

Facultad
de
Ciencias

**Un formalismo matricial semi-relativista
para analizar problemas de física clásica
en mecánica y termodinámica**

(A semi-relativistic matrix formalism for analyzing classical
physics problems in mechanics and thermodynamics)

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al

GRADO EN FÍSICA

Autor: Jose Gaño Cuesta
Director: Julio Güémez Ledesma
Codirector: José Ángel Mier Maza
Febrero 2025

*Quiero manifestar mi más sincero agradecimiento
a mis tutores, Julio y José Ángel, por su paciencia,
orientación, dedicación y compromiso.*

A Silvia, por sus incansables horas de revisiones.

*A todos los que me han acompañado y ayudado
durante las interminables jornadas de estudio.*

*A mi familia y amigos por su inestimable apoyo
y siempre estar ahí. También a los que
hubieran querido estar y no pudieron.*

Índice

Índice	v
Resumen	VII
Abstract	VII
1 Introducción	1
2 Resolución clásica	3
2.1 Bloque sin rozamiento	3
2.1.1 Segunda Ley de Newton	3
2.1.2 SLN en forma diferencial	5
2.1.3 Formalismo Hamiltoniano-Lagrangiano	5
2.2 Bloque con rozamiento	7
2.2.1 Segunda ley de Newton	7
2.2.2 SLN en forma diferencial. Trabajo y pseudo-trabajo	8
2.2.3 Formalismo Hamiltoniano-Lagrangiano	9
2.2.4 Segunda y media ley de Newton	11
2.2.5 Primera ley de la termodinámica	12
2.2.6 Variación de entropía	16
2.3 Conclusiones	17
3 Formalismo matricial semi-relativista	19
3.1 Ecuación fundamental	19
3.1.1 Matriz estado mecánico-termodinámico	20
3.1.2 Matriz impulso-trabajo de F	21
3.1.3 Matriz impulso-trabajo de f_R . Agente externo	21
3.1.4 Matriz impulso-trabajo del peso y la normal	23
3.1.5 Matriz trabajo de configuración	23
3.1.6 Matriz calor	24
3.1.7 Ecuación fundamental para el bloque con rozamiento	24
3.2 Ecuación de la Entalpía	25
3.3 Ecuación del calor, entropía y trabajo recuperado	26
3.3.1 Proceso isoterma	26

3.3.2	Proceso adiabático	27
3.4	Transformación entre referenciales	28
3.4.1	Transformación de \mathbf{E}_f y \mathbf{E}_i	29
3.4.2	Transformación de \mathbf{W}_F	30
3.4.3	Transformación de \mathbf{W}_R . Efecto cinta transportadora	31
3.4.4	Transformación de \mathbf{W}_{cn} y Q	32
3.4.5	Ecuaciones entre referenciales	32
3.5	Conclusiones	34
4	Problemas adicionales	35
4.1	Choque inelástico Bola-Pared	35
4.1.1	Transformación general entre referenciales	37
4.1.2	Transformación para el referencial que viaja con el centro de masas	39
4.2	Fusión de una bala de plomo	40
4.2.1	Resolución con matrices entalpía	41
4.2.2	Variación de entropía del universo	43
4.2.3	Trabajo perdido y recuperado	43
4.2.4	Conclusiones	44
4.3	Proyectil lanzado en vertical	44
4.3.1	Variación de entropía. Trabajo perdido y recuperado	47
4.3.2	Cambio de referencial	48
4.3.3	Conclusiones	48
	Referencias	49

Resumen

Los problemas en física, a nivel de los primeros cursos de grado, se resuelven de manera incompleta debido a que la mecánica y la termodinámica se han tratado tradicionalmente como disciplinas separadas. Tomando como ejemplo el problema de un bloque movido por una fuerza, se ilustra la dificultad de integrar ambas cuando se presentan efectos disipativos.

Se utiliza el mismo ejemplo para introducir un formalismo matricial semi-relativista, simplificado a partir del formalismo en cuatrivectores de la relatividad especial. Este formalismo no solo unifica la mecánica y la termodinámica, permitiendo sistematizar la resolución de problemas que combinan ambas disciplinas, sino que también permite la obtención de resultados en distintos referenciales inerciales mediante una transformación equivalente en física clásica a la de Lorentz en relatividad.

Una vez presentado el formalismo, se aplica a la resolución de tres problemas adicionales.

Palabras clave: mecánica clásica, termodinámica, relatividad, cuatrivectores, formalismo, semi-relativista.

Abstract

Problems in physics, at the level of early undergraduate courses, are solved incompletely due to the traditional treatment of mechanics and thermodynamics as separate disciplines. Using the example of a block moved by a force, the difficulty of integrating both disciplines when dissipative effects are present is illustrated.

The same example is employed to introduce a semi-relativistic matrix formalism, simplified from the four-vector formalism of special relativity. This formalism not only unifies mechanics and thermodynamics, enabling a systematic approach to solving problems that involve both fields, but also allows for the derivation of results in different inertial reference frames through a transformation that is classically equivalent to the Lorentz transformation in relativity.

Once the formalism is established, it is applied to the solution of three additional problems.

Key words: classical mechanics, thermodynamics, relativity, four-vectors, formalism, semi-relativistic

INTRODUCCIÓN

La mecánica clásica, gracias a las contribuciones de científicos como Galileo, Newton o Kepler, ha sido extraordinariamente exitosa en la descripción de una amplia variedad de fenómenos, desde la trayectoria de un proyectil en la superficie terrestre hasta el movimiento de los planetas en el firmamento. Posteriormente, los avances matemáticos de Euler, Lagrange o Hamilton permitieron extender estos conceptos mediante el uso de coordenadas generalizadas, facilitando la descripción del movimiento de sistemas complejos, como el péndulo doble.

Por otro lado, el desarrollo de la máquina de vapor por científicos como Watt y la formulación de la equivalencia mecánica del calor por B. Thompson culminaron en los estudios de Carnot sobre las máquinas térmicas, marcando el inicio de la termodinámica como disciplina. Las contribuciones posteriores de Clausius, Joule y Kelvin consolidaron y completaron sus principios fundamentales.

Ambas disciplinas son altamente efectivas en la explicación de los fenómenos que les son propios, pero presentan limitaciones a la hora de integrarse. De hecho, es poco habitual que se busque su integración, se tratan como disciplinas estancas: en los problemas de mecánica no se consideran fenómenos térmicos, mientras que en los de termodinámica se asume que todos los elementos están en reposo. Esto se hace especialmente notorio en cuanto se intenta resolver un problema de mecánica que tenga algún tipo de efecto disipativo. Este hecho, por sí solo, constituye un argumento suficiente para afirmar que los problemas en física se resuelven de manera incompleta. Sin embargo, además de esto, con frecuencia se cometen errores en el planteamiento y en las aproximaciones de los problemas, derivados de carencias en el entendimiento de los conceptos fundamentales.^{1,2} Estos errores (en el sentido del término anglosajón *misconception*) pasan desapercibidos cuando se trata la mecánica de manera aislada; no es hasta que se intentan incorporar los fenómenos térmicos cuando se hacen evidentes y problemáticos.

El objetivo de este trabajo es, en primer lugar, mostrar que, si bien el tratamiento conjunto de la mecánica y la termodinámica es posible dentro del formalismo habitual, resulta complejo. En segundo lugar, se busca presentar un formalismo matricial semi-relativista que permite profundizar en los conceptos fundamentales de la física clásica, sistematizar el planteamiento de los problemas y expresar los resultados de manera clara e intuitiva. Este enfoque no es relevante únicamente por los resultados obtenidos, sino porque facilita significativamente la comprensión interdisciplinaria de los conceptos fundamentales en la física clásica.

El problema de un bloque movido por una fuerza servirá como hilo conductor entre los Caps. 2 y 3. En el Cap. 2, se compararán los casos con y sin rozamiento dentro del formalismo clásico, con el objetivo de destacar las dificultades que surgen al considerar fenómenos disipativos. En el Cap.

¹ B. J. Tefft, J. A. Tefft. *Galilean Relativity and the Work-Kinetic Energy Theorem*. The Physics Teacher **45**, 4, pp. 218-220. (2007).

² V. Voroshilov. *Response to "Galilean Relativity and the Work-Kinetic Energy Theorem"*. The Physics Teacher **45**, 6, pp. L1. (2008).

2 INTRODUCCIÓN

3 se empleará el caso con rozamiento para introducir el formalismo matricial semi-relativista y demostrar que conduce a los mismos resultados que el formalismo clásico. Además se verá cómo, mediante la transformación de Lorentz, aproximada en el límite de bajas velocidades, el formalismo permite determinar cómo cambian las ecuaciones entre referenciales inerciales. En el cuarto y último capítulo, una vez establecido el formalismo, este se aplicará a tres problemas adicionales que combinan tanto fenómenos mecánicos como térmicos.

2.1. Bloque sin rozamiento

Tal vez, el problema más sencillo que se puede plantear en física, es el de un bloque de masa m , movido por una fuerza F , paralela a la horizontal. Se asume que tanto la fuerza como la masa son constantes. El bloque se encuentra bajo la acción de la gravedad, entonces tiene un peso mg (siendo $g \approx 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, la aceleración de la gravedad) y descansa sobre una superficie horizontal con la que no tiene rozamiento. Se puede simplificar trabajando en dos dimensiones. Se escoge como sistema de referencia fijo, al referencial centrado en el bloque en el momento inicial $t_i = 0$. El eje x apunta en la dirección del movimiento, esto es, paralelo a la horizontal y el eje y en la dirección vertical, es decir, en la dirección de la gravedad, Fig. 2.1.

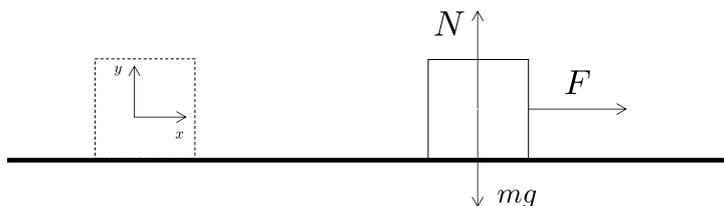


Figura 2.1: Representación esquemática del problema. Se puede ver la disposición de los ejes de coordenadas y las fuerzas que actúan sobre el bloque. En línea discontinua la posición del bloque a tiempo $t = 0$ y en línea continua la posición del bloque a tiempo $t = t_0$.

La fuerza F es una fuerza externa al bloque y conservativa, no es necesario considerar el origen de la misma, no es relevante si es de origen gravitatorio, electromagnético o una cuerda sometida a la tracción de un motor. El peso del bloque, mg , es la fuerza que le ejerce la Tierra por el hecho de tener masa, siguiendo la ley de gravitación universal. Al estar apoyado sobre una superficie, tiene que existir una fuerza de restricción que sea de la misma magnitud y opuesta al peso, esta es la normal $N = -mg$.

El problema queda planteado, se han definido cuáles son las constantes, tales como g , F , m , y cuál es la variable independiente que es el tiempo transcurrido t_0 . Finalmente se podría ya, nada más que aplicando la segunda ley de Newton, saber el movimiento del bloque en función de t_0 .

2.1.1. Segunda Ley de Newton

En primer lugar, se puede aplicar la segunda ley de Newton (a partir de ahora SLN) como lo haría un estudiante, ya no de primeros cursos del grado, si no pre-universitario. El primer argumento sería que, como se comentó previamente, la normal y el peso se “cancelan” y por

tanto no hay aceleración en la dirección vertical. Entonces se escribiría

$$F = ma \quad \implies \quad a = \frac{F}{m} \quad (2.1)$$

donde a es la aceleración del bloque en el eje x . Se puede despejar a en función de las dos constantes conocidas y proporcionadas en el planteamiento, F y m . Matemáticamente lo que se tiene en la Ec. (2.1) es una ecuación diferencial ordinaria (EDO) de segundo orden y coeficientes constantes. Es sabido que por definición $\dot{x} \equiv v$ y $\ddot{x} \equiv \dot{v} \equiv a$; entonces la EDO es

$$\ddot{x} - \frac{F}{m} = 0. \quad (2.2)$$

Como es de segundo orden se necesitan dos condiciones iniciales para que el problema tenga solución única. Estas dos condiciones iniciales son la posición inicial $x(t=0) = x_i$ y la velocidad inicial $\dot{x}(t=0) = v(t=0) = v_i$. Por tanto ahora se tienen dos nuevas constantes de las que depende el problema, además del tiempo transcurrido, t_0 .

Resolviendo la ecuación diferencial, nada más que calculando las primitivas respecto al tiempo, se obtienen, en el intervalo de tiempos $t = [0, t_0]$, la velocidad final en función de t_0 ,

$$v_f = v_i + at_0, \quad (2.3)$$

y la posición en función de t_0

$$x_f = x_i + v_it_0 + \frac{1}{2}at_0^2. \quad (2.4)$$

Esta es la forma típica de escribir las ecuaciones cinemáticas para un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado. Dado que F y m son constantes, la aceleración a puede expresarse como F/m . En este sentido, la Ec. (2.1) puede interpretarse como una relación entre constantes.

Si en la Ec. (2.4) se sustituye a por F/m y se despeja m se obtiene

$$m(v_f - v_i) = Ft_0. \quad (2.5)$$

De esta forma se ha obtenido algebraicamente la definición de impulso lineal I ; en el lado izquierdo se tiene la variación de momento lineal cuando la masa permanece constante y en el lado derecho el impulso lineal $I = Ft$. Se puede ver que el impulso tiene unidades de momento $Ft = [\text{N}\cdot\text{s} = \text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-2}\cdot\text{s} = \text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}]$.¹

Por el contrario, si ahora se despeja t_0 en la Ec. (2.4) y se sustituye en la Ec. (2.5) se obtiene

$$F(x_f - x_i) = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2). \quad (2.6)$$

Es lo que se conoce como la relación dinámica complementaria de la segunda ley de Newton (RDC-SLN), donde, en la parte izquierda, se tiene lo que erróneamente se interpreta como el trabajo realizado por la fuerza conservativa F y en la derecha, la variación de la energía cinética del bloque. Esta expresión se ha obtenido aplicando operaciones algebraicas a las Ecs. (2.4) y (2.5), por lo que son completamente equivalentes y todas ellas aportan la misma información que la SLN.

¹Para el análisis dimensional se han utilizado los símbolos de las unidades en el S.I en vez de los símbolos de las magnitudes. Es decir, N son Newtons, s son segundos, kg son kilogramos y m metros.

2.1.2. SLN en forma diferencial

Podría abordarse el problema de manera más formal planteando la SLN en forma diferencial. La fuerza F es igual a la variación del momento lineal con el tiempo, pero como m es constante, es igual a la variación de la velocidad. En forma integral:

$$mdv = Fdt. \quad (2.7)$$

Calculando sendas primitivas a ambos lados de la igualdad se tiene, teniendo en cuenta que el intervalo de tiempos es $[0, t_0]$,

$$m(v_f - v_i) = Ft_0, \quad (2.8)$$

que es la relación impulso-momento, con el mismo resultado que en la Ec. (2.5).

En cambio, si en vez de calcular la primitiva directamente en la Ec. (2.7) se multiplica por v a ambos lados se obtiene, de nuevo y por otro camino, la relación dinámica complementaria:

$$mvdv = Fvdt \quad (2.9)$$

Utilizando ahora que

$$v = \frac{dx}{dt} \implies vdt = dx. \quad (2.10)$$

Sustituyendo y calculando las primitivas

$$\int_{v_i}^{v_f} mvdv = \int_{x_i}^{x_f} Fdx. \quad (2.11)$$

Como F y m son constantes se obtiene

$$\frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2) = F(x_f - x_i) \quad (2.12)$$

que es, como se esperaba, la RDC-SLN con el mismo resultado que en la Ec. (2.6).

2.1.3. Formalismo Hamiltoniano-Lagrangiano

Para concluir la sección se va a realizar el estudio del problema del bloque sin rozamiento mediante la mecánica analítica.

Por definición de momento

$$p \equiv mv, \quad (2.13)$$

donde p es un escalar por ser la componente del momento en la dirección del eje x ; v también es un escalar por ser la componente de la velocidad en el eje x . Por definición de la energía cinética

$$K \equiv \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}, \quad (2.14)$$

que se reescribe en función del momento.

Ahora se está en condiciones de escribir el hamiltoniano, H , con un solo grado de libertad en función de x y p

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} - Fx. \quad (2.15)$$

Se ha usado que F es una fuerza conservativa, lo que quiere decir que deriva de un potencial mecánico. La fuerza conservativa es el menos gradiente del potencial, en este caso como se trabaja en una dimensión:

$$F = -\frac{dV}{dx}. \quad (2.16)$$

Reorganizando términos e integrando

$$dV = -Fdx = -\delta W \implies V(x) = -Fx = -W. \quad (2.17)$$

Si se sustituyen los resultados de las Ecs. (2.14) y (2.17) en la Ec. (2.15) se obtiene que el hamiltoniano es la suma de la energía cinética más la potencial,

$$H = K + V. \quad (2.18)$$

La primera ecuación de Hamilton es:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}, \quad (2.19)$$

donde, de nuevo, se recupera que $p = m\dot{x} = mv$; tal como se ha definido en la Ec. (2.13).

La segunda ecuación de Hamilton es

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad (2.20)$$

donde, si la masa es constante

$$\frac{d(mv)}{dt} = ma = F, \quad (2.21)$$

que es de nuevo la SLN como en la Ec. (2.1).

Por otro lado, el lagrangiano, L , en función de x y v se puede expresar como

$$L(x, v) = pv - H(x, v), \quad (2.22)$$

donde $H(x, v)$ es el hamiltoniano reescrito en función de x y v

$$H(x, v) = \frac{1}{2}mv^2 - Fx. \quad (2.23)$$

Entonces el lagrangiano queda

$$L(x, v) = mv^2 - H(x, v) = \frac{1}{2}mv^2 + Fx. \quad (2.24)$$

La ecuación Euler-Lagrange es:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad (2.25)$$

que si se calculan las derivadas parciales de L se obtiene

$$\frac{d}{dt} (mv) - F = 0, \quad (2.26)$$

que es de nuevo la segunda ley de Newton con el mismo resultado que en las Ecs. (2.1) y (2.21).

Todas estas operaciones parecen redundantes, y en cierta manera lo son. Nada más que se han verificado las ecuaciones de Hamilton y de Euler-Lagrange. Su interés se evidenciará más adelante cuando se aplique el mismo formalismo al problema del bloque con rozamiento y se compare lo allí obtenido con estos resultados.

2.2. Bloque con rozamiento

Se va a resolver ahora el mismo problema que en la Sec. 2.1 pero esta vez teniendo en cuenta la fuerza de rozamiento entre el bloque y la superficie horizontal. En la Fig. 2.2 se puede ver un diagrama del problema.

Esta fuerza de rozamiento es una fuerza fenomenológica del tipo Amontons-Coulomb. Los estudios de las fuerzas rozamiento de primero Amontons y luego Coulomb llevaron a la conclusión de que la fuerza de rozamiento f_R no depende del área de contacto ni de la velocidad de deslizamiento. Solo depende de la normal y es proporcional a esta por un factor μ_d , el coeficiente de rozamiento. Además se dirige en la misma dirección y sentido opuesto al movimiento del bloque:

$$f_R = \mu_d N \quad (2.27)$$

El subíndice “d” indica que es el coeficiente dinámico para distinguirlo del estático.

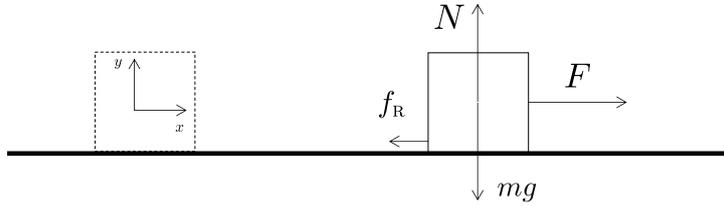


Figura 2.2: Esquema análogo al de la Fig. 2.1 pero añadiendo la fuerza de rozamiento, f_R .

2.2.1. Segunda ley de Newton

Ahora que aparecen dos fuerzas en el eje x , es necesario mencionar que no es solo una fuerza la que es proporcional a la aceleración, sino la suma de fuerzas, es decir, la fuerza neta F_N .

$$F_N = \sum_k F_k = ma, \quad (2.28)$$

En la SLN, tal como se expresa en la Ec. (2.1), no se menciona explícitamente la fuerza neta como la suma de las fuerzas aplicadas. Esto se debe al tratamiento de las fuerzas como vectores dentro del álgebra vectorial.

Se puede descomponer las fuerzas en las componentes x e y :

$$\begin{aligned} (F - f_R) &= ma, \\ N + mg &= 0 \implies N = -mg, \end{aligned} \quad (2.29)$$

obteniéndose nuevamente que la normal, N , es igual y de sentido opuesto al peso, mg .

Despejando la aceleración en el eje x , el valor que se obtiene es menor que en el problema sin rozamiento, F es constante con respecto a la sección anterior, pero ahora se le opone la fuerza de rozamiento. Por eso a la aceleración se le denota \tilde{a} para resaltar que ya no es la misma que antes.

$$(F - \mu_d mg) = m\tilde{a} \implies \tilde{a} = \frac{F - \mu_d mg}{m}, \quad (2.30)$$

Dicho esto, las ecuaciones cinemáticas son formalmente las mismas solo que ahora dependen de la nueva aceleración y por lo tanto, se obtienen unas nuevas velocidades y posiciones finales, \tilde{v}_f y \tilde{x}_f respectivamente.

$$\begin{aligned} \tilde{v}_f &= v_i + \tilde{a}t_0, \\ \tilde{x}_f &= x_i + v_i t_0 + \frac{1}{2} \tilde{a} t_0^2. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Las condiciones iniciales v_i y x_i también se mantienen fijas con respecto al problema anterior como se hizo con t_0 y F , por lo tanto, teniendo en cuenta que $\tilde{a} < a$

$$\tilde{x}_f < x_f \quad ; \quad \tilde{v}_f < v_f. \quad (2.32)$$

Se puede operar algebraicamente las ecuaciones en (2.31) como se hizo en la sección anterior y substituyendo allí donde aparezca F por $F_N = (F - \mu_d mg)$ se tiene:

$$m(\tilde{v}_f - v_i) = (F - \mu_d mg) t_0, \quad (2.33)$$

$$\frac{1}{2}m(\tilde{v}_f^2 - v_i^2) = (F - \mu_d mg)(\tilde{x}_f - x_i). \quad (2.34)$$

Formalmente se llega a unas expresiones análogas de relación impulso-momento, Ec. (2.33), y variación de la energía cinética, Ec. (2.34) a las que se obtuvieron en las Ecs. (2.5) y (2.6) respectivamente. A continuación, en el siguiente apartado, se verá que aunque esas ecuaciones son formalmente iguales, esconden una sutileza en la interpretación física que a menudo es ignorada o malinterpretada.

2.2.2. SLN en forma diferencial. Trabajo y pseudo-trabajo

Nuevamente se escribe la SLN en forma diferencial donde, esta vez, la fuerza es la fuerza neta resultante $F_N = F - \mu_d mg$:

$$m dv = (F - \mu_d mg) dt. \quad (2.35)$$

Como la fuerza resultante sigue siendo constante respecto al tiempo se puede calcular la primitiva a ambos lados:

$$m(\tilde{v}_f - v_i) = (F - \mu_d mg) t_0, \quad (2.36)$$

nuevamente se obtiene la relación impulso momento, pero esta vez con una velocidad final menor que en el bloque sin rozamiento $\tilde{v}_f < v_f$.

Se puede integrar la Ec. (2.35) multiplicando previamente por v a ambos lados, tal y como se hizo en la sección anterior en la Ec. (2.36), y así hallar la RDC-SLN.

$$m v dv = (F - \mu_d mg) v dt \quad (2.37)$$

$$\int_{v_i}^{\tilde{v}_f} m v dv = \int_{x_i}^{\tilde{x}_f} (F - \mu_d mg) dx. \quad (2.38)$$

La fuerza resultante no depende del tiempo, la integral es inmediata y el resultado es

$$\boxed{\frac{1}{2}m(\tilde{v}_f^2 - v_i^2) = (F - \mu_d mg)(\tilde{x}_f - x_i)}. \quad (2.39)$$

La posición y velocidad iniciales, por ser condiciones iniciales, permanecen constantes con respecto al problema del bloque sin rozamiento pero la velocidad y posición finales son distintas para un mismo intervalo de tiempo $[0, t_0]$.

Formalmente la ecuación obtenida, la RDC-SLN, es análoga a la Ec. (2.12) de la sección anterior. La variación de la energía cinética, igual a una fuerza por un desplazamiento, aunque menor, en cuanto a significado físico es igual que en el bloque sin rozamiento. Sin embargo, a la derecha de la igualdad, conceptualmente ambas ecuaciones no son iguales. Volviendo a escribir la Ec. (2.12)

$$\frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2) = F(x_f - x_i), \quad (2.40)$$

para compararla con la Ec. (2.39), que se puede reescribir como

$$\frac{1}{2}m(\tilde{v}_f^2 - v_i^2) = F(\tilde{x}_f - x_i) - (\mu_d mg)(\tilde{x}_f - x_i). \quad (2.41)$$

En la Ec. (2.12) se tiene el trabajo de la fuerza conservativa F . En cambio en la Ec. (2.39) lo que se tiene es pseudo-trabajo, donde la fuerza F por el desplazamiento $(\tilde{x}_f - x_i)$ sí es el trabajo de la fuerza F , pero el segundo sumando, $-(\mu_d mg)(\tilde{x}_f - x_i)$, no es trabajo, es pseudo-trabajo. Las fuerzas de rozamiento no realizan trabajo, su punto de aplicación no se desplaza y no se pueden obtener como el gradiente de un potencial mecánico.

Hay dos problemas con la interpretación de este fenómeno. El primer problema es que no se tiene clara la definición de trabajo y de pseudo-trabajo. El trabajo, W , es el producto de la fuerza por el **desplazamiento del punto de aplicación** de la misma. Siendo rigurosos habría que definirlo en forma integral tal que:

$$W = \int F dr, \quad (2.42)$$

donde F es una fuerza cualquiera y dr es el desplazamiento del punto de aplicación.

Por otro lado el pseudo-trabajo, W_{ps} , es el producto de la fuerza neta por el **desplazamiento del centro de masas** del cuerpo sobre el que actúa. Se puede expresar en forma integral como

$$W_{ps} = \int F dx_{cm}, \quad (2.43)$$

donde, de nuevo, F es una fuerza, pero esta vez dx_{cm} es el desplazamiento del centro de masas².

El segundo problema es que en muchas ocasiones el pseudo-trabajo³ se confunde con el verdadero trabajo (en ocasiones, para fuerzas conservativas, son iguales). Es decir, que el desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza, dr , es igual al desplazamiento del centro de masas, dx_{cm} . Esto sucede, por ejemplo, si se está trabajando con partículas puntuales donde ambos desplazamientos son iguales y por tanto nunca se hace distinción entre trabajo y pseudo-trabajo. De hecho en este mismo texto se ha comentado que en la Ec. (2.12) se tiene el trabajo de la fuerza conservativa, lo que no es correcto, se tiene el pseudo-trabajo. Lo que sucede es que para el bloque sin rozamiento el pseudo-trabajo de F coincide con su trabajo.

En la RDC-SLN, lo que se obtiene no es el trabajo de las fuerzas implicadas, si no el pseudo-trabajo, porque los desplazamientos que aparecen, $(x_f - x_i)$ son los desplazamientos de la relaciones cinemáticas y esos son los desplazamientos del centro de masas del cuerpo.

Para recalcar esto se va a estudiar el problema mediante el formalismo hamiltoniano y lagrangiano para compararlo con el bloque sin rozamiento.

2.2.3. Formalismo Hamiltoniano-Lagrangiano

Siguiendo la definición dada en la Ec. (2.15), el hamiltoniano para el bloque con rozamiento es

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} - Fx, \quad (2.44)$$

donde no hay ningún término donde aparezca f_R . Esto se debe a que el hamiltoniano por definición es $H = K - V$, donde K es la energía cinética y V es el potencial del cual derivan las

²Ambas definiciones se están haciendo en una única dimensión pero tomando magnitudes vectoriales se puede generalizar a n dimensiones.

³B. A. Sherwood. *Pseudowork and real work*. American Journal of Physics **51**, 7, pp. 597-602. (1983).

fuerzas conservativas que actúan sobre el bloque. Como la fuerza de rozamiento no derivada de ningún potencial mecánico, es una fuerza fenomenológica y que no realiza trabajo, entonces no aparece en la expresión.

Ahora la **primera ecuación de Hamilton** queda

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}, \quad (2.45)$$

donde nuevamente obtiene que el momento es $p = mv$, coincidiendo con su definición.

Sin embargo, si se escribe la **segunda ecuación de Hamilton**

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} \implies \frac{d(mv)}{dt} = F. \quad (2.46)$$

Asumiendo que la masa es constante y poniéndolo en forma integral

$$mdv = Fdt, \quad (2.47)$$

no se recupera la segunda ley de Newton tal y como se planteó el problema. Falta el sumando de f_R , como sí se tiene, por ejemplo, en la Ec. (2.35).

Por esta razón es necesario añadir *a posteriori* una función de disipación de Rayleigh, $D(x)$.

$$D(x) = -f_R x \quad (2.48)$$

Se puede reescribir la Ec. (2.46) en lo que se puede llamar la **segunda ecuación de Hamilton-Rayleigh**.

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial D(x)}{\partial x}. \quad (2.49)$$

Esta vez la ecuación del movimiento sí se corresponde con la segunda ley de Newton planteada en la Ec. (2.35)

$$\frac{d(mv)}{dt} = F - f_R \implies mdv = (F - f_R)dt. \quad (2.50)$$

Por otro lado, el lagrangiano permanece igual que en el problema del bloque sin rozamiento. Teniendo en cuenta que en la sección anterior se definió el lagrangiano como $L(x, v) = pv - H(x, v)$.

$$L(x, v) = \frac{1}{2}mv^2 + Fx \quad (2.51)$$

Entonces si en la Ec. (2.44) no aparecía f_R , aquí tampoco.

Ahora bien, en el momento de escribir la ecuación de **Euler-Lagrange** hay que incluir la función de disipación de Rayleigh $D(x) = -f_R x$. Entonces queda:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{dD(x)}{dx}. \quad (2.52)$$

Ahora sí se obtiene la segunda ley de Newton

$$\frac{d}{dt}(mv) - F = -f_R \quad ; \quad \frac{d}{dt}(mv) = F - \mu_d mg, \quad (2.53)$$

que reescrita en forma integral, se corresponde con la Ec. (2.44):

$$mdv = (F - \mu_d mg)dt \quad (2.54)$$

Se llega a la conclusión de que no se cumple el principio de mínima acción. La acción se define como:

$$\mathcal{S} = \int_{t_i}^{t_f} L(x, v, t) dt = \int_{t_i}^{t_f} (K - V) dt = \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{1}{2} m v^2 - Fx \right) dt. \quad (2.55)$$

Esta circunstancia puede generar confusión, ya que el principio de mínima acción no establece que la integral \mathcal{S} sea igual a cero, sino que su valor debe ser mínimo. Haciendo el desarrollo pertinente⁴, en el que no se va a profundizar porque se aleja de los objetivos de este texto, se llega a:

$$\Delta \mathcal{S} = \int_{t_i}^{t_f} \left(-m \frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{dV}{dx} \right) \varepsilon dt = 0. \quad (2.56)$$

La variación de \mathcal{S} debe anularse para cualquier valor de ε , siendo ε una función de t . Por tanto, el término $-m \frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{dV}{dx}$ debe ser nulo, lo que es equivalente a la ecuación de Euler-Lagrange en ausencia de la función de disipación de Rayleigh.

Para el bloque sin rozamiento sí se cumple el principio de mínima acción, sustituyendo la aceleración a por la SLN en la Ec. (2.1), $a = F/m$:

$$\Delta \mathcal{S}_{\text{sin}} \approx \left(-m \frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{dV}{dx} \right) = ma - F = F - F = 0 \quad (2.57)$$

En cambio, para el bloque con rozamiento, sustituyendo \tilde{a} por la SLN en Ec. (2.30), $\tilde{a} = (F - f_R)/m$:

$$\Delta \mathcal{S}_{\text{con}} \approx \left(-m \frac{d^2 \tilde{x}}{dt^2} - \frac{dV}{d\tilde{x}} \right) = m\tilde{a} - F = (F - f_R) - F = f_R \neq 0 \quad (2.58)$$

Este resultado es incompatible con el principio fundamental del formalismo Hamiltoniano-Lagrangiano. La presencia de fuerzas disipativas implica que cualquier formulación que no incorpore los principios de la termodinámica resulta insuficiente para describir el problema de manera completa.

2.2.4. Segunda y media ley de Newton

Antes de entrar, en lo que muchos considerarán el pantanoso terreno de la termodinámica, es preciso introducir un concepto poco conocido y que hasta ahora se ha pasado por alto. Esto es lo que algunos autores denotan como la segunda y media ley de Newton⁵ (a partir de ahora SyMLN). La SLN solo aplica a masas puntuales y no a cuerpos extensos, aunque así se haya hecho en este texto hasta este momento. Siendo rigurosos toda la parte de mecánica, tal como se ha resuelto, no está conceptualmente bien planteada.

Lo que dice la SyMLN es que la aceleración asociada a las fuerzas externas sobre un cuerpo extenso es la aceleración de su centro de masas:

$$F_N = \sum_i F_i^{\text{ext}} = M a_{\text{CM}} = \frac{dp_{\text{CM}}}{dt}, \quad (2.59)$$

donde se ha escrito la masa, M en mayúscula para recalcar que se trata de la masa de un cuerpo extenso que se puede expresar como $M = \int dm$.

A este resultado se puede llegar como consecuencia de la tercera ley de Newton junto con la segunda. Se puede pensar que un cuerpo extenso está formado por un gran número de diferenciales de masa dm , que sí se pueden tratar cada uno de ellos como masas puntuales. Esas masas

⁴ J. . R. Morones Ibarra. *El principio de mínima acción*. Ingenierías **27**, 97, pp. 53-67. (2024).

⁵ S. Mahajan. *A student's guide to Newton's laws of motion*. Cambridge University Press, 2020. pp 141-143.

puntuales van a interactuar entre sí por medio de fuerzas internas, que por la tercera ley de Newton se anulan a pares. Si, con ayuda del álgebra vectorial, se realiza la suma de todas la fuerzas internas más la fuerza neta externa tendrá como resultado la misma fuerza externa, pero actuando sobre el centro de masas. Visto de otra forma, se podría sustituir el cuerpo extenso por una masa puntual de masa igual a la del cuerpo, colocada en su centro de masas. Esto no pretende ser una demostración rigurosa, si no más bien dar una justificación intuitiva de la SyMLN. La ventaja de esta ecuación es que se cumple para todos los cuerpos extensos, no solo para el sólido rígido.

Nuevamente se puede escribir en forma integral, asumiendo que la masa es constante y volviéndola a escribir como m , puesto que se trata de la masa del bloque del problema.

$$m dv_{\text{CM}} = \sum_k F_k^{\text{ext}} dt. \quad (2.60)$$

Multiplicando por v_{CM} a ambos lados y usando que $v_{\text{CM}} dt = dx_{\text{CM}}$.

$$m v_{\text{CM}} dv_{\text{CM}} = \sum_k F_k^{\text{ext}} dx_{\text{CM}} \quad (2.61)$$

Teniendo en cuenta las definiciones dadas en las Ecs. (2.42) y (2.43), se puede ver más claramente aún que la parte derecha de la igualdad corresponde al pseudo-trabajo de las fuerzas externas. Con las leyes de Newton solo se obtiene el pseudo-trabajo, que corresponde a la variación de la energía cinética del centro de masas del bloque, K_{CM} .

$$\Delta K_{\text{CM}} = \frac{1}{2} m (v_{f|\text{CM}}^2 - v_{i|\text{CM}}^2). \quad (2.62)$$

La conclusión a la que se llega con estos resultados, es que todos los desplazamientos, velocidades y aceleraciones de los que se ha estado hablando hasta el momento, son los del centro de masas del bloque. Es una sutileza a menudo pasada por alto, pero que esconde un profundo significado físico.

2.2.5. Primera ley de la termodinámica

En la Sec. 2.2.3 se obtuvo que para el bloque con rozamiento no se cumple el principio de conservación de la energía de Hamilton. Esto es porque es indispensable tener en cuenta los efectos térmicos, ya que hay un proceso de disipación de energía.

En un proceso adiabático en el que el sistema pasa de un estado inicial, U_i , a un estado final, U_f , el trabajo adiabático realizado, W_{ad} , no depende del camino seguido. Esto es equivalente a enunciar el principio del trabajo adiabático de Carathéodory:

$$W_{\text{ad}|i \rightarrow f} = U_f - U_i \quad (2.63)$$

Esto implica la existencia de una función de estado, U , cuya diferencia entre dos estados es igual a la variación de la energía interna. Esta función puede depender de diversas variables termodinámicas, en nuestro caso de la temperatura del bloque, T , del volumen del bloque, V , y la presión externa, P . Como existe además una ecuación térmica de estado que las relaciona, una vez fijadas dos ellas la tercera queda también determinada. Si se quiere saber la variación de una cantidad infinitesimal de la energía interna, dU , se puede poner en función de T y V

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV, \quad (2.64)$$

o de T y P

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_P dT + \left(\frac{\partial U}{\partial P} \right)_T dP. \quad (2.65)$$

La energía interna es una diferencial exacta.

La igualdad entre el trabajo y la variación de la energía interna como se escribe en la Ec. (2.63), en la mayoría de experiencias reales no se cumple. No queda más remedio que asumir que ha habido una transferencia de energía distinta al trabajo. Esto es lo que se denomina calor⁶, Q , que se puede definir como la energía transferida por medios no mecánicos, sin contribución al momento lineal total, y es igual a la diferencia entre la variación de la energía interna y el trabajo realizado, siempre y cuando haya una diferencia de temperatura entre el sistema y su entorno.

$$Q = U_f - U_i - W \quad (2.66)$$

Con esto se llega a la formulación físico-matemática de la primera ley de la termodinámica (a partir de ahora PLT),

$$\Delta U = W + Q, \quad (2.67)$$

donde se toma el convenio de que Q es positivo cuando entra en el sistema y negativo cuando sale, lo mismo que W que es positivo cuando lo realiza el entorno y negativo cuando lo realiza el sistema. Para un proceso infinitesimal se expresa como,

$$dU = \delta W + \delta Q, \quad (2.68)$$

donde W y Q toman diferenciales inexactas porque son función de proceso, al contrario que con el trabajo adiabático, el trabajo y el calor puestos en juego depende del camino seguido, no de los estados inicial y final. Dicho de otra forma, se puede llegar a un mismo estado final mediante procesos no adiabáticos distintos, $\Delta U = \Delta U'$ pero $W \neq W'$ y $Q \neq Q'$.

Una vez presentada la PLT y teniendo definido el calor se puede escribir la ecuación para la energía total, sumando la energía interna más la energía cinética del centro de masas.⁷

$$\Delta K_{\text{CM}} + \Delta U = W + Q \quad (2.69)$$

En el término del trabajo, W , hay que incluir todos los trabajos que se realizan sobre el sistema (y los que realiza el sistema), pero solo los trabajos reales no los pseudo-trabajos. Hasta ahora nada más que se ha hablado de la fuerza conservativa F , la fuerza de rozamiento f_R y la normal. De todas esas fuerzas la única que realiza trabajo es la fuerza conservativa F , la fuerza normal es perpendicular al desplazamiento entonces no realiza trabajo y ya se ha discutido antes que la fuerza de rozamiento no realiza trabajo puesto que su punto de aplicación no se desplaza.⁸

Ahora bien, también hay que incluir los trabajos de configuración. En ningún momento se ha planteado siquiera la opción de que el bloque interactúe con la atmósfera, si se quisiera realizar un experimento para comprobar los resultados teóricos no cabe duda que lo más fácil sería realizarlo en la Tierra y que sería mucho más sencillo realizarlo a presión atmosférica antes que en el vacío. Se puede justificar que las velocidades son lo suficientemente bajas como para que la fuerza de rozamiento con el aire sea mucho menor que la fuerza de rozamiento con la normal. Si fuera necesario se podría añadir un término de fuerza de rozamiento con el aire dependiente de la velocidad, pero para los puntos que se quieren tratar en este texto es innecesario y solo haría las cosas más engorrosas. Sí que hay que tener en cuenta la dilatación del bloque al aumentar

⁶ M. W. Zemansky, R. H. Dittman. *Calor y Termodinámica*. Ed. 6. McGraw-Hill, 1988. p. 79.

⁷ H. Erlichson. *Internal energy in the first law of thermodynamics* **52**, 7, pp. 623-625.

⁸ B. A. Sherwood, W. H. Bernard. *Work and heat transfer in the presence of sliding friction*. American Journal of Physics **52**, 11, pp. 1001-1007. (1984).

su temperatura. Esa dilatación es en contra de la presión atmosférica que se puede asumir constante, $P \approx 10^5$ Pa.

La ecuación de la energía para el problema del bloque con rozamiento escrito en forma diferencial es

$$dK_{\text{CM}} + dU = -PdV + Fdx + \delta Q. \quad (2.70)$$

Hay que destacar que el desplazamiento diferencial, dx , que multiplica a F es el desplazamiento de la fuerza, por lo tanto es el trabajo de F , y para este problema concreto coincide con el desplazamiento del centro de masas del bloque.

Esta ecuación no es muy útil tal y como está escrita. No tiene sentido dejarla en función de variables que no se van a poder medir o que no se van a querer medir como son la energía interna, U , o el volumen del bloque, V . Sería interesante reescribir la ecuación en función de variables que sí se puedan medir fácilmente, como la temperatura. La temperatura se podría medir con un termómetro acoplado al bloque o a distancia con un termómetro de infrarrojos.

Lo primero que se va a hacer es reescribir dU . Teniendo en cuenta la Ec.(2.64), donde aparece dU en función de T y V y con la PLT se tiene

$$\delta Q = dU + PdV. \quad (2.71)$$

Dividiendo por dT a ambos lados de la igualdad

$$\frac{\delta Q}{dT} = \frac{dU}{dT} + P \frac{dV}{dT}. \quad (2.72)$$

Si se asume un proceso a volumen constante entonces $\frac{dV}{dT} = 0$ y las derivadas anteriores se convierten en derivadas parciales a volumen constante. Por la definición de la capacidad calorífica a volumen constante ⁹

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = \left(\frac{\delta Q}{dT} \right)_V \equiv C_V. \quad (2.73)$$

Entonces la Ec. (2.65) queda como

$$dU = C_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV. \quad (2.74)$$

Nuevamente se puede escribir la PLT pero esta vez despejando dU y escribiendo el calor como $\delta Q = TdS$ por la definición de Clausius de la entropía. Derivando respecto de V a ambos lados.

$$\frac{dU}{dV} = T \frac{dS}{dV} - P \frac{dV}{dV} \quad \implies \quad \frac{dU}{dV} = T \frac{dS}{dV} - P \quad (2.75)$$

Si T permanece constante se convierte en derivadas parciales a temperatura constante

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = T \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T - P. \quad (2.76)$$

Utilizando la relación de Maxwell⁹, $\left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$, proveniente de la energía libre de Helmholtz, se podría dejar en función del coeficiente piezotérmico, dado que por definición $\beta P = \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$, pero va a ser más útil dejarlo en función del coeficiente de dilatación cúbica, α , y el coeficiente de compresibilidad isoterma, k_T , puesto que su cociente es:

$$\frac{\alpha}{k_T} = \frac{V^{-1} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P}{V^{-1} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T} = \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V. \quad (2.77)$$

⁹ M. W. Zemansky, R. H. Dittman. *Calor y Termodinámica*. Ed. 6. McGraw-Hill, 1988. pp. 89, 236.

Así que, finalmente, el diferencial de energía interna se puede expresar como

$$dU = C_V dT + \left[T \frac{\alpha}{k_T} - P \right] dV. \quad (2.78)$$

Ya se está en condiciones de sustituir La Ec. (2.78) en la Ec. (2.70)

$$dK_{\text{CM}} + C_V dT + \left[T \frac{\alpha}{k_T} - P \right] dV = F dx - P dV + \delta Q. \quad (2.79)$$

El término de $-P dV$ de la izquierda de la igualdad se anula con el de la derecha y entonces

$$dK_{\text{CM}} + C_V dT + T \frac{\alpha}{k_T} dV = F dx + \delta Q. \quad (2.80)$$

Ahora, si se asume que el coeficiente de dilatación cúbica prácticamente no varía con la temperatura y usando las derivadas parciales como diferenciales en aproximación lineal se puede escribir

$$dV = V \alpha dT, \quad (2.81)$$

Por lo tanto

$$dK_{\text{CM}} + \left[C_V + T \frac{\alpha}{k_T} V \alpha \right] dT = F dx + \delta Q \quad (2.82)$$

y utilizando la relación de Mayer generalizada, $C_P = C_V + \frac{T \alpha^2 V}{k_T}$ se obtiene la expresión

$$dK_{\text{CM}} + C_P dT = F dx + Q. \quad (2.83)$$

Ya se tiene la ecuación de la PLT en función de la variable que se quiere medir que es la temperatura. Cabe destacar que el sumando $C_P dT$ es la entalpía para todo proceso a presión constante, $dH = C_P dT$. Esto se discutirá más adelante, cuando la entalpía sea la variable con la que trabajar.

Ya se puede realizar la integración obteniendo la PLT para el bloque con rozamiento.

$$\boxed{\frac{1}{2} m (\tilde{v}_f^2 - v_i^2) + m c_P (T_f - T_i) = F (\tilde{x}_f - x_i) + Q}, \quad (2.84)$$

en función de las variables medibles como son la velocidad final, \tilde{v}_f , el desplazamiento de la fuerza conservativa, \tilde{x}_f y la temperatura final e inicial, T_f y T_i respectivamente. Se ha sustituido la capacidad calorífica a presión constante, C_P , por el calor específico, c_P , mediante la relación $C_P = m c_P$. Es evidente que previamente se tienen que conocer las constantes μ_d , c_P y m y que la fuerza conservativa F es una variable controlada.

Con la PLT junto con la RDC-SLN, como se obtuvo en la Ec. (2.39), ya se tiene completa la información del proceso. Antes de continuar obteniendo la ecuación del calor es conveniente insistir nuevamente en que los desplazamientos que aparecen en la PLT y la RDC-SLN, aunque en este caso coincidan, en general no son los mismos. Para ilustrarlo se van a reescribir ambas ecuaciones pero cambiando la notación, para hacerla más clara.

Como ya se ha discutido antes, los desplazamientos que aparecen en la RDC-SLN son los desplazamientos de las ecuaciones cinemáticas, y esos son los desplazamientos del centro de masas del bloque. Es decir, $\tilde{x}_f - x_i = \Delta x_{\text{CM}}$. Entonces la RDC-SLN queda:

$$\boxed{\frac{1}{2} m (\tilde{v}_{f|\text{CM}}^2 - v_{i|\text{CM}}^2) = (F - f_{\text{R}}) \Delta x_{\text{CM}}}. \quad (2.85)$$

Los términos de la derecha de la igualdad son pseudo-trabajos, no trabajos reales.

Por otro lado, los desplazamientos en la PLT son los desplazamientos del punto de aplicación de las fuerzas. Como la única fuerza que aparece es F , se puede escribir como $\tilde{x}_f - x_i = \Delta x_F$ y la PLT queda como

$$\boxed{\frac{1}{2}m(\tilde{v}_f|_{\text{CM}}^2 - v_i|_{\text{CM}}^2) + mc_P(T_f - T_i) = F\Delta x_F + Q} \quad (2.86)$$

Para este problema el desplazamiento de la fuerza F coincide con el desplazamiento del centro de masas, es decir, $\Delta x_F = \Delta x_{\text{CM}}$. El pseudo-trabajo de F en la Ec. (2.85) coincide con el trabajo de F en la Ec. (2.86) y se pueden restar ambas ecuaciones obteniendo la ecuación del calor

$$mc_P(T_f - T_i) = f_R\Delta x_{\text{CM}} + Q, \quad (2.87)$$

donde ya no aparece la energía cinética del centro de masas ni el trabajo/pseudo-trabajo de F .

Despejando se obtiene que el calor es la diferencia entre la energía térmica del bloque y el pseudo-trabajo de la fuerza de rozamiento. La fuerza de rozamiento no realiza trabajo, si no que disipa energía en forma de calor al entorno o aumentando la temperatura del bloque.

2.2.6. Variación de entropía

Se pueden calcular las variaciones de entropía comprobando que, efectivamente, se trata de un proceso irreversible donde la variación de entropía del universo siempre es positiva.

$$\Delta S_U \geq 0. \quad (2.88)$$

Para este proceso se asume que inicialmente el bloque y su entorno están en equilibrio termodinámico. También se asume que el entorno actúa como un foco térmico, donde cualquier transferencia de calor no varía su temperatura.

La variación de entropía del universo es la suma de la variación de entropía del bloque, ΔS , más la variación de entropía del foco térmico, ΔS_F :

$$\Delta S_u = \Delta S + \Delta S_F. \quad (2.89)$$

En primera instancia, se podrían calcular las variaciones de entropía aplicando directamente la definición de Clausius,

$$dS = \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T}, \quad (2.90)$$

y sustituyendo el calor por la expresión obtenida en la ecuación del calor, Ec. (2.87). Pero eso no sería correcto porque el calor que aparece en la definición de Clausius es el calor en un proceso reversible, Q_{rev} . El problema del bloque con rozamiento es un proceso irreversible, ya se ha visto que se disipa energía mecánica en formas de energía no aprovechables para la realización de trabajo, no se puede aplicar esta definición.

Sin embargo, puesto que la entropía es función de estado, se puede asumir que se tiene un proceso reversible desconocido, equivalente al proceso irreversible real. Entonces la variación de entropía se puede calcular como

$$\Delta S = \int \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_P dT. \quad (2.91)$$

Se puede sustituir por la capacidad calorífica a presión constante, teniendo en cuenta su definición y la relación entre calor y entropía $TdS = \delta Q$.

$$C_P \equiv \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_P = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_P \implies \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_P = \frac{mc_P}{T} \quad (2.92)$$

Así que variación de entropía del bloque es

$$\Delta S = \int_{T_i}^{T_f} \frac{mc_P}{T} dT = mc_P \ln \frac{T_f}{T_i}. \quad (2.93)$$

Como las propiedades termodinámicas del foco térmico no varían, todo el calor que entra y sale visto desde el foco es reversible. Entonces sí se puede aplicar la definición de Clausius, Ec. (2.90). Puesto que se parte del equilibrio el calor siempre va del bloque hacia el foco, $Q < 0$, así que el calor visto desde el foco es $Q_F = -Q > 0$. Entonces la variación de entropía del foco térmico para el proceso es

$$\Delta S_F = \frac{Q_F}{T_F} > 0. \quad (2.94)$$

La variación de entropía del universo es

$$\Delta S_U = mc_P \ln \frac{T_f}{T_i} + \frac{Q_F}{T_F} \geq 0, \quad (2.95)$$

donde $T_i = T_F$ por partir del equilibrio. Esta es la expresión general para la variación de entropía, por concisión se deja para el capítulo siguiente la discusión de los casos particulares del proceso adiabático e isoterma.

2.3. Conclusiones

Los problemas planteados son equivalentes al problema de un bloque descendiendo por un plano inclinado, solo habría que cambiar la definición de F y escribirlo como la componente del peso en función del ángulo de inclinación del plano (es decir que solo actúa la fuerza de la gravedad siendo $\mathbf{F}_G = mg \sin \theta \mathbf{u}_x + mg \cos \theta \mathbf{u}_y$). Este, probablemente, sea el problema más básico de la física, el primer problema que se enseña en los cursos pre-universitarios cuando se explican los conceptos elementales como el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, las leyes de Newton o el principio de conservación de la energía.

No es de extrañar que la primera vez que se presenta el problema se resuelva mal, o al menos de forma incompleta, lo preocupante es que nunca se resuelve bien. Sin ir más lejos, en este mismo capítulo, tal y como se ha planteado, se viola el principio de conservación del momento lineal en un sistema aislado. Se asume que el plano sobre el que desliza el bloque es inamovible, que se suele justificar diciendo que tiene masa infinita, algo que no existe en la naturaleza. Igual se usa un argumento más elaborado como que la masa del plano es mucho mayor que la masa del bloque y por tanto la aceleración del plano es prácticamente nula. Es indiferente, ambos argumentos no cumplen con la conservación del momento lineal de la segunda ley de Newton. Esto se discutirá en profundidad más adelante en el momento que sea oportuno introducir el concepto de agente externo.

Cuando se presenta el problema del plano inclinado con rozamiento siempre se resuelve nada más que la parte cinemática, rara vez se hace el balance de energías. Hay veces que incluso se despacha el asunto diciendo que no se cumple el principio de conservación de la energía, lo que hemos visto que es completamente falso, o quizá alguna vez se menciona el calor, pero ni mucho menos se aplican las leyes de la termodinámica. El mundo de la mecánica es uno y el de la termodinámica es otro, dos mundos diferentes y completamente separados. En los problemas de mecánica nunca se plantea la pregunta de qué pasa con las propiedades termodinámicas, qué pasa con la temperatura o el calor. Lo mismo pasa con los problemas de termodinámica, nunca se plantea la pregunta de qué pasa con la posición o velocidad del centro de masas del sistema.

Nunca se plantea resolver el problema en otros referenciales. Es decir, se ha escogido un referencial inercial a conveniencia para resolverlo pero, ¿no deberían ser todos los referenciales inerciales equivalentes? ¿Qué es lo que vería un observador que se mueve con velocidad uniforme con respecto al experimento? En principio la física tendría que ser la misma. Se podría asumir que se transforma entre referenciales inerciales como la transformación de Galileo, siempre que esté en el límite clásico con velocidades relativas pequeñas. Con el formalismo habitual no es muy evidente como hacer esto, y aunque se puede, se ha preferido no discutirlo en este capítulo y dejarlo para el siguiente donde se obtendrá una transformación entre observadores de forma más fundamentada, mejor ordenada y presentada.

FORMALISMO MATRICIAL SEMI-RELATIVISTA

Como se ha visto en el capítulo anterior no es sencillo relacionar la mecánica y la termodinámica. Un problema aparentemente simple como el de un bloque movido por una fuerza se puede complicar rápidamente si se añade una fuerza disipativa, especialmente si se busca analizarlo de manera completa. A continuación se va a presentar un formalismo que pretende unificar la mecánica y la termodinámica, con la intención de llegar a los resultados de forma más intuitiva y sistematizar el planteamiento de diferentes problemas.

Se trata de un formalismo semi-relativista en el que se utilizan vectores que son herencia directa de los cuadvectores¹ de la relatividad especial. La intención es simplificarlos lo máximo posible de tal forma que no sea tan intimidante para alguien que se adentra en la materia por primera vez. Se van a dejar los elementos esenciales para que se puede aplicar la transformación de Lorentz mediante una matriz de cambio de base.

Para este formalismo los vectores se van a tratar, a efectos prácticos, como si fueran matrices de una columna. Para diferenciar las matrices del formalismo simplificado de los cuadvectores relativistas se ha optado por eliminar el superíndice en letra griega y denotar las matrices con letra recta (en roman) en vez de cursiva. Es preferible hablar de matrices y no de vectores, ya que las nuevas matrices simplificadas no conservan varias propiedades de los vectores, como por ejemplo el producto o la norma.

En vez de introducirlo de forma general, se utilizará como ejemplo el problema del bloque con rozamiento.

3.1. Ecuación fundamental

En este capítulo se va a proseguir de forma opuesta a como se hizo en el capítulo anterior, se partirá de la ecuación fundamental a modo de *ansatz*. A partir de la ecuación fundamental se obtendrán los mismos resultados que en el capítulo anterior, lo que dará validez a la hipótesis inicial.

La ecuación fundamental en forma diferencial es

$$dE = \sum_k \delta W_k + \delta Q, \quad (3.1)$$

y en forma ya integrada

$$E_f - E_i = \sum_k W_k + Q. \quad (3.2)$$

¹ J. Güémez. *Teoría especial de la relatividad. Mecánica y termodinámica*. Ed. Universidad de Cantabria, 2019.

En la Ec. (3.2), E es la matriz estado mecánico-termodinámico, W es la matriz impulso-lineal—trabajo y Q es la matriz calor. A continuación se va a explicar qué es cada matriz utilizando como ejemplo el problema del bloque con rozamiento.

Antes de empezar es necesario recalcar la diferencia entre referencial y sistema. A lo que generalmente se le llama sistema de referencia se le va a llamar referencial, para evitar confusiones con el sistema, que es el objeto que se desea estudiar. En el planteamiento del problema hay que especificar cuál es el referencial escogido; cuál es el sistema de estudio y cuál el entorno. El referencial tiene que ser inercial, para no tener que tratar con fuerzas ficticias.

Para el bloque con rozamiento se escoge el referencial fijo, S , en la posición inicial del bloque, igual que en la resolución clásica del capítulo anterior. Como sistema se escoge el bloque, tal como se hizo en la resolución clásica pero que no se especificó explícitamente. El diagrama del planteamiento, por lo pronto, es igual que el diagrama en Fig. 2.2.

3.1.1. Matriz estado mecánico-termodinámico

En general esta matriz tiene cuatro componentes, las tres primeras pertenecen a las componentes espaciales y la última componente para la energía:

$$E_f = \begin{pmatrix} cp_{f|x} \\ cp_{f|y} \\ cp_{f|z} \\ E_f \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Nótese que la matriz, E_f , se denota con letra recta mientras que la cuarta componente, que es la energía, se denota en cursiva, E_f . Se ha prescindido de el término γ relativista que sí que aparece en el cuadrivector momento-energía del que proviene esta matriz simplificada. Evidentemente $p_{f|n}$ es el momento final de la componente $n = \{x, y, z\}$, así que

$$p_{f|n} = mv_{f|n}. \quad (3.4)$$

En cuanto a la cuarta componente es

$$E_f = mc^2 + K_{\text{CM}} + U_f + U_0 = mc^2 + \frac{1}{2}mv_{f|\text{CM}}^2 + U_f + U_0, \quad (3.5)$$

donde $v_{f|\text{CM}}$ es el módulo del vector velocidad final del centro de masas del bloque, U_f es la energía interna final y U_0 es la energía interna en el cero absoluto. Más adelante se verá por qué es necesario mantener el término relativista mc^2 de la relación masa energía.

Para el problema del bloque con rozamiento, como se trabaja en dos dimensiones espaciales, se puede trabajar con una matriz de tres componentes, dado que la tercera componente del momento siempre va a ser nula.

$$E_f = \begin{pmatrix} cp_{f|x} \\ cp_{f|y} \\ 0 \\ E_f \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} cp_{f|x} \\ cp_{f|y} \\ mc^2 + \frac{1}{2}mv_{f|\text{CM}}^2 + U_f + U_0 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Exactamente lo mismo se tiene para el estado inicial, donde aparezca un subíndice f se sustituye por i , por lo que

$$E_i = \begin{pmatrix} cp_{i|x} \\ cp_{i|y} \\ 0 \\ E_i \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} cp_{i|x} \\ cp_{i|y} \\ mc^2 + \frac{1}{2}mv_{i|\text{CM}}^2 + U_i + U_0 \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

3.1.2. Matriz impulso-trabajo de F

En la matrices impulso-lineal—trabajo es donde aparecen la fuerzas que intervienen en el proceso. Una de las ventajas de este formalismo es que a cada fuerza le corresponde una matriz impulso-trabajo, por lo que se puede estudiar cada fuerza individualmente.

Las tres primeras componentes de la matriz se corresponden con el impulso lineal y la cuarta componente con el trabajo que realiza la fuerza.

$$W_F = \begin{pmatrix} cI_x \\ cI_y \\ cI_z \\ W_F \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

De nuevo se ha de tener cuidado con la notación, W_F (en letra recta) es la matriz impulso-trabajo de la fuerza F y no se ha de confundir con W_F (en letra cursiva) que es el trabajo de la fuerza F . Este trabajo es el trabajo real de la fuerza F no el pseudo-trabajo, ajustándose a la definición dada en la Ec. (2.42) del capítulo anterior

$$W_F = \int F dr_F, \quad (3.9)$$

donde dr_F es el desplazamiento del punto de aplicación de F .

Como se recordará del capítulo anterior el problema está definido en el intervalo de tiempos $t = [0, t_0]$ y el desplazamiento inicial es nulo $x_i = 0$, entonces

$$\Delta t = t_0 \quad ; \quad \Delta x = x_f = x_0. \quad (3.10)$$

El desplazamiento x_0 es el desplazamiento del centro de masas del bloque, lo que sucede es que coincide con el desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza, $\Delta x_{\text{CM}} = \Delta r_F = x_0$. Como se hizo para la matriz estado mecánico-termodinámico se puede prescindir de la tercera componente espacial. Queda una matriz de tres dimensiones, las dos primeras para las componentes x e y del impulso y la tercera para el trabajo.

$$I_x = Ft_0 \quad ; \quad I_y = 0 \quad ; \quad W_F = F(r_f - r_i) = Fx_0 \quad (3.11)$$

La matriz queda

$$W_F = \begin{pmatrix} cI_x \\ cI_y \\ W_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cFt_0 \\ 0 \\ Fx_0 \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

3.1.3. Matriz impulso-trabajo de f_R . Agente externo

Antes de entrar a discutir la matriz impulso-lineal-trabajo de la fuerza de rozamiento hay que hacer una corrección en el planteamiento del problema. No es correcto argumentar, que como el entorno tiene masa infinita, no se mueve. Se va a poner un ejemplo más simple para ilustrar mejor el punto que se quiere tratar.

Supóngase que se quiere estudiar a una persona saltando en la superficie de la Tierra. El primer argumento de cualquier persona formada en física sería que la masa de la Tierra es mucho mayor que la masa de una persona, $M_T \approx 10^{24} \gg m_p \approx 10^2$. Al saltar la persona, la fuerza que hace sobre la Tierra, por la tercera ley de Newton, es exactamente la misma que la fuerza que la Tierra hace sobre la persona. Pero, como la masa de la Tierra es mucho mayor que la de la persona, la aceleración que sufre la Tierra es prácticamente nula, entonces se argumenta que no

se mueve. Esto se hace para no tener que lidiar con un problema de dos cuerpos, solo estudiar el movimiento de la persona y además tratar a la Tierra como un referencial inercial sobre el que estudiar el problema.

En general, todas las veces que se hace esta aproximación se llega a resultados correctos, principalmente porque solo se estudia la cinemática del problema. Pero hay un fallo fundamental en este razonamiento. Con este argumento se está violando la conservación del momento lineal.^{2,3} Aunque la aceleración de la Tierra sea mucho menor, el momento final de la Tierra es exactamente el mismo que el momento final de la persona. Ambos impulsos son iguales.

$$I_P = F_{T \rightarrow P} t_0 = F_{P \rightarrow T} t_0 = I_T \quad ; \quad \frac{dp_P}{dt} = \frac{dp_T}{dt} \quad (3.13)$$

Decir que la aceleración de la Tierra es nula sería lo mismo que decir que su momento no varía, lo que no es cierto.

¿Dónde se aplica esto en el problema del bloque con rozamiento? Hay que aplicar este mismo razonamiento a la superficie sobre la que desliza el bloque. En el primer capítulo se asumía ese comportamiento de objeto con masa infinita para la superficie normal. Ahora se va a asumir que la superficie normal es un objeto con masa, por ejemplo un tablón como la parte superior de una mesa. Puede tener cualquier masa, de hecho puede ser hasta menor que la del bloque. No obstante se sigue prefiriendo tratar con un problema de un solo cuerpo, para ello se ha de introducir una fuerza externa, F_1^{ex} , que actúa sobre ese tablón para anular las fuerzas que actúan sobre él y que de verdad tanto su aceleración como su impulso sean nulos.

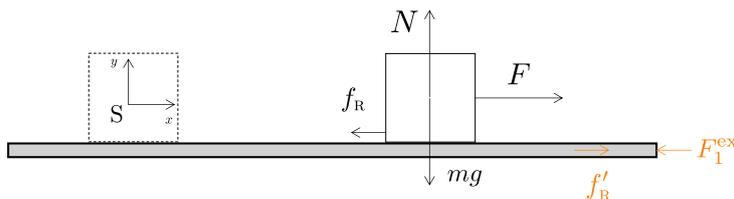


Figura 3.1: Esquema del nuevo planteamiento. Ahora en gris aparece el tablón, la superficie normal sobre la que desliza el bloque. En negro aparecen las fuerzas que actúan sobre el bloque y en naranja las fuerzas que actúan sobre el tablón. Este diagrama sirve para discutir las fuerzas en el eje x . También se ha añadido la etiqueta, S , al referencial.

Sobre el tablón no actúa ninguna fuerza externa, los únicos impulsos que recibe son los que le transmite el bloque por contacto (véase Fig. 3.1). Solo preocupándose del eje x , la única interacción que aparece entre el bloque y el tablón es la fuerza de rozamiento. Por la tercera ley de Newton, el tablón sufre una fuerza, f'_R , que es igual a f_R pero en sentido opuesto. Entonces para que el tablón se mantenga en reposo, es necesario un agente externo que ejerza una fuerza F_1^{ex} que anule f'_R . Es decir, que en módulo $F_1^{\text{ex}} = f'_R$.

El introducir esta fuerza externa tiene una gran ventaja aparte de definir correctamente el problema. Ahora ya se puede hablar propiamente de una fuerza de rozamiento del tipo Amontons-Coulomb y se tiene una forma de medir esta fuerza. No hay forma de medir la fuerza de rozamiento directamente, pero es sencillo medir la fuerza que hay que hacerle al tablón para que no se desplace. Medir F_1^{ex} es lo mismo que medir f'_R , que es lo mismo que medir f_R . En cierta forma es como si fueran la misma fuerza.

Asumiendo que esto sea cierto, el trabajo que realiza una es igual al trabajo que realiza la otra. En el referencial S , el punto de aplicación de F_1^{ex} no se desplaza, entonces el trabajo de F_1^{ex}

² B. J. Tefft, J. A. Tefft. *Galilean Relativity and the Work-Kinetic Energy Theorem*. The Physics Teacher **45**, 4, pp. 218-220. (2007).

³ V. Voroshilov. *Response to "Galilean Relativity and the Work-Kinetic Energy Theorem"*. The Physics Teacher **45**, 6, pp. L1. (2008).

es nulo y por consiguiente también el de f_R , $W_{f_R} = W_{F_1^{\text{ex}}} = F_1^{\text{ex}} \Delta r_{F_1^{\text{ex}}} = 0$. Por tanto, que la matrices impulso-trabajo para ambas fuerzas son iguales, siguiendo la definición dada en la Ec. (3.8)

$$W^{\text{ex}} \equiv W_R = \begin{pmatrix} cI_x \\ cI_y \\ W_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -cf_R t_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Nótese que estas matrices están referidas a fuerzas actuando en cuerpos distintos, W^{ex} es para la fuerza externa que actúa sobre el tablón y W_R es la fuerza de rozamiento del tipo Amontons-Coulomb que actúa sobre el bloque. Lo que sucede es que ambas fuerzas son iguales y entonces sus matrices impulso-trabajo también lo son.

3.1.4. Matriz impulso-trabajo del peso y la normal

Lo mismo que sucede en el eje x con la fuerza de rozamiento, sucede en el eje y con la normal. Sobre el tablón no actúa ninguna fuerza más que la fuerza por contacto que le ejerce el bloque. El tablón siente una fuerza, N' , igual al peso del bloque. Es el agente externo el que de nuevo tiene que hacer una fuerza, F_2^{ex} , para anular la normal y que el tablón permanezca en reposo en el referencial S. En la Fig. 3.2 se presenta un esquema donde se incluyen las nuevas fuerzas.

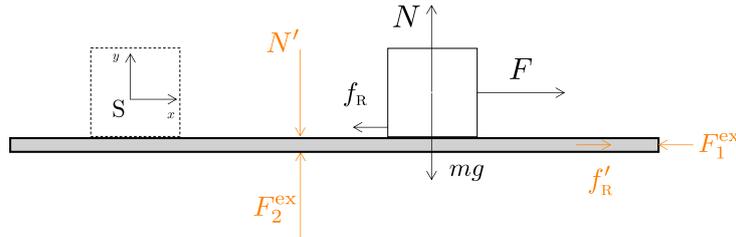


Figura 3.2: Esquema análogo al de la Fig. 3.1 en el que se incluyen las nuevas fuerzas N' y F_2^{ex} . Ambas fuerzas se han dibujado desplazadas por claridad, su punto de aplicación tiene que estar en la misma coordenada x que N y mg .

Hay dos formas de pensar en F_2^{ex} , quizá la más sencilla es pensar que se desplaza en el eje x para aplicarse en el mismo punto que se aplica N' . La otra es pensar que el agente externo actúa sobre las cuatro esquinas del tablón, y que la suma de esas cuatro fuerzas es igual a F_2^{ex} (sobre cada esquina hace un cuarto de la fuerza necesaria).

Una vez dejado claro el planteamiento del problema, ya se pueden escribir las matrices impulso-lineal-trabajo para el bloque.

$$W_N = \begin{pmatrix} cI_x \\ cI_y \\ W_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ cmgt_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad W_G = \begin{pmatrix} cI_x \\ cI_y \\ W_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -cmgt_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

El trabajo de ambas fuerzas es nulo, porque no se desplazan en el eje y .

3.1.5. Matriz trabajo de configuración

Falta considerar la presión que ejerce la atmósfera sobre el bloque. La presión atmosférica no transmite un impulso neto en ninguna dirección, la fuerza total que ejerce en una cara del bloque es la misma que la que ejerce sobre la cara opuesta, pero como están orientadas en sentidos opuestos la fuerza neta es cero. No contribuye a la variación de la velocidad del centro

de masas. Lo que sí realiza es trabajo ante las variaciones de volumen del bloque. La matriz trabajo de configuración queda

$$W_{\text{cn}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -P\Delta V_B \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

donde W_{cn} es el trabajo de expansión del bloque contra la atmósfera, debido a su variación de volumen y como consecuencia de su variación temperatura.

3.1.6. Matriz calor

La última matriz por definir es la matriz calor. Siguiendo la definición de Born, el calor es la energía de origen no mecánico que se ha de intercambiar con el entorno para compensar la diferencia entre la variación de energía interna y el trabajo adiabático, $Q = \Delta U - W_{\text{ad}}$. El que sea de origen no mecánico implica que no contribuye a las variaciones de momento lineal total del sistema, no ejerce impulso lineal neto sobre el centro de masas. Entonces la matriz calor siempre tiene todas las componentes del momento/impulso nulas y la última componente es el calor intercambiado con el entorno Q_0 . Entonces:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_0 \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Tal como se define, Q_0 será negativo cuando sea cedido por el bloque al foco térmico y positivo cuando lo reciba el bloque desde el foco térmico.

3.1.7. Ecuación fundamental para el bloque con rozamiento

Una vez se han discutido todas la fuerzas implicadas en el problema del bloque con rozamiento se puede escribir la ecuación fundamental para el problema siguiendo la definición dada en (3.2)

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} cp_{f|x} \\ cp_{f|y} \\ mc^2 + \frac{1}{2}mv_{f|\text{CM}}^2 + U_f + U_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} cp_{i|x} \\ cp_{i|y} \\ mc^2 + \frac{1}{2}mv_{i|\text{CM}}^2 + U_i + U_0 \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} cFt_0 \\ 0 \\ Fx_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -cf_{\text{R}}t_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ cmgt_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -cmgt_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -P\Delta V_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Cabe destacar que todas las componentes de todas las matrices tienen dimensiones de energía, por ejemplo para la matriz estado mecánico-termodinámico, $cp = [\text{m.s}^{-1}.\text{kg}.\text{m}.\text{s}^{-1} = \text{kg}.\text{m}^2.\text{s}^{-2} = \text{J}]$; o para la matriz impulso-trabajo, $cFt_0 = [\text{m}.\text{s}^{-1}.\text{N}.\text{s} = \text{m}.\text{N} = \text{J}]$.

Como las matrices $W_N = (0, cmgt_0, 0)$ y $W_G = (0, -cmgt_0, 0)$ al sumarse se anulan, todas las segundas componentes a la derecha de la igualdad son nulas. Entonces la variación de momento en la componente y es nula, $p_{f|y} - p_{i|y} = 0$. Se puede por tanto, con el fin de simplificar la notación, trabajar en una única componente espacial. Los momentos, velocidades, aceleraciones y posiciones ya no tienen que llevar subíndice x (por ejemplo $p_{f|x}$ pasa a ser simplemente p_f).

Se puede escribir la ecuación fundamental en forma diferencial

$$\begin{pmatrix} cmdv \\ 0 \\ dK_{\text{CM}} + dU \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cFdt \\ 0 \\ Fdx \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -cf_{\text{R}}dt \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -PdV_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta Q_0 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

Igualando la primera componente y dividiendo por c se obtiene la SLN en forma integral

$$mdv = (F - f_R)dt \quad (3.20)$$

Como se vio en el Cap. 2 con la SLN se puede obtener la RDC-SLN, por ejemplo multiplicando a ambos lados por v , usando que $dx = vdt$ e integrando a ambos lados de la Ec.(3.20).

$$\boxed{\frac{1}{2}m(v_{f|CM}^2 - v_{i|CM}^2) = (F - f_R)x_0} \quad (3.21)$$

Esta ecuación es la misma que se obtuvo en la Ec.(2.39) en el planteamiento clásico. Lo única diferencia es un pequeño cambio de notación, donde $x_f - x_i = x_0$.

Si ahora se iguala la última componente se obtiene la PLT

$$dK_{CM} + dU = Fdx - PdV_B + \delta Q_0, \quad (3.22)$$

igual que se obtuvo en el planteamiento clásico en la Ec. (2.70). Se puede seguir exactamente el mismo desarrollo que el que se hace en el Cap. 2, en el grupo de ecuaciones (2.70)-(2.83), para llegar al resultado

$$dK_{CM} + C_P dT = Fdx + \delta Q_0, \quad (3.23)$$

Conviene recordar que este desarrollo solo es válido siempre que el proceso sea a presión constante, como es el caso. Integrando se obtiene la PLT para el bloque con rozamiento

$$\boxed{\frac{1}{2}m(v_{f|CM}^2 - v_{i|CM}^2) + mc_P(T_f - T_i) = Fx_0 + Q_0}, \quad (3.24)$$

que es el mismo resultado al que se llega en la Ec. (2.84) con el planteamiento clásico. Desaparece la dependencia con el volumen del bloque, V_B , y ahora solo depende de la temperatura del mismo, T , e implícitamente de la presión externa, P , a través de la coeficiente c_P .

3.2. Ecuación de la Entalpía

La entalpía se define como $H = U + PV$, entonces en forma diferencial

$$dH = dU + PdV_B + V_B dP = \delta Q + V_B dP \quad (3.25)$$

Si se tiene un proceso a presión constante, entonces $dP = 0$ y derivando respecto a T a ambos lados

$$\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_P = C_P. \quad (3.26)$$

Entonces, a presión constante, la variación de entalpía se corresponde con el calor transferido, es decir, el calor latente. Por ser H función de estado⁴

$$H_f - H_i = \delta Q = C_P dT = \int_{T_i}^{T_f} C_P dT = C_P(T_f - T_i) \quad (3.27)$$

Como corolario, siempre que se tenga un proceso a presión constante, se puede escribir una **ecuación fundamental para la entalpía** que devuelve exactamente el mismo resultado que la ecuación fundamental.

$$H_f - H_i = \sum_{k \neq cn} W_k + Q_0, \quad (3.28)$$

⁴ M. W. Zemansky, R. H. Dittman. *Calor y Termodinámica*. Ed. 6. McGraw-Hill, 1988. p. 228.

donde no se ha de escribir explícitamente la matriz trabajo de configuración, $W_{\text{cn}} = (0, 0, -P\Delta V_{\text{B}})$, porque el término $-P\Delta V_{\text{B}}$ ya se tiene en cuenta dentro del término $mc_P T$ de la matriz entalpía, Ecs. (3.22) y (3.23). Las matrices estado mecánico-termodinámico, E_j , se sustituyen por la **matriz entalpía**, H_j , que se define como:

$$H_j = \begin{pmatrix} cp_{j|x} \\ cp_{j|y} \\ cp_{j|z} \\ mc^2 + K_{j|\text{CM}} + mc_P T_j \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

3.3. Ecuación del calor, entropía y trabajo recuperado

Como ya se vio en el Cap. 2, una vez se tiene la RDC-SLN, Ec. (3.21), y la PLT, Ec. (3.24), se pueden restar ambas ecuaciones para obtener la ecuación de los efector térmicos

$$mc_P(T_f - T_i) = f_{\text{R}}x_0 + Q_0. \quad (3.30)$$

Es importante recordar que el término Fx_0 que aparece en la RDC-SLN es el pseudo-trabajo de la fuerza F y que el término que aparece en la PLT es el trabajo real de la fuerza. Al restarse dan cero porque para este problema el desplazamiento del centro de masas del bloque es igual que el desplazamiento de la fuerza F . Por este mismo argumento el término disipativo

$$f_{\text{R}}x_0 = \mu_{\text{d}}mgx_0, \quad (3.31)$$

es el pseudo-trabajo de la fuerza de rozamiento, porque es el término que sobrevive de la RDC-SLN. De las relaciones dinámicas se obtienen los desplazamientos del centro de masas, y por tanto, los pseudo-trabajos.

Ahora se puede distinguir entre dos tipos de procesos, isoterma o adiabático. Se asume que el entorno, que son el tablón y la atmósfera, se comporta como un foco térmico. También, que el bloque parte del equilibrio termodinámico, es decir que $T_i = T_{\text{F}}$, siendo T_{F} la temperatura del foco.

3.3.1. Proceso isoterma

Si el calor específico del bloque, c_P , es lo suficientemente grande entonces su temperatura permanece constante durante el proceso. Se llegaría al mismo resultado si, aunque el bloque aumentara su temperatura, se esperase el tiempo suficiente (una vez dejaran de actuar todas las fuerzas y el centro de masas llegase al reposo) a que el bloque alcanzase, de nuevo, el equilibrio termodinámico con el entorno. En cualquier caso el resultado es el mismo, $T_f = T_i$, $\Delta T = 0$ y toda la energía se disipa en forma de calor al foco térmico:

$$Q_0 = -\mu_{\text{d}}mgx_0. \quad (3.32)$$

El calor es negativo lo que, siguiendo el convenio adoptado, significa que sale del bloque hacia el entorno. El calor es igual al pseudo-trabajo de la fuerza de rozamiento y x_0 es el desplazamiento del centro de masas, incluye en intervalo de tiempo en el que deja de actuar la fuerza conservativa F , disipando su energía cinética a través de f_{R} . La variación de entropía del universo es

$$\Delta S_{\text{U}} = \Delta S + \Delta S_{\text{F}} = 0 + \frac{Q_{\text{F}}}{T_{\text{F}}} = \frac{\mu_{\text{d}}mgx_0}{T_{\text{F}}}, \quad (3.33)$$

donde ΔS es la variación de entropía del bloque y ΔS_F es la variación de entropía del foco/entorno. Como, por definición, el foco no cambia sus propiedades termodinámicas se considera que siempre intercambia calor mediante procesos reversibles. Por eso se ha podido aplicar directamente la definición de Clausius para calcular la variación de entropía. La variación de entropía del bloque es nula, al no variar su estado termodinámico.

Se define el trabajo perdido, W_{pr} , como

$$\boxed{W_{pr} \equiv T_F \Delta S_U = \mu_d m g x_0} . \quad (3.34)$$

Esta relación se tiene que cumplir para todo referencial inercial ($\bar{W}_{pr} = W_{pr}$ y $\Delta \bar{S}_U = \Delta S_U$). Como era de esperar en un proceso isoterma, toda la energía disipada por la fuerza de rozamiento se convierte en una forma de energía no aprovechable para la realización de trabajo. No se puede recuperar trabajo del foro térmico.

3.3.2. Proceso adiabático

Para un proceso adiabático, $Q = 0$ y toda la energía mecánica disipada se emplea en aumentar la temperatura del bloque. Despejando de la ecuación del calor, Ec. (3.30), se obtiene la variación de temperatura del bloque

$$T_f - T_i = \frac{\mu_d m g x_0}{m c_P} = \frac{\mu_d g x_0}{c_P}, \quad (3.35)$$

para una distancia recorrida por el centro de masas del bloque, x_0 .

Como este proceso es irreversible (no se observa experimentalmente que toda la energía térmica se organice para impulsar al bloque en la dirección opuesta a la que vino) hay que considerar un proceso reversible equivalente para poder calcular la variación de entropía del bloque. Esto ya se hizo en el Cap. 2, en las Ecs. (2.91)-(2.93) obteniendo que la variación de entropía del bloque en un proceso adiabático es

$$\Delta S = \int_{T_i}^{T_f} \frac{m c_P}{T} dT = m c_P \ln \frac{T_f}{T_i}. \quad (3.36)$$

Utilizando la Ec.(3.35), se puede dejar la entropía del bloque en función de desplazamiento x_0

$$\Delta S = m c_P \ln \frac{T_i + \frac{\mu_d g x_0}{c_P}}{T_i} = m c_P \ln \left(1 + \frac{\mu_d g x_0}{c_P T_i} \right). \quad (3.37)$$

Dimensionalmente la expresión es correcta, el logaritmo es adimensional y la entropía tiene unidades de energía entre temperatura, $m c_P = [\text{kg} \cdot \text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1} = \text{J} \cdot \text{K}^{-1}]$.

La entropía del universo es por tanto

$$\Delta S_U = \Delta S + \cancel{\Delta S_F}^0 = m c_P \ln \left(1 + \frac{\mu_d g x_0}{c_P T_i} \right). \quad (3.38)$$

De acuerdo con el segundo principio de la termodinámica la entropía del universo es positiva, dado que es un proceso espontáneo e irreversible.

Cuando el centro de masas del bloque llega al reposo, el bloque no está en equilibrio termodinámico, se encuentra a una temperatura mayor que la temperatura del entorno, $T_f > T_F = T_i$. Entonces, se podría colocar una máquina térmica entre el bloque, funcionando como foco caliente, y el entorno, funcionando como foco frío. Esta máquina podría funcionar con un ciclo de Carnot reversible, para extraer trabajo mientras que el bloque alcanza el equilibrio. Con una

máquina térmica no se puede convertir todo el calor en trabajo, el máximo trabajo que se puede extraer con un ciclo de Carnot es

$$W_{\max} = |Q_a| - |Q_c|, \quad (3.39)$$

donde Q_a es el calor absorbido del foco caliente y Q_c es el calor que hay que ceder al foco frío, para que la entropía del universo no disminuya. Es decir, $Q_c = T_F \Delta S_F$.

Este trabajo máximo es el trabajo recuperado, W_{rc} , y para el bloque es

$$W_{rc} = W_{\max} = mc_P(T_f - T_i) - T_F mc_P \ln \frac{T_f}{T_i}. \quad (3.40)$$

Este es el caso ideal, en el que se recupera todo el trabajo posible y la variación de entropía del universo para este proceso es justo cero, $\Delta S_U = 0$.

Se puede calcular el trabajo perdido, W_{pr} , como la diferencia entre la energía mecánica inicial y la final, incluyendo los trabajos realizados y recuperados.

$$W_{pr} = E_{m|i} - E_{m|f} = (K_i + W_F) - (K_f - W_{rc}) = Fx_0 - \frac{1}{2}mv_f^2 + W_{rc}. \quad (3.41)$$

Con la PLT, Ec. (3.24), y teniendo en cuenta que $v_i = 0$ y $Q_0 = 0$, se obtiene que $Fx_0 - \frac{1}{2}mv_i^2 = mc_P(T_f - T_i)$. Además, se puede sustituir W_{rc} por la expresión de la Ec. (3.40). Entonces.

$$mc_P(T_f - T_i) - mc_P(T_f - T_i) + T_F mc_P \ln \frac{T_f}{T_i} = T_F mc_P \ln \frac{T_f}{T_i} = W_{pr}. \quad (3.42)$$

El trabajo perdido, calculado de esta forma, es consistente con la definición dada en la Ec. (3.34), $W_{pr} = T_F \Delta S_U$.

3.4. Transformación entre referenciales

Ya se ha resuelto el problema de forma completa en el referencial fijo S, ahora se va a discutir para un referencial \bar{S} que se mueve con velocidad uniforme respecto a S. Se va a trabajar en configuración estándar, es decir, que S y \bar{S} tienen los ejes orientados en el mismo sentido y el desplazamiento relativo es a lo largo de un único eje. Este puede ser, por ejemplo, el eje x y entonces \bar{S} se desplaza con velocidad $\mathbf{V} = (V, 0, 0)$ respecto S. En el referencial \bar{S} se observa que S se desplaza con velocidad $\bar{\mathbf{V}} = (-V, 0, 0)$. Nótese que todas las magnitudes medidas en \bar{S} se denotan igual añadiendo una barra superior.

Al trabajar en configuración estándar no se pierde generalidad, es análogo a cualquier otro tipo de situación entre referenciales inerciales. Cualquier configuración entre referenciales se puede convertir en configuración estándar mediante traslaciones y rotaciones, que se pueden realizar mediante matrices de cambio de base.

Al final del Cap. 2 se dijo que se podría asumir que se transforma entre referenciales mediante la transformación de Galileo. Ahora se hará uso del formalismo en matrices heredado de los cuadvectores y se asumirá que se transforma entre referenciales como la transformación de Lorentz. Para aplicar la transformación basta con multiplicar a una matriz columna por la matriz de cambio de base⁵

$$\Lambda(V) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad \gamma = (1 - V^2/c^2)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{y} \quad \beta = V/c. \quad (3.43)$$

⁵ W. S. C. Williams. *Introducing special relativity*. CRC Press, 2002. p. 113.

Para una matriz genérica A en el referencial S , se obtiene esa misma matriz en el referencial \bar{S} como:

$$\bar{A} = \Lambda(V)A. \quad (3.44)$$

Dado que se va a trabajar en el límite clásico, es decir, velocidades relativas bajas entre referenciales, se pueden expandir γ y $\gamma\beta$ en serie de Taylor de V , $\left(f(V) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(V-a)\right)$. Centrando la serie en $a = 0$ y truncando al término de menor grado se obtiene

$$\begin{aligned} \gamma(V) &= 1 + 0 + \frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2} + \dots \\ \gamma(V)\beta(V) &= 0 + \frac{V}{c} + \dots \end{aligned} \quad (3.45)$$

siendo V la velocidad entre referenciales y c la velocidad de la luz.

Como en el problema se está trabajando en dos dimensiones espaciales y una tercera para la energía, se puede escribir una matriz 3x3 tal que

$$\Lambda(V) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2} & 0 & -\frac{V}{c} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{V}{c} & 0 & 1 + \frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_s & 0 & -\beta_s \\ 0 & 1 & 0 \\ -\beta_s & 0 & \gamma_s \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

Una vez se opere el producto entre matrices habrá que tomar el límite clásico, o sea el límite cuando $V/c \rightarrow 0$.

Solo aplicará la transformación a la ecuación fundamental, Ec. (3.2), para después igualar por componentes. No se puede primero operar entre matrices y luego aplicar la transformación, ni tampoco aplicarla a la forma diferencial como en la Ec. (3.1).

3.4.1. Transformación de \mathbf{E}_f y \mathbf{E}_i

Se empieza haciendo el producto matricial

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{E}}_f &= \Lambda(V)\mathbf{E}_f = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2} & 0 & -\frac{V}{c} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{V}{c} & 0 & 1 + \frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cmv_{f|x} \\ cmv_{f|y} \\ mc^2 + K_{f|CM} + U_f + U_0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} cmv_{f|x} + \frac{1}{2} \frac{V^2}{c} mv_{f|x} - Vmc - \frac{V}{c} [\dots] \\ cmv_{f|y} \\ -mv_{f|x}V + \frac{1}{2}mV^2 + mc^2 + K_{f|CM} + U_f + U_0 + \frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2} [\dots] \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

No se escriben todos los términos que aparecen multiplicados por V/c o V^2/c^2 porque ahora se va a tomar el límite clásico, es decir, el límite en el que $V/c \rightarrow 0$. Al tomar ese límite, desaparecen todos los sumandos, que después de operar, aún conserven algún término V/c o V^2/c^2 . Es importante recalcar que es el cociente el que tiende a cero, ni V tiende a cero ni c tiende a infinito, es el cociente entre ambos lo que tiende a cero. Así pues

$$\begin{aligned} \lim_{V/c \rightarrow 0} &\begin{pmatrix} cmv_{f|x} + \frac{1}{2} \frac{V^2}{c} mv_{f|x} - Vmc - \frac{V}{c} [\dots] \\ cmv_{f|y} \\ -mv_{f|x}V + \frac{1}{2}mV^2 + mc^2 + K_{f|CM} + U_f + U_0 + \frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2} [\dots] \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} cm(v_{f|x} - V) \\ cmv_{f|y} \\ \frac{1}{2}mv_{f|x}^2 + \frac{1}{2}mV^2 - mv_{f|x}V + mc^2 + U_f + U_0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Aquí se ve la importancia del término mc^2 , al multiplicarlo por V/c o por V^2/c^2 desaparecen las c del divisor. Eso es lo que hace que aparezca el término $-cmV$ en la primera componente y el término $\frac{1}{2}mV^2$ en la última. Si este término se hubiese suprimido al simplificar el formalismo u operando la ecuación fundamental antes de aplicar la transformación, esta no funcionaría correctamente. Si se reorganizan los tres primeros términos de la última componente, sacando factor común a $\frac{1}{2}m$ y dándose cuenta de que se tiene la expansión de una diferencia al cuadrado, se puede reescribir

$$\frac{1}{2}mv_{f|x}^2 + \frac{1}{2}mV^2 - mv_{f|x}V = \frac{1}{2}m(v_{f|x} - V)^2 \quad (3.49)$$

Entonces el resultado de la transformación es

$$\boxed{\bar{\mathbf{E}}_f = \begin{pmatrix} cm\bar{v}_{f|x} \\ cm\bar{v}_{f|y} \\ mc^2 + \frac{1}{2}m\bar{v}_{f|x}^2 + \bar{U}_f + \bar{U}_0 \end{pmatrix} = \Lambda(V)\mathbf{E}_f = \begin{pmatrix} cm(v_{f|x} - V) \\ cmv_{f|y} \\ mc^2 + \frac{1}{2}m(v_{f|x} - V)^2 + U_f + U_0 \end{pmatrix}}. \quad (3.50)$$

Para la energía inicial se tiene el mismo resultado

$$\boxed{\bar{\mathbf{E}}_i = \begin{pmatrix} cm\bar{v}_{i|x} \\ cm\bar{v}_{i|y} \\ mc^2 + \frac{1}{2}m\bar{v}_{i|x}^2 + \bar{U}_i + \bar{U}_0 \end{pmatrix} = \Lambda(V)\mathbf{E}_i = \begin{pmatrix} cm(v_{i|x} - V) \\ cmv_{i|y} \\ mc^2 + \frac{1}{2}m(v_{i|x} - V)^2 + U_i + U_0 \end{pmatrix}}. \quad (3.51)$$

Identificando términos

$$\bar{v}_{f|x} = v_{f|x} - V \quad ; \quad \bar{v}_{i|x} = v_{i|x} - V \quad (3.52)$$

se llega a la conclusión de que para pasar de un referencial a otro (en el límite clásico), basta con transformar las velocidades que aparecen en el momento y la energía cinética como la transformación de Galileo y que las propiedades termodinámicas son las mismas en todos los referenciales. Hasta ahora esto coincide con la hipótesis inicial para la transformación entre referenciales clásica.

3.4.2. Transformación de \mathbf{W}_F

Si se aplica la transformación a la matriz impulso-trabajo de la fuerza conservativa F se obtiene

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{W}}_F &= \begin{pmatrix} c\bar{F}_x t_0 \\ c\bar{F}_y t_0 \\ \bar{F}\bar{x}_0 \end{pmatrix} = \Lambda(V)\mathbf{W}_F = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2} & 0 & -\frac{V}{c} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{V}{c} & 0 & 1 + \frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cFt_0 \\ 0 \\ Fx_0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} cFt_0 + \frac{1}{2}\frac{V^2}{c}Ft_0 - \frac{V}{c}Fx_0 \\ 0 \\ -VFt_0 + Fx_0 + \frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2}Fx_0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Ahora si se toma el límite $V/c \rightarrow 0$, el único término que no estaba en \mathbf{W}_F que sobrevive es $-VFt_0$,

$$\boxed{\bar{\mathbf{W}}_F = \lim_{V/c \rightarrow 0} \Lambda(V)\mathbf{W}_F = \begin{pmatrix} cFt_0 \\ 0 \\ F(x_0 - Vt_0) \end{pmatrix}}. \quad (3.54)$$

De la primera componente se puede concluir que en ambos referenciales se mide exactamente la misma fuerza F . Pero, por el resultado de la última componente, en el referencial $\bar{\mathbf{S}}$ el trabajo que

realiza F es menor que el trabajo visto desde el referencial S. Esto es porque el desplazamiento del punto de aplicación de F visto desde \bar{S} es menor que el desplazamiento visto desde S. Es tanto menor como $-Vt_0$ veces, es decir, tanto como lo que se desplaza \bar{S} en el tiempo t_0 , visto desde S.

En la Fig. 3.3 se puede ver que el desplazamiento (del punto de aplicación de F) visto desde el referencial S, x_0 , es igual al desplazamiento visto desde \bar{S} , \bar{x}_0 , más lo que se ha desplazado \bar{S} (visto desde S), $x_{\bar{S}}$. Esto es, $x_0 = \bar{x}_0 + x_{\bar{S}}$. Evidentemente el desplazamiento de \bar{S} es la velocidad con respecto a S por el tiempo transcurrido, es decir, $x_{\bar{S}} = Vt_0$.

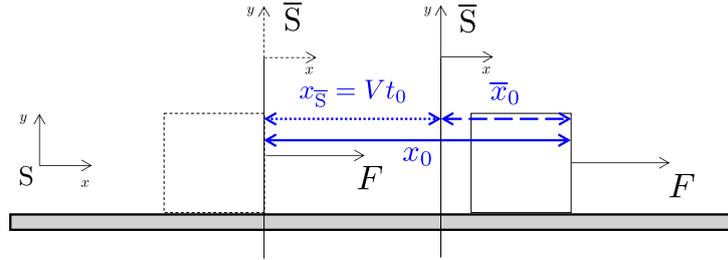


Figura 3.3: Diagrama en el que se muestra el desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza F en los dos referenciales. En S se desplaza la distancia x_0 y en \bar{S} se desplaza \bar{x}_0 . Para el instante inicial la posición del bloque y el referencial \bar{S} se muestran en línea de puntos, mientras que para el instante t_0 se muestran en línea continua.

Aquí es donde el formalismo matricial desarrollado y lo clásico empiezan a discrepar. En lo clásico se asumía que bastaba con transformar las velocidades como Galileo, pero no se decía nada de tener que considerar trabajos distintos en otros referenciales. El término $x_{\bar{S}}$ habría que haberle añadido *ad hoc*, cuando se diera uno cuenta de que en la PLT no cuadra el balance de energías. En cambio, con el formalismo sale directamente sin tener que hacer ninguna hipótesis más que el principio de relatividad.

3.4.3. Transformación de \bar{W}_R . Efecto cinta transportadora

Aplicando la transformación a la matriz impulso-trabajo de la fuerza de rozamiento se obtiene el mismo fenómeno que en el caso anterior

$$\bar{W}_R = \lim_{V/c \rightarrow 0} [\Lambda(V)W_R] = \begin{pmatrix} -cf_R t_0 \\ 0 \\ f_R V t_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -cf_R t_0 \\ 0 \\ f_R \bar{x}_0 \end{pmatrix}. \quad (3.55)$$

Nótese que el término $f_R V t_0$ es positivo porque se multiplica por $-V/c$.

En el referencial \bar{S} , aparentemente, la fuerza de rozamiento sí realiza trabajo. Pero esto es engañoso, porque este trabajo que aparece aquí no es el de la fuerza de rozamiento, es el de la fuerza externa F_1^{ex} que se encarga de mantener fijo el tablón (Véase la Fig. 3.1). En S, el punto de aplicación de F_1^{ex} no se desplaza, entonces no realiza trabajo, en cambio, en \bar{S} el punto de aplicación sí se desplaza y entonces sí realiza trabajo. Dado que F_1^{ex} y f_R son “la misma fuerza” (es decir, en todo momento tienen el mismo módulo y orientación), aunque están aplicadas sobre cuerpos distintos, se puede reescribir \bar{W}_R en función de F_1^{ex}

$$\bar{W}_R = \bar{W}^{\text{ex}} = \begin{pmatrix} -c\bar{F}_1^{\text{ex}} t_0 \\ 0 \\ \bar{F}_1^{\text{ex}} \bar{x}_0 \end{pmatrix}. \quad (3.56)$$

La fuerza externa $\overline{F}_1^{\text{ex}}$ está orientada en sentido opuesto al eje x y su desplazamiento en \overline{S} , \overline{x}_0 , es negativo, por tanto al hacer el producto el trabajo es positivo. Es el mismo resultado que se obtiene aplicando la transformación $\Lambda(V)$.

Esto que aquí se obtiene, que emerge de aplicar el formalismo pero que sería muy difícil de obtener de forma clásica, es el efecto de cinta transportadora.⁶ Imagínese una fábrica en la que se tiene una tolva que desemboca en una cinta transportadora. Supóngase que la cinta está colocada horizontalmente y que no tiene ninguna pérdida por rozamiento de sus propios cojinetes, una vez alcanza una cierta velocidad la puede mantener indefinidamente. Si ahora se deja caer material por la tolva, como pueden ser pequeñas piedras de caliza, la cinta va a transmitir un momento a las piedras en la dirección horizontal. Por mucha inercia (“masa”) que tenga la cinta, esta cede momento a las piedras. El mismo momento que gana el material lo pierde la cinta y por consiguiente esta pierde velocidad.

Si se quiere evitar que la cinta se pare, no hay más remedio que introducir un agente externo que transmita momento a la cinta. Ese agente externo puede ser un motor, que consume una potencia y realiza un trabajo. La fuerza externa en el problema del bloque con rozamiento cumple la misma finalidad que este motor.

3.4.4. Transformación de W_{cn} y Q

Para las matrices impulso-trabajo de configuración y la matriz calor, al solo tener la última componente, no se ven afectadas por la transformación

$$\overline{W}_{\text{cn}} = \lim_{V/c \rightarrow 0} [\Lambda(V)W_{\text{cn}}] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -P\Delta V \end{pmatrix} = W_{\text{cn}}, \quad (3.57)$$

$$\overline{Q} = \lim_{V/c \rightarrow 0} [\Lambda(V)Q] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_0 \end{pmatrix} = Q. \quad (3.58)$$

Entonces

$$\Delta\overline{V} = \Delta V \quad ; \quad \overline{Q}_0 = Q_0, \quad (3.59)$$

las variaciones de volumen y el calor no cambian, confirmando la hipótesis de que las variables termodinámicas son las mismas en todos los referenciales inerciales.

3.4.5. Ecuaciones entre referenciales

Por último se va a comparar las ecuaciones que resultan en cada observador, i.e, la segunda ley de Newton, la relación dinámica complementaria y la primera ley de la termodinámica. Para que la notación resulte menos confusa, las ecuaciones irán escritas entre corchetes y los operadores entre ecuaciones se escribirán más grandes que los operadores normales.

Si en vez de escribirse la ecuación fundamental, como en la Ec. (3.2), se escribe la ecuación de

⁶ J. Güémez, J. A. Mier. *Plano inclinado relativista*. Revista española de física **37**, 2, pp. 37-42. (2023).

la entalpía, como en la Ec. (3.23), para el referencial \bar{S} se tiene

$$\begin{aligned} \left[\bar{H}_f - \bar{H}_i = \bar{W}_F + \bar{W}_R + \bar{Q} \right] &= \lim_{V/c \rightarrow 0} \left(\Lambda(V) \left[H_f - H_i = W_F + W_R + Q \right] \right) = \\ &= \left[\begin{pmatrix} cm(v_f - v_i) \\ 0 \\ \frac{1}{2}m(v_f - V)^2 - (v_i - V)^2 + mc_P(T_f - T_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c(F - f_R)t_0 \\ 0 \\ F(x_0 - Vt_0) + Q_0 \end{pmatrix} \right]. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Ahora con las primeras componentes se tiene la comparación entre referenciales para la ecuación de la SLN:

$$\left[m(\bar{v}_f - \bar{v}_i) = (F - f_R)t_0 \right] = \left[m(v_f - v_i) = (F - f_R)t_0 \right].$$

Las ecuaciones son formalmente las mismas, así que entre referenciales la SLN no cambia

$$\boxed{\overline{\text{SLN}} = \text{SLN}}. \quad (3.61)$$

Para la RDC-SLN se tiene

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{2}m(\bar{v}_f^2 - \bar{v}_i^2) = (F - f_R)\bar{x}_0 \right] &= \left[\frac{1}{2}m((v_f - V)^2 - (v_i - V)^2) = (F - f_R)(x_0 - Vt_0) \right] = \\ &= -V \left[m(v_f - v_i) = (F - f_R)t_0 \right] \dagger \left[\frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2) = (F - f_R)x_0 \right] \end{aligned}$$

Es decir que se obtiene

$$\boxed{\overline{\text{RDC}} = -V [\text{RDC}] \dagger \text{SLN}}. \quad (3.62)$$

Despejando y utilizando la igualdad entre ecuaciones (3.61) se obtiene

$$\text{RDC} = +V [\overline{\text{SLN}}] - \overline{\text{RDC}} \quad (3.63)$$

Con la última componente se tiene la igualdad entre ecuaciones de la primera ley de la termodinámica

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{2}m(\bar{v}_f^2 - \bar{v}_i^2) + mc_P(T_f - T_i) = Q_0 + F\bar{x}_0 + f_R V t_0 \right] \\ &= \\ \left[\frac{1}{2}m((v_f - V)^2 - (v_i - V)^2) + mc_P(T_f - T_i) = Q_0 + F(x_0 - Vt_0) + f_R V t_0 \right] \\ &= \\ -V \left[m(v_f - v_i) = (F - f_R)t_0 \right] \dagger \left[\frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2) + mc_P(T_f - T_i) = Fx_0 + Q_0 \right] \end{aligned}$$

Se llega a que

$$\boxed{\overline{\text{PLT}} = -V [\text{SLN}] \dagger \text{PLT}}, \quad (3.64)$$

y nuevamente por la igualdad (3.61)

$$\text{PLT} = +V [\overline{\text{SLN}}] - \overline{\text{PLT}} \quad (3.65)$$

3.5. Conclusiones

La idea principal del formalismo, que es herencia directa de los cuadvectores y por tanto consecuencia directa del principio de relatividad, es que no se deben separar las variables mecánicas de las termodinámicas si se quieren resolver por completo problemas que involucren efectos térmicos. Las tres primeras componentes son el vector de la variable mecánica y la última componente las variables termodinámicas. El momento lineal del centro de masas va asociado a la energía del objeto (suma de la energía cinética del centro de masas más la energía interna) a través de la matriz estado mecánico-termodinámico. El impulso de una fuerza se relaciona con su trabajo a través de la matriz impulso-lineal-trabajo.

Otra ventaja es que el formalismo permite estudiar cada fuerza implicada en el proceso individualmente. Una vez escogido el referencial, solo hay que estudiar qué impulso hace la fuerza en ese referencial y ver si realiza o no trabajo. No se crea confusión entre trabajos y pseudo-trabajos como sucede en la resolución clásica. En el formalismo no se escriben pseudo-trabajos, si una fuerza no realiza trabajo no se escribe. Los pseudo-trabajos solo aparecen al operar entre componentes. Esto permite abordar los problemas de forma más organizada y sistemática, dando una imagen general más clara de la física de cada problema. Se verá en los siguiente capítulo como se aplica el formalismo a otros problemas.

Se dijo al principio del capítulo que no tenía sentido hacer la norma de las matrices simplificadas, aunque en verdad se ha hecho algo similar. Operar entre componentes, es decir, restar ecuaciones como se hizo en la Ec. (3.30) para obtener la ecuación del calor, es un poco parecido a calcular la norma de un cuadvector, donde a la última componente al cuadrado se le restan el resto de componentes al cuadrado.

Lo que hace atractivo este formalismo es la transformación entre referenciales inerciales. Sin el formalismo no es descabellado pensar que para transformar entre referenciales, en el límite clásico, se puede cambiar las velocidades con la transformación de Galileo. También, no sin un poco de esfuerzo e imaginación, se podría haber llegado al diagrama de la Fig. 3.3 y concluir que en el referencial \bar{S} la fuerza conservativa se desplaza menos (Vt_0) y realiza un trabajo menor ($\bar{W}_F = W_F - FVt_0$). Pero sin la ayuda del formalismo parece bastante complicado llegar a que en \bar{S} la fuerza de rozamiento, aparentemente, sí que realiza trabajo. Y además que ese trabajo es en realidad el trabajo de la fuerza externa que mantiene el tablón en reposo.

Aplicando el formalismo, estos fenómenos surgen de forma natural. Evidentemente una vez se obtienen esos resultados, a través de las operaciones algebraicas, hay que hacer también el esfuerzo, aunque menos acusado, de dar una interpretación física correcta. Los resultados obtenidos cumplen con el principio de relatividad y las ecuaciones fundamentales (SLN, PLT, RDC-SLN) son formalmente las mismas en uno y otro referencial.

PROBLEMAS ADICIONALES

El problema del bloque con rozamiento ha servido para introducir los conceptos clave del formalismo matricial desarrollado. En este capítulo se plantearán tres nuevos problemas que también combinan fenómenos mecánicos y termodinámicos. Los dos primeros van a ser choques inelásticos, el primero isoterma y el segundo adiabático. En estos, a diferencia del problema del bloque, no hay una fuerza conservativa que realice trabajo. Hasta ahora, en todos los problemas se disipa energía mecánica en energía térmica. En cambio, en el tercer problema va a suceder el fenómeno inverso, se va producir energía mecánica a expensas de la energía térmica.

4.1. Choque inelástico Bola-Pared

Una bola choca contra una pared de forma completamente inelástica. En el referencial fijo S, donde la pared está en reposo, la bola tiene una velocidad inicial $v_{i|CM}$ y al chocar contra la pared se detiene por completo, resultando en una velocidad final $v_{f|CM} = 0$. Por economía del lenguaje es común escuchar que en los choques inelásticos no se conserva la energía, lo que no es cierto, no se conserva la energía mecánica (del centro de masas). La energía se conserva siempre, solo que, en los choques inelásticos la energía mecánica se transfiere a la energía interna del cuerpo o se disipa en forma de calor (o una combinación de ambas).

Se escoge como sistema únicamente a la bola y como entorno la pared y la atmósfera. Como ya se discutió anteriormente, para poder afirmar que la pared no se mueve durante el choque, tiene que haber un agente externo que ejerza una fuerza, F^{ex} , que en todo momento sea igual a la fuerza que la bola hace sobre la pared, $F_{B/P}$. Por ejemplo, esto se podría conseguir lanzando una bola por el lado opuesto de la pared con la misma masa, a la misma velocidad y haciendo que impacte en el mismo instante. En la Fig. 4.1 se puede ver un diagrama del problema.

Al tratarse de un cuerpo extenso, solo aplica la SyMLN. Entonces la fuerza $F_{P/B}$ está asociada a la aceleración del centro de masas. La bola no se detiene de forma instantánea, tarda un tiempo t_0 en alcanzar el reposo. Durante ese tiempo el centro de masas se desplaza una distancia Δx_{CM} , siguiendo un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado. Experimentalmente la fuerza no es constante, pero se puede asumir que sí lo es y que $F_{P/B}$ es el valor medio de la fuerza real implicada en el proceso.

Se va a asumir que el proceso es isoterma, es decir, que toda la energía mecánica se disipa en forma de calor. Se puede suponer que la pared funciona como un foco térmico, sus propiedades termodinámicas permanecen constantes.

La ecuación fundamental en forma diferencial para el choque, siguiendo la definición dada en la Ec. (3.1), es

$$\begin{pmatrix} cmdv \\ md^2v + dU(T, V) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -cF_{P/B}dt \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -PdV_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \delta Q_0 \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

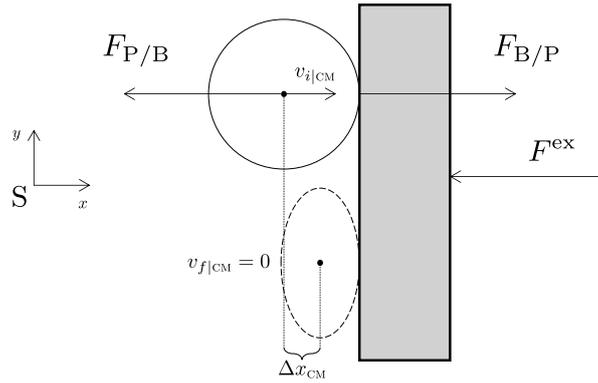


Figura 4.1: Diagrama del proceso. En línea continua la bola en el instante justo que comienza el choque. En línea discontinua, el instante justo cuando termina el choque. Para que el diagrama sea más claro, la fuerza externa, F^{ex} , y la bola después del choque está desplazadas verticalmente, pero tendrían que estar en la misma línea que el resto de elementos ya que se trabaja en una dimensión.

Las variaciones de volumen dependen únicamente de la variación de temperatura, $dV_B = V_B \alpha dT$. Como $dT = 0$, entonces $dV_B = 0$. Además, como la energía interna depende exclusivamente de T y V_B , $dU = 0$. Así que la ecuación matricial que describe el choque es

$$\begin{pmatrix} cm(0 - v_i) \\ \frac{1}{2}m(0 - v_i^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -cF_{P/B}t_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ Q_0 \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

donde la única fuerza que actúa sobre la bola es la que le hace la pared, $F_{P/B}$. Esta fuerza es igual que la que hace el agente externo sobre la pared

$$\begin{pmatrix} -cF_{P/B}t_0 \\ 0 \end{pmatrix} = W_{P/B} = W^{\text{ex}} = \begin{pmatrix} -cF^{\text{ex}}t_0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

El signo menos indica que la fuerza apunta en la dirección opuesta al eje x (ver Fig. 4.1). En el referencial S , los puntos de aplicación de estas fuerzas no se desplazan y por tanto no realizan trabajo.

Aunque no se escriba explícitamente, v_i es la velocidad inicial del centro de masas. Se ha optado por mantener la simplicidad en la notación, eliminando el subíndice $|_{\text{CM}}$.

De la primera componente en la Ec. (4.2) se obtiene la SLN:

$$-cmv_i = -cF_{P/B}t_0, \quad (4.4)$$

que, como ya se vio en el Cap. 2, es completamente equivalente a la RDC-SLN:

$$\frac{1}{2}mv_i^2 = F_{P/B}\Delta x_{\text{CM}}. \quad (4.5)$$

Los productos de fuerzas y desplazamientos que aparecen en la RDC-SLN son pseudo-trabajos, porque los desplazamientos son los del centro de masas. En este problema, como se esquematiza en la Fig. 4.1, la bola se deforma bajo la acción de $F_{P/B}$. Durante esta compresión (en el eje x), son los choques de los componentes internos de la bola (partículas puntuales o diferenciales de masa) los que hacen aumentar la energía interna de la bola. En el caso isoterma, la bola disipa la energía interna en forma de calor más rápido de lo que aumenta su temperatura.

De la última componente en la Ec. (4.2) se obtiene la PLT:

$$-\frac{1}{2}mv_i^2 = Q_0, \quad (4.6)$$

y si se le suma la RDC-SLN, en Ec. (4.5), se obtiene la ecuación del calor:

$$Q_0 = -F_{P/B}\Delta x_0. \quad (4.7)$$

Siguiendo el convenio de signos, el calor es negativo y por tanto sale de la bola hacia el entorno. Puesto que las propiedades termodinámicas de la bola permanecen constantes, su variación de entropía es nula. La variación de entropía del universo es igual a la variación de entropía del entorno

$$\Delta S_U = \Delta S_F = \frac{Q_F}{T_F} = \frac{F_{P/B}\Delta x_{CM}}{T_F} = \frac{\frac{1}{2}mv_i^2}{T_F} > 0. \quad (4.8)$$

Se ha podido aplicar la definición de Clausius porque el entorno funciona como un foco térmico y siempre intercambia calor de forma reversible. El calor tiene signo positivo porque visto desde el entorno $Q_F = -Q_0$.

El trabajo perdido se definió como, $W_{pr} = T_F\Delta S_U$. Para el caso concreto del choque completamente inelástico:

$$W_{pr} = F_{P/B}\Delta x_{CM} = \frac{1}{2}mv_i^2. \quad (4.9)$$

Toda la energía cinética de la bola se disipa en forma de calor, una forma de energía no aprovechable para la realización de trabajo.

4.1.1. Transformación general entre referenciales

Se puede resolver el problema en un referencial \bar{S} , en configuración estándar con S y que se mueve con velocidad V . Basta con aplicar la transformación de Lorentz en la aproximación de bajas velocidades. Se multiplica matricialmente a la Ec. (4.2) por la matriz de cambio de base $\Lambda(V)$, tal como está definida en la Ec. (3.46), pero en dos dimensiones:

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2} & -\frac{V}{c} \\ -\frac{V}{c} & 1 + \frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} cmv_f \\ mc^2 + \frac{1}{2}mv_f^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} cmv_i \\ mc^2 + \frac{1}{2}mv_i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -cF_{P/B}t_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ Q_0 \end{pmatrix} \right].$$

Cabe recordar que la transformación solo aplica a la ecuación fundamental en forma integrada, no en la forma diferencial como en Ec. (4.1). Tienen que aparecer los términos mc^2 en las matrices estado mecánico-termodinámico. Tomando el límite clásico en el que $V/c \rightarrow 0$, se obtiene la ecuación fundamental en el referencial \bar{S} :

$$\begin{pmatrix} cm[(v_f - V) - (v_i - V)] \\ \frac{1}{2}m[(v_f - V)^2 - (v_i - V)^2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -cF_{P/B}t_0 \\ F_{P/B}Vt_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ Q_0 \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Por definición es igual a:

$$\begin{pmatrix} cm(\bar{v}_f - \bar{v}_i) \\ \frac{1}{2}m(\bar{v}_f^2 - \bar{v}_i^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\bar{F}_{P/B}t_0 \\ \bar{W}_{F_{P/B}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ Q_0 \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Lo primero que destaca es que ahora $F_{P/B}$ sí realiza trabajo, porque en el referencial \bar{S} su punto de aplicación se desplaza. Además, el trabajo es positivo porque la fuerza y el desplazamiento son ambos negativos. El desplazamiento de $F_{P/B}$ es

$$\bar{r}_{F_{P/B}} = Vt_0 = x_{\bar{S}}. \quad (4.12)$$

Es decir, que el desplazamiento de la fuerza en \bar{S} , $\bar{r}_{F_{P/B}}$, es igual al desplazamiento de \bar{S} respecto a S , $x_{\bar{S}}$. Además ambos son iguales a la velocidad entre referenciales, V , multiplicada por el tiempo que actúa la fuerza, t_0 .

Comparando la parte izquierda de la igualdad entre las Ecs. (4.10) y (4.11), se obtiene la igualdad de velocidades entre referenciales. Teniendo en cuenta que $v_f = 0$:

$$\bar{v}_f = v_f - V = -V \quad ; \quad \bar{v}_i = v_i - V. \quad (4.13)$$

Como la bola acaba en reposo en el referencial S, sea cual sea la velocidad entre referenciales, \bar{v}_f siempre es $-V$.

Por la primera componente en la Ec. (4.10), la SLN es

$$cm(-V - v_i - V) = -c\bar{F}_{P/B}t_0 \quad \implies \quad cmv_i = c\bar{F}_{P/B}t_0. \quad (4.14)$$

Se obtiene el mismo resultado que en la Ec. (4.5) ($SLN = \overline{SLN}$) y en ambos referenciales se mide la misma fuerza, $F_{P/B} = \bar{F}_{P/B}$.

Por otro lado, se puede escribir la RDC-SLN en \bar{S} :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m(\bar{v}_f^2 - \bar{v}_i^2) &= -F_{P/B}\bar{x}_{CM}, \\ \frac{1}{2}m[(v_f - V)^2 - (v_i - V)^2] &= -F_{P/B}\bar{x}_{CM}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Expandiendo los cuadrados y operando:

$$\frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2) + Vm(v_f - v_i) = F_{P/B}\bar{x}_{CM}. \quad (4.16)$$

Utilizando la relación, $m(v_f - v_i) = -F_{P/B}t_0$, proveniente de la SLN en el referencial S y sustituyendo, se obtiene:

$$\frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2) = F_{P/B}(\bar{x}_{CM} - Vt_0) \quad (4.17)$$

Habiendo partido de la \overline{RDC} se ha obtenido una expresión que es formalmente idéntica a la RDC. El término $(\bar{x}_{CM} - Vt_0)$ se corresponde con x_{CM} , es decir, el desplazamiento del centro de masas visto desde S. Entonces

$$\boxed{x_{CM} = \bar{x}_{CM} + Vt_0} \quad (4.18)$$

$$Vt_0 = x_{\bar{S}} \quad ; \quad \bar{x}_{CM} < 0$$

Este es el corolario para los desplazamientos del centro de masas entre referenciales. Durante el tiempo que dura el choque, el desplazamiento (del centro de masas) en S es igual al desplazamiento (del centro de masas) en \bar{S} más lo que se desplaza \bar{S} con respecto a S (véase Fig. 4.2). Una vez pasa el tiempo t_0 , el referencial \bar{S} se aleja con velocidad V .

Por la segunda componente de la Ec. (4.10) se obtiene la \overline{PLT} :

$$\frac{1}{2}m[(v_f - V)^2 - (v_i - V)^2] = F_{P/B}Vt_0 + Q_0, \quad (4.19)$$

que es distinta de la PLT. Aparece el trabajo de $F_{P/B}$ y las velocidades no son iguales. Ahora bien si a la \overline{PLT} se le resta la \overline{RDC} se tiene:

$$\begin{aligned} 0 &= F_{P/B}Vt_0 + F\bar{x}_{CM} + Q_0 \\ Q_0 &= -F_{P/B}(Vt_0 + \bar{x}_{CM}) \end{aligned} \quad (4.20)$$

Al sustituir, $Vt_0 + \bar{x}_{CM} = x_{CM}$, se recupera la ecuación del calor para S, Ec. (4.7). Por tanto, la variación de entropía del universo y el trabajo perdido son iguales en ambos referenciales. En caso contrario, la descripción sería incorrecta.

4.1.2. Transformación para el referencial que viaja con el centro de masas

Quizá, el caso particular más relevante sea el del referencial \bar{S} que, antes del choque, se traslada solidario al centro de masas. Es decir, se desplaza con velocidad $V = v_i$ y en el momento inicial del impacto, su posición coincide con la del centro de masas de la bola. Se puede, en vez de escribir la ecuación fundamental, escribir la ecuación de los pseudo-trabajos

$$E_f - E_i = \sum_k W_k^{\text{ps}}, \quad (4.21)$$

donde W_k^{ps} es la matriz impulso-pseudo-trabajo, la primera componente es el impulso-lineal y la segunda el pseudo-trabajo. Si se escribe para el problema del choque inelástico bola-pared:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ mc^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} cmv_i \\ mc^2 + \frac{1}{2}mv_i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -cF_{P/B}t_0 \\ -F_{P/B}x_{\text{CM}} \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

Si se aplica la transformación, multiplicando por $\Lambda(V)$ y tomando el límite $V/c \rightarrow 0$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \bar{E}_f &= \begin{pmatrix} -cmV \\ mc^2 + \frac{1}{2}mV^2 \end{pmatrix}, \\ \bar{E}_i &= \begin{pmatrix} cm(v_i - V) \\ mc^2 + \frac{1}{2}m(v_i - V)^2 \end{pmatrix}, \\ \bar{W}_{P/B}^{\text{ps}} &= \begin{pmatrix} -cF_{P/B}t_0 \\ F_{P/B}(Vt_0 - x_{\text{CM}}) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Se obtienen los mismos resultados que se obtuvieron en el caso general, $\bar{v}_f = -V$ y $x_{\text{CM}} = \bar{x}_{\text{CM}} + Vt_0$. Además, por la nueva condición impuesta, $\bar{v}_i = 0$.

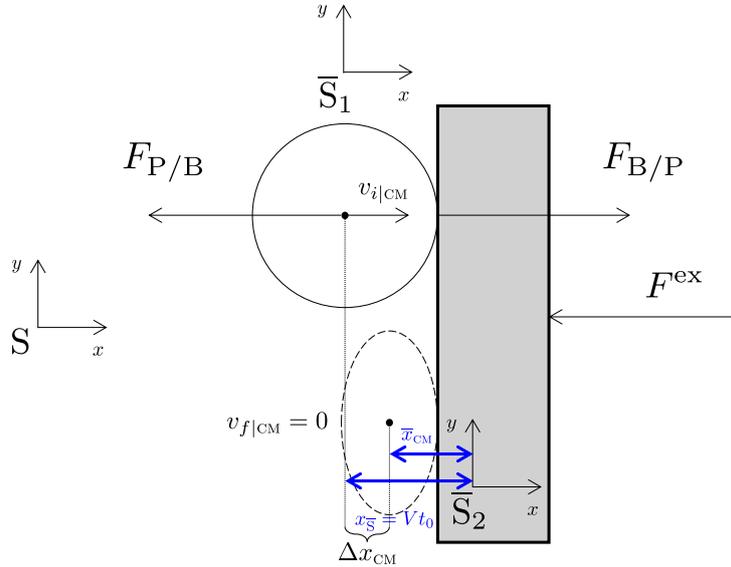


Figura 4.2: Diagrama análogo al de la Fig. 4.1. En azul se muestran las distancias: \bar{x}_{CM} y $x_{\bar{S}}$, que son respectivamente, el desplazamiento del centro de masas observado desde \bar{S} y el desplazamiento de \bar{S} con respecto a S . \bar{S}_1 es la posición del referencial en el instante inicial $t = 0$ y \bar{S}_2 en el instante final $t = t_0$.

Se tiene una configuración similar al esquema de la Fig. 4.2, donde $\bar{x}_{\text{CM}} < 0$. En \bar{S} , se observa una bola fija y una pared que se aproxima con velocidad $-V$. Es la pared la que choca contra la bola y ambas se alejan en dirección $-x$, con velocidad $-V$. Al imponer la condición extra,

$V = v_i$, ahora \bar{x}_{CM} tiene un valor definido respecto a x_{CM} . Hay que usar las relaciones cinemáticas para encontrar ese valor. En S:

$$\begin{aligned} \cancel{v_i}^0 - v_i &= at_0 \implies v_i = -at_0, \\ x_{\text{CM}} &= v_i t + \frac{1}{2} at_0^2 = v_i t_0 + \frac{1}{2} (at_0) t_0. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Sustituyendo $at_0 = -v_i$:

$$x_{\text{CM}} = v_i t_0 - \frac{1}{2} v_i t_0 = \frac{1}{2} v_i t_0. \quad (4.25)$$

Por el resultado $\bar{x}_{\text{CM}} = x_{\text{CM}} - V t_0$, obtenido en las Ecs. (4.18) y (4.23), sustituyendo $V = v_i$:

$$\bar{x}_{\text{CM}} = \frac{1}{2} v_i t_0 - v_i t_0 = -\frac{1}{2} v_i t_0 = -x_{\text{CM}}. \quad (4.26)$$

La particularidad de este caso es que ambos referenciales ven el mismo desplazamiento del centro de masas (en valor absoluto). En ambos referenciales se mide el mismo pseudo-trabajo de $F_{\text{P/B}}$, por tanto, se obtienen las mismas relaciones dinámicas, $\text{RDC} = \overline{\text{RDC}}$. El resto de relaciones son análogas al caso general.

4.2. Fusión de una bala de plomo

Se tiene una bala de plomo de masa m , a temperatura ambiente, por debajo de su temperatura de fusión ($T_i < T_{\text{fu}}$). Se quiere determinar la velocidad mínima a la que debe impactar contra una pared para que se funda por completo. Tanto la pared como la atmósfera permanecen a la temperatura inicial y actúan como foco térmico. Se conoce la temperatura de fusión del plomo $T_{\text{fu}} \approx 327 \text{ }^\circ\text{C}$, su calor específico a presión atmosférica $c_P \approx 129 \text{ J.kg}^{-1}.\text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ y su entalpía de fusión $\Delta h_{\text{fu}} \approx 4,3 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{mol}} \cdot \frac{1 \text{ mol}}{207,2 \text{ g}} \cdot \frac{10^3 \text{ g}}{1 \text{ kg}} \approx 2,1 \cdot 10^4 \text{ J.kg}^{-1}$. (Ref. constantes Pb.¹)

Se puede resolver de forma intuitiva, argumentando que toda la energía cinética se transforma en energía térmica. La energía térmica es la necesaria para aumentar la temperatura hasta la temperatura de fusión, más la necesaria para cambiar de fase de sólido a líquido. Asumiendo un proceso a presión constante, es la variación de entalpía de T_i a T_{fu} más la entalpía de fusión:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m v^2 &= \Delta h(T) + m \Delta h_{\text{fu}}, \\ \frac{1}{2} m v^2 &= m c_P (T_{\text{fu}} - T_i) + m \Delta h_{\text{fu}}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

La velocidad no depende de la masa de la bala, solo de su composición química. Para cada material se tendrá un valor de c_P y h_{fu} distinto. Despejando se obtiene un valor estimado de

$$v \approx \left[2 [c_P (327 \text{ }^\circ\text{C} - 20 \text{ }^\circ\text{C}) + \Delta h_{\text{fu}}] \right]^{1/2} \approx [2(4 \cdot 10^4 + 2,1 \cdot 10^4)]^{1/2} \approx 349 \text{ m/s} \quad (4.28)$$

La energía necesaria por unidad de masa de plomo para elevar la temperatura del plomo, desde la temperatura ambiente hasta la temperatura de fusión, es aproximadamente el doble de la energía necesaria para fundirlo. No es necesario trabajar en escala de temperaturas absoluta, la entalpía es función de estado, entonces, solo importan las variaciones de temperatura, que son las mismas en ambas escalas.

¹. National Institute of Standards and Technology. *NIST Chemistry WebBook: Pb*. 2023. (Visitado 10-02-2025).

4.2.1. Resolución con matrices entalpía

Al tratarse de un proceso a presión constante, como se deduce en la Sec. 3.2, se puede plantear el problema mediante la ecuación fundamental para la entalpía. El sistema de estudio es la bala, mientras que la pared y la atmósfera son el entorno, comportándose como un foco térmico. En el referencial S en que la pared está fija, se observa que (el centro de masas de) la bala tiene inicialmente una velocidad v_i . Cuando comienza el choque la pared le ejerce una fuerza $F_{P/B}$ durante un tiempo t_2 . Durante el choque el centro de masas se desplaza una distancia x_{CM} y en el instante t_2 tiene una velocidad final $v_f = 0$. La cinemática del centro de masas es análoga a la del problema anterior, el choque inelástico bola-pared. El diagrama de las fuerzas implicadas es equivalente al de la Fig. 4.1, es imprescindible la acción del agente externo para poder considerar que la pared no se desplaza.

Se puede separar el problema en tres instantes (véase Fig. 4.3). El primero, $t_0 = 0$, el instante en que comienza el choque, donde el centro de masas tiene la velocidad v_i con la que fue lanzada la bala, encontrándose a la misma temperatura que el entorno, T_i . La velocidad v_i es la incógnita del problema. En el segundo instante, t_1 , la bala alcanza la temperatura de fusión del plomo, T_{fu} . El centro de masas tendrá una velocidad v_1 y se habrá desplazado (en S) una distancia x_1 , pero ambas magnitudes son desconocidas. En el instante t_2 , el centro de masas alcanza el reposo, $v_2 = 0$ y toda la bala se ha fundido, es decir, que la masa de plomo en estado líquido es la masa de la bola, $m_L = m$. El centro de masas ha recorrido una distancia $x_2 = x_{CM}$, conocida. Planteando el problema de esta forma se realizan algunas aproximaciones. La primera es que la

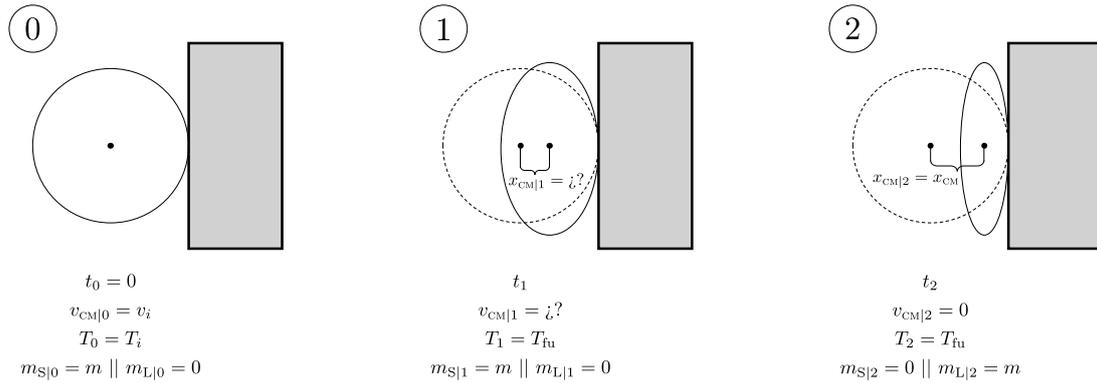


Figura 4.3: Diagrama del problema. Aparecen representados tres instantes distintos: $t_0 = 0$ el momento justo antes del impacto, t_1 cuando toda la bala alcanza la temperatura de fusión y t_2 cuando la bala se funde por completo.

bala aumenta de temperatura uniformemente en todo su volumen, todos los puntos alcanzan la temperatura de fusión a la vez. La segunda es considerar que la bala está rodeada de una pared adiabática flexible, no hay pérdidas por calor y toda la energía se convierte en energía interna de la bala. Si a esto se le suma, que el centro de masas se para justo cuando toda la masa se funde por completo y el sistema acaba con temperatura $T_2 = T_{fu}$, la velocidad inicial, v_i , que se obtenga, será la velocidad mínima con la que habría que lanzar el proyectil para que se fundiese.

Así pues, se divide el problema en dos procesos. De t_0 a t_1 se produce el aumento de temperatura de la bala hasta la temperatura de fusión. Su ecuación fundamental en matrices entalpía es:

$$\Delta H_A = H_1 - H_0 = W_{0 \rightarrow 1},$$

$$\begin{pmatrix} cmv_1 \\ mc^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 + mc_P T_{fu} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} cmv_i \\ mc^2 + \frac{1}{2}mv_i^2 + mc_P T_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cF_{P/B}(t_1 - t_0) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.29)$$

Se trabaja en una dimensión espacial, por lo tanto las matrices tienen dos componentes, la parte mecánica y la parte termodinámica. Al considerar un proceso adiabático la matriz calor es:

$Q = (0, 0)$.

El segundo proceso, de t_1 a t_2 , es el cambio de fase de sólido a líquido. Su ecuación fundamental es:

$$\Delta H_B = H_2 - H'_1 = W_{1 \rightarrow 2},$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ mc^2 + m_{L|2} \Delta h_{fu} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} cmv_1 \\ mc^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 + m_{L|1} \Delta h_{fu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -cF_{P/B}(t_2 - t_1) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.30)$$

Los términos $m_{L|1}$ y $m_{L|2}$ son la cantidad de líquido en masa que hay en los respectivos instantes. Para el instante t_1 la masa de bala que ha cambiado de fase es cero, así que, $m_{L|1} \Delta h_{fu} = 0$.

Se puede, ahora, obtener la relación para el proceso total sumando las Ecs. (4.29) y (4.30)

$$\Delta H_B + \Delta H_A = H_2 - H'_1 + H_1 - H_0 = W_{1 \rightarrow 2} + W_{0 \rightarrow 1}. \quad (4.31)$$

Al operar H_1 con H'_1 se obtiene:

$$H_1 - H'_1 = \begin{pmatrix} cm(v_1 - v_1) \\ mc^2 - mc^2 + \frac{1}{2}m(v_1 - v_1) + m_{L|1} \Delta h_{fu} + mc_P T_{fu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ mc_P T_{fu} \end{pmatrix}, \quad (4.32)$$

los momentos y energías cinéticas se anulan entre sí. Lo mismo sucede con el tiempo t_1 , en las matrices impulso-trabajo $W_{1 \rightarrow 2}$ y $W_{0 \rightarrow 1}$,

$$W_{1 \rightarrow 2} + W_{0 \rightarrow 1} = \begin{pmatrix} -cF_{P/B}(t_2 - t_1 + t_1 - t_0) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cF_{P/B}(t_2 - t_0) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.33)$$

Entonces, la ecuación matricial para el proceso total queda (se usa que $t_0 = 0$)

$$\begin{pmatrix} 0 \\ mc^2 + m \Delta h_{fu} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} cmv_i \\ mc^2 + \frac{1}{2}mv_i^2 - mc_P(T_{fu} - T_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -cF_{P/B}t_2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.34)$$

De la segunda componente se obtiene la PLT

$$\boxed{\frac{1}{2}mv_i^2 = mc_P(T_{fu} - T_i) + m \Delta h_{fu}}, \quad (4.35)$$

que es el mismo resultado que la solución intuitiva, Ec. (4.27).

De la primera componente se obtiene la SLN y haciendo las operaciones pertinentes, la RDC-SLN.

$$mv_i = F_{P/B}t_2, \quad (4.36)$$

$$\frac{1}{2}mv_i^2 = F_{P/B}x_{CM|2} = F_{P/B} \Delta x_{CM}. \quad (4.37)$$

Ambas coinciden con las obtenidas en el problema del choque inelástico bola-pared, Ecs. (4.4) y (4.5). El pseudo-trabajo de $F_{P/B}$ es negativo, la fuerza apunta en la dirección negativa y el desplazamiento del centro de masas es positivo. Al ser la variación de energía cinética también negativa, ambos signos se cancelan y la expresión queda positiva.

Restando la Ecs. (4.37) y (4.35), se obtiene la ecuación del calor

$$F_{P/B} \Delta x_{CM} = F^{\text{ex}} \Delta x_{CM} = mc_P(T_{fu} - T_i) + m \Delta h_{fu}. \quad (4.38)$$

Los efectos térmicos son consecuencia directa de la compresión de la bala, que sucede por la acción de la pared a través de la fuerza $F_{P/B}$. Tal como está planteado el problema, esa fuerza es en realidad la que el agente externo hace sobre la pared, para que esta no se mueva. En última instancia, es el pseudo-trabajo de la fuerza externa, el que transforma la energía mecánica inicial de la bala en energía térmica. Este es el efecto cinta transportadora del que se habló en la Sec. 3.4.3

4.2.2. Variación de entropía del universo

La variación de entropía del universo va a ser, dado que se tiene un proceso adiabático, exclusivamente la variación de entropía de la bala:

$$\Delta S_U = \Delta S + \Delta S_F = \Delta S + \frac{Q_F^{\rightarrow 0}}{T_F} = \Delta S. \quad (4.39)$$

Hay dos contribuciones al aumento de entropía de la bala, una por el aumento de temperatura hasta la temperatura de fusión ΔS_T y otra por el cambio de fase de sólido a líquido, ΔS_{fu} :

$$\Delta S = \Delta S_T + \Delta S_{fu}, \quad (4.40)$$

donde

$$\Delta S_T = \int_{T_i}^{T_{fu}} \frac{mc_P}{T} dT = mc_P \ln \frac{T_{fu}}{T_i} \quad \text{y} \quad \Delta S_{fu} = \frac{Q_{fu}}{T_{fu}} = \frac{m\Delta h_{fu}}{T_{fu}}. \quad (4.41)$$

Para ΔS_T se ha utilizado el resultado de la Ec. (2.93) y para ΔS_{fu} la definición de Clausius, Ec. (2.90), ambas en el Cap. 2. Así pues,

$$\boxed{\Delta S_U = mc_P \ln \frac{T_{fu}}{T_i} + \frac{m\Delta h_{fu}}{T_{fu}}}. \quad (4.42)$$

4.2.3. Trabajo perdido y recuperado

La bala termina a una temperatura $T_f = T_{fu} > T_i$, no ha realizado un ciclo termodinámico completo. Se puede por tanto, mediante ciclos de Carnot, por definición reversibles, extraer trabajo mientras la bala vuelve al equilibrio.

El trabajo recuperado total será la combinación del trabajo recuperado de la solidificación de la bala en estado líquido y el trabajo recuperado de volver a la temperatura inicial

$$W_{rc} = W_{re|fu} + W_{re|T} \quad (4.43)$$

El trabajo recuperado se puede calcular como: $W_{rc} = Q_a - Q_c$, donde Q_a es el calor absorbido y Q_c es el calor mínimo cedido al foco, para que la entropía del universo no disminuya. El trabajo recuperado de la transición de fase es

$$W_{re|fu} = m\Delta h_{fu} - T_F \Delta S_F = m\Delta h_{fu} - T_F \frac{m\Delta h_{fu}}{T_{fu}} = \left(1 - \frac{T_F}{T_{fu}}\right) m\Delta h_{fu}. \quad (4.44)$$

Cuando la temperatura del entorno es la misma que la temperatura de fusión, no se puede recuperar trabajo. En el límite $T_F/T_{fu} \rightarrow 0$, es decir $T_{fu} \gg T_F$, el trabajo recuperado es máximo.

El trabajo recuperado de la variación de temperatura es:

$$W_{re|T} = mc_P(T_{fu} - T_i) - T_F \Delta S_F = mc_P(T_{fu} - T_i) - T_F mc_P \ln \frac{T_{fu}}{T_F}. \quad (4.45)$$

El resultado es:

$$\boxed{W_{rc} = mc_P(T_{fu} - T_i) - T_F mc_P \ln \frac{T_{fu}}{T_F} + \left(1 - \frac{T_F}{T_{fu}}\right) m\Delta h_{fu}}. \quad (4.46)$$

El trabajo perdido se define como la diferencia entre la energía mecánica final y la inicial. Entonces:

$$W_{pr} = E_{m|i} - E_{m|f} - \frac{1}{2}mv_i^2 - W_{rc}. \quad (4.47)$$

De la PLT, en Ec. (4.35), se puede sustituir la energía cinética inicial por $mc_P(T_{fu} - T_i) + m\Delta h_{fu}$ y el trabajo recuperado por la expresión de la Ec. (4.46).

$$W_{pr} = \cancel{c_P(T_{fu} - T_i)} + \cancel{m\Delta h_{fu}} - \left(\cancel{mc_P(T_{fu} - T_i)} - T_F mc_P \ln \frac{T_{fu}}{T_F} \right) - \left(\cancel{m\Delta h_{fu}} - T_F \frac{m\Delta h_{fu}}{T_{fu}} \right). \quad (4.48)$$

Operando:

$$W_{pr} = T_F \left(mc_P \ln \frac{T_{fu}}{T_F} + m\Delta h_{fu} \right). \quad (4.49)$$

Por la Ec. (4.42), el paréntesis es la variación de entropía del universo. Se obtiene el mismo resultado que la expresión general del trabajo perdido,

$$W_{pr} = T_F \Delta S_U. \quad (4.50)$$

4.2.4. Conclusiones

La transformación entre referenciales es prácticamente la misma que en el problema del choque inelástico, principalmente porque este problema es un choque inelástico adiabático. De repetirlo para este problema, no se estudiaría ningún fenómeno nuevo que no se haya discutido ya en el caso isoterma. Las diferencias están en los fenómenos térmicos que es en lo que se ha querido hacer hincapié.

Aunque el resultado es el mismo que en la solución intuitiva, el formalismo permite ahondar en la física detrás del problema. En la resolución intuitiva no se plantea el mecanismo por el cual se transforma la energía mecánica en térmica. En cambio, el formalismo conduce de forma natural a hablar de la compresión de la bala, del desplazamiento del centro de masas, del pseudo-trabajo de la fuerza $F_{P/B}$ y por último, de los choques entre los constituyentes internos de la bala, que llevan al aumento de su energía interna. Además, en la resolución intuitiva no se plantea nada sobre variaciones de entropía, trabajos perdidos y recuperados. Esas preguntas y sus respuestas salen por inercia al usar el propio formalismo.

Al plantear el problema con matrices entalpía, H , en vez de con matrices estado mecánico-termodinámico, E , se está perdiendo la oportunidad de hablar de las variaciones de volumen contra la presión atmosférica y la relación entre la variación de la energía interna con la variación de densidad en el cambio de fase. Se ha decidido así por concisión y claridad.

Por último, cabe mencionar que el valor numérico de $v_i \approx 349$ m/s es coherente con relatos históricos de conflictos bélicos o duelos con armas de fuego, en los que dos proyectiles chocan frontalmente, se quiere pensar que salvando así la vida de sus respectivos contendientes. Es razonable asumir que una pistola o un mosquete antiguos disparaban a una velocidad cercana a la del sonido.

4.3. Proyectil lanzado en vertical

Un proyectil de masa m es lanzado en vertical por un cañón. Dentro del cañón tiene lugar la reacción química $\xi = H_2 + \frac{1}{2}O_2 \rightarrow H_2O + \Delta g_\xi$. Inicialmente el proyectil tenía una velocidad inicial $v_i = 0$ y adquiere una velocidad final v_f . Se quiere saber cuántos moles, n_ξ , de O_2 y H_2 tienen que reaccionar para que el proyectil adquiriera una velocidad final concreta.

Si se escoge como sistema únicamente al proyectil, no se obtiene nada de información acerca de la reacción química. Sobre el proyectil actúa la fuerza de la gravedad, mg , la fuerza que ejerce la reacción química, F_ξ , y la fuerza atmosférica, PA , donde P es la presión atmosférica y A es la sección del proyectil, que es igual a la sección del cañón. Las matrices impulso-trabajo de estas fuerzas son:

$$W_g = \begin{pmatrix} -cmgt_0 \\ -mgh_0 \end{pmatrix} ; \quad W_\xi = \begin{pmatrix} cF_\xi t_0 \\ F_\xi h_0 \end{pmatrix} ; \quad W_a = \begin{pmatrix} -cPA t_0 \\ PA h_0 \end{pmatrix}. \quad (4.51)$$

Todas ellas realizan trabajo, dado que su punto de aplicación se desplaza con el proyectil. Si se toma que inicialmente el proyectil se encuentra a una altura $h_i = 0$ y alcanza con una altura $h_f = h_0$, entonces su desplazamiento es h_0 . Las matrices tienen dos dimensiones porque se trabaja en una única dimensión espacial, en este caso, en la componente y . Por esta razón, se cambia la notación de desplazamientos x a alturas h .

Se va a asumir que las propiedades termodinámicas del proyectil permanecen constantes, no varía su temperatura ni su volumen. Entonces su ecuación fundamental, en forma compacta y en forma matricial, es respectivamente:

$$E_{f|p} - E_{i|p} = W_g + W_\xi + W_a, \\ \begin{pmatrix} cmv_f \\ mc^2 + \frac{1}{2}mv_f^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ mc^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -cmgt_0 \\ -mgh_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} cF_\xi t_0 \\ F_\xi h_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -cPA t_0 \\ -PA h_0 \end{pmatrix}. \quad (4.52)$$

De esta ecuación no se puede obtener información de los moles puestos en juego en la reacción.

Considerando ahora como sistema a la reacción química, las fuerzas que actúan sobre esta son: la que le hace el proyectil, $F_{p/\xi}$, y la que le hace la base del cañón, $F_{c/\xi}$. Por la tercera ley de Newton, estas son iguales en magnitud a F_ξ y en sentido opuesto. Por tanto,

$$W_{p/\xi} = \begin{pmatrix} -cF_{p/\xi} t_0 \\ -F_{p/\xi} h_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -cF_\xi t_0 \\ -F_\xi h_0 \end{pmatrix} ; \quad W_{c/\xi} = \begin{pmatrix} cF_{c/\xi} t_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -cF_\xi t_0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.53)$$

En el referencial S, en el que el cañón permanece en reposo, el punto de aplicación de $F_{c/\xi}$ no se desplaza, así que no realiza trabajo. En cambio, la fuerza que le hace el proyectil se desplaza y realiza trabajo. Se podría tener en cuenta la acción de la gravedad sobre la reacción, pero se puede despreciar si se asume que $m \gg n_\xi M_{H_2O}$.

La variación de entropía de la reacción química es negativa, $\Delta S_\xi < 0$. Para que la entropía del universo no disminuya, se le tendrá que ceder al foco una cantidad de calor mínima $Q_{\min} = T_F \Delta S_\xi$. Este es el caso reversible, en el que la variación de entropía del universo es justo cero, $\Delta S_U = -\Delta S_\xi + \frac{Q_{\min}}{T_F} = 0$. Por consiguiente, la matriz calor es:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 \\ T_F \Delta S_\xi \end{pmatrix}. \quad (4.54)$$

La ecuación fundamental para la reacción es:

$$E_{f|\xi} - E_{i|\xi} = W_{p/\xi} + W_{c/\xi} + Q, \\ \begin{pmatrix} 0 \\ mc^2 + U_f(T, V_\xi, n_\xi) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ mc^2 + U_i(T, V_\xi, n_\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -cF_\xi t_0 \\ -F_\xi h_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} cF_\xi t_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ T_F \Delta S_\xi \end{pmatrix}. \quad (4.55)$$

El centro de masas de los gases de la reacción no tiene velocidad inicial ni final. La SLN para los gases de la reacción, obtenida de la primera componente de la Ec. (4.55), verifica la afirmación anterior.

Considerando el cañón como sistema, además de la fuerza $F_{\xi/c} = -F_{\xi}$, hay que introducir la acción del agente externo para que se mantenga fijo en el referencial S. Se tiene que

$$\begin{aligned} E_{f|c} - E_{i|c} &= W_{\xi/c} + W^{\text{ex}}, \\ \begin{pmatrix} 0 \\ mc^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ mc^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -cF_{\xi/c}t_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} cF^{\text{ex}}t_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.56)$$

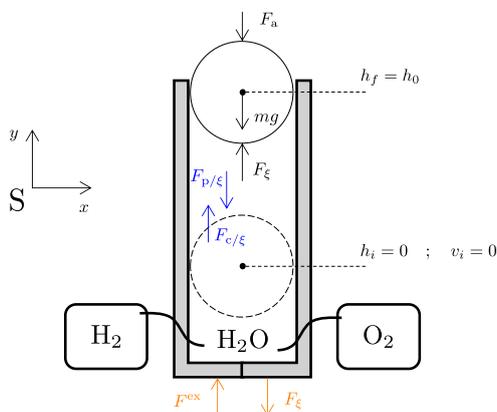


Figura 4.4: Diagrama del problema. En línea discontinua el proyectil en el momento inicial y en línea sólida en el momento final. Las fuerzas que actúan sobre el proyectil se pintan en negro, sobre la reacción en azul y sobre el cañón en naranja.

Conviene subrayar que las variables v_i y v_f son las velocidades del centro de masas del proyectil. Siendo rigurosos con la notación, se tendría que haber escrito $v_{i|CM|p}$ y $v_{f|CM|p}$. Se puede omitir el subíndice “p” porque, en el referencial S, el único cuerpo que tiene velocidad es el proyectil. Lo mismo sucede con la energía interna, donde se escribe U_i y U_f en vez de $U_{i|\xi}$ y $U_{f|\xi}$, porque se considera que la reacción ξ es el único cuerpo que tiene energía interna (que varía su energía interna).

Si nuevamente se escoge un sistema distinto, esta vez el sistema conjunto proyectil-reacción, sumando las Ecs. (4.52) y (4.55) se obtiene la ecuación fundamental para el proceso.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} cmv_f \\ mc^2 + \frac{1}{2}mv_f^2 + U_f(T, V_{\xi}, n_{\xi}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ mc^2 + U_i(T, V_{\xi}, n_{\xi}) \end{pmatrix} &= \\ = \begin{pmatrix} cF_{\xi}t_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -cmgt_0 \\ -mgh_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -cPA t_0 \\ -P\Delta V_{\xi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ T_F\Delta S_{\xi} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Se ha reescrito PAh_0 como $P\Delta V_{\xi}$, porque la variación en la altura del proyectil está relacionada con la variación de volumen de la reacción, $A\Delta h = \Delta V$. En este problema, el trabajo de configuración transmite impulso al proyectil.

De la primera componente se obtiene la SLN,

$$\boxed{mv_f = (F_{\xi} - mg - PA)t_0}, \quad (4.58)$$

que es el mismo resultado que se obtendría con la ecuación fundamental solo para el proyectil, Ec. (4.52). Por consiguiente, la RDC-SLN también sería igual y se obtendría:

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = (F_{\xi} - mg - PA)h_0 \implies \frac{1}{2}mv_f^2 + mgh_0 = F_{\xi}h_0 - PAh_0. \quad (4.59)$$

La energía cinética y la potencial que gana el proyectil, se consiguen a expensas del pseudo-trabajo de F_{ξ} contra la presión atmosférica. De la segunda componente en la Ec. (4.57) se

obtiene la PLT

$$\frac{1}{2}mv_f^2 + \Delta U(T, V_\xi, n_\xi) = -mgh_0 - P\Delta V_\xi + T_F\Delta S_\xi. \quad (4.60)$$

Reorganizando términos:

$$\frac{1}{2}mv_f^2 + mgh_0 = -[\Delta U(T, V_\xi, n_\xi) + P\Delta V_\xi - T_F\Delta S_\xi]. \quad (4.61)$$

El término entre corchetes se corresponde a la variación del potencial de Gibbs para la reacción, ΔG_ξ . Para que esto sea cierto, es necesario asumir que tanto la presión, P , como la temperatura, T , permanecen constantes. El potencial de Gibbs se define como:

$$G \equiv H - TS = U + PV - TS \quad (4.62)$$

Tomando diferenciales

$$dG = dU + PdV + VdP - TdS - SdT. \quad (4.63)$$

Como se asume que P y T son constantes, entonces, $dP = 0$, $dT = 0$ y la igualdad anterior se reduce a:

$$\Delta G = \Delta U + P\Delta V - T\Delta S. \quad (4.64)$$

Así que, la PLT en Ec. (4.60) se convierte en

$$\boxed{\frac{1}{2}mv_f^2 + mgh_0 = -\Delta G_\xi = -n_\xi\Delta g_\xi}. \quad (4.65)$$

Las energías cinética y potencial finales del proyectil, se obtienen a expensas de la disminución del potencial de Gibbs de la reacción química. Se tienen que consumir n_ξ moles de H_2 y $\frac{1}{2}n_\xi$ moles de O_2 .

4.3.1. Variación de entropía. Trabajo perdido y recuperado

Se ha asumido que el calor cedido es el calor mínimo, $Q_{\min} = T_F\Delta S_\xi$, entonces el proceso es reversible y el trabajo perdido es cero. En cambio, si ahora se asume que se cede un calor $Q_0 = Q_{\min} + Q^* > Q_{\min}$, entonces el proceso dejará de ser reversible. Si la expansión contra la atmósfera es la misma, la altura h_0 en el instante t_0 será igual, pero el proyectil tendrá una velocidad final distinta, $\hat{v}_f < v_f$. La ecuación de la PLT queda:

$$\frac{1}{2}m\hat{v}_f^2 + \Delta U_\xi = -mgh_0 - P\Delta V_\xi + T_F\Delta S_\xi + Q^*. \quad (4.66)$$

La variación de entropía del universo sería:

$$\Delta S_U = -\Delta S_\xi + \frac{T_F\Delta S_\xi}{T_F} + \frac{Q^*}{T_F} = \frac{Q^*}{T_F}. \quad (4.67)$$

El trabajo perdido es la diferencia entre la energía mecánica del proceso reversible y la energía mecánica del proceso con pérdida de calor Q^* :

$$W_{\text{pr}} = E_m - E_m^* = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgh_0 - \left(\frac{1}{2}m\hat{v}_f^2 + mgh_0\right) = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}m\hat{v}_f^2. \quad (4.68)$$

Sustituyendo por las Ecs (4.60) y (4.66):

$$W_{\text{pr}} = Q^* = T_F\Delta S_U. \quad (4.69)$$

4.3.2. Cambio de referencial

Para el referencial en configuración estándar, \bar{S} , que se mueve con velocidad $\mathbf{V} = (0, V, 0)$ respecto a S , se obtendría:

$$\begin{aligned} \bar{E}_f - \bar{E}_i &= \bar{W}_{c/\xi} + \bar{W}_g + \bar{W}_a + \bar{Q}, \\ &= \begin{pmatrix} cm(v_f - V) \\ mc^2 + \frac{1}{2}m(v_f - V)^2 + U_{f|\xi} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ mc^2 + \frac{1}{2}mV^2 + U_{i|\xi} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} cF_\xi t_0 \\ F_\xi V t_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -cmgt_0 \\ -mg(h_0 - Vt_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -cPA t_0 \\ -PA(h_0 - h_{\bar{S}}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ T_F \Delta S_\xi \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.70)$$

Se obtienen los mismos efectos ya discutidos en los problemas anteriores, los trabajos de las fuerzas cambian, incluso fuerzas que no hacían trabajo en S sí lo hacen en \bar{S} . El desplazamiento de \bar{S} con respecto a S es $h_{\bar{S}} = Vt_0$ y los desplazamientos del centro de masas del proyectil cumplen, $h_0 - h_{\bar{S}} = \bar{h}_0$. También se observa una variación de volumen distinta en \bar{S} , $\bar{V}_\xi = A(h_0 - h_{\bar{S}}) = A\bar{h}_0$.

4.3.3. Conclusiones

Se ha visto cómo el formalismo matricial desarrollado permite estudiar la producción de energía mecánica a través de la variación del potencial de Gibbs de una reacción química.

Quizá, lo que más puede ir en contra de la intuición física en este problema es que el centro de masas de los productos de la reacción tenga velocidad final cero. Imaginando el disparo de un cañón, la deflagración de la pólvora se proyecta hacia adelante, contradiciendo el planteamiento del problema. La realidad es siempre más compleja que cualquier modelo. Para resolver el problema hay que hacer aproximaciones. Se asume que la reacción está controlada, que es un proceso cuasiestático en el que se va pasando por sucesivos estados de equilibrio. Por eso se asume el caso ideal, en el que el calor cedido al entorno es el mínimo y se ha conseguido convertir toda la energía química en energía mecánica. Claro está, una reacción como el estallido de pólvora dentro de un cañón es lo más alejado de un proceso cuasiestático. Es el mismo enfoque que se toma en la compresión de un émbolo bajo una fuerza.

Por otro lado, se puede pensar en casos análogos a un cañón, en el sentido de un cuerpo que impulsa a otro y el primero mantiene su centro de masas en reposo, por ejemplo, una catapulta o un lanzador olímpico de peso. En estos dos casos, la intuición física no choca con la idea de que la catapulta o el lanzador acaben con velocidad final nula.

Referencias

- [1] B. J. Tefft, J. A. Tefft. *Galilean Relativity and the Work-Kinetic Energy Theorem*. The Physics Teacher **45**, 4, pp. 218-220. (2007). doi: 10.1119/1.2715417: <https://doi.org/10.1119/1.2715417>.
- [2] V. Voroshilov. *Response to "Galilean Relativity and the Work-Kinetic Energy Theorem"*. The Physics Teacher **45**, 6, pp. L1. (2008).
- [3] B. A. Sherwood. *Pseudowork and real work*. American Journal of Physics **51**, 7, pp. 597-602. (1983). doi: 10.1119/1.13173: <https://doi.org/10.1119/1.13173>.
- [4] J. . R. Morones Ibarra. *El principio de mínima acción*. Ingenierías **27**, 97, pp. 53-67. (2024). doi: 10.29105/ingenierias27.97-959: <https://doi.org/10.29105/ingenierias27.97-959>.
- [5] S. Mahajan. *A student's guide to Newton's laws of motion*. Cambridge University Press, 2020. ISBN: 978-1-108-45719-4.
- [6] M. W. Zemansky, R. H. Dittman. *Calor y Termodinámica*. Ed. 6. McGraw-Hill, 1988. ISBN: 968-451-631-2.
- [7] H. Erlichson. *Internal energy in the first law of thermodynamics* **52**, 7, pp. 623-625. doi: 10.1119/1.13601: <http://dx.doi.org/10.1119/1.13601>.
- [8] B. A. Sherwood, W. H. Bernard. *Work and heat transfer in the presence of sliding friction*. American Journal of Physics **52**, 11, pp. 1001-1007. (1984). doi: 10.1119/1.13775: <https://doi.org/10.1119/1.13775>.
- [9] J. Güémez. *Teoría especial de la relatividad. Mecánica y termodinámica*. Ed. Universidad de Cantabria, 2019. ISBN: 978-84-8102-873-7. DOI: [10.22429/Euc2018.087](https://doi.org/10.22429/Euc2018.087).
- [10] W. S. C. Williams. *Introducing special relativity*. CRC Press, 2002. ISBN: 978-0415277624.
- [11] J. Güémez, J. A. Mier. *Plano inclinado relativista*. Revista española de física **37**, 2, pp. 37-42. (2023).
- [12] . National Institute of Standards and Technology. *NIST Chemistry WebBook: Pb*. 2023. URL: <https://webbook.nist.gov/cgi/cbook.cgi?Name=lead&Units=SI> (visitado 10-02-2025).