es imposible construir un recorrido cerrado con un número impar de aristas. Esto termina la implicación de izquierda a derecha.

Para la otra implicación supongamos, sin pérdida de generalidad, que G es conexo. (Si no lo fuera, bastaría con aplicar el siguiente razonamiento a cada una de las componentes). Sea x un vértice cualquiera de G. Para cada vértice $y \neq x$, consideramos un camino arbitrario que conecte x con y. Construimos dos subconjuntos V_1 y V_2 de vértices de G de la siguiente manera:

1) $x \in V_1$.

2) Si el camino que une x con y tiene longitud par, $y \in V_1$.

3) Si el camino que une x con y es impar, $y \in V_2$.

Así, dados dos vértices adyacentes u y v, si los dos están en el mismo subconjunto de vértices, se tiene un recorrido cerrado $x...uv...x$ de longitud impar, que necesariamente contiene un ciclo de longitud impar. Por lo tanto, si no hay ciclos impares, se obtiene la partición $V = V_1 \dot{\cup} V_2$ requerida. Luego G es bipartito. □

Definición 2.35 (Número cromático)**.** *El número más pequeño de colores necesarios para colorear un grafo G.*

Así, dependiendo del grafo, serán necesarios más o menos colores para colorearlo, hasta un máximo de cuatro.

Teorema 2.36. *El número cromático de un grafo es menor o igual que 2 si y sólo si el grafo es bipartito.*

Demostración. Supongamos que un grafo G es bipartito. Basta con asignar un color a un subconjunto de los vértices del grafo y otro color diferente al otro subconjunto de vértices. De esta manera, tenemos una coloración del grafo G con dos colores, ya que ningún vértice adyacente tiene el mismo color, pues en un grafo bipartito, los vértices que forman parte del mismo subconjunto no están unidos mediante aristas. Así que el número cromático de G es menor o igual que dos.

Supongamos ahora que el número cromático de G es menor o igual que dos. Si el número cromático es uno, se trata de un grafo que se puede colorear con un color. Por lo tanto, no existen vértices adyacentes. Así que se puede separar los vértices del grafo en dos subconjuntos, de manera que los vértices de un subconjunto no sean adyacentes. Por lo tanto, el grafo es bipartito. Si el número cromático es dos, existe al menos una coloración del grafo G con tan solo dos colores. Consideramos los dos subconjuntos formados por los vértices que tienen el mismo color. Se observa que ningún par de vértices de cada subconjunto es adyacente. Por lo tanto, el grafo G es bipartito. □

Además, por el Teorema de König, sabemos que un grafo es bipartito si y solo si no contiene ciclos de longitud impar. Así, obtenemos también el siguiente Teorema.

Teorema 2.37. *El número cromático de un grafo es menor o igual que 2 si y solo si no contiene ciclos de longitud impar.*

El número cromático depende de cada grafo, pero existe una herramienta útil para calcular este número: el polinomio cromático que estudiaremos en el capítulo 4 y que cuenta cuántas coloraciones de G hay para cada número de colores.

Capítulo 3

Grafos en el plano

3.1. Grafos planares

La manera más intuitiva de trabajar con un grafo es representarlo gráficamente mediante un dibujo en el que hay puntos (vértices) que se unen entre sí por medio de lineas (aristas). Cuando realizamos este proceso varias veces, observamos que en algunas ocasiones las aristas se cruzan entre sí, y otras veces no. Es más, dependiendo del grafo que queramos dibujar, es posible que seamos incapaces de representarlo en un plano sin que sus aristas se crucen (por ejemplo, al dibujar un grafo completo con cinco vértices).
Este criterio, divide a los grafos en dos grandes grupos: grafos planares y grafos no planares. Varios de los resultados que se demuestran en este capítulo han sido extraídos del libro *Graphs on surfaces* [4].

Definición 3.1 (Grafo planar)**.** *Es un grafo que puede ser dibujado en el plano sin que ninguna arista se cruce.*
Observación: Existe una diferencia entre grafo planar y grafo plano. Generalmente, cuando hablamos de un grafo plano, nos estamos refiriendo al grafo planar junto con su dibujo*, mientras que el concepto de grafo planar es abstracto, y se refiere tan solo al grafo tal y como se ha definido en los preliminares.*

Figura 3.1: Grafo planar

Respecto a esta definición, es importante notar la expresión 'puede ser dibujado'. ¿Por qué razón? Pues bien, aunque en el grafo de la izquierda de la imagen 3.1 hay aristas que se intersecan, este mismo grafo puede representarse en el plano de manera que ninguna arista se interseque, como en la imagen de la derecha. Así que el de la izquierda también es un grafo planar.

En realidad, esta manera de razonar lleva implícita la idea de 'grafos isomorfos'.

Definición 3.2 (Grafos isomorfos)**.** *Sean* $G_1 = (V1, A1)$*,* $G2 = (V2, A2)$ *dos grafos. Se dice que son isomorfos si existe una biyección* $Y : V1 \to V2$*, con la propiedad de que dos vértices* $x, t \in V_1$ *son una arista de* A_1 *si y solo si* $Y(x)$ *y* $Y(t)$ *son una arista de* A_2*.*

3.2. El Teorema de los cinco colores

El Teorema de los Cuatro Colores es de los más importantes dentro de la teoría de grafos (si no el más importante). Su demostración no se realizará en este trabajo, ya que es bastante extensa y se necesita de la ayuda de un ordenador para realizarla rigurosamente.

En su lugar, realizaremos la demostración de un resultado más débil, el Teorema de los Cinco Colores. Esta demostración se ha inspirado en la realizada en la página "ProofWiki" [6]. Pero antes, haremos unas consideraciones previas y demostraremos la Fórmula de Euler para grafos planos. Esta demostración se ha basado en la realizada en los apuntes para el programa Estalmat, de Eugenio Hernández [5].

Definición 3.3 (Cara)**.** *Sea* G *un grafo plano. Se llama soporte de* G *(*$sop(G)$*) al conjunto de puntos del plano que son vértices de* G *o pertenecen a aristas de* G*. Se llaman* ***caras*** *de* G *a las diferentes componentes conexas de* $G \setminus sop(G)$*.*

Definición 3.4 (Hoja)**.** *En un árbol, una* ***hoja*** *es un vértice de grado uno.*

Lema 3.5. *Todo árbol no vacío tiene al menos dos hojas.*

Demostración. Sea a una arista cualquiera del árbol. Esta arista, conectará dos vértices, que se denotan por v_1 y v_2. Si construimos un recorrido que comience por v_2 (cuyo segundo vértice no sea v_1) y en el que no se repitan aristas, como el grafo es finito, hay dos opciones:
1) Llegamos a un vértice donde no podemos continuar (hoja).
2) Repetimos algún vértice. Pero si repetimos algún vértice, tendríamos un ciclo, y en un árbol no hay ciclos.
Evidentemente, sucede lo mismo si se construye otro recorrido con las mismas características pero esta vez comenzando por v_1 y cuyo segundo vértice no sea v_2. Así, al menos encontramos dos hojas. □

Proposición 3.6. *Un árbol* G *con* n *vértices tiene exactamente* $n - 1$ *aristas.*

Demostración. Por inducción sobre el número de vértices de G. Sea G un grafo con n vértices y a aristas. Evidentemente, si hay un vértice, hay cero aristas. Supongamos la Proposición cierta para árboles con $n-1$ vértices. Sea h una hoja de G. Si le quitamos a G el vértice h y su única arista incidente, obtenemos un árbol $G*$ con $n-1$ vértices. Por hipótesis inductiva, $G*$ tiene $n-2$ aristas. Por lo tanto, si le volvemos a introducir h y su arista, G pasa a tener $n-1$ aristas. □

Teorema 3.7 (Fórmula de Euler para grafos planos)**.** *Cualquier grafo plano conexo con v vértices, a aristas y c caras verifica que $v - a + c = 2$.*

Demostración. Sea G un grafo plano y conexo. Consideramos el proceso de ir suprimiendo aristas hasta obtener un árbol. Es decir, eliminamos de una en una aristas que formen parte de algún ciclo, hasta que no queden ciclos. Obsérvese que en este proceso, el número de vértices permanece invariable, mientras que el número de aristas y el número de caras van disminuyendo de uno en uno simultáneamente según vamos eliminando aristas. Esto es debido a que por cada arista de un ciclo que se borra, dos caras se convierten en una. Por lo tanto, la cantidad $v - a + c$ permanece invariante. Por otro lado, por el Teorema 3.6 sabemos que en un árbol el número de vértices excede al de aristas en uno, es decir $v - a = 1$, y como en un árbol sólo hay una cara, $v - a + c = 1 + 1 = 2$. Y como ya se ha visto que para todos los grafos del proceso de eliminación de lados, incluido el grafo original, la cantidad $c - a + v$ permanece invariante, se tiene la famosa fórmula de Euler. □

Definición 3.8 (Triangulación)**.** *Una **triangulación** es un grafo plano conexo en el que todas las caras (incluida la exterior) tienen exactamente tres aristas en su borde.*

Definición 3.9 (Cuadrangulación)**.** *Una **cuadrangulación** es un grafo plano conexo en el que todas las caras (incluida la exterior) tienen exactamente cuatro aristas en su borde.*

Proposición 3.10. *Si G es un grafo 2-conexo, entonces puede ser obtenido a partir de un ciclo de longitud por lo menos 3 mediante añadir sucesivamente un camino que tiene solamente sus extremos en común con el grafo.*

Demostración. Sea H un ciclo en G. Si $H = G$, no hay nada que probar. Supongamos entonces que $H \neq G$. Como G es conexo, contiene una arista $uv \in A(G) \setminus A(H)$ tal que $u \in V(H)$. Como G es 2-conexo, $G \setminus u$ es conexo. Sea Q el camino más corto en en $G \setminus u$ desde v a algún vértice en H. El camino P formado por la arista uv y Q es un camino que tiene precisamente su final en común con H. Añadimos este camino al grafo actual. Si repetimos este proceso, obtenemos el grafo G entero. □

A continuación, se enunciará el famoso Teorema de la curva de Jordan, cuya demostración no se realizará en este trabajo. [1] Sin embargo, nos apoyaremos en

[1]Este Teorema se ha visto, también sin demostración, en varias de las asignaturas de la carrera.

él para probar la Proposición 3.13.

Teorema 3.11 (Teorema de la curva de Jordan)**.** *Si C es un curva simple cerrada en el plano, entonces $\mathbb{R}^2 \setminus C$ queda dividido en dos componentes conexas, siendo el borde de ambas C.*

Es sencillo ver que de este Teorema se sigue el siguiente Corolario.

Corolario 3.12. *Sea C una curva simple cerrada en el plano y P una curva simple que corta a C tan solo en dos puntos p y q. Sean S_1 y S_2 los dos segmentos de C desde p hasta q. Entonces, $C \cup P$ tiene exactamente tres caras, cuyos bordes son C, $P \cup S_1$ y $P \cup S_2$, respectivamente.*

El Teorema 3.11 y el Corolario 3.12 que acabamos de ver, serán de utilidad en la demostración de la Proposición 3.13, que se enuncia a continuación.

Proposición 3.13. *Si G es un grafo plano 2-conexo, entonces cada cara tiene un ciclo de G como borde.*

Demostración. Mediante inducción sobre el número de ciclos de G. Si G tiene solo un ciclo C, la Proposición es cierta por el Teorema 3.11. En otro caso, la Proposición 3.10 garantiza que G tiene un subgrafo G' 2-conexo tal que G es obtenido de G' añadiendo un camino P entre dos vértices de G' y ningún vértice intermedio de P pertenece a G'. Como G' tiene menos ciclos que G, se aplica la hipótesis inductiva a G'. Por último, se aplica el Corolario 3.12 a el ciclo C de G' bordeando la cara de G' que contiene P. $\square$

Lema 3.14. *Sea G un grafo plano con cuatro vértices o más y aristas poligonales. Sea a el número de aristas de G, n el número de vértices y c el número de caras. Entonces:*

1) $a \leq 3n - 6$, dándose la igualdad si y solo si G es una triangulación.

2) Si G no tiene ciclos de longitud tres, entonces $a \leq 2n - 4$, dándose la igualdad si y solo si G es una cuadrangulación.

Demostración. Sea c el número de caras de G.
Supongamos primero que G es 2-conexo. Por el Teorema 3.7, se tiene:

$$n - a + c = 2 \tag{3.1}$$

Por la Proposición 3.13, sabemos que cada arista está en el borde de dos caras y el borde de cada cara está formado por como poco tres aristas. Entonces:

$$3c \leq 2a \tag{3.2}$$

dándose la igualdad si y solo si G es una triangulación. Despejando en la ecuación 3.1, se tiene $c = 2 - n + a$. Sustituyendo esta expresión en la desigualdad 3.2, se obtiene que $a \leq 3n - 6$. De la misma manera, si G no tiene ciclos de longitud tres, por la Proposición 3.13, sabemos que cada arista está en el borde de dos caras y el borde de cada cara está formado por como poco cuatro aristas. Entonces:

$$4c \leq 2a \tag{3.3}$$

Despejando y sustituyendo igual que antes, se obtiene que $a \leq 2n - 4$.

En el caso de que G no sea 2-conexo, usamos inducción sobre el número de vértices. Como G no es 2-conexo existe un vértice v de corte en G, que divide G en dos subgrafos G_1 y G_2, tales que $G_1 \cap G_2 = \{v\}$ y $G_1 \cup G_2 = G$. Aplicando la desigualdad 1) a G_1 y G_2, se tiene: $a_1 \leq 3n_1 - 6$ y $a_2 \leq 3n_2 - 6$ (siendo a_i y n_i las aristas y vértices de G_i. Si sumamos las dos desigualdades, obtenemos: $a \leq 3(n+1) - 6$, (ya que $a_1 + a_2 = a$ y $n_1 + n_2 = n + 1$, porque contamos el vértice v dos veces). Así, $a \leq 3n - 9$, por lo que $a < 3n - 6$. De igual manera se prueba 2).

□

Teorema 3.15 (Teorema de los cinco colores)**.** *Todo grafo plano es coloreable con 5 colores.*

Demostración. La prueba es por inducción sobre el número de vértices del grafo, n. Si $n \leq 5$ el enunciado es obvio.

Consideremos ahora los grafos con menos de n vértices.

Por el Lema 3.14, sabemos que al menos existe un vértice x con grado menor o igual que 5. Eliminamos este vértice del grafo G_{r+1}, y obtenemos el nuevo grafo G'_r. Por la Hipótesis Inductiva, G'_r es cinco-coloreable, así que le damos una 5-coloración. Supongamos que los 5 colores no estuvieran conectados a x (lo cual ocurre, por ejemplo, si el grado de x era estrictamente menor que 5). Entonces podemos darle a x el color que falta, y por lo tanto obtener una coloración de G_{r+1} con 5 colores.

Supongamos ahora que los cinco colores sí están conectados a x. Entonces examinemos los 5 vértices a los que x era adyacente. Los llamaremos y_1,y_2,y_3,y_4,y_5. Estos vértices están coloreados con los colores c_1,c_2,c_3,c_4 y c_5, respectivamente, y situados alrededor de x, en el orden y sentido de las agujas del reloj.

Denotamos por $H_{i,j}$ a un subgrafo de G'_r formado por los vértices coloreados con los colores c_i y c_j. Consideremos $H_{1,3}$.

Supongamos que no existe un camino entre y_1 y y_3. Entonces, $H_{1,3}$ está desconectado en dos componentes. Entonces, en la componente conectada a y_1, podemos intercambiar los colores c_1 y c_3. Así, x ya no es adyacente a un vértice de color c_1, por lo que le podemos asignar a x este color.

Por otro lado, si existe un camino entre y_1 e y_3 en $H_{1,3}$ podemos incluir el vértice x en este camino para conseguir un circuito C. Como hemos indexado los vértices y_1, y_2, y_3, y_4 e y_5 en el sentido de las agujas del reloj, exactamente uno de los vértices y_2 e y_4 está dentro de C.

Por lo tanto, y_2 e y_4 están en diferentes componentes conexas de $H_{2,4}$. Entonces podemos cambiar los colores c_2 y c_4 en la componente de $H_{2,4}$ que está conectado a y_2. Ahora x ya no es adyacente a un vértice de color c_2, por lo que podemos colorearlo con el color c_2. □

3.3. Los Teoremas de Kuratowski y Wagner

Si bien la cantidad de grafos que existen es infinita, hay algunos grafos que, por su relevancia, tienen nombre propio y es importante conocer. Un ejemplo de esto son los grafos $K_{3,3}$ y K_5.

Definición 3.16 ($K_{3,3}$)**.** *Se llama $K_{3,3}$ al grafo bipartito completo de seis vértices, tres en cada lado (ver imagen 3.2).*

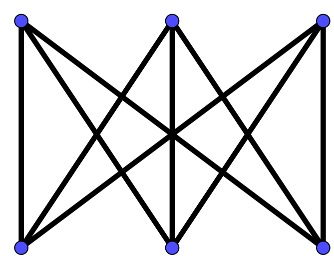

Figura 3.2: $K_{3,3}$

Definición 3.17 (K_5)**.** *Se llama K_5 al grafo completo de cinco vértices (ver imagen 3.3).*

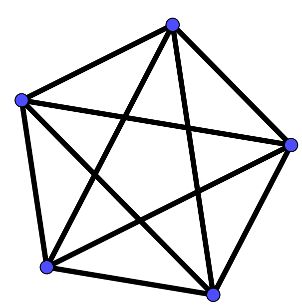

Figura 3.3: K_5

Como se ve en las imágenes de ambos grafos (imagen 3.2 e imagen 3.3), en el dibujo hay aristas que se atraviesan. Esto no es exclusivo de estas representaciones; más bien, es imposible representar estos grafos en el plano sin que sus aristas se intersequen.

Teorema 3.18. *Teorema: $K_{3,3}$ y K_5 no son grafos planares.*

Demostración. Comencemos con $K_{3,3}$. Como es un grafo bipartito, según el Teorema 2.34, no existen ciclos de longitud tres. Entonces, como tiene más de cuatro vértices, debería verificar el Lema 3.14, en concreto la desigualdad $a \leq 2n - 4$. Sin embargo, se llega a un absurdo ya que $K_{3,3}$ tiene nueve aristas y seis vértices.
Por otro lado, como K_5 tiene cinco vértices, debería verificar la desigualdad $a \leq 3n-6$ del mismo Lema 3.14, pero tampoco la verifica, ya que K_5 tiene diez aristas.
Se concluye entonces que ninguno de los dos grafos son planares. □

Uno de los resultados más conocidos sobre grafos planares es el Teorema de Kuratowski, que caracteriza los grafos planos en términos de los subgrafos que no pueden contener. Pero antes de enunciar y demostrar este Teorema, es necesario definir el concepto de *subdivisión* de un grafo.

Definición 3.19 (Subdivisión de un grafo)**.** *Sea G un grafo. Se dice que H es una **subdivisión** de G si $H = G$ o si H puede ser obtenido de G mediante insertar vértices de grado dos en algunas aristas.*

Con esta definición podemos enunciar ya el Teorema, aunque su demostración se hará más adelante porque necesitaremos primero varios resultados intermedios.

Teorema 3.20 (Teorema de Kuratowski)**.** *Un grafo es plano si y solo si no contiene una subdivisión de K_5 o una subdivisión de $K_{3,3}$ como subgrafo.*

Una consecuencia inmediata del Teorema 3.20 es el famoso Teorema de Wagner, que se enuncia y demuestra a continuación.

Teorema 3.21 (Teorema de Wagner)**.** *Un grafo G es plano si y solo si ni $K_{3,3}$ ni K_5 es un menor de G.*

Demostración. Para demostrar la implicación de derecha a izquierda, supongamos primero que G no es plano. Por el Teorema 3.20, G contiene al menos una subdivisión de $K_{3,3}$ o de K_5. Basta contraer alguna arista de esta subdivisión para obtener $K_{3,3}$ o K_5 como un menor de G.

Para la otra implicación, supongamos que G es plano. Evidentemente, si e es una arista de G, se tiene que cualquier subgrafo G' y cualquier contracción $G'//e$ también son planos (ver Figura 3.4). Así que cualquier menor de G es plano. Como $K_{3,3}$ y K_5 no son planos, tampoco pueden ser menores de G. □

3.3.1. Demostración del Teorema de Kuratowski

En esta sección se enunciarán y probarán una serie de lemas que, en conjunto, darán lugar al Teorema de Kuratowski.

Lema 3.22 ([4, Lemma 1.4.4])**.** *Todo grafo 3-conexo de orden al menos 5 contiene una arista e tal que el gafo $G//e$ es 3-conexo.*

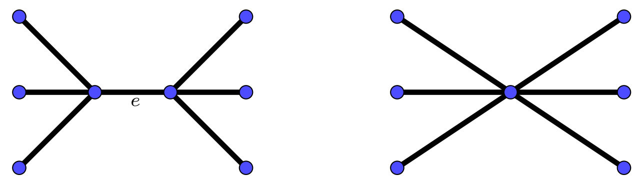

Figura 3.4: Contracción de la arista e

Demostración. Supongamos, por reducción al absurdo, que para cada arista $e = xy$, el grafo $G//e$ tiene conectividad 2 (es decir, deja de ser 3-conexo).

Como $G//e$ tiene conectividad 2, hay dos vértices que al quitarlos desconectan G. Uno de esos vértices tiene que ser el vértice obtenido por identificar x e y y por tanto en G hay un tercer vértice z tal que $G \setminus \{x, y, z\}$ no es conexo.

Para buscar la contradicción, elegimos una arista $e = xy$ y un vértice z de manera que la componente H más grande de $G \setminus \{x, y, z\}$ sea lo más grande posible.

Sea G' el subgrafo inducido de G en los vértices $V(H) \cup \{x, y\}$. Vamos a ver que G' es 2-conexo. Para ello, sean a y b dos vértices de G' (que pueden incluir o no a x o a y). En G tenemos al menos tres caminos disjuntos de a a b. Como solo uno de ellos puede pasar por z, los otros dos o bien no salen de $V(H) \cup \{x, y\}$, o bien uno de ellos sale y vuelve a entrar. En ese caso, sale por x y vuelve por y, o al revés, porque x e y desconectan H del resto del grafo. Como xy es una arista, en realidad podemos suponer que ninguno de los dos caminos sale de $V(H) \cup \{x, y\}$. Es decir, el subgrafo G' es 2-conexo.

Ahora sea H' otra componente de $G \setminus \{x, y, z\}$ y sea u un vértice de H' adyacente a z (H' existe porque $G \setminus \{x, y\}$ es conexo). Como $G//zu$ tampoco es 3-conexo, G tiene un conjunto separador de la forma $\{z, u, v\}$, para algún vértice v.

Consideramos el subgrafo inducido de G en los vértices $(V(H) \cup \{x, y\}) \setminus \{v\}$. Como ese grafo coincide con $G' \setminus \{v\}$ y G' era 2-conexo, ese grafo es conexo. Como no contiene ninguno de los vértices z, u, v, está contenido en una componente H'' de $G \setminus \{z, u, v\}$. Pero $|V(H'')| > |V(H)|$ y esto contradice la propiedad de que H tenía el mayor número de vértices posible. □

Lema 3.23. *Sea G un grafo 3-conexo y $e = xy$ una arista tal que $G' = G//e$ sigue siendo 3-conexo.*

Si G' contiene una subdivisión de K_5 o de $K_{3,3}$, entonces G también.

Demostración. Sea z el vértice de G' que sale de identificar x e y.

Supongamos primero que G' contiene una subdivisión de K_5. Si z no forma parte de ese K_5, el K_5 sigue estando en G. Si z forma parte del K_5 al recuperar G a partir de G', consideramos los cuatro vértices de z en ese K_5. Hay tres posibilidades:

1. Uno de x o y es adyacente a los cuatro vecinos de z, entonces el K_5 sigue estando en G.

2. Uno de x o y, digamos x, es adyacente a tres de los cuatro vecinos de z. Entonces el K_5 sigue estando en G, pero subdividido a través del vértice y.

3. x e y son adyacentes cada uno a (al menos) dos de los cuatro vecinos de z. Entonces el grafo que sale en G contiene un $K_{3,3}$, como se puede ver en la Imagen 3.5, en la que los seis vértices x, y y los cuatro vecinos de z que formaban el K_5 aparecen coloreados como la bipartición de $K_{3,3}$.

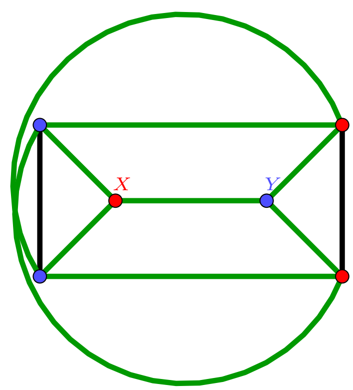

Figura 3.5: El $K_{3,3}$ contenido en G en el caso 3)

Por otro lado, si G' contiene una subdivisión de $K_{3,3}$, también existen varias opciones. Si z no forma parte de ese $K_{3,3}$, el $K_{3,3}$ sigue estando en G. Si z forma parte del $K_{3,3}$ al recuperar G a partir de G', existen solo las dos primeras posibilidades del caso de K_5: uno de x o y es vecino de al menos dos de los tres vecinos de z, con lo cual el $K_{3,3}$ sigue estando en G.

□

Definición 3.24 (Dibujo convexo). *Sea G un grafo. Decimos que G admite un dibujo convexo si se puede dibujar en el plano de modo que todas las caras acotadas sean polígonos convexos.*

Lema 3.25 ([4, Lemma 2.3.1])**.** *Si G es 3-conexo y no contiene ninguna subdivisión de K_5 ni de $K_{3,3}$ entonces G admite un dibujo convexo.*

Demostración. Si $n = 4$ o si $n = 5$, la afirmación se demuestra mirando los posibles casos, que en realidad son solo tres: Como G es 3-conexo, el grado de todos los vértices es al menos 3, así que si G tuviera 4 vértices, sería K_4. Si tuviera 5 vértices, podría ser K_5, K_5 menos una arista o K_5 menos dos aristas disjuntas. En los tres casos, se comprueba que los dibujos son convexos.

Así que asumimos que $6 \leq n$. Por el Lema 3.22, G contiene una arista $e = xy$ tal que el grafo $G' = G//e$ (G/e con aristas paralelas borradas) es 3-conexo. Sea z el vértice de G' obtenido al identificar x con y. Si G' contiene una subdivisión de K_5 o de $K_{3,3}$ el Lema 3.23 nos dice que G también. Así que podemos asumir por hipótesis de inducción que G' tiene un dibujo convexo en el plano.

Como G' es 3-conexo, el grafo $G' \setminus z$ es 2-conexo. Por la Proposición 3.13, la cara de $G' \setminus z$ que contiene el punto z está bordeada por un ciclo C de G'. Claramente, C es también un ciclo en G. Sean x_1, x_2, ..., x_k vértices adyacentes de x, que se encuentran en C en ese mismo orden cíclico, y sea P_i el segmento en C que une x_i con x_{i+1} y no contiene ningún x_j, con $j \neq i, i+1$, donde los índices son tomados módulo k. Si todos los vértices adyacentes a y (distintos de x) están en uno de los caminos P_i es fácil obtener un dibujo convexo de G de la representación convexa de G': representa x por z e y por un punto lo suficientemente cerca de x. (El caso en el que z es adyacente a la cara no acotada de G' tiene que ser considerado separadamente, pero lo omitimos).

Por otro lado, si no es ese el caso, el siguiente lema nos dice que ocurre una de dos:

- o bien y está unido a tres o más vértices de entre x_1, x_2, ..., x_k,
- o bien y está unido a los vértices u, v en C y hay índices i, j ($1 \leq i < j \leq k$) de manera que x_i, x_j son distintos de u, v y tales que u, x_i, v, x_j aparecen en C en ese orden.

En el primer caso C junto con x e y determinan una subdivisión de K_5 en G. En el segundo caso, C junto con x e y determinan una subdivisión de $K_{3,3}$ en G. □

Lema 3.26. *Sea G un grafo con una arista $e = xy$ y sea $G' = G//e$. Supongamos que en $G//e$, el vértice z que sale de identificar x e y está unido a un ciclo $z_1 \dots z_k z_1$. Entonces ocurre al menos una de las cosas siguientes según qué vértices del ciclo están unidos a x y a y en G:*

1. *Todos los z_i vecinos de y están entre dos vecinos consecutivos de x (incluyendo quizá a esos dos vecinos).*
2. *x e y tienen al menos tres vecinos z_i en común.*
3. *Hay cuatro vértices $z_{i_1}, z_{i_2}, z_{i_3}, z_{i_4}$ que aparecen en ese orden en el ciclo de manera que z_{i_1} y z_{i_3} son vecinos de x y z_{i_2} y z_{i_4} son vecinos de y.*

Demostración. Primero, se etiqueta cada vértice z_i de la siguiente manera: con un $'+'$ si está unido a x en G, con un $'-'$ si está unido a y y con un $'0'$ si está unido a ambos. Así, solo puede haber 3 escenarios:

1. Hay 3 ceros o más. Es decir, hay tres o más vértices adyacentes a x y a y al mismo tiempo. En este caso, evidentemente x e y tienen tres o más vértices del ciclo $z_1 \ldots z_k z_1$ en común. Esto nos sitúa en el caso 2 del enunciado.

2. Los $'+'$ no son consecutivos o los $'-'$ no son consecutivos.

   Supongamos sin pérdida de generalidad que los $'+'$ no son consecutivos. Es decir, hay al menos dos intervalos de '+', separados entre sí por algún $'0'$ o algún $'-'$. Llamemos z_{i_1} y z_{i_3} a dos $'+'$ de intervalos distintos. Como están en intervalos distintos desde z_{i_1} hasta z_{i_3} hay algún z_i que es $'0'$ o $'-'$, llamémosle z_{i_2}. Del mismo modo, desde z_{i_3} hasta z_{i_1} también hay algún z_i que es $'0'$ o $'-'$, y lo llamamos z_{i_2}. Como z_{i_2} y z_{i_4} están unidos a y (aunque quizá lo estén también a x) estamos en el caso 3.

3. Tanto los $'+'$ como los $'-'$ son consecutivos y hay como mucho 2 ceros. Como los $'-'$ son consecutivos, el conjunto de vértices adyacentes a y está entre vértices del ciclo $z_1 \ldots z_k z_1$ etiquetados con $'0'$ o con $'+'$. Por lo tanto, esta situación se corresponde con el caso 1 del enunciado.

□

Lema 3.27 ([4, Lema 2.3.3])**.** *Sea G un grafo de orden $n \geq 4$ que no contiene ninguna subdivisión de K_5 ni de $K_{3,3}$, y tal que la suma de cualquier arista que una dos vértices no adyacentes de G genere tal subdivisión. Entonces G es 3-conexo.*

Demostración. Lo demostraremos mediante inducción sobre el número de vértices de G. Si n es a lo más cinco, la única posibilidad es que G sea K_5 menos una arista, que es 3-conexo. Así que asumimos que $n \geq 6$.

Veamos dos propiedades de G:

1. *G es 2-conexo.*

   Si G no fuera 2-conexo, existirían dos vértices u, v en bloques distintos. Añadiendo la arista uv, se obtendría una subdivisión de $K_{3,3}$ o de K_5. Esto implicaría que u y v estarían en un subgrafo de G que es subdivisión de K_5 menos una arista o de $K_{3,3}$ menos una arista (que a su vez sería una subdivisión de K_4). Como tanto K_4 como K_5 menos una arista son los dos 3-conexos, se habría obtenido que G contiene una subdivisión de un grafo 3-conexo que contiene los vértices u y v. Pero esto solo podría pasar si u y v estuviesen en el mismo bloque de G, lo que sería una contradicción.

2. *Si $G \setminus \{x, y\}$ es no conexo entonces x e y son adyacentes.*

   Si x e y no son adyacentes, añadiendo la arista xy se crea una subdivisión de $K_{3,3}$ o de K_5. Es decir, G contiene un subgrafo G' que contiene a x

y a y y que o bien es un K_5 menos una arista o bien una subdivisión de K_4. Como ambos son 3-conexos, G contiene una subdivisión de un grafo 3-conexo que contiene a x y a y. Así que borrando ambos vértices, G sigue siendo conexo.

Ahora supongamos que G no es 3-conexo. Entonces tiene vértices x e y tales que $G \setminus \{x, y\}$ es no conexo y, por lo que acabamos de demostrar, x e y son adyacentes. Sea K_1 una componente de $G \setminus \{x, y\}$ y sea K_2 el resto de $G \setminus \{x, y\}$. Entonces, llamando G_1 a $G \setminus K_2$ y G_2 a $G \setminus K_1$ tenemos que $G = G_1 \cup G_2$, y que G_1 y G_2 tienen en común solo x, y, y la arista xy. Además $|V(G_i)| \geq 3, i = 1, 2$, porque tienen a x, a y, y a al menos algún vértice más (los de K_1 en G_1 y los de K_2 en G_2).

Por hipótesis del lema, si a uno de los G_i $(i = 1, 2)$ le añadimos una arista se crea una subdivisión de K_5 o de $K_{3,3}$ en G; Como $K_{3,3}$ y K_5 son 3-conexos, ese K_5 o $K_{3,3}$ tiene que tener todos sus vértices originales (o sea, los de grado ≥ 3 del subdividido) en el mismo G_i porque si no tendríamos tres caminos disjuntos de un vértice de $G_1 \setminus G_2$ a un vértice de $G_2 \setminus G_1$ y solo hay dos vértices (x e y) por los que podemos pasar de G_1 a G_2.

Entonces, por hipótesis de inducción, cada G_i o bien tiene solo tres vértices (y es un K_3), o bien tiene al menos 4 vértices y es 3-conexo. Por el Lema 3.25, G_i tiene un dibujo convexo en el plano. Podemos tomar, sin pérdida de generalidad dibujos que tienen a xy en el borde y juntarles en un dibujo plano de G que es convexo excepto quizá por su cara exterior, la cual contiene a x y a y.

Sea z_i un vértice de G_i distinto de x e y pero que está en la misma cara que x e y, en el dibujo plano que hemos construido. Por nuestras hipótesis, el grafo $G + z_1 z_2$ contiene una subdivisión K de K_5 o $K_{3,3}$.

Vamos a probar varias cosas sobre K:

- K contiene a la arista xy: Por la manera de elegir z_1 y z_2 (ver imagen 3.6), se tiene que $G + z_1 z_2 - xy$ es plano, y en cambio $K \subset G + z_1 z_2$ no es plano.

- K no tiene todos sus vértices de grado 3 en ninguno de los G_i; es decir, K tiene algún vértice de grado tres en $K_1 = G_1 \setminus G_2$ y algún otro en $K_2 = G_2 \setminus G_1$: supongamos que estuvieran todos en G_1. Entonces, en G_2 lo único que puede haber de K es parte de la subdivisión de una arista, es decir, un camino, que o bien va de x a y o bien va de uno de ellos a z_2 y luego usa la arista $z_2 z_1$.

  En el primer caso, sustituyendo ese camino por la arista xy tenemos una subdivisión de $K_{3,3}$ o de K_5 contenida en G_1, y por tanto en G, contradicción. En el segundo, introduciendo un vértice adicional z_2' en la cara de G_1 que contiene a x, y, z_1, podemos también sustituir al camino por una arista de x o y a z_2' y la arista $z_2' z_1$, obteniendo un dibujo plano de $K_{3,3}$ o de K_5, contradicción.

- K es una subdivisión de $K_{3,3}$, no de K_5: Esto es porque K_5 es 4-conexo y en nuestro caso es imposible tener cuatro caminos disjuntos desde un

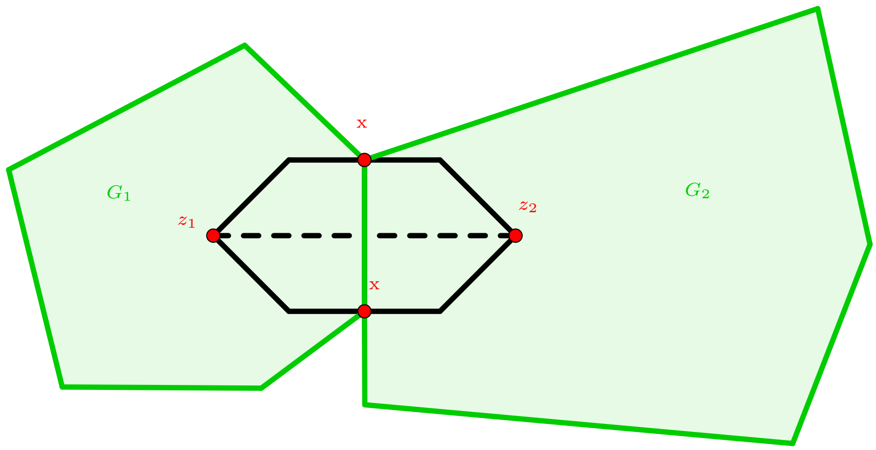

Figura 3.6: Situación de la demostración del Lema 3.27, con $G_1 \cap G_2 = \{xy\}$. $G = G_1 \cup G_2$ admite un dibujo plano y z_1 y z_2 están respectivamente en las caras que contienen a la arista xy. Por tanto, $G \setminus xy \cup z_1z_2$ también es plano.

vértice de K_1 a otro de K_2. (Solo podemos ir por x, por y, o por la arista z_1z_2).

Vamos a llegar a la contradicción. Sean a_1 y a_2 vértices de grado 3 de K que están respectivamente en K_1 y K_2.

De a_1 a a_2 hay tres caminos disjuntos en K, porque $K_{3,3}$ es 3-conexo. Esos tres caminos necesariamente tienen que pasar uno por x, otro por y y el otro por la arista z_1z_2. Como la arista xy está en K, x e y también son vértices de grado tres de K.

En particular, xy es una arista del $K_{3,3}$ que no está subdividida y por tanto los vértices x e y tienen colores opuestos. Supongamos sin pérdida de generalidad que x tiene el color de a_1. Entonces, el camino que va de a_1 a x (y de ahí a a_2) tiene que pasar por un vértice de grado tres del color opuesto, o sea por un segundo vértice $b_2 \in K_1$ de grado 3 en K.

Por el mismo argumento, como a_2 tiene el color de o bien x o bien y, en uno de los caminos xa_2 o ya_2 está el vértice de $K_{3,3}$ que nos falta. Esto implica que el camino de a_1 a a_2 por z_1z_2 es una única arista del $K_{3,3}$. Es decir, a_2 tiene el color opuesto a a_1 y b_2 está por tanto en el camino de y a a_2. Véase la Figura 3.7.

La contradicción ahora es que en el $K_{3,3}$ nos falta dibujar la arista que va de b_1 a b_2 y tendríamos que dibujarla sin usar aristas de lo que ya está dibujado, o sea, sin pasar ni por x ni por y ni por z_1z_2. Eso es imposible. □

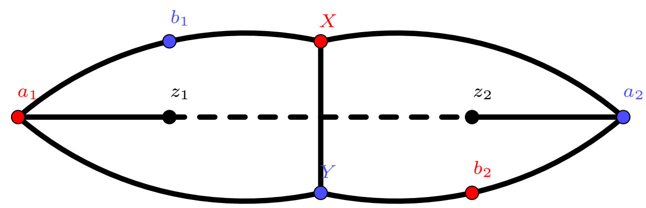

Figura 3.7: Situación al final de la demostración del Lema 3.27. Tenemos tres caminos disjuntos de a_1 a a_2 que pasan respectivamente por x, y y z_1z_2. Es imposible ir de b_1 a b_2 sin pasar por x, y o z_1z_2.

Demostración del Teorema 3.20. Ya hemos visto que K_5 y $K_{3,3}$ no son planares. Sus subdivisiones tampoco pueden ser representadas en el plano. Así que ya está demostrado que si G es planar, no contiene una subdivisión de K_5 ni una subdivisión de $K_{3,3}$.

Para la otra implicación, si G es 3-conexo, la implicación nos la da el Lema 3.25. Si G no es 3-conexo, el Lema 3.27 nos dice que le podemos ir añadiendo aristas entre vértices no adyacentes sin hacer que el grafo contenga ninguna subdivisión de K_5 ni de $K_{3,3}$, hasta obtener un grafo G' 3-conexo. En ese momento le aplicamos el Lema 3.25 a G' y como G está contenido en G' tenemos un dibujo plano de G. $\square$

Capítulo 4

Polinomio cromático

4.1. Definición y cálculo de algunos polinomios cromáticos

En la Sección 2.3, Coloraciones en grafos, ya se ha definido el concepto de 'número cromático'. Este número era la cantidad más pequeña de colores con la que se puede colorear un grafo. Por ejemplo, vimos que el número cromático de la imagen 2.5 era 3. Sin embargo, la coloración que se hace en esta imagen no es la única que puede hacerse con 3 colores. Muestra de ello es la imagen 4.1, en la que se representa una coloración diferente a la que se hizo en la imagen 2.5.

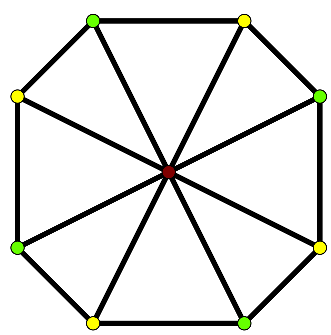

Figura 4.1: Coloración distinta a la de la Figura 2.5

Entonces, parece natural preguntarse: ¿cuántas coloraciones distintas de un grafo pueden hacerse usando el mismo número de colores? Una herramienta que nos ayuda a calcular esto es el polinomio cromático de un grafo. Varios de los resultados que se demuestran en este capítulo han sido extraídos de los libros *Algebraic Graph Theory* [2] y *Discrete and Combinatorial Mathematics: An applied introduction* [3].

Definición 4.1 (Polinomio cromático)**.** *Dado un grafo G, para cada $k \in \mathbf{N}$ denotamos $P(G,k)$ el número de coloraciones distintas de G con k colores. La función*

$$\begin{aligned} P(G,\cdot) : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ k &\mapsto P(G,k) \end{aligned}$$

se llama el ***polinomio cromático*** *de G.*

Por lo tanto, el polinomio cromático del grafo G es la función que cuenta el número de coloraciones distintas que existen de este grafo para cada número de colores. Todavía no hemos demostrado que esta función es un polinomio. Esto se hará más adelante.

En ocasiones, calcular el polinomio cromático de un grafo dado puede resultar una tarea complicada. Sin embargo, existen grafos con los que hacer este cálculo es bastante intuitivo. Algunos de ellos son el grafo completo de n vértices, un árbol, un grafo camino o el grafo vacío de n vértices. Veamos cómo se calcula el polinomio característico en cada uno de estos casos.

Proposición 4.2. *Sea $G = (V,E)$ un grafo con $|V| = n$ y $E = \emptyset$. Entonces $P(G,k) = k^n$.*

Demostración. Como los vértices están aislados, para colorear cada vértice tenemos k opciones. Así, $P(G,k) = k \cdots k = k^n$. □

Proposición 4.3. *Sea K_n el grafo completo de n vértices. Entonces, $P(K_n,k) = k(k-1)(k-2)...(k-(n-1))$.*

Demostración. En este caso, para el primer vértice se tienen k colores distintos con los que colorearlo. Una vez elegimos uno, para el siguiente vértice tenemos $k-1$ opciones, y así sucesivamente. Por lo tanto, se obtiene el susodicho polinomio. □

Observación 4.4. *En la Proposición 4.3 obsérvese que si $k < n$, $P(G,k) = 0$. Esto nos lo da la fórmula pero también es obvio en el grafo: al ser todos los pares de vértices adyacentes, se necesitan al menos n colores para colorear el grafo.*

Proposición 4.5. *Sea G un grafo camino, esto es, un recorrido simple entendido como grafo en sí mismo, de n vértices. Entonces $P(G,k) = k(k-1)^{n-1}$.*

Demostración. De nuevo, para el primer vértice tenemos k opciones y para el segundo $k-1$ opciones. Para el tercero, no podemos usar el color que hemos usado en el segundo pero sí podemos volver a usar el color del primero. Así que para el tercero también tenemos $k-1$ colores, y así sucesivamente. Como no es un recorrido cerrado, para el último vértice también se tienen $k-1$ opciones, y así se obtiene la expresión anterior. □

Proposición 4.6. *Sea A_n un árbol de n vértices y sea k un número natural. Entonces $P(A_n, k) = k(k-1)^{n-1}$.*

Demostración. Se demuestra por inducción sobre el número de vértices n. Si $n = 2$, A_2 también es un grafo camino. Por lo visto en la Proposición 4.5, $P(A_2, k) = k(k-1)$.

Supongamos ahora que $n > 2$. Por el Lema 3.5, existe al menos un vértice v en A_n que es una hoja. Denotamos por A' al grafo $A_n \setminus v$. Por hipótesis de inducción, $P(A', k) = k(k-1)^{n-2}$. Una vez coloreado A', si le volvemos a añadir la hoja conectando el vértice v, existen $k-1$ posibilidades de colorear el vértice v porque solo tiene un vecino en A'. Por lo tanto, $P(A_n, k) = (k-1)P(A', k) = k(k-1)^{n-2}(k-1) = k(k-1)^{n-1}$. □

Proposición 4.7. *Sea G un grafo que está compuesto por n componentes conexas $C_1, C_2, ..., C_n$. Entonces $P(G, k) = P(C_1, k) \cdot P(C_2, k) \cdots P(C_n, k)$.*

Demostración. Cada componente se podrá colorear de diferentes maneras. Como son disjuntas, las coloraciones de una componente no afectan a las de las demás y por tanto el número total es el producto. □

Por lo visto en la Proposición 4.7, parece lógico centrarse en el cálculo del polinomio cromático para los grafos que sean conexos, ya que si un grafo no es conexo, bastará con calcular el polinomio de cada componente y después multiplicarlos.

Si intentamos calcular el polinomio cromático de un ciclo cualquiera o de un grafo rueda utilizando los argumentos que se han empleado hasta ahora, la tarea se vuelve algo más complicada. Por ejemplo, pensemos en el ciclo y razonemos de la misma manera que en la Proposición 4.5 para colorearlo. Seleccionamos un primer vértice cualquiera, para el que disponemos de k colores. Podemos continuar escogiendo vértices en el sentido de las agujas del reloj, y para el segundo vértice tenemos $k-1$ opciones posibles. Para el tercero no podemos volver a usar el color del segundo, pero sí el del primero, por lo que volvemos a tener $k-1$ colores disponibles. Y así sucesivamente... hasta que llegamos al último vértice. Ya se han coloreado los dos vértices adyacentes al último vértice, así que alguien podría pensar que se tienen $k-2$ colores disponibles. Sin embargo, esto podría no ser cierto, ya que podría suceder que ambos vértices adyacentes al vértice último tuvieran el mismo color, en cuyo caso se volverían a tener $k-1$ opciones. Así que, en realidad, si C_n es un ciclo de n vértices, esta manera de razonar solo nos proporciona las siguientes cotas: $k(k-1)^{n-2}(k-2) \leq P(C_n, k) \leq k(k-1)^{n-1}$.

Es por eso que para C_n (y para algunos otros grafos) calcularemos el polinomio cromático usando un teorema que llamaremos Fórmula Fundamental (ver Teorema 4.9).

4.2. Fórmula Fundamental y propiedades del polinomio cromático

Existen ciertas propiedades que resultan evidentes teniendo en cuenta lo que ya se ha expuesto sobre el polinomio cromático. Algunas de ellas son las siguientes.

Proposición 4.8. *Sea G un grafo y k un número natural. Entonces:*

1. *$P(G, 0) = 0$. Se trata del número de maneras de colorear un grafo sin ningún color.*
2. *$P(G, k) > 0$ si y sólo si G es k-coloreable. Evidentemente, $P(G, k) > 0$ si y solo si existe alguna k-coloración de G, si y solo si el grafo es coloreable.*

   En particular, el número cromático de G es el primer número natural que no es raíz de $P(G, k)$.
3. *Si $k < k'$, entonces $P(G, k) \leq P(G, k')$. Esto es así porque si $k < k'$, una k-coloración es también una k'-coloración, ya que en una k'-coloración no siempre necesitas usar todos los colores.*

Hasta ahora, hemos calculado el polinomio cromático de algunos grafos sencillos y conocidos. Sin embargo, como es fácil de imaginar, este ejercicio se vuelve más complicado a medida que el grafo deja de ser tan elemental. En el ámbito de la matemática discreta, los métodos que se emplean muchas veces para resolver problemas de casos 'grandes' consisten en dividir estos casos en otros más pequeños. El cálculo del polinomio cromático de un grafo dado también puede abordarse de esta manera.

Teorema 4.9 (Fórmula Fundamental del Polinomio Cromático)**.** *Sea G un grafo conexo y e una arista de G. Entonces $P(G, k) = P(G \setminus e, k) - P(G//e, k)$.*

Demostración. Sea $e = \{a, b\}$. El número de maneras distintas de colorear $G \setminus e$ con k colores es $P(G \setminus e, k)$. Las coloraciones en las que a y b tienen colores diferentes son exactamente las coloraciones de G. Las coloraciones de $G \setminus e$ que no son coloraciones de G son aquellas en las que a y b tienen el mismo color. Pero cada una de esas coloraciones corresponde también a una coloración de $G//e$. Esta partición de las $P(G \setminus e, k)$ coloraciones en los dos subconjuntos disjuntos descritos resulta en la ecuación $P(G \setminus e, k) = P(G, k) + P(G//e, k)$, que es equivalente a la Fórmula Fundamental. □

Por lo tanto, este Teorema nos proporciona una manera recursiva de calcular el polinomio cromático de cualquier grafo, que puede ser implementada como un algoritmo. Pero esto se verá más adelante. Por ahora, podemos probar algunos resultados derivados del Teorema 4.9.

Corolario 4.10. *Sean $G = (V, E)$ y k un número natural. Sean $a, b \in V$ vértices no adyacentes. Denotamos por G^+_{ab} al grafo que se obtiene añadiendo la arista ab a G. Contrayendo la arista ab en G^+_{ab} se obtiene un subgrafo que llamaremos G^{++}_{ab}. Entonces, $P(G, k) = P(G^+_{ab}, k) + P(G^{++}_{ab}, k)$.*

Demostración. Este resultado se sigue directamente del Teorema 4.9, porque $P(G^{+}_{ab}, k) = P(G, k) - P(G^{++}_{ab}, k)$. □

Corolario 4.11. *Sea G un grafo y k un número natural. Entonces, la función $P(G, k)$ es un polinomio.*

Demostración. Sea $G = (V, A)$ un grafo y k un número natural. Se quiere probar que $P(G, k)$ es un polinomio. Sea m el número de aristas de G. Si $m = 1$, evidentemente $P(G, k)$ será un polinomio, ya que $P(G, k) = k(k - 1)k^t$, siendo t el número de vértices aislados de G. Sea $m > 1$. Por la Fórmula Fundamental (Teorema 4.9), $P(G, k) = P(G \setminus e, k) - P(G//e, k)$, siendo e una arista de G. Por hipótesis de inducción, $P(G \setminus e, k)$ y $P(G//e, k)$ son polinomios, ya que $G \setminus e$ y $G//e$ tienen $m - 1$ aristas. Como la diferencia de estos dos polinomios debe ser también un polinomio, se tiene que $P(G, k)$ es un polinomio. □

Ya se ha visto que la función $P(G, k)$ es un polinomio, pero este polinomio tiene algunas características destacables propias. Veámoslas.

Proposición 4.12. *El término independiente de $P(G, k)$ es 0.*

Demostración. Sea a el término independiente de $P(G, k)$. Se tiene que $a = P(G, 0)$. Como se ha explicado en la Proposición 4.8, $P(G, 0) = 0$. □

Lo siguiente es una generalización de esta proposición:

Proposición 4.13. *Si $c \in \mathbb{N}$ es el número cromático de G, entonces todos los números enteros $0, 1, \dots, c - 1$ son raíces de $P(G, k)$.*

Demostración. Sabemos que c es el menor número de colores con el que se puede colorear G. Así que no existen coloraciones de G con menos de c colores. Por lo tanto, $P(G, c - 1) = P(G, c - 2) = \cdots = P(G, 0) = 0$. Dicho de otra manera, los números enteros $0, 1, \dots, c - 1$ son raíces de $P(G, k)$, ya que el polinomio se anula para todos esos valores de k. □

Proposición 4.14. *Sea $G = (V, E)$ un grafo con $|E| > 0$ y k un número natural. La suma de los coeficientes de $P(G, k)$ es 0.*

Demostración. Dado que $|E| > 1$, el número cromático de G es mayor o igual que 2. Así que

$$P(G, 1) = \text{suma de los coeficientes de } P(G, k) = 0.$$

□

Teorema 4.15. *Sea $G = (V, A)$ un grafo y k un número natural. El polinomio $P(G, k)$ es mónico, de grado $|V|$, y el coeficiente de grado $|V| - 1$ es $-|E|$.*

Demostración. Probemos las tres propiedades por inducción sobre el número de aristas m de G. Si $m = 1$, se tiene que $P(G,k) = k(k-1)k^{|V|-2} = (k-1)k^{|V|-1}$, el cual es mónico, de grado $|V|$ y su coeficiente de grado $|V| - 1$ es -1.

Para el paso inductivo, sea G un grafo con $m \geq 2$ aristas y sea e una de ellas. Por la Fórmula Fundamental (ver Teorema 4.9), se tiene:

$$P(G,k) = P(G \setminus e,k) - P(G//e,k).$$

Por hipótesis de inducción, $P(G \setminus e,k)$ y $P(G//e,k)$ son mónicos de grado $|V|$ y $|V-1|$ respectivamente, así que $P(G,k)$ es mónico de grado $|V|$. Además, el coeficiente de grado $|V-1|$ de $P(G,k)$ es el $-(m-1)$ que viene de $P(G \setminus e,k)$ menos el 1 que viene de que $P(G//e,k)$ es mónico de ese grado. □

Ahora que se ha enunciado y probado la Fórmula Fundamental en el Teorema 4.9, se procede a calcular los polinomios cromáticos de un ciclo y de un grafo rueda empleando el uso de dicha fórmula.

Proposición 4.16. *Sea C_n un ciclo de n vértices y k un número natural. Entonces se tiene que $P(C_n,k) = (k-1)^n + (-1)^n(k-1)$*

Demostración. Probémoslo por inducción sobre el número de vértices. El ciclo más pequeño que existe tiene 3 vértices, así que el caso base es $n = 3$. Como $C_3 = K_3$, tenemos que $P(C_3,k) = k(k-1)(k-2) = (k-1)^3 + (-1)^3(k-1)$ (ver Proposición 4.3).

Si C_n tiene $n > 3$ vértices, usando la Fórmula Fundamental (ver Teorema 4.9), se tiene:

$$P(C_n,k) = P(C_n \setminus e,k) - P(C_n//e,k).$$

Se observa que $C_n \setminus e$ es un camino de n vértices, que denotamos P_n. Por la Proposición 4.5, $P(C_n \setminus e,k) = k(k-1)^{n-1}$. Por otro lado, $C_n//e$ es un ciclo con $n-1$ vértices y $n-1$ aristas, al que podemos denotar por C_{n-1}.

Por hipótesis de inducción tenemos que $P(C_{n-1},k) = (k-1)^{n-1} + (-1)^{n-1}(k-1)$. Por tanto:

$$\begin{aligned}
P(C_n,k) =&P(C_n \setminus e,k) - P(C_n//e,k) = \\
=&P(P_n,k) - P(C_{n-1},k) = \\
=&k(k-1)^{n-1} - ((k-1)^{n-1} + (-1)^{n-1}(k-1)) = \\
=&k(k-1)^{n-1} - (k-1)^{n-1} + (-1)^n(k-1) = \\
=&(k-1)^n + (-1)^n(k-1).
\end{aligned}$$

□

Proposición 4.17. *Sea W_n un grafo rueda con n vértices y k un número natural. Entonces $P(W_n,k) = k((k-2)^{n-1} - (-1)^n(k-2))$.*

Demostración. Probémoslo por inducción sobre el número de vértices. El grafo rueda más pequeño tiene 4 vértices, luego el caso base es $n = 4$. Como $W_4 = K_4$, por la Proposición 4.3,

$$P(W_4, k) = k(k-1)(k-2)(k-3) = k((k-2)^3 - (-1)^4(k-2))$$

Para el paso inductivo, sea e una arista del ciclo exterior del grafo rueda. Si W_n tiene $n > 4$ vértices, por la Fórmula Fundamental (ver Teorema 4.9) se tiene:

$$P(W_n, k) = P(W_n \setminus e, k) - P(W_n//e, k).$$

Se observa que calcular el polinomio cromático de $W_n \setminus e$ es sencillo mediante argumentos como los que se usaron para calcular el polinomio cromático de un árbol: escogiendo como primer vértice el que está conectado con todos los demás, se tienen k colores posibles para él. Los demás vértices forman un camino y si los coloreamos en el orden del camino, para el primero tenemos $k-1$ opciones y para los demás tenemos $k-2$. Por lo tanto,

$$P(W_n \setminus e, k) = k(k-1)(k-2)^{n-2}.$$

Por otro lado, $W_n//e$ es un grafo rueda con $n-1$ vértices, al que podemos denotar por W_{n-1}.

Por hipótesis de inducción se tiene que

$$P(W_{n-1}, k) = k((k-2)^{n-2} - (-1)^{n-1}(k-2)).$$

Así:

$$\begin{aligned}
P(W_n, k) =& P(W_n \setminus e, k) - P(W_n//e, k) = \\
=& P(W_n \setminus e, k) - P(W_{n-1}, k) = \\
=& k(k-1)(k-2)^{n-2} - (k((k-2)^{n-2} - (-1)^{n-1}(k-2))) = \\
=& k(k-1)(k-2)^{n-2} - k(k-2)^{n-2} - (-1)^n k(k-2) = \\
=& k(k-2)^{n-1} - (-1)^n k(k-2) = \\
=& k((k-2)^{n-1} - (-1)^n(k-2))
\end{aligned}$$

□

4.3. Algoritmos

Existen muchos métodos útiles para decidir algunas características que pueden tener los grafos. De hecho, para alguna demostración que ya se ha desarrollado anteriormente, se han utilizado razonamientos que pueden describir un algoritmo. Muestra de esto es la demostración del Teorema 2.34. En la segunda parte de esta demostración, que prueba que si un grafo no tiene ciclos impares entonces este grafo debe ser bipartito, se describe un algoritmo sencillo para decidir si un grafo es bipartito o no. Este algoritmo consiste en lo siguiente:

Suponemos que el conjunto de vértices V de un grafo G está dividido en dos subconjuntos disjuntos V_1 y V_2. Para decidir en qué subconjunto está cada vértice de G, se elige arbitrariamente un primer vértice x, que se asigna al subconjunto V_1. A partir de aquí, para cualquier vértice y de G distinto de x, se considera un camino cualquiera que conecte x con y. Así, si el camino que une y con x tiene longitud par, $y \in V_1$, y si tiene longitud impar, $y \in V_2$. De esta forma, si dos vértices adyacentes $\{u, v\}$ cualesquiera de G están en el mismo subconjunto, se habrá encontrado un ciclo de longitud impar, y el grafo no será bipartito. Por otro lado, si todos los vértices de un mismo subconjunto no son adyacentes, se tendrá que el grafo es bipartito.

Es importante notar que este algoritmo funciona independientemente del camino que se escoja entre cualquier vértice y de G y el primer vértice x. Esto es debido a que si dos vértices $\{u, v\}$ son adyacentes, el camino más corto que los une tiene longitud 1. Además, si ambos vértices están en el mismo subconjunto, esto quiere decir que los caminos que hemos elegido de x a u y de x a v son o bien ambos de longitud par, o bien ambos de longitud impar. Así que la longitud del ciclo $x \cdots uv \cdots x$, siempre será impar si los dos vértices están en el mismo subconjunto.

Además, teniendo en cuenta el Teorema 2.36, este algoritmo también nos permite saber si un grafo es 2-coloreable o no. En particular, se puede decidir si un grafo es 2-coloreable o no en tiempo polinómico, es decir, el número de pasos elementales que se emplean en un grafo de n vértices está acotado por un polinomio en n.

En cambio, se sabe que calcular el número cromático (o incluso, decidir si un grafo es 3-coloreable) es un ejemplo de problema NP-completo. ¿Qué quiere decir esto?

El conjunto de problemas P es el formado por los problemas algorítmicos que se pueden resolver en tiempo polinómico. Por otro lado, el conjunto de problemas NP, es el que está formado por todos los problemas en los que, si contamos con la respuesta y cierta "información extra", se puede verificar la respuesta en tiempo polinómico. Así, que un problema X sea NP-completo quiere decir que cualquier otro problema que pertenezca al conjunto NP, puede reducirse en tiempo polinómico al problema X.

Por lo tanto, si se encontrara un algoritmo polinómico para calcular el número cromático o para decidir si un grafo es 3-coloreable, se habría demostrado que P=NP lo cual, entre otras cosas, invalidaría la seguridad de toda la criptografía de clave pública que usamos habitualmente.

En particular, todos los algoritmos exactos para calcular el número o el polinomio cromático que se conocen son exponenciales, y no se espera que existan algoritmos polinómicos. Pero hay algoritmos heurísticos o aproximados que pueden dar una cota para el número cromático, de manera que el valor real se encuentre entre esa cota y la mitad.

Contracción y borrado

Este método consiste en usar recursivamente la Fórmula Fundamental (Teorema 4.9) para calcular el polinomio cromático de un grafo. Puede usarse "hacia arriba", es decir, añadiendo aristas, o "hacia abajo", es decir, borrando aristas.

Por ejemplo, vamos usar este método para calcular el polinomio cromático de $K_n \setminus e$, a partir del polinomio cromático del grafo completo K_n y de K_{n-1}. Por Corolario 4.10 sabemos que $P(K_n \setminus e, k) = P(K_n, k) + P(K_{n-1}, k)$. Como el polinomio cromático de un grafo completo de n vértices es conocido (Proposición 4.3), se obtiene fácilmente que

$$\begin{aligned}
P(K_n \setminus e, k) = & \\
&= k(k-1)\cdots(k-(n-1)) - k(k-1)\cdots(k-(n-2)) = \\
&= k(k-1)(k-2)\cdots(k-(n-2))(k-n) = \frac{k!(k-n)}{(k-n+1)!}
\end{aligned}$$

En este caso, al grafo $K_n \setminus e$ solo le faltaba una arista para ser el grafo completo K_n, por eso no se emplean más pasos para obtener la respuesta esperada. Sin embargo, si quisiéramos calcular el polinomio cromático del grafo $K_n \setminus \{e_1, e_2\}$, tan solo necesitaríamos un paso adicional, que sería el siguiente: $P(K_n \setminus \{e_1, e_2\}, k) = P(K_n \setminus e_1, k) + P((K_n \setminus e_1)//e_2, k)$. Es importante notar que $(K_n \setminus e_1)//e_2)$ es o bien $K_{n-1} \setminus e_1$ o bien K_{n-1} (dependiendo de si e_1 y e_2 tienen un extremo común o no), que es un grafo del que ya conocemos su polinomio cromático. Así que solo faltaría volver a realizar el procedimiento con $K_n \setminus e_1$, igual que hemos hecho antes.

Este algoritmo es exacto; nos permite calcular exactamente el polinomio cromático y por tanto el número cromático, pero su complejidad es exponencial: si lo aplicamos hacia arriba, para calcular el polinomio de un grafo al que le falten m aristas necesitamos 2^m pasos. Si lo aplicamos hacia abajo, para calcular el polinomio cromático de un grafo con m aristas necesitaremos del orden de 2^{m-n+1} pasos (porque necesitamos borrar o contraer ese número de aristas para garantizar que llegamos a un árbol, del cual conocemos el polinomio cromático).

"Greedy"

El algoritmo Greedy se emplea para colorear grafos. Es muy rápido pero no garantiza que la coloración sea con el número mínimo de colores.

Consiste en procesar los vértices de un grafo en un orden arbitrario, asignando a cada vértice el menor color posible (entendiendo que los colores en realidad son los números $\{1, ..., k\}$). En inglés, Greedy quiere decir *codicioso*. Este nombre hace referencia a que el algoritmo tiene como finalidad emplear el menor número de colores diferentes en la coloración, ya que siempre que es posible se colorea cada vértice con un color que ya se haya utilizado. Aunque las coloraciones Greedy son rápidas de obtener (en tiempo lineal), no siempre son las más óptimas, ya que a veces emplean más colores de los necesarios.

Evidentemente, diferentes ordenaciones en los vértices producirán diferentes coloraciones, así que la obtención de una coloración óptima mediante el algoritmo de Greedy dependerá del orden de vértices que se elija. Esto se aprecia bien en la Imagen 4.3. En la coloración de la izquierda, se alcanza una coloración óptima, en la que se usan solo los dos colores que son necesarios (ver Teorema 2.36). Sin embargo, en la coloración de la derecha, no se alcanza una coloración óptima porque se usan tres colores. Ambas coloraciones se han hecho siguiendo el algoritmo Greedy, lo único que cambia es la ordenación de los vértices, como se muestra en ambos grafos.

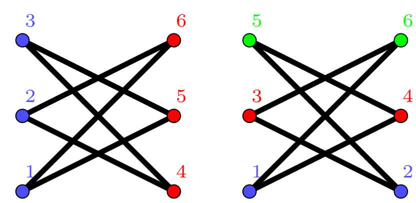

Figura 4.2: La ordenación de los vértices importa

Siempre existe una ordenación óptima de los vértices pero, en general, dicha ordenación suele ser complicada de encontrar. Para ello, muchas veces se emplean métodos heurísticos mediante los que se reduce el número de colores empleados, aunque no garanticen encontrar la coloración óptima. Por ejemplo, uno de ellos consiste en borrar del grafo el vértice de menor grado, ordenar recursivamente el grafo sin él, y después añadirlo colocándole en el último lugar de la ordenación. En inglés, este método de ordenación de vértices suele conocerse como *the smallest last ordering*. La filosofía detrás de este algoritmo es que si un vértice de grado grande se colorea hacia el final es muy probable que al colorear ese vértice tangamos muchos colores en sus vecinos, lo cual nos obliga a usar un color nuevo. Coloreando primero los vértices de grado grande disminuye la probabilidad de que eso suceda. El mayor grado de un vértice borrado se llama *degeneración* de un grafo y suele denotarse por la letra δ.

Proposición 4.18. *Sea G un grafo. Si se colorea el grafo mediante el método Greedy usando previamente la ordenación conocida como the smallest last ordering, entonces se emplearán como mucho $\delta + 1$ colores.*

Demostración. Cuando se colorea, cada vértice de G tendrá como máximo δ vecinos ya coloreados, así que uno de los $\delta+1$ colores estará libre para usarse. $\square$

El método Greedy con la ordenación de vértices mencionada es especialmente útil en algunos tipos de grafos. De hecho, este método es el que hemos usado implícitamente para calcular el polinomio cromático de un árbol.

El parámetro δ va a ser siempre menor o igual que el grado mayor de los vértices de G, al cual denotamos Δ. La Proposición 4.18 se cumple también, obviamente, si en vez de δ ponemos Δ. Cabría preguntarse en qué casos se da la igualdad, es decir, cuándo se necesitan exactamente $\Delta + 1$ colores para colorear un grafo. El Teorema de Brooks responde a esta pregunta. Antes de enunciarlo, se enuncian y demuestran dos lemas en los que nos apoyaremos para demostrar este teorema.

Lema 4.19. *Sea G conexo pero no completo. Entonces existen vértices u, v, w tales que las aristas uv y vw están en G, pero la arista uw no.*

Demostración. Si la distancia máxima de dos vértices cualesquiera de G fuera 1, entonces G sería completo. Así que la distancia máxima debe ser mayor o igual que 2. Sean u, v a distancia 2, y sea w un vecino en común. Entonces, las aristas uv y vw están en G, pero la arista uw no. □

Lema 4.20. *El número cromático de G es menor o igual que $\Delta + 1$ y, si G no es regular, menor que Δ.*

Demostración. Que $\Delta + 1$ colores son suficientes para cualquier grafo es obvio, con la misma demostración que en la Proposición 4.18.

Supongamos que G no es regular, es decir, tiene algún vértice v de grado menor que $\Delta(G)$. Entonces $G \setminus v$ tiene todos sus vértices de grado menor o igual que Δ y tiene al menos uno (cualquier vecino de v en G) de grado menor que Δ. Es decir, o bien el grado máximo de $G \setminus v$ es menor que Δ o bien es Δ pero en este caso $G \setminus v$ no es regular. En los dos casos, por hipótesis de inducción, $G \setminus v$ se puede colorear con Δ colores. Una vez hecho eso, como v tiene menos de Δ vecinos, podemos usar al menos uno de los Δ colores para v. □

Teorema 4.21 (Teorema de Brooks)**.** *Sea G un grafo conexo con grado máximo Δ. Entonces, el número cromático de G es como mucho Δ, excepto si G es completo o un ciclo impar.*

Demostración. Por el Lema 4.20 solo necesitamos considerar el caso de que G sea regular. Si es regular de grado dos (o menos) el resultado es trivial: el número cromático coincide con Δ excepto si G es un ciclo impar, para el cual $\Delta = 2$ y el número cromático es tres.

Para el resto de la demostración suponemos que G es regular de grado $\Delta \geq 3$. Sean u, v, w tres vértices como en el Lema 4.19, y distinguimos dos casos. Sea $G' = G \setminus \{u, w\}$.

- Si G' es conexo, construimos un árbol generador de G' y consideramos v como raíz. Ahora coloreamos G con Δ colores usando el algoritmo Greedy pero con el siguiente orden: primero coloreamos u y w dándoles el mismo color (lo podemos hacer porque no son vecinos) y luego coloreamos los vértices de G' empezando de abajo a arriba en el árbol. Con este orden, cuando coloreamos un vértice s distinto de v siempre hay algún vecino de s que aún no se ha coloreado. Eso garantiza que podemos colorear todos los vértices menos v con a lo sumo Δ colores, porque el número de vecinos ya coloreados es siempre menor o igual que $\Delta - 1$.

Cuando llegamos a v ya hemos coloreado todos sus Δ vecinos, pero como hemos usado el mismo color para u y w también tenemos asegurado que hay algún color libre.

- Si G' no es conexo, Sean G_1 y G_2 trozos en los que u y v descomponen a G, igual que los definimos en la demostración del Lema 3.27. Es decir, sea K_1 una componente conexa de G', sea $K_2 = G' \setminus K_1$ y sean $G_1 = G \setminus K_1$ y $G_2 = G \setminus K_2$.

  Vamos a demostrar que en estas condiciones G_1 y G_2 se pueden colorear con Δ colores de modo que o bien en las dos coloraciones u y w tengan el mismo color, o bien en las dos tengan distinto color. Eso nos permite pegar las dos coloraciones en una coloración de G con también Δ colores.

  Para demostrar la afirmación, sean G_1' y G_2' los grafos G_1 y G_2 junto con la arista uw. G_1' y G_2' siguen teniendo grado máximo a lo sumo Δ, porque a los vértices u y v les añadimos una arista pero le quitamos en G_1 los vecinos que tenían en G_2 y viceversa.

  G_1' y G_2' no pueden ser ciclos, porque G era regular de grado ≥ 3 y los vértices distintos de u y w tienen el mismo grado en G que en G_1' o G_2'. Tenemos dos posibilidades:

  - Si G_1' y G_2' no son completos, por hipótesis de inducción los podemos colorear con Δ colores. Como ambos contienen la arista uw, en ambas coloraciones los vértices u y w tienen distinto color.
  - Si uno de ellos, digamos G_1', es un grafo completo, tiene que ser el grafo completo con $\Delta+1$ vértices, porque los vértices de G_1' distintos de u y w no han cambiado su grado, y G era regular de grado Δ.

    Entonces, $G_1' \setminus uv$ es el grafo completo $K_{\Delta+1}$ menos una arista, el cual lo podemos colorear con Δ colores dando a u y w el mismo color.

    Por otro lado, u y w tienen un solo vecino en G_2, porque ya hemos usado $\Delta - 1$ vecinos de ellos en G_1. Como G_2 no es ni un ciclo ni un grafo completo, por hipótesis de inducción lo podemos colorear con Δ colores. Y como u y w tiene grado uno, podemos cambiar sus colores para que sean iguales, porque $\Delta \geq 3$. □

4.4. Grafos cromáticamente únicos

Ahora que hemos calculado los polinomios cromáticos de varios grafos y hemos visto algunas propiedades, cabría preguntarse si un polinomio cromático siempre determina unívocamente el grafo del que proviene. La respuesta a esta pregunta es no.

Por ejemplo, como se desprende de la Proposición 4.6 y su demostración, dos árboles diferentes pero con el mismo número de vértices, tendrán el mismo polinomio cromático. Sin embargo, en algunos casos, sí se puede saber el grafo conociendo el polinomio cromático. A este tipo de grafos se les llama *cromáticamente únicos*.

Definición 4.22 (Cromáticamente único)**.** *Se dice que un grafo G es **cromáticamente único** si no existe otro grafo distinto que tenga su mismo polinomio cromático.*

Por lo dicho anteriormente, los árboles no son cromáticamente únicos. A continuación, se probará que los grafos completos sí lo son.

Teorema 4.23. *Sea G un grafo con n vértices, y sea $k \geq n-1$. Entonces $P(G,k) \geq P(K_n,k)$, con igualdad si y solo si G es completo.*

Demostración. Por inducción sobre el número de vértices. Si G es completo no hay nada que demostrar, así que supongamos que no lo es. Entonces, algún vértice de G tiene grado menor que $n-1$. Sea v ese vértice y δ su grado. Coloreando v como último vértice tenemos que

$$P(G,k) \geq (k-\delta)P(G \setminus v,k) > (k-n+1)P(K_{n-1},k) = P(K_n,k),$$

donde:

- En la primera desigualdad usamos que después de colorear todo $G \setminus v$ nos quedan al menos $k-\delta$ colores para v.

- En la segunda usamos que $\delta < n-1$ y que (por hipótesis de inducción) $P(G \setminus v,k) \geq P(K_{n-1},k)$.

- En la tercera usamos la fórmula de $P(K_n,k)$ (ver Proposición 4.3).

□

Corolario 4.24. *Ningún grafo no completo tiene el mismo polinomio cromático del completo, es decir, K_n es un grafo cromáticamente único.*

Como se explicó antes, los árboles no son cromáticamente únicos, mientras que los grafos completos sí. Esto es debido a que existen muchos árboles con n vértices, pero solo existe un grafo completo de n vértices. Lo que sí puede afirmarse en el caso de los árboles, es que si sabemos que el polinomio cromático de un grafo simple de n vértices es de la forma $k(k-1)^{n-1}$, entonces ese grafo es un árbol (de los varios que hay) con n vértices. Aunque esta propiedad vale para cualquier grafo, nosotros la demostraremos solo para grafos conexos.

Teorema 4.25. *Sea G un grafo conexo con n vértices, y sea $k \geq n-1$. Entonces $P(G,k) \leq k(k-1)^{n-1}$, con igualdad si y solo si G es un árbol.*

Demostración. Por inducción sobre el número de aristas. La base de inducción es que el número de aristas sea $n-1$, que es lo mismo que decir que G es un árbol. En este caso el enunciado es obvio.

Ahora supongamos que G no es un árbol. Entonces, hay alguna arista e de G que forma parte de un ciclo, de modo que $G \setminus e$ sigue siendo conexo. Por hipótesis de inducción, $P(G \setminus e,k) \leq k(k-1)^{n-1}$. Por otro lado, la fórmula fundamental nos dice que

$$P(G,k) = P(G \setminus e,k) - P(G//e,k),$$

con lo cual lo único que falta es ver que $P(G//e, k)$ es mayor que cero. Pero $G//e$ es un grafo con solo $n-1$ vértices, así que su número cromático es como mucho $n-1$, y por tanto $P(G//e, k) > 0$ porque $k \geq n-1$.

$\square$

Corolario 4.26. *Ningún grafo conexo que no sea un árbol tiene el mismo polinomio cromático de un árbol.*

Bibliografía

[1] Colaboradores de Wikipedia. Graph coloring [y otras páginas]. Wikipedia, La enciclopedia libre, 2016 [consulta: septiembre 2024 a enero 2025]. Disponible en `https://en.wikipedia.org/wiki/Graph_coloring`

[2] Norman Biggs, *Algebraic Graph Theory (2a edición)*, Cambridge Univ. Press, 1993.

[3] Ralph P. Grimaldi, *Discrete and Combinatorial Mathematics: An applied introduction*, Addison-Wesley Publ. Co., 1989

[4] Bojan Mohar y Carsten Thomassen, *Graphs on surfaces*, Johns Hopkins Univ. Press, 2001.

[5] Eugenio Hernández, El Teorema de Euler. Apuntes para programa Estalmat, Univ. Autónoma de Madrid, `https://verso.mat.uam.es/~eugenio.hernandez/09-Chile-Estalmat/El%20Teorema%20de%20Euler.pdf`, accedido en octubre de 2024.

[6] Colaboradores de ProofWiki. Five Color Theorem. `https://proofwiki.org/wiki/Five_Color_Theorem`, accedido en octubre de 2024.