Facultad de Ciencias

Fibrados sobre Espacios Topológicos

(Fibrations over Topological Spaces)

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autor: Jonay Lamadrid Pérez

Directora: Nuria Corral Pérez

Noviembre - 2024

Agradecimientos

Quiero comenzar dando las gracias a mi directora, Nuria Corral, por su tiempo y su confianza. La rama de la Topología me suscitó gran interés desde que nos explicó hace ya algunos años las primeras definiciones y resultados. Me alegra haber podido realizar este trabajo bajo su dirección.

También quiero agradecer a Sonia Alonso su labor como profesora de matemáticas en secundaria y Bachillerato. Heredé en sus clases su amor por las matemáticas y me animó siempre a estudiar el Grado. Yo camino a sus hombros, hombros de gigante.

Muchas gracias a todos mis amigos, los que conocí antes y durante el Grado. Creo genuinamente que de no haber aguantado mis altibajos, no habría llegado hasta aquí. Gracias por ser capaces de sacarme las mayores carcajadas. Esta carrera nos la hemos sacado entre todos, confiad.

Para terminar, gracias a mi familia, tanto a los que puedo abrazar como a los que ya no. En especial, gracias a mis padres, Isa y Maxi, por haber hecho todo lo posible para que pudiese estudiar lo que quería y a mi hermana, Enara, por ser siempre mi ejemplo y mi pilar. Nos ha costado, pero ahora que estamos aquí, que nos quiten lo bailado.

Resumen

En este trabajo se han estudiado los fibrados sobre espacios topológicos. Un fibrado es una terna (E, B, p) donde E y B son espacios topológicos y p es una aplicación continua y sobreyectiva de E en B denominada aplicación de fibrado. En este trabajo se estudiarán los fibrados triviales y localmente triviales, y se describirán ejemplos de aplicaciones entre espacios topológicos conocidos vistos desde el punto de vista de los fibrados. Además, se construirán nuevos ejemplos como el fibrado inducido sobre el producto fibrado o el fibrado del espacio de caminos en un espacio topológico. Posteriormente, se introduce la propiedad del levantamiento de homotopías y cómo se comporta dicha propiedad respecto a los fibrados triviales y localmente triviales. A continuación estudiarán los fibrados de Hurewicz, que son fibrados que admiten levantamientos de homotopías definidas desde cualquier espacio. Se probará que algunos de los fibrados construidos son fibrados de Hurewicz. Uno de los resultados principales del trabajo dice que toda aplicación continua es, salvo equivalencia homotópica, una aplicación de fibrado de Hurewicz. Finalmente, para fibrados localmente triviales (E, B, F, p), donde F es la fibra, se establecerán relaciones entre los grupos de homotopía relativos del par (E, F) y los grupos de homotopía del espacio B.

Palabras clave: fibrado, fibrado localmente trivial, equivalencia de fibrados, propiedad del levantamiento de homotopías, fibrado de Hurewicz, fibrado inducido, producto fibrado, grupos de homotopía relativa.

Abstract

The present work is a study of fibrations over topological spaces. A fibration is a triple (E, B, p) where E and B are topological spaces and p is a surjective continuous map from E to B called fibration map or, simply fibration. Trivial and locally trivial fibrations will be studied and examples of well known topological spaces will be described from the point of view of fibrations. Moreover, new examples of fibrations will be constructed, such as the induced fibration over the fibered product or the fibration over the path space of a topological space. We will also introduce the homotopy lifting property and we study how this property behaves for trivial and locally trivial fibrations. Hurewicz fibrations, those who have the homotopy lifting property for any topological space, will be studied next. It will be proved that some of the examples of fibrations mentioned before are indeed Hurewicz fibrations. One of the main results of this work states that any continous map is a Hurewicz fibration up to homotopy equivalence. Finally, for any given locally trivial fibration (E, B, F, p) with fiber F, relationships between the relative homotopy groups of the pair (E, F) and the homotopy groups of B will be established.

Key words: fibration, locally trivial fibration, fiber equivalence, homotopy lifting property, Hurewicz fibration, induced fibration, fibered product, relative homotopy groups.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

El propósito de este trabajo es el estudio de los fibrados sobre espacios topológicos. Las primeras apariciones de la noción de fibrado (*fiber bundle* en inglés) tienen lugar entre 1930 y 1940. Las primeras definiciones fueron dadas por H. Whitney, matemático americano considerado como uno de los fundadores de la teoría de singularidades. Su trabajo, junto con el de los matemáticos de H. Hopf, de origen alemán, y E. Stiefel, de origen suizo, demostró la relevancia de estos conceptos en el ámbito de la topología y la geometría diferencial.

Sin embargo, las nociones de fibrado o haz fibrado no fueron tratadas de forma sistemática hasta la publicación [15] por N. Steenrod, en 1951. Aún así, las diferencias de nomenclatura y notaciones de estas estructuras siguen difiriendo entre los distintos textos. La motivación de este trabajo ha sido recolectar distintas definiciones y resultados y tratar de exponerlos de la forma más general y clara posible desde el punto de vista topológico, de manera que las diferentes nociones de fibrado, como *fibration* o *fibre bundle* puedan ser claras para lectores con nivel de grado. Para ello se han consultado referencias en las que se estudian estas estructuras de una forma u otra. Además, se ha revisado bibliografía sobre topología básica y topología algebraica más general para poder enunciar resultados preliminares. La estructura del trabajo es la siguiente:

En el *Capítulo* 2 recordaremos algunas definiciones y resultados vistos en el Grado e introduciremos algunos conceptos nuevos que se utilizarán a lo largo de todo el trabajo. El capítulo está dividido en tres secciones. En la primera recordaremos algunas definiciones y resultados básicos de topología que estarán presentes a lo largo del trabajo. En la segunda introducimos algunas definiciones fundamentales en el ámbito de la topología algebraica. Por último, la tercera sección introduce la definición de la topología compacto-abierta en el conjunto de aplicaciones continuas entre dos espacios topológicos, junto con algunos resultados que permitirán probar la continuidad de aplicaciones en cuyo espacio de salida o llegada esté involucrada el espacio de aplicaciones continuas.

En el *Capítulo* 3 introducimos el eje central de estudio del trabajo, los fibrados. Este capítulo consta de tres secciones también. En la primera se define la noción de un fibrado y sus elementos: espacios total y base, la fibra y la aplicación de fibrado. Inmediatamente después, introducimos ejemplos de aplicaciones estudiadas a lo largo del grado pero vistas como aplicaciones de fibrado, para luego pasar a definir las equivalencias entre fibrados y la sección de un fibrado. En la segunda sección, se definen los fibrados triviales y los fibrados localmente triviales y se demuestran algunos resultados sobre sus fibras. Después de un par de ejemplos de fibrados localmente triviales, comenzamos la tercera sección, definiendo el producto fibrado y construyendo el fibrado inducido sobre éste por una aplicacion continua y un fibrado.

En el *Capítulo* 4 se introduce la noción de levantamiento de homotopías. En la primera de sus dos secciones, definimos la propiedad del levantamiento de homotopías para un fibrado y demostramos resultados que nos permiten estudiar el comportamiento de esta propiedad en fibrados equivalentes, en fibrados triviales y en fibrados localmente triviales. En la segunda sección, estudiamos los denominados fibrados de Hurewicz, aquellos con la propiedad del levantamiento de homotopías para cualquier espacio. Demostramos en detalle que un fibrado de Hurewicz induce otro fibrado de Hurewicz en el producto fibrado y que el fibrado sobre el espacio de caminos es un fibrado de Hurewicz. Este segundo ejemplo es relevante en nuestro siguiente resultado, en el que demostramos que cualquier aplicación continua se puede escribir como la composición de una equivalencia homotópica y una aplicación de fibrado de Hurewicz. Terminamos la sección introduciendo un resultado que permite caracterizar los fibrados de Hurewicz a través de aplicaciones de levantamiento de caminos.

Para finalizar, el objetivo del *Capítulo* 5 es introducir una aplicación importante de los fibrados localmente triviales, que es el cálculo de grupos de homotopía de orden superior. Sin entrar en detalles, en el quinto capítulo se definen los grupos de homotopía relativa de un par de espacios y los n-ésimos grupos de homotopía de un espacio topológico. Para acabar el trabajo enunciaremos algunos resultados que permiten relacionar los grupos de homotopía de orden superior de E y B de un fibrado localmente trivial (E, B, F, p).

Capítulo 2

Preliminares

En este primer capítulo vamos a introducir conceptos básicos y a fijar notaciones que usaremos a lo largo del trabajo. Además, introduciremos la topología compacto-abierta en el conjunto de aplicaciones continuas entre dos espacios topológicos y probaremos resultados que serán útiles para el estudio de los fibrados.

2.1. Topología General

Esta sección es fundamentalmente una recolección de conceptos básicos de topología presentes a lo largo del trabajo. La mayoría de los resultados no se demostrarán, pero se pueden encontar el libros de topología básica como [12], [9] o [16].

Definición 2.1.1. Un espacio topológico es un par (X, τ) donde X es un conjunto y $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ una familia de subconjuntos de X que cumple:

- El conjunto vacío $\emptyset$ y X pertenecen a τ.
- Si $\{U_i\}_{i \in I}$ es una familia de elementos de τ, entonces $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$.
- Si $\{U_i\}_{i=1}^n$ es una familia finita de elementos de τ, entonces $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \tau$

A τ se le denomina *topología* sobre X y a sus elementos se les denomina *abiertos*.
Un subconjunto $F \subseteq X$ se dice que es *un conjunto cerrado* si existe un conjunto abierto $U \subseteq X$ tal que $F = X \setminus U$.
Un subconjunto $V \subseteq X$ se denomina *entorno de x* si existe un abierto U de X tal que $x \in U \subseteq V$.

Ejemplo 2.1.2. Para cualquier conjunto no vacío X, tenemos dos ejemplos inmediatos de topología.

1. La *Topología Trivial* definida como $\tau_{trivial} := \{\emptyset, X\}$ donde los únicos abiertos de X son el conjunto vacío y el conjunto total X.
2. La *Topología Discreta* definida como $\tau_{discreta} = \mathcal{P}(X) = \{U \subseteq X\}$ donde todos los subconjuntos de X son abiertos.

A un subconjunto cualquiera de un espacio topológico se le puede dotar de una topología de forma natural.

Definición 2.1.3. Sea (X, τ_X) un espacio topológico e $Y \subseteq X$ un subconjunto de X. La siguiente familia de subconjuntos define una topología en el conjunto Y

$$\tau_Y := \{V \subseteq Y : V = U \cap Y, U \in \tau_X\}$$

Esta topología sobre Y se denomina *topología de subespacio.*

Nota 2.1.4. En lo siguiente, denotaremos un espacio topológico simplemente por X en lugar de (X, τ) si no hay lugar a confusión. Similarmente, si consideramos un subconjunto Y de un espacio topológico X, consideraremos en Y la topología de subespacio a no ser que se especifique lo contrario. También asumiremos que los conjuntos que se mencionen son no vacíos salvo que se especifique lo contrario.

También cabe recordar las nociones de interior y clausura de un subconjunto.

Definición 2.1.5. Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$ un subconjunto cualquiera.

Se define *el interior del conjunto A en X* como el mayor conjunto abierto contenido en A. Escribimos $Int_X(A)$, $Int(A)$ o simplemente $\mathring{A}$ si no hay ambigüedad respecto al espacio topológico ambiente. Es decir,

$$\mathring{A} := \bigcup_{A \supseteq U \text{ abierto}} U$$

Se define *la clausura (o adherencia) del conjunto A en X* como el menor conjunto cerrado que contiene a A. Escribimos $Cl_X(A)$, $Cl(A)$ o simplemente $\bar{A}$ si no hay ambigüedad. Es decir,

$$\bar{A} := \bigcap_{A \subseteq F \text{ cerrado}} F$$

Se define *la frontera del conjunto A en X* como

$$\partial A := \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$$

Observación 2.1.6. Una definición equivalente de la frontera de un conjunto es $\partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A}$.

Es evidente que el interior de un conjunto es un abierto mientras que su clausura y su frontera son cerrados. Es más, un conjunto A es abierto (respectivamente cerrado) en X si y sólo si $A = \mathring{A}$ (respectivamente $A = \bar{A}$).

Existen diferentes maneras de definir una topología, una de ellas es a través de una *base.*

Definición 2.1.7. Sea (X, τ) un espacio topológico. Decimos que β es *una base para la topología* τ si $\beta \subset \tau$ y todo abierto de X se puede escribir como unión de elementos de β. Los elementos de $\mathcal{B}$ se denominan *conjuntos básicos.*

Lema 2.1.8. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Se tiene que β es una base para la topología τ si y sólo si para todo abierto U y para cada $x \in U$ existe $B \in \beta$ tal que $x \in B \subseteq U$.*

Teorema 2.1.9. *Sea X un conjunto. Una familia $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X es una* base *para una topología en X si*

1. *Para cada $x \in X$ existe un conjunto $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$.*

2. *Si $x \in B_1 \cap B_2$ con $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.*

Además, se define la topología τ generada por la base $\mathcal{B}$ *como aquella formada por el conjunto vacío y uniones arbitraias de elementos de* $\mathcal{B}$.

La prueba del lema y el teorema anteriores se puede encontrar en [12].

Algunos ejemplos comunes de bases para topologías son los siguientes.

Ejemplo 2.1.10. Topología usual en $\mathbb{R}$. La *topología usual* τ_u *en* $\mathbb{R}$ como la generada por la base

$$\mathcal{B}_u = \{(a,b) \subset \mathbb{R} : a < b\}$$

Si no se especifica lo contrario, en $\mathbb{R}$ y en sus subconjuntos consideramos la topología usual. Esto es importante en particular para el intervalo $[0,1]$, que aparecerá con frecuencia en el trabajo.

Ejemplo 2.1.11. Topología de un espacio métrico. Dado un espacio métrico (X,d), la familia $\mathcal{B}$ formada por las bolas abiertas de centro $x_0 \in X$ y radio $r > 0$,

$$B(x_0,r) := \{x \in X : d(x,x_0) < r\}$$

es una base para una topología en X. En particular, podemos considerar en $\mathbb{R}^n$ la distancia usual o Euclídea, es decir, la definida como $d_u(x,y) := \|y-x\|$, donde $\|\cdot\|$ es la norma euclídea dada por

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}, \text{ para cada } x = (x_1,x_2,...,x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Denominamos *topología usual* τ_u de $\mathbb{R}^n$ a la topología generada por la base de las bolas abiertas para la disctancia euclídea. En $\mathbb{C}^n$, la topología usual es la heredada por la biyección canónica con $\mathbb{R}^{2n}$.

Ejemplo 2.1.12. Topología producto. Sean (X,τ_X) e (Y,τ_Y) dos espacios topológicos. La siguiente familia de conjuntos es una base para una topología en el pruducto cartesiano $X \times Y$

$$\mathcal{B} := \{U \times V : U \in \tau_X, V \in \tau_Y\}$$

La topología generada por esta base en $X \times Y$ se denomina *topología producto*. De ahora en adelante, esta será la topología que se considere en todo producto cartesiano de espacios topológicos si no se especifica lo contrario.

Otra vía para definir una topología es el concepto de *subbase*.

Definición 2.1.13. Sea X un conjunto. Una familia $\mathcal{S}$ de subconjuntos de X se dice que es una *subbase* para una topología en X si $X = \bigcup_{S \in \mathcal{S}} S$.

Además, se define *la topología generada por la subbase* $\mathcal{S}$ como la colección τ de uniones de intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$.

Ahora que hemos recordado nociones sobre espacios topológicos, también resulta fundamental recordar definiciones y propiedades de sus morfismos, las aplicaciones continuas.

Definición 2.1.14. Sean (X,τ_X) e (Y,τ_Y) dos espacios topológicos.
Una aplicación $f : (X,\tau_X) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$ es una *aplicación continua* si para cualquier abierto U de Y, se tiene que $f^{-1}(U)$ es un abierto en X.

Definición 2.1.15. Una aplicación entre espacios topológicos $f : X \longrightarrow Y$ se dice que es un *homeomorfismo* si es continua, biyectiva y de inversa continua.

Algunos ejemplos de aplicaciones continuas que se utilizarán en el trabajo son los siguientes.

Ejemplo 2.1.16. Sean X e Y espacios topológicos, A un subconjunto de X.

- *La identidad.* La aplicación $Id_X : X \longrightarrow X$ dada por $Id_X(x) = x$ es continua.
- *La aplicación constante* La aplicación $c_{y_0} : X \longrightarrow Y$ dada por $c_{y_0}(x) = y_0$ es continua.
- *La inclusión.* La aplicación $i : A \hookrightarrow X$ dada por $i(a) = a$ es continua.
- *La restricción del dominio.* Dada una aplicación continua $f : X \longrightarrow Y$, su restricción al conjunto A, es decir, la aplicación $f|_A : A \longrightarrow Y$ es continua.
- *La restricción de la imagen.* Dados una aplicación continua $f : X \longrightarrow$ y un subespacio Z de Y tal que $Im(f) \subseteq Z$, la aplicación $g : X \longrightarrow Z$ dada por $g(x) = f(x)$ es continua.
- *Las proyecciones.* Las aplicaciones $proy_1 : X \times Y \longrightarrow X$ y $proy_2 : X \times Y \longrightarrow Y$ dadas por $proy_1(x, y) = x$ y $proy_2 : (x, y) = y$ son aplicaciones continuas. El subíndice i de $proy_i$ indica la componente sobre la que se proyecta. En ocasiones, se usará la notación $proy_X$ para especificar el espacio de llegada, cuando sea relevante.
- *La composición.* Dado un tercer espacio Z y dos aplicaciones continuas $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$, su composición $g \circ f : X \longrightarrow Z$ es una aplicación continua.

Algunos resultados convenientes para demostrar la continuidad de algunas funciones son los siguientes.

Lema 2.1.17. *Sean X, Y y Z tres espacios topológicos. Una aplicación $f : Z \longrightarrow X \times Y$ es continua si y sólo si las aplicaciones $(proy_1 \circ f) : Z \longrightarrow X$ y $(proy_2 \circ f) : Z \longrightarrow Y$ son continuas.*

Lema 2.1.18 (Lema de Pegado)**.** *Sean X e Y dos espacios topológicos y A,B dos cerrados de X tales que $X = A \cup B$. Si dos aplicaciones continuas $g : A \longrightarrow Y$ y $h : B \longrightarrow Y$ cumplen que $g|_{A\cap B} = h|_{A\cap B}$, entonces se tiene que la aplicación $f : X \longrightarrow Y$ dada por*

$$f(x) := \begin{cases} g(x) & si\ x \in A \\ h(x) & si\ x \in B \end{cases}$$

es continua.

Otras aplicaciones continuas que se mencionarán con frecuencia son los *caminos*.

Definición 2.1.19. Un *camino* en un espacio topológico X es una aplicación continua $\alpha : [0, 1] \longrightarrow X$. Los elementos $\alpha(0), \alpha(1) \in X$ se denominan *origen* y *extremo* del camino camino α respectivamente.

Como últimos preliminares de topología básica, recordaremos los conceptos de compacidad, conexión, conexión por caminos de un espacio, que nos permitirán demostrar algunos de los resultados del trabajo. También recordaremos la noción de espacio Hausdorff.

Definición 2.1.20. Un espacio topológico X se dice que es *conexo* si no existen abiertos U, V disjuntos no vacíos tales que $X = U \cup V$.

Definición 2.1.21. Un espacio topológico X se dice que es *conexo por caminos* si para cualquier par de puntos $x, y \in X$ existe un camino α en X tal que $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$.

Proposición 2.1.22. *Todo espacio conexo por caminos es conexo.*

Definición 2.1.23. Un *recubrimiento* de un espacio topológico X es una familia de subconjuntos $\{U_i\}_{i\in I}$ tales que $X = \bigcup_{i\in I} U_i$.
Un *subrecubrimiento* de un recubrimiento $\{U_i\}_{i\in I}$ es una subcolección de conjuntos $\{U_j\}_{j\in J}$ donde $J \subseteq I$.
Un recubrimiento se dice que es un *recubrimiento abierto* si todos los conjuntos del recubrimiento son abiertos.

Definición 2.1.24. Un espacio topológico X se dice que es *compacto* si todo recubrimiento abierto del espacio admite un subrecubrimiento finito.

El siguiente es un resultado sobre espacios métricos compactos que conviene recordar.

Lema 2.1.25 (Lema del número de Lebesgue)**.** *Sean (X, d) un espacio métrico y $\{U_j\}_{j\in J}$ un recubrimiento abierto de X. Si X es compacto, entonces existe $\delta > 0$ tal que para cada subconjunto de X con diámetro menor que δ existe un conjunto U_j que lo contiene.*

Definición 2.1.26. Un espacio topológico X se dice *espacio Hausdorff* o *espacio T_2* si para cada par de puntos distintos $x, y \in X$, existen abiertos disjuntos U,V tales que $x \in U$ e $y \in V$.

Lema 2.1.27. *Si X es un espacio Hausdorff y A es un subespacio de X, entonces A también es Hausdorff.*

Lema 2.1.28. *Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$ un conjunto. Se tiene que*

1. *Si X es compacto y A es cerrado, entonces A es compacto.*

2. *Si X es Hausdorff y A es compacto, entonces A es cerrado.*

Existen otras dos nociones importantes que recordar para el desarrollo del trabajo; la compacidad local y ser un espacio regular. No obstante, así como las anteriores definiciones coinciden en la mayoría de lecturas, para las siguientes definiciones hay algunas diferencias dependiendo de la referencia. Aunque estas definiciones suelen ser equivalentes bajo condiciones adecuadas, a continuación vamos a fijar las definiciones que usaremos en este trabajo y los resultados que nos aseguren las equivalencias. Seguiremos las referencias [16] y [12].

Definición 2.1.29. Un espacio topológico X se dice *regular* si para cada cualquier cerrado $A \subseteq X$ y cualquier $x \in X \setminus A$, existen abiertos disjuntos U y V tales que $x \in U$ y $A \subseteq V$.

Teorema 2.1.30. *Sea X un espacio topológico. Son equivalentes:*

1. *X es un espacio regular.*

2. *para todo $x \in X$ y para todo U abierto de X con $x \in U$, existe un entorno abierto V de x tal que $\bar{V} \subseteq U$.*

3. *para todo $x \in X$ y para cada U entorno de x, existe un entorno cerrado V de x con $V \subseteq U$.*

Demostración. Sea X un espacio topológico. Probemos la cadena de implicaciones.

(1) $\Longrightarrow$ (2). Supongamos que X es regular y fijemos $x \in X$ y U abierto tal que $x \in U$. Tenemos que el conjunto $X \setminus U$ es un cerrado en X que no contiene a x, luego deben existir abiertos disjuntos V y W tales que $x \in V$ y $X \setminus U \subset W$. Así, se tiene que $X \setminus W$ es un cerrado contenido en U y que contiene a V, luego $\bar{V} \subset U$.

(2) $\Longrightarrow$ (3) Supongamos que se verifica (2). Dados $x \in X$ y U un entorno de x, existe un abierto W contenido en U que contiene a x. Inmediatamente se tiene que existe un abierto V contenido en W tal que $\bar{V} \subset W$. La clausura $\bar{V}$ es un entorno cerrado de x contenido en U, es decir, se cumple (3).

(3) $\Longrightarrow$ (1). Supongamos que se verifica (3). Dados un cerrado A y $x \notin A$, el conjunto $X \setminus A$ es un entorno abierto de x, luego debe existir un entorno cerrado B de x tal que $B \subseteq X \setminus A$. Como B es entorno, existe V abierto contenido en B que contiene a x, luego $x \in \mathring{B}$. Por otro lado, $X \setminus B$ es un abierto que contiene a A. Al ser $\mathring{B}$ y $X \setminus B$ abiertos disjuntos que contienen a x y A respectivamente, se verifica (1). $\square$

Observación 2.1.31*.* Si nos ceñimos a la definición, un espacio regular no es necesariamente Hausdorff. No obstante, si los conjuntos unipuntuales de un espacio regular son cerrados, es decir, si el espacio es regular y T_1, el espacio también es Hausdorff.

Lema 2.1.32. *Si un espacio topológico compacto es Hausdorff, entonces también es regular.*

Demostración. Supongamos que X es un espacio compacto y Hausdorff. Sea A un conjunto cerrado de X y $x \notin A$. Para probar que X es regular, buscamos un par de abiertos disjuntos U y V tales que $A \subseteq U$ y $x \in V$.

Como X es Hausdorff y x no pertenece a A, para cada $a \in A$, existen un par de abiertos disjuntos U_a y V_a tales que $x \in U_a$ y $a \in U_a$.

Consecuentemente, se tiene que $A \subseteq \bigcup_{a \in A} U_a$, es decir, la familia $\{U_a\}$ es un recubrimiento abierto de A. Al ser A un conjunto cerrado en X compacto, A es compacto, por lo que existen $a_1, a_2, ..., a_k \in A$ tales que $A \subseteq U := U_{a_1} \cup U_{a_2} \cup ... \cup U_{a_k}$.

Definimos el conjunto abierto $V := V_{a_1} \cap V_{a_2} \cap ... \cap V_{a_k}$. Es claro que $x \in V$. Veamos que $U \cap V = \emptyset$. Supongamos $y \in U \cap V$. Necesariamente, existiría i_0 tal que $y \in U_{a_{i_0}}$, sin embargo, también tendríamos $y \in V_{a_{i_0}}$, lo cual no es posible ya que $U_a \cap V_a = \emptyset$ para cada $a \in A$, luego $U \cap V = \emptyset$ como queríamos ver, por tanto U y V son los conjuntos que buscábamos. $\square$

A continuación vamos a definir la noción de espacio localmente compacto siguiendo la dada por Willard (*Definición 18.1* de [16]).

Definición 2.1.33. Un espacio topológico X se dice *localmente compacto* si para cada $x \in X$ y cada entorno U de x, existe V un entorno compacto de x con $x \in V \subseteq U$.

Esta definición es equivalente a la dada en [16]. Otra definición común es la dada en [12], donde se dice que un espacio topológico es localmente compacto si todo punto admite un entorno compacto. El siguiente resultado nos asegura que si un espacio es Hausdorff, ambas definiciones son equivalentes.

Teorema 2.1.34. *Sea X un espacio Hausdorff. Son equivalentes:*

1. *El espacio X es localmente compacto.*

2. *Cada $x \in X$ tiene un entorno compacto.*

Demostración. Sea X un espacio Hausdorff. Probemos las implicaciones en ambos sentidos.

(1) $\implies$ (2). Supongamos que X es localmente compacto y $x \in X$. Como X es un entorno de x, existe un entorno compacto V de x con $x \in V \subseteq X$, lo que prueba la implicación.

(2) $\implies$ (1). Para esta implicación supongamos que X es un espacio tal que cada $x \in X$ admite un entorno compacto. Queremos ver que dado cualquier $x \in X$ y cualquier U entorno de X, existe un entorno compacto V de x tal que $V \subseteq U$.

Sean $x_0 \in X$ y U un entorno de x_0. Por ser U entorno de x_0, existe un abierto A tal que $x \in A \subseteq U$. Además, sabemos que existe un entorno compacto K de x. Definimos el conjunto $W := Int_X(K \cap A)$, que es un entorno abierto de x_0. Como K es un compacto en un espacio Hausdorff, K es cerrado (*Lema* 2.1.28) y como $W \subseteq K \cap A \subseteq K$, entonces $Cl_X(W) \subseteq K$. Al ser cerrado en un compacto, $Cl_X(W)$ es compacto, y por ser subespacio de un Hausdorff, también es Hausdorff, por lo tanto $Cl_X(W)$ es regular (*Lema* 2.1.32).

Consideremos ahora $Cl_X(W)$ nuestro espacio ambiente. Tenemos que W es un entorno abierto de x en $Cl_X(W)$, por lo que, al ser $Cl_X(W)$ regular, ha de existir un entorno abierto V de x en $Cl_X(W)$ tal que $Cl_{Cl_X(W)}(V) \subseteq W \subseteq Cl_X(W)$. Como $Cl_{Cl_X(W)}(V)$ es un cerrado en $Cl_X(W)$ que es cerrado en X, entonces $Cl_{Cl_X(W)}(V)$ es cerrado en X y por ser X compacto, $Cl_{Cl_X(W)}(V)$ es un entorno compacto de x en X.

Al verificarse la siguiente cadena de inclusiones $x \in V \subseteq Cl_{Cl_X(W)}(V) \subseteq W \subseteq A \subseteq U$, podemos considerar $Cl_{Cl_X(W)}(V)$ el entorno compacto de x tal que $Cl_{Cl_x(W)}(V) \subseteq U$, lo que permite concluir que X es localmente compacto. □

Además, la afirmación (2) nos permite demostrar de forma sencilla lo siguiente.

Corolario 2.1.35. *Sea X un espacio topológico. Se tiene que*

1. *Si X es compacto y Hausdorff, entonces es localmente compacto.*

2. *Si X es Hausdorff y localmente compacto, entonces es regular.*

Demostración. (1). Si X es Hausdorff y compacto, es inmediato considerando X como entorno compacto de cualquier $x \in X$.

(2). Sea X Hausdorff y localmente compacto. Dado $x \in X$ y un entorno U de x, por ser X localmente compacto, existe un entorno compacto V de X con $V \subseteq U$. Como X es Hausdorff y V compacto, necesariamente V es cerrado. Al ser V entorno de x, existe W abierto contenido en V que contiene a x. Como V es cerrado, tenemos que $\bar{W} \subseteq V \subseteq U$ y $x \in W$. Por la equivalencia (2), se sigue que X es regular. □

Observación 2.1.36*.* Nótese que en la demostración anterior, el abierto W que contiene a x y da la prueba del corolario, verifica que $\bar{W} \subseteq V \subseteq U$, donde V es un compacto. Esto implica que la clausura $\bar{W}$ sea cerrado de un compacto y por ende un compacto. Esto quiere decir que un espacio Hausdorff y localmente compacto X no solo es regular, si no que para cada $x \in X$ y cada U entorno de x, existe un abierto W con $x \in W$ cuya clausura $\bar{W}$ es compacta y $\bar{W} \subseteq U$.

2.2. Topología Algebraica

Una vez quedan recordados conceptos de topología básica, ahora introduciremos algunas definiciones y herramientas de topología algebraica que necesitaremos en el trabajo. Son fundamentales los conceptos de homotopía y equivalencia homotópica.

Definición 2.2.1. Sean X e Y dos espacios topológicos, $f, g : X \longrightarrow Y$ un par de aplicaciones continuas y $A \subset X$. Se dice que la aplicación f es *homótopa a la aplicación g relativo al conjunto A*, y se denota $f \simeq_A g$ si existe una aplicación continua $H : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ tal que

- $H(x, 0) = f(x)$ para todo $x \in X$.
- $H(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$.
- $H(a, t) = f(a) = g(a)$ para cualquier $a \in A$ y cualquier $t \in [0,1]$.

Dicha aplicación H se denomina *homotopía* entre las aplicaciones f y g.
En el caso $A = \emptyset$, se dice que f *es homótopa a g* y se escribe $f \simeq g$.

Observación 2.2.2. La relación *ser homótopas $\simeq_A$ relativo al conjunto A*, define una relación de equivalencia en el conjunto de aplicaciones continuas del espacio X en el espacio Y.

Definición 2.2.3. Sean X un espacio topológico y $\alpha, \beta : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X$ dos caminos en X. Se dice que α y β son *caminos homótopos* si son homótopos relativos al conjunto $A = \{0,1\}$ como aplicaciones continuas. Si no hay lugar a confusión, escribimos simplemente $\alpha \simeq \beta$.

Así, podemos definir el concepto de espacio contráctil

Definición 2.2.4. Un espacio topológico X se dice que es un *espacio contráctil* si la aplicación identidad es homótopa a una aplicación constante, esto es, si existe $x_0 \in X$ tal que $Id_X \simeq c_{x_0}$.

Definición 2.2.5. Sean X e Y espacios topológicos. Una aplicación continua $f : X \longrightarrow Y$ se dice que es una *equivalencia homotópica* si existe una aplicación continua $g : Y \longrightarrow X$ tal que $g \circ f \simeq Id_X$ y $f \circ g \simeq Id_Y$. En este caso se dice que los espacios X e Y son *homotópicamente equivalentes* o que tienen *el mismo tipo de homotopía* y a la aplicación g se le denomina *inversa homotópica de f*.

Observación 2.2.6. La relación *ser homotópicamente equivalentes* define una relación de equivalencia en el conjunto de espacios topológicos.

Definición 2.2.7. Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$ un subconjunto no vacío. Se dice que A es un *retracto* de X si existe una aplicación continua $r : X \longrightarrow A$ tal que $r|_A = Id_A$.
Una aplicación continua r que verifique lo anterior se denomina *retracción.*

Dentro del ámbito de la topología algebraica, existen un tipo de aplicaciones interesantes que conviene que tengamos en cuenta.

Definición 2.2.8. Sean X y E dos espacios topológicos. Una aplicación continua $p : E \longrightarrow X$ se denomina *aplicación de recubrimiento* o *recubridora* si verifica

1. p es sobreyectiva.
2. para cada $x \in X$, existe un entorno abierto U de x tal que $p^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} V_i$ donde
   - V_i es abierto de E para todo $i \in I$.
   - $V_i \cap V_j = \emptyset$ si $i \neq j$.
   - la aplicación $p|_{V_i} : V_i \longrightarrow U$ es un homeomorfismo para cada $i \in I$.

En estas circunstancias, se dice que E es *un espacio recubridor* o *un recubrimiento* de X y los abiertos U se denominan abiertos *distinguidos*, *regularmente cubiertos* o bien *trivializantes*.

2.3. La Topología Compacto-Abierta

En esta sección, trataremos una topología que es fundamental tener en cuenta para el trabajo, tanto como para ejemplos particulares como para el desarrollo de algunos de los resultados. Veremos cómo dotar de una topología al conjunto de los caminos de un espacio topológico y algunas de las propiedades de esta. La mayor parte de está sección esta inspirada en [7].

Dados espacios topológicos X e Y, podemos considerar el conjunto de las aplicaciones continuas de X e Y, que denotamos por

$$\mathcal{C}(X, Y) := \{f : X \longrightarrow Y : f \text{ es continua}\}.$$

Como en otros conjuntos, podemos considerar más de una topología sobre $\mathcal{C}(X, Y)$. No obstante, en este trabajo vamos a considerar este conjunto dotado de la llamada *topología compacto-abierta*.

Comenzamos fijando la notación con la que vamos a trabajar. Dados dos conjuntos $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$, definimos el conjunto

$$(A, B) := \{f \in \mathcal{C}(X, Y) : f(A) \subseteq B\}$$

Ahora consideremos la colección de conjuntos

$$\mathcal{S} = \{(A, B) : A \text{ es compacto en } X, B \text{ es abierto en } Y\}$$

Esta colección de conjuntos es una subbase para una topología en $\mathcal{C}(X, Y)$. Teniendo en cuenta que $(A, B) \subseteq \mathcal{C}(X, Y)$ para cualesquiera $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$, es claro que $\mathcal{C}(X, Y) \supseteq \bigcup_{(A,B) \in \mathcal{S}} (A, B)$, basta probar el otro contenido.

Sea $f \in \mathcal{C}(X, Y)$. Fijando $x_0 \in X$, el conjunto $\{x_0\}$ es un conjunto compacto de X. Además, Y siempre es un abierto de sí mismo y claramente $f(x_0) \in Y$, por lo que $f \in (\{x_0\}, Y) \in \mathcal{S}$, luego f pertenece a la unión como queríamos demostrar, por lo que el conjunto $\mathcal{S}$ es una base para una topología.

Definición 2.3.1. Sean X e Y espacios topológicos. La *topología compacto-abierta* en el conjunto $\mathcal{C}(X, Y)$ es la generada por la subbase $\mathcal{S} = \{(A, B) : A \text{ es compacto}, B \text{ es abierto}\}$.

Los conjuntos subbásicos (A, B) se denominan *conjuntos compacto-abiertos*. Cuando se haga referencia al conjunto de aplicaciones continuas dotados con la topología compacto-abierta, lo nombraremos simplemente *el espacio de aplicaciones continuas de X en Y*.

Esta topología tiene numerosas propiedades. Introduciremos aquellas que sean de mayor importancia para el desarrollo del trabajo. Entre estas, buscamos aquellas que nos permitan comprobar cuándo una aplicación en un espacio de aplicaciones es continua.

Para empezar, consideremos la siguiente aplicación

$$\begin{array}{rccc} \omega: & \mathcal{C}(X,Y)\times X & \longrightarrow & Y \\ & (f,x) & \longmapsto & f(x) \end{array} \tag{2.1}$$

definida para cada $x \in X$ y cada $f \in \mathcal{C}(X,Y)$. Esta se denomina la *aplicación de evaluación del espacio de aplicaciones continuas*. Es fácil comprobar que la aplicación de evaluación ω es sobreyectiva. Dado $y \in Y$ arbitrario, basta considerar la aplicación constante $c_y : X \longrightarrow Y$ y un punto cualquiera $x \in X$ y ver que $\omega(c_y, x) = c_y(x) = y$. El siguiente es un resultado que nos asegura condiciones bajo las cuales se asegura la continuidad de la aplicación de evaluación.

Proposición 2.3.2. *Si X es un espacio Hausdorff y localmente compacto, entonces la aplicación de evaluación del espacio de aplicaciones continuas ω es una aplicación continua.*

Demostración. Supongamos que X es un espacio Hausdorff y localmente compacto y sea W un abierto cualquiera de Y. Queremos ver que el conjunto $\omega^{-1}(W)$ es abierto de $\mathcal{C}(X,Y)\times X$. Para ello, basta probar que dado un elemento cualquiera $(f,x) \in \omega^{-1}(W)$, existe un abierto U en $\mathcal{C}(X\times Y)\times X$ con $(f,x) \in U \subseteq \omega^{-1}(W)$.

Fijamos $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ y $x \in X$ tales que $f(x) \in W$. Como f es una aplicación continua, la contraimagen $f^{-1}(W)$ es un abierto de X que contiene a x. Como X es Hausdorff y localmente compacto, existe un abierto V con $x \in V$ tal que $\bar{V}$ es compacto y $\bar{V} \subseteq f^{-1}(W)$ (ver *Observación* 2.1.36). Por lo tanto, el conjunto $S = (\bar{V}, W)$ es un conjunto subbásico (y por ende abierto) de $\mathcal{C}(X,Y)$ que contiene a f. Se sigue que el conjunto $U := S \times V \subseteq \mathcal{C}(X,Y)\times X$ es un abierto que contiene a (f,x).

Comprobemos que $U \subseteq \omega^{-1}(W)$. Dado $(g,y) \in U = S\times V$, tenemos que $y \in V$ y $g \in S$, es decir $g(\bar{V}) \subseteq W$, luego $g(y) \in W$, o, equivalentemente, $(g,y) \in \omega^{-1}(W)$, lo que nos permite concluir la inclusión de U en $\omega^{-1}(W)$ y, consecuentemente, que $\omega^{-1}(W)$ es abierto, de forma que ω es continua. □

Corolario 2.3.3. *Sea $\hat{f} : X \longrightarrow \mathcal{C}(Y,Z)$ una aplicación continua con Y un espacio Hausdorff y localmente compacto. Entonces, la aplicación $f : X\times Y \longrightarrow Z$, dada por $f(x,y) = \hat{f}(x)(y)$, es continua.*

Demostración. Basta considerar f como la siguiente composición de aplicaciones

$$X\times Y \xrightarrow{\hat{f}\times Id_Y} \mathcal{C}(Y,Z)\times Y \xrightarrow{\omega} Z$$

donde ω es la aplicación de evaluación del espacio de aplicaciones continuas $\mathcal{C}(Y,Z)$, que es continua por como consecuencia inmediata de la *Proposición* 2.3.2, por ser Y Hausdorff y localmente compacto. Se comprueba inmediatemente que

$$\omega \circ (\hat{f}\times Id_Y)(x,y) = \omega(\hat{f}(x), y) = \hat{f}(x)(y) = f(x,y)$$

lo que implica la continuidad de la aplicación f. □

Además, existe un resultado que podría considerarse un recíproco del corolario anterior.

Proposición 2.3.4. *Sean X,Y y Z espacios topológicos y $f : X \times Y \longrightarrow Z$ una aplicación continua. Entonces, la aplicación $\hat{f} : X \longrightarrow \mathcal{C}(Y,Z)$ dada por $\hat{f}(x)(y) = f(x,y)$ también es continua.*

Demostración. Consideremos los espacios topológicos X, Y y Z y la aplicación continua $f : X \times Y \longrightarrow Z$. Sea $\hat{f} : X \longrightarrow \mathcal{C}(Y,Z)$ la aplicación dada por $\hat{f}(x)(y) = f(x,y)$. Para ver que la aplicación $\hat{f}$ es continua, basta comprobar que dado un conjunto subbaásico (K,W) de $\mathcal{C}(Y,Z)$, se tiene que $\hat{f}^{-1}((K,W))$ es abierto en X. Esto se debe a que cualquier abierto de $\mathcal{C}(Y,Z)$ es unión de intersecciones finitas de conjuntos subbásicos y las uniones e intersecciones de conjuntos se comportan bien por contraimágenes.

Sea (K,W) un conjunto subbásico de $\mathcal{C}(Y,Z)$. Esto implica que K es un subconjunto compacto de Y y W un abierto de Z. Para probar que $\hat{f}^{-1}((K,W))$ es abierto, demostremos que dado $x_0 \in \hat{f}^{-1}(K,W)$, existe un abierto $\tilde{U}$ de X con $x_0 \in \tilde{U} \subseteq \hat{f}^{-1}((K,W))$.

Fijamos $x_0 \in \hat{f}^{-1}((K,W))$. Esto quiere decir que $\hat{f}(x_0)(K) \subseteq W$. Por definición de la aplicación $\hat{f}$, tenemos que $\hat{f}(x_0)(K) = f(\{x_0\} \times K) \subseteq W$, luego $\{x_0\} \times K \subseteq f^{-1}(W)$.

Como f es una aplicación continua, tenemos que $f^{-1}(W)$ es abierto en $X \times Y$ para la topología producto, luego dado $(x_0,k) \in \{x_0\} \times K$, existe un abierto básico $U_k \times V_k$ de $X \times Y$ con U_k abierto de X y V_k abierto de Y tal que $(x_0,k) \in U_k \times V_k \subseteq f^{-1}(W)$.

Tenemos por tanto que $K \subseteq \bigcup_{k \in K} V_k$, es decir, la familia de conjuntos $\{V_k\}$ es un recubrimiento abierto del conjunto compacto K de Y. Necesariamente, existen $k_1, k_2, ..., k_s$ tales que $K \subseteq V_{k_1} \cup V_{k_2} \cup ... \cup V_{k_s}$. Definimos los conjuntos abiertos $\tilde{U} := U_{k_1} \cap ... \cap U_{k_s}$ y $\tilde{V} := V_{k_1} \cup ... \cup V_{k_s}$. Es claro que $\{x_0\} \times K \subseteq \tilde{U} \times \tilde{V}$. Veamos que además $\tilde{U} \times \tilde{V} \subseteq f^{-1}(W)$. Dado $(x,y) \in \tilde{U} \times \tilde{V}$, se tiene que $x \in \tilde{U}$ e $y \in \tilde{V}$, es decir, $x \in U_{k_i}$ para cada k_i y existe k_{i_0} tal que $y \in V_{k_{i_0}}$. Por tanto $(x,y) \in U_{k_{i_0}} \times V_{k_{i_0}} \subseteq f^{-1}(W)$, luego $\tilde{U} \times \tilde{V} \subseteq f^{-1}(W)$ como queríamos ver.

Finalmente, veamos que $\tilde{U} \subseteq \hat{f}^{-1}((K,W))$. Para cualquier $\tilde{x} \in \tilde{U}$, se verifican las inclusiones $\{\tilde{x}\} \times K \subseteq \tilde{U} \times \tilde{V} \subseteq f^{-1}(W)$. Esto implica que $f(\{\tilde{x}\} \times K) \subseteq W$, lo que equivale a que $\hat{f}(\bar{x})(K) \subseteq W$. Esto significa que $\hat{f}(\tilde{x}) \in (K,W)$ y por ende $\tilde{x} \in \hat{f}^{-1}((K,W))$. Esto nos permite concluir que $\tilde{U} \subseteq \hat{f}^{-1}((K,W))$ como queríamos, por lo que $\hat{f}^{-1}((K,W))$ es abierto en X y $\hat{f}$ es una aplicación continua. □

Estos resultados son particularmente útiles cuando nos fijamos en el caso $X = I := [0,1]$. En este caso, el espacio de las aplicaciones continuas $\mathcal{C}(I,Y)$ recibe el nombre de *espacio de caminos del espacio topológico* Y. En lo siguiente, lo denotaremos por

$$Y^I := \mathcal{C}(I,Y) = \{\alpha : I \longrightarrow Y : \alpha \text{ es continua } \}$$

Es oportuno destacar que la notación Y^X, suele utilizarse en otros textos para referirse al conjunto de aplicaciones de X en Y, no necesariamente continuas. En el caso de este trabajo, se utilizará la notación mencionada porque facilita la escritura. Siempre que se mecione el *espacio de caminos de un espacio topológico*, nos referimos al conjunto Y^I dotado de la topolgía compacto-abierta.

El intervalo unidad $I = [0,1]$ dotado de la topología usual tiene muy buenas propiedades. En particular, el intervalo I es un espacio compacto y Hausdorff. Como consecuencia del *Lema* 2.1.32 y del *Corolario* 2.1.35, tenemos que I es además un espacio regular y localmente compacto. De acuerdo con los resultados anteriores, tenemos lo siguiente

Proposición 2.3.5. *Sean X e Y dos espacios topológicos e $I := [0,1]$ el intervalo unidad.*

1. *La aplicación de evaluación del espacio de caminos*

$$\begin{array}{rccc} \omega: & Y^I \times I & \longrightarrow & Y \\ & (\alpha, s) & \longmapsto & \alpha(s) \end{array} \tag{2.2}$$

   es una aplicación continua.

2. *Si $\hat{f}: X \longrightarrow Y^I$ es una aplicación continua, entonces la aplicación $f: X \times I \longrightarrow Y$ dada por $f(x,s) = \hat{f}(x)(s)$ también es continua.*

3. *Si $f: X \times I \longrightarrow Y$ es una aplicación continua, entonces la aplicación $\hat{f}: X \longrightarrow Y^I$ dada por $\hat{f}(x)(s) = f(x,s)$ también es continua.*

De la afirmación (1) de esta proposición se sigue que dado $s \in I$, la aplicación definida por

$$\begin{array}{rccc} \psi_s: & Y^I & \longrightarrow & Y \\ & \alpha & \longmapsto & \alpha(s) \end{array} \tag{2.3}$$

es una aplicación continua. Las aplicaciones ψ_0 y ψ_1 se denominan *proyección sobre el origen del camino* y *proyeción sobre el extremo del camino* respectivamente. Estas aplicaciones serán fundamentales en el *Capítulo 4*.

Capítulo 3

Fibrados

En esta sección introduciremos las primeras definiciones y propiedades de los fibrados desde un punto de vista general. Se presentarán ejemplos conocidos desde la perspectiva de un fibrado. Vamos a seguir principalmente la referencia [1].

3.1. Primeras definiciones y propiedades

Definición 3.1.1. Un *fibrado* es una terna (E, B, p) donde E y B son espacios topológicos y $p : E \longrightarrow B$ una aplicación continua y sobreyectiva. El espacio E se denomina *espacio total* y B se denomina *espacio base* del fibrado. Además, para cada $b \in B$, el subconjunto $p^{-1}(b) \subseteq E$ se denomina *fibra de b (o fibra sobre b)*.

En ocasiones, abusando la notación, se utiliza el término *fibrado* para referirnos a la aplicación $p : E \longrightarrow B$. Escribiremos 'sea $\zeta = (E, B, p)$ un fibrado', o, si los espacios no son relevantes, simplemente 'sea ζ un fibrado'. En este trabajo utilizamos 'fibrado' como traducción del inglés *fibration*, en lugar de ´fibración'.

Si todas las fibras del fibrado ζ son homeomorfas entre sí, es decir, si existe un espacio topológico F tal que $p^{-1}(b) \cong F$ para todo $b \in B$, entonces lo podemos dejar indicado en la notación escribiendo $\zeta = (E, B, F, p)$.

Nota 3.1.2. En algunos textos, que todas las fibras sean homeomorfas es una condición en la propia definición de fibrado.

Estos son algunos primeros ejemplos de fibrados que nos será útil conocer :

Ejemplo 3.1.3. ***Fibrado Producto***

Sean B y F espacios topológicos. Consideramos el espacio topológico producto $B \times F$. La proyección sobre la primera coordenada, es decir, la aplicación

$$\begin{array}{rccc} proy_B : & B \times F & \longrightarrow & B \\ & (b, f) & \longmapsto & b \end{array}$$

define un fibrado $(E, B, proy_B)$ de espacio total $E = B \times F$ y espacio base B. Un fibrado en estas condiciones se denomina *fibrado producto*. Notemos que para cualquier $b \in B$, se verifica que su fibra $p^{-1}(b) = \{b\} \times F \cong F$, lo que significa que todas sus fibras son homeomorfas al espacio F y, por tanto, homeomorfas todas entre sí.

Ejemplo 3.1.4. ***Fibrado inducido por paso al cociente***
Sea E un espacio topológico y $\sim$ una relación de equivalencia en E. Podemos considerar el cociente $E/\sim$ con la topología cociente inducida por la aplicación sobreyectiva:

$$\begin{array}{rccc} p: & E & \longrightarrow & E/\sim \\ & e & \longmapsto & [e] \end{array}$$

Entonces, de acuerdo con la definición, la terna $(E, E/\sim, p)$ es un fibrado.

Ejemplo 3.1.5. ***Recubrimientos***
Toda aplicación de recubrimiento $p : E \longrightarrow X$ define un fibrado (E, X, p). Es inmediato teniendo en cuenta que una aplicación de recubrimiento ha de ser, por definición, continua y sobreyectiva. En este ejemplo introducimos un recubrimiento muy común; *La Recta Real como recubrimiento de la Circunferencia Unidad*. Consideremos la circunferencia unidad como subespacio complejo $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$. La siguiente aplicación es un recubrimiento

$$\begin{array}{rccc} r: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \\ & t & \longmapsto & e^{2\pi i t} \end{array}$$

La aplicación r es claramente sobreyectiva y continua, por lo que $(\mathbb{R}, \mathbb{S}^1, r)$ es un fibrado. Además, se tiene que para cada $z \in \mathbb{S}^1$, la fibra $r^{-1}(z) \cong \mathbb{Z}$.

Ejemplo 3.1.6. ***El fibrado del Espacio de Caminos***
Sean X un espacio topológico y $X^I = \{\alpha : I \longrightarrow X : \alpha \text{ es continua } \}$ su espacio de caminos definido en el *Sección* 2.3. Fijado $s \in I$, consideramos la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \psi_s: & X^I & \longrightarrow & X \\ & \alpha & \longmapsto & \alpha(s) \end{array}$$

La terna $\Psi_s := (X^I, X, \psi_s)$ es un fibrado. La continuidad de la aplicación ψ_s quedó explicada en la *Sección* 2.3 y su sobreyectividad es trivial. Dado un elemento $x \in X$, basta considerar el camino constante $c_x : I \longrightarrow X$ y ver que $c_x(s) = x$.

Ejemplo 3.1.7. ***La Banda de Moebius***
Sea $I := [0, 1]$. Consideramos el espacio $I \times I$ con la topología usual y la identificación de los puntos de la forma $(0, t) \sim (1, 1 - t)$, $t \in I$.
La Banda de Moebius es el espacio cociente $E := I \times I/\sim$. La aplicación

$$\begin{array}{rccc} p: & E & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \\ & [(s,t)] & \longmapsto & e^{2\pi i s} \end{array}$$

define un fibrado $(E, \mathbb{S}^1, p)$. La aplicación p es claramente sobreyectiva. Por ser E un espacio cociente, p es continua si y sólo si $\bar{p} : I \times I \longrightarrow \mathbb{S}^1$, dada por $\bar{p}(s, t) = e^{2\pi i s}$, es continua. Basta comprobar que $\bar{p} = proy_1 \circ (r|_I \times Id_I)$, donde r es el recubrimiento del *Ejemplo* 3.1.5:

$$\begin{array}{rccccc} \bar{p}: & I \times I & \xrightarrow{r|_I \times Id_I} & \mathbb{S}^1 \times I & \xrightarrow{proy_1} & \mathbb{S}^1 \\ & (s,t) & \longmapsto & (e^{2\pi i s}, t) & \longmapsto & e^{2\pi i s} \end{array}$$

Luego $(E, \mathbb{S}^1, p)$ es un fibrado.

Una vez hemos definido y mostrado algunos ejemplos del concepto de fibrado, pasemos a ver cómo relacionar distintos fibrados.

Definición 3.1.8. Sean (E, B, p) y (E', B', p') dos fibrados y $f : E \longrightarrow E'$, $\bar{f} : B \longrightarrow B'$ dos aplicaciones continuas entre los espacios totales y bases respectivamente. El par $(f, \bar{f})$ se denomina *aplicación de fibrados* de (E, B, p) en (E', B', p') si hacen conmutativo el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & E' \arrow[d, "p'"] \\ B \arrow[r, "\bar{f}"'] & B' \end{tikzcd}$$

es decir, si $p' \circ f = \bar{f} \circ p$. Escribimos $(f, \bar{f}) : (E, B, p) \longrightarrow (E', B', p')$.
En el caso $B = B'$ y $\bar{f} = Id_B$, decimos que f es una *aplicación de fibrados sobre* B.

Nota 3.1.9. Usando la notación $\zeta = (E, B, p)$, $\zeta' = (E', B', p')$, escribimos $(f, \bar{f}) : \zeta \longrightarrow \zeta'$ para denotar una aplicación de fibrados de ζ en ζ'.

Proposición 3.1.10. *Sean (E, B, p) y (E', B', p) dos fibrados y consideremos una aplicación de fibrados $(f, \bar{f}) : (E, B, p) \longrightarrow (E', B', p')$. Entonces f es una aplicación que lleva fibras en fibras.*

Demostración. Tomamos $b \in B$ y consideramos su imagen $\bar{f}(b) = b'$. Queremos ver que la imagen de su fibra está contenida en la fibra de su imagen, es decir, $f(p^{-1}(b)) \subseteq (p')^{-1}(b')$.
Sea $e \in p^{-1}(b)$. Por la conmutatividad del diagrama se cumple que

$$(p' \circ f)(e) = (\bar{f} \circ p)(e) = \bar{f}(p(e))$$

Como $e \in p^{-1}(b)$, se tiene que $p(e) = b$ y se sigue que

$$\bar{f}(p(e)) = \bar{f}(b) = b'$$

Por tanto:

$$p'(f(e)) = b'$$

Concluimos pues que $f(e) \in (p')^{-1}(b')$ y, por ende, $f(p^{-1}(b)) \subseteq (p')^{-1}(b')$, es decir, f lleva fibras en fibras. $\square$

De la definición de aplicación de fibrados, podemos concluir de forma inmediata las siguientes propiedades:

1. $(Id_E, Id_B) : (E, B, p) \longrightarrow (E, B, p)$ es una aplicación de fibrados.
   Si $\zeta = (E, B, p)$, ecribimos $Id_\zeta := (Id_E, Id_B)$

2. Si $\zeta = (E, B, p)$, $\zeta' = (E', B', p')$ y $\zeta'' = (E'', B'', p'')$ son fibrados y $(f, \bar{f}) : \zeta \longrightarrow \zeta'$ y $(g, \bar{g}) : \zeta' \longrightarrow \zeta''$ son aplicaciones de fibrados, entonces su composición

   $$(g, \bar{g}) \circ (f, \bar{f}) := (g \circ f, \bar{g} \circ \bar{f}) : \zeta \longrightarrow \zeta''$$

   también es una aplicación de fibrados.

Por lo tanto podemos considerar una categoría cuyos objetos son los fibrados y cuyos morfismos son las aplicaciones de fibrados, donde el morfismo identidad y la composición de morfismos vienen dados por las propiedades 1. y 2. anteriores respectivamente.

Continuamos definiendo nuevos conceptos relacionados con las aplicaciones entre fibrados.

Definición 3.1.11. Sean $\zeta = (E, B, p)$, $\zeta' = (E', B', p')$ dos fibrados y consideramos una aplicación de fibrados $(f, \bar{f}) : \zeta \longrightarrow \zeta'$. Se dice que una aplicación de fibrados $(g, \bar{g}) : \zeta' \longrightarrow \zeta$ es una *inversa* de $(f, \bar{f})$ si

$$(g, \bar{g}) \circ (f, \bar{f}) = Id_\zeta$$

$$(f, \bar{f}) \circ (g, \bar{g}) = Id_{\zeta'}$$

Si $(f, \bar{f})$ tiene inversa, se dice que la aplicación es una *equivalencia de fibrados*.
Dos fibrados ζ y ζ' se dice que son *equivalentes* si existe una equivalencia de fibrados entre ellos. Si ambos fibrados tienen el mismo espacio base B, se dice que los fibrados son *equivalentes sobre* B si existe una equivalencia de fibrados de la forma $(f, Id_B) : \zeta \longrightarrow \zeta'$.

Observación 3.1.12. De la definición anterior se concluye inmediatamente lo siguiente:

- La aplicación de fibrados identidad Id_ζ es una equivalencia de fibrados. Luego todo fibrado es equivalente a sí mismo.

- Se tiene que $(f, \bar{f}) : \zeta \longrightarrow \zeta'$ es una equivalencia de fibrados si y sólo si f, $\bar{f}$ son homeomorfismos. Luego si $(f, \bar{f})$ es una equivalencia de fibrados, su inversa $(f^{-1}, \bar{f}^{-1}) : \zeta' \longrightarrow \zeta$, también es una equivalencia de fibrados.

- Dadas dos equivalencias de fibrados $(f, \bar{f}) : \zeta \longrightarrow \zeta'$, $(g, \bar{g}) : \zeta' \longrightarrow \zeta''$, su composición como aplicaciones de fibrados $(g, \bar{g}) \circ (f, \bar{f}) : \zeta \longrightarrow \zeta''$ también es una equivalencia de fibrados.

De lo anterior podemos concluir que la relación *ser fibrados equivalentes* define una relación de equivalencia en el conjunto de fibrados.

Observemos que dos fibrados $\zeta = (E, B, p)$, $\zeta = (E', B, p')$ sobre un mismo espacio base B pueden ser equivalentes pero no equivalentes sobre B, es decir, puede existir una equivalencia de fibrados $(g, \bar{g}) : \zeta \longrightarrow \zeta'$ y que no exista una equivalencia de la forma $(f, Id_B) : \zeta \longrightarrow \zeta'$, tal y como se demuestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1.13. Consideremos los siguientes conjuntos dotados con la topología usual de subespacio en $\mathbb{R}^n$

$$B := \{0, 1\} \subset \mathbb{R}$$

$$E := \{0\} \times I \cup \{(1, 0), (1, 1)\} \subset \mathbb{R}^2$$

$$E' := \{(0, 0), (0, 1)\} \cup \{1\} \times I \subset \mathbb{R}^2$$

y las aplicaciones $p : E \longrightarrow B$, $p' : E' \longrightarrow B$ dadas por la restricción a sendos espacios de la proyección sobre la primera coordenada $(x, y) \longmapsto x$.

Como las aplicaciones p y p' son continuas y sobreyectivas, tenemos los fibrados $\zeta = (E, B, p)$ y $\zeta' = (E', B, p')$. Consideremos ahora las aplicaciones continuas

$$\begin{array}{rccc} f: & E & \longrightarrow & E' \\ & (0,t) & \longmapsto & (1,t) \\ & (1,n) & \longmapsto & (0,n) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \bar{f}: & B & \longrightarrow & B \\ & 0 & \longmapsto & 1 \\ & 1 & \longmapsto & 0 \end{array}$$

cuyas inversas están dadas por

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & E & \longrightarrow & E' \\ & (1,t) & \longmapsto & (0,t) \\ & (0,n) & \longmapsto & (1,n) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \bar{f}^{-1} = \bar{f}: & B & \longrightarrow & B \\ & 0 & \longmapsto & 1 \\ & 1 & \longmapsto & 0 \end{array}$$

que también son continuas. Por lo tanto f y $\bar{f}$ son homeomorfismos y $(f, \bar{f})$ una equivalencia entre ζ y ζ'.

Veamos ahora que f y $\bar{f}$ no son equivalentes sobre B. Supongamos que existe un homeomorfismo $g : E \longrightarrow E'$ de la forma $g(s,t) = (g_1(s,t), g_2(s,t))$ tal que (g, Id_B) sea una equivalencia de fibrados, es decir, tal que $p' \circ g = Id_B \circ p = p$.

Como el subconjunto $\{0\} \times I \subset E$ es conexo en E, su imagen $g(\{0\} \times I)$ es conexa en E' luego $g(\{0\} \times I) \subseteq \{1\} \times I$ o bien $g(\{0\} \times I) \subseteq \{(0,0)\}$ o bien $g(\{0\} \times I) \subseteq \{(1,0)\}$.

Al ser g una biyección, el cardinal de $\{0\} \times I$ tiene que ser igual al de su imagen, luego necesariamente $g(\{0\} \times I) \subseteq \{1\} \times I$. Por lo tanto, dado $(0,y) \in \{0\} \times I$, se verifica que $(p' \circ g)(0,y) = p'(g(0,y)) = p'(1, g_2(0,y)) = 1$. Sin embargo $p(0,y) = 0$, en contra de que (g, Id_B) es una equivalencia.

Esta contradicción demuestra que ζ y ζ' no son equivalentes sobre B aun siendo fibrados equivalentes de igual espacio base B.

Un concepto asociado al de fibrado es el de *sección*.

Definición 3.1.14. Sea $\zeta = (E, B, p)$ un fibrado. Una aplicación continua $s : B \longrightarrow E$ se dice que es una *sección del fibrado* ζ si verifica que $(p \circ s)(b) = b$, para todo $b \in B$.

Observación 3.1.15. Toda sección de un fibrado es inyectiva. Dada una sección $s : B \longrightarrow E$ de un fibrado (E, B, p), se tiene por definición que $(p \circ s) = Id_B$. Al ser la identidad una aplicación biyectiva, s ha de ser inyectiva.

Observación 3.1.16. No todo fibrado admite una sección. Considérese el fibrado $\zeta = (\mathbb{R}, \mathbb{S}^1, r)$ definido en el *Ejemplo* 3.1.5.
Supongamos que existe una sección para el fibrado ζ, es decir, existe una aplicación continua $s : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $(r \circ s) = Id_{\mathbb{S}^1}$. Como s es continua y $\mathbb{S}^1$ conexo, $s(\mathbb{S}^1) \subset \mathbb{R}$ ha de ser un subconjunto conexo de $\mathbb{R}$, es decir, un intervalo J.
Por la *Observación* 3.1.15, s es inyectiva, luego la restricción $s : \mathbb{S}^1 \longrightarrow J$ es un homeomorfismo. Sin embargo, un intervalo es un espacio contráctil, mientras que $\mathbb{S}^1$ no lo es, llegando a una contradicción.

3.2. Fibrados triviales y localmente triviales

En esta sección introducimos dos tipos de fibrados importantes; los fibrados triviales y los fibrados localmente triviales.

Definición 3.2.1. Un fibrado (E, B, p) se dice *trivial* si es equivalente a un fibrado producto (*Ejemplo* 3.1.3), es decir, si existen espacios topológicos B', F y aplicaciones $f : E \longrightarrow B' \times F$, $\bar{f} : B \longrightarrow B'$ tales que $(f, \bar{f}) : (E, B, p) \longrightarrow (B' \times F, B', proy_1)$ sea una equivalencia de fibrados. Obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & B' \times F \arrow[d, "proy_1"] \\ B \arrow[r, "\bar{f}"'] & B' \end{tikzcd}$$

Observación 3.2.2. En las condiciones de la definición anterior, se cumple además que (E, B, p) es equivalente sobre B al fibrado producto $(B \times F, B, proy_1)$ mediante la equivalencia

$$((\bar{f}^{-1} \times Id_F) \circ f, Id_B) : (E, B, p) \longrightarrow (B \times F, B, proy_1)$$

dada por el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] \arrow[rr, bend left, "g=(\bar{f}^{-1}\times Id_F)\circ f"] & B' \times F \arrow[r, "\bar{f}^{-1}\times Id_F"] \arrow[d, "proy_{B'}"] & B \times F \arrow[d, "proy_B"] \\ B \arrow[r, "\bar{f}"'] \arrow[rr, bend right, "Id_B=\bar{f}^{-1}\circ\bar{f}"'] & B' \arrow[r, "\bar{f}^{-1}"'] & B \end{tikzcd}$$

Obteniendo el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p"'] & B \times F \arrow[d, "proy_B"] \\ B \arrow[r, "Id_B"'] & B \end{tikzcd}$$

con $g^{-1} = ((\bar{f}^{-1} \times Id_F) \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ (\bar{f}^{-1} \times Id_F)^{-1} = f^{-1} \circ (\bar{f} \times Id_F)$.

De esta forma, podemos dar una segunda definición de fibrado trivial equivalente a la anterior y cuyo diagrama es más sencillo

Definición 3.2.3. Un fibrado $\zeta = (E, B, p)$ se dice *trivial* si existe un espacio topológico F y un homeomorfismo $f : E \longrightarrow B \times F$ tal que $p = proy_1 \circ f$. Obtenemos así el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & B \times F \arrow[dl, "proy_1"] \\ & B & \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

Observación 3.2.4. Las fibras de un fibrado trivial son homeomorfas entre sí. Dado un fibrado trivial (E, B, p), existe un espacio F y un homeomorfismo $f : E \longrightarrow B \times F$ con $p = proy_1 \circ f$. Por tanto, para cada $b \in B$, la fibra $p^{-1}(b) = f^{-1}((proy_1)^{-1}(b))$, es decir la fibra $p^{-1}(b)$ es homeomorfa a $(proy_1)^{-1}(b) = \{b\} \times F$, que es homeomorfa al espacio F. Luego $p^{-1}(b) \cong F$ para todo $b \in B$, de forma que todas las fibras son homeomorfas entre sí.

En este caso, podemos escribir un fibrado trivial como una cuaterna (E, B, F, p), de manera que ya queda explicitado el espacio al que es homeomorfo la fibra.

Definición 3.2.5. Sean (E, B, p) un fibrado y $A \subseteq B$ un subconjunto no vacío de B. Se denomina *restricción de la aplicación de fibrado p al subconjunto A* y se denota por p_A a la aplicación

$$p_A := p|_{p^{-1}(A)} : E_A = p^{-1}(A) \longrightarrow A$$

Observación 3.2.6. Como la aplicación p es sobreyectiva, se tiene que $p_A(E_A) = p(p^{-1}(A)) = A$, y por tanto la terna $\zeta_A = (E_A, A, p_A)$ define un fibrado. Este fibrado lo denominamos *restricción del fibrado ζ al conjunto A*.

Proposición 3.2.7. *Sean $\zeta = (E, B, p)$ un fibrado y $A \subseteq B$ un subconjunto no vacío. Si (E, B, p) es trivial, entonces $\zeta_A = (p^{-1}(A), A, p_A)$ también lo es.*

Demostración. Sea $\zeta = (E, B, p)$ un fibrado trivial y $A \subseteq B$ no vacío. Veamos que el fibrado $\zeta_A = (p^{-1}(A), A, p_A)$ es equivalente a un fibrado producto.

Como ζ es un fibrado trivial, por la *Definición* 3.2.3, existe un espacio F y un homeomorfismo $f : E \longrightarrow B \times F$ tal que $p = proy_1 \circ f$. Buscamos un homeomorfismo $g : p^{-1}(A) \longrightarrow A \times F$ tal que $p_A = proy_1 \circ g$, es decir, que haga el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(A) \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "p_A"'] & & A \times F \arrow[dl, "proy_1"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Basta considerar $g := f|_{p^{-1}(A)}$. La restricción es continua y está bien definida ya que

$$f(p^{-1}(A)) = f((proy_1 \circ f)^{-1}(A)) = f(f^{-1}(proy_1^{-1}(A))) = proy_1^{-1}(A) = A \times F$$

Es sencillo comprobar que su inversa es la aplicación continua $g^{-1} = f^{-1}|_{A \times F}$. Como f es un homeomorfismo, tenemos que g es un homeomorfismo y por tanto el fibrado ζ_A es trivial. □

Esta noción de restricción de un fibrado nos permite definir un nuevo tipo de fibrado

Definición 3.2.8. Sea $\zeta = (E, B, p)$ un fibrado. Se dice que ζ es *localmente trivial* si para todo $b \in B$, existe un abierto $U \subseteq B$ con $b \in U$ tal que $\zeta_U = (E_U, U, p_U)$ sea trivial. Un abierto U que cumple esta condición se denomina *abierto trivializante*.

En algunos textos como [6] o [15], se utiliza el término 'fiber bundle' que podría traducirse como 'haz fibrado' o 'haz de fibras' para referirse a lo que hemos definido como fibrados localmente triviales.

Es claro que todo fibrado trivial $\zeta = (E, B, p)$ es localmente trivial. Basta considerar $U = B$ para verificar la condición de la definición anterior.

Podemos caracterizar la noción de fibrado localmente trivial en términos de recubrimientos abiertos del espacio base.

Lema 3.2.9. *Un fibrado $\zeta = (E, B, p)$ es localmente trivial si y sólo si para algún recubrimiento abierto $\{U_j\}_{j\in J}$ de B, el fibrado ζ_{U_j} es trivial para cada $j \in J$.*

Demostración. Sea $\zeta = (E, B, p)$ un fibrado. Comprobemos la equivalencia.

$\Rightarrow$) Supongamos que ζ es localmente trivial. Por definición, para cada $b \in B$, existe un abierto $U_b \subseteq B$ tal que el fibrado $\zeta_{U_b} = (p^{-1}(U_b), U_b, p_{U_b})$ es trivial. La familia de subconjuntos $\{U_b\}_{b\in B}$ es por tanto un recubrimiento abierto de B en las condiciones del enunciado.

$\Leftarrow$) Supongamos que existe un recubrimiento abieto $\{U_j\}_{j\in J}$ de B tal que cada fibrado $\zeta_{U_j} = (p^{-1}(U_j), U_j, p_{U_j})$ es trivial. Como se trata de un recubrimiento de B, dado $b \in B$, existe $j_0 \in J$ tal que $b \in U_{j_0}$, el cual es un abieto tal que $\zeta_{U_{j_0}}$ es un fibrado trivial, de forma que el fibrado ζ es localmente trivial. □

En general no se puede asegurar que las fibras $p^{-1}(b)$ de un fibrado sean comparables. No obstante, si el fibrado tiene características convenientes, es posible establecer relaciones entre sus fibras, tal y como nos asegura el siguiente resultado

Teorema 3.2.10. *Sea $\zeta = (E, B, p)$ un fibrado localmente trivial. Si B es conexo, entonces las todas las fibras de ζ son homeomorfas.*

Demostración. Sea $\zeta = (E, B, p)$ un fibrado localmente trivial.
Fijemos $b_0 \in B$. Para demostrar el resultado basta ver que todas las fibras son homeomorfas a la fibra $p^{-1}(b_0)$. Para ello, demostraremos que el conjunto

$$B_0 := \{b \in B : p^{-1}(b) \cong p^{-1}(b_0)\}$$

es abierto y cerrado en B. En tal caso, como B_0 no es vacío ($b_0 \in B_0$), necesariamente se tendrá que $B = B_0$ por ser B conexo, por tanto todas las fibras $p^{-1}(b)$ son homeomorfas.

Veamos que B_0 es abierto. Sea $b \in B_0$. Probaremos que existe un abierto contenido en B_0 al que pertenece b. Como ζ es localmente trivial, existe $U \subseteq B$ entorno abierto de b tal que el fibrado $\zeta_U = (p^{-1}(U), U, p_U)$ es trivial. Por la *Observación* 3.2.4, todas las fibras de un fibrado trivial son homeomorfas entre sí, luego $b \in U \subseteq B_0$. Esto implica que B_0 es abierto.

Veamos ahora que B_0 es cerrado, esto es, que su complementario $B \setminus B_0$ es abierto. Tenemos que

$$B \setminus B_0 = \{b \in B : p^{-1}(b) \ncong p^{-1}(b_0)\}.$$

Sea $b \in B \setminus B_0$. Por ser ζ localmente trivial, existe nuevamente un entorno abierto $V \subseteq B$ de b tal que $\zeta_V = (p^{-1}(V), V, p_V)$ es un fibrado trivial. Tal y como hemos razonado antes, las fibras de todos los elementos de V son homeomorfas entre sí, y por lo tanto $b \in V \subseteq B \setminus B_0$ y se cumple que $B \setminus B_0$ es abierto.

Tenemos que B_0 es un conjunto abierto y cerrado de B y como B es un espacio conexo, $B = B_0$. Esto nos permite concluir que todas las fibras de ζ son homeomorfas. □

Al igual que con los fibrados triviales, podemos escribir un fibrado localmente trivial como (E, B, F, p) si B es conexo.

Veamos un par de ejemplos de fibrados localmente triviales

Ejemplo 3.2.11. ***Recubrimientos***

Toda aplicación de recubrimiento $p : E \longrightarrow B$ define un fibrado $\zeta = (E, B, p)$ (ver *Ejemplo* 3.1.5). Además, el fibrado ζ definido por la aplicación de recubrimiento p es localmente trivial. Probémoslo en detalle.

El fibrado ζ es localmente trivial si dado $b \in B$, existe un abierto U de B con $b \in U$ tal que el fibrado $\zeta_U = (p^{-1}(U), U, p_U)$ es trivial, es decir, que exista un espacio topológico F un homeomorfismo $f : p^{-1}(U) \longrightarrow U \times I$ tal que $proy_1 \circ f = p_U$.

Fijemos $b \in B$. Como p es una aplicación de recubrimiento, sabemos que existe un entorno abierto U de x tal que $p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} V_j$ que verifican

- V_j es abierto de E para todo $j \in J$.
- $V_i \cap V_j = \emptyset$ si $i \neq j$.
- $p|_{V_j} : V_j \longrightarrow U$ es un homeomorfismo

Consideremos el conjunto J dotado de la topología discreta. Dado $e \in p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} V_j$, al ser los conjuntos V_j disjuntos dos a dos, existe un único $j_0 \in J$ tal que $e \in V_{j_0}$. Por lo tanto, la aplicación

$$\begin{array}{rccc} f: & p^{-1}(U) & \longrightarrow & U \times J \\ & e \in V_{j_0} & \longmapsto & (p(e), j_0) \end{array}$$

está bien definida. Es claro que se verifica $p_U = proy_1 \circ f$, de forma que tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p_U"'] & & U \times J \arrow[dl, "proy_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

Basta ver que la aplicación f es un homeomorfismo para demostrar que ζ es un fibrado localmente trivial. Comprobemos que f es continua. Por el *Lema* 2.1.17, f es continua si y sólo si lo son las aplicaciones $p_U : p^{-1}(U) \longrightarrow U$ y $q : p^{-1}(U) \longrightarrow J$ dadas por $p_U(e) = p(e)$ y $q(e) = j_0$ con $e \in V_{j_0}$ respectivamente. La aplicación p_U es continua. Dado $\{j\} \subseteq J$, se tiene que el conjunto $q^{-1}(\{j\}) = V_j$ es abierto en $p^{-1}(U)$ (ya que tanto $p^{-1}(U)$ como V_j son abiertos de E). Como cualquier abierto de J se puede escribir como unión de elementos $\{j\}$ y las uniones se comportan bien por contraimágenes, la aplicación q también es continua.

Consideremos la aplicación

$$\begin{array}{rccc} g: & U \times J & \longrightarrow & p^{-1}(U) \\ & (u, j) & \longmapsto & (p|_{V_j})^{-1}(u) \end{array}$$

que está bien definida por ser $p|_{V_j}$ un homeomorfismo. Veamos que g es continua. Dado un abierto $W \subseteq p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} V_j$, podemos escribir $W = \bigcup_{j \in J} (W \cap V_j)$. Para cada intersección $W \cap V_j$, se cumple que $g^{-1}(W \cap V_j) = ((p|_{V_j})^{-1})^{-1}(W \cap V_j) \times \{j\} = p|_{V_j}(W \cap V_j) \times \{j\}$. Como W y V_j son abiertos de $p^{-1}(U)$, entonces $W \cap V_j$ es abierto en V_j y como $p|_{V_j}$ es un homeomorfismo, $p|_{V_j}(W \cap V_j)$ es abierto en U. Es decir, $p|_{V_j}(W \cap V_j) \times \{j\} = g^{-1}(W \cap V_j)$ es abierto en $U \times J$ para cada $j \in J$, por lo tanto $g^{-1}(W)$ es abierto en $U \times J$, lo que demuestra la continuidad de la aplicación g.

Por último, veamos que f y g son aplicaciones inversas.

- Sea $e \in V_{j_0} \subseteq p^{-1}(U)$. Se verifica que

$$g \circ f(e) = g(p(e), j_0) = (p|_{V_{j_0}})^{-1}(p(e)) = e = Id_{p^{-1}(U)}(e)$$

- Sea $(u, j) \in U \times J$. Se verifica que

$$f \circ g(u, j) = f((p|_{V_j})^{-1}(u)) = (p((p|_{V_j})^{-1}(u)), j) = (u, j) = Id_{U\times J}(u, j)$$

Esto implica que $g \circ f = Id_{p^{-1}(U)}$ y $f \circ g = Id_{U\times J}$, por lo que g es la aplicación continua inversa de la aplicación continua f. Por lo tanto f es un homeomorfismo, y concluimos que $\zeta = (E, B, p)$ es un fibrado localmente trivial.

Ejemplo 3.2.12. ***Fibrados sobre Espacios Proyectivos***
Sea n un entero positivo y denotemos por $\mathbb{K}$ el cuerpo $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ y por $\mathbb{K}^*$ el conjunto $\mathbb{K} \setminus \{0\}$. Recordemos la construcción del espacio proyectivo:
Consideremos $\mathbb{K}^{n+1}$ con la estructura usual de $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Definimos en $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ la siguiente relación de equivalencia

$$x = (x_0, ..., x_n) \sim y = (y_0, ..., y_n) \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}^* \text{ tal que } x = \lambda y$$

y definimos el *espacio proyectivo sobre* $\mathbb{K}$ *de dimensión* n al cociente por dicha relación, es decir

$$\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} := \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}/\sim$$

Podemos dotar al espacio vectorial $\mathbb{K}^{n+1}$ de la topología usual, y, consecuentemente, dar al espacio proyectivo una estructura de espacio topológico mediante la aplicación de paso al cociente $p : \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ donde denotamos $[x] = p(x)$. De acuerdo con el *Ejemplo* 3.1.4, esto da lugar a un fibrado $\zeta_{\mathbb{K}} = (\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}, \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}, p)$.

Este no es el único fibrado interesante sobre el espacio proyectivo. Consideremos el entero $d = 1$ en el caso real y $d = 2$ en el complejo. Tomemos la esfera

$$\mathbb{S}^{d(n+1)-1} := \{x \in \mathbb{K}^{n+1} : \|x\| = 1\}$$

y consideremos la aplicación continua $p' := p|_{\mathbb{S}^{d(n+1)-1}}$. Es fácil comprobar que esta aplicación también es sobreyectiva, puesto que dado $[x] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$, se tiene que $\frac{x}{\|x\|} \in \mathbb{S}^{d(n+1)-1}$ ya que $\|x\| \neq 0$, luego $p'(\frac{x}{\|x\|}) = [\frac{x}{\|x\|}] = [x]$, lo que da lugar a un fibrado $\zeta_{\mathbb{S}} = (\mathbb{S}^{d(n+1)-1}, \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}, p')$.

Estos dos fibrados no son equivalentes. De serlo, existiría un homeomorfismo entre la esfera y el espacio sin el origen que la contiene, lo cual no es posible al ser la esfera un espacio compacto y el otro no.

Probemos que el fibrado $\zeta_{\mathbb{K}}$ es localmente trivial. Definimos la siguiente familia de subconjuntos de $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ dados por

$$V_i := \{x = (x_0, ..., x_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} : x_i \neq 0\}, \text{ con } i = 0, 1, ..., n$$

Los conjuntos V_i son abiertos y forman un recubrimiento de $\mathbb{K}^n \setminus \{0\}$. Por lo tanto, los conjuntos

$$U_i := p(V_i)$$

recubren el espacio proyectivo. Además, se verifica que $V_i = p^{-1}(U_i)$ para cada $i = 0, ..., n$, por lo que los conjuntos U_i son abiertos. Veamos que los fibrados $\zeta_i := (V_i, U_i, p_i = p_{U_i})$ son triviales.

Así, de acuerdo con el *Lema* 3.2.9, tendremos que el fibrado $\zeta_{\mathbb{K}}$ es localmente trivial. Fijemos $i \in \{0, ..., n\}$. Buscamos una equivalencia de fibrados entre el fibrado ζ_i y un fibrado producto. Esta equivalencia de fibrados es de la forma (f, Id_{U_i}), es decir, con un diagrama de la forma

$$\begin{tikzcd} V_i \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p_i"'] & & U_i \times \mathbb{K}^* \arrow[dl, "proy_1"] \\ & U_i & \end{tikzcd}$$

Para cada $x = (x_0, ..., x_i, ..., x_n) \in V_i$, definimos la aplicación continua f de la siguiente forma

$$f(x) = ([x], \frac{x_i}{|x_i|} \cdot \|x\|)$$

que está bien definida porque $x_i \neq 0$. Consideremos además una segunda aplicación continua $g : U_i \times \mathbb{K}^* \longrightarrow V_i$ dada por

$$g([x], \lambda) = \lambda \cdot \frac{|x_i|}{x_i} \cdot \frac{x}{\|x\|}$$

Observamos que g está bien definida porque si $[x] = [y]$ con $x, y \in V_i$, entonces $y = \mu x$ para algún $\mu \in \mathbb{K}^*$, luego

$$g([y], \lambda) = \lambda \cdot \frac{|y_i|}{y_i} \cdot \frac{y}{\|y\|} = \lambda \cdot \frac{|\mu x_i|}{\mu x_i} \cdot \frac{\mu x}{\|\mu x\|} = g([x], \lambda)$$

A continuación, veamos que f y g son aplicaciones inversas. Supongamos $x \in V_i$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

- Se tiene que

  $$f \circ g([x], \lambda) = f\left(\lambda \cdot \frac{|x_i|}{x_i} \cdot \frac{x}{\|x\|}\right)$$

  Denotamos $\epsilon_i = \frac{x_i}{|x_i|} \in \{\pm 1\}$ de forma que $\epsilon_i = \epsilon_i^{-1}$. Escribimos $y = \lambda \cdot \epsilon_i \cdot \frac{x}{\|x\|}$. Por tanto, se verifica que $[y] = [x]$, que $y_i = \lambda \cdot \epsilon_i$ con $|y_i| = |\lambda| \cdot \frac{|x_i|}{x} = |\lambda| \cdot \epsilon_i$ y que $\|y\| = |\lambda|$.

  $$f(y) = ([y], \frac{y_i}{|y_i|} \cdot \|y\|) = ([x], \frac{\lambda \cdot \epsilon_i}{|\lambda| \cdot \epsilon_i} \cdot |\lambda|) = ([x], \lambda) = Id_{U_i \times \mathbb{K}^*}([x], \lambda)$$

  Luego $f \circ g = Id_{U_i \times \mathbb{K}^*}$.

- Por otro lado, recordando denotar $\epsilon_i = \frac{x_i}{|x_i|}$, se tiene que

  $$g \circ f(x) = g([x], \epsilon_i \cdot \|x\|) = (\epsilon_i \cdot \|x\|) \cdot \epsilon_i^{-1} \cdot \frac{x}{\|x\|} = x = Id_{U_i}(x)$$

  Luego $g \circ f = Id_{U_i}$.

Concluyendo así que la aplicación f es un homeomorfismo y, por tanto, que cada fibrado ζ_i es trivial, por lo que el fibrado $\zeta_{\mathbb{K}}$ es localmente trivial.

El fibrado $\zeta_{\mathbb{S}}$ también es localmente trivial. La demostración sigue un razonamiento similar al visto para el fibrado $\zeta_{\mathbb{K}}$, usando como abiertos que recubren la esfera los conjuntos $V_i \cap \mathbb{S}^{d(n+1)-1}$ y restringiendo el homeomorfismo $f|_{V_i \cap \mathbb{S}^{d(n+1)-1}} : V_i \cap \mathbb{S}^{d(n+1)-1} \longrightarrow U_i \times \mathbb{S}^{d-1}$.

3.3. Fibrado inducido

Un concepto que cobrará importancia de este punto del trabajo en adelante es el *Producto Fibrado*, cuya definición damos a continuación.

Dadas dos aplicaciones cualesquiera $f : X \longrightarrow Z$ y $g : Y \longrightarrow Z$, podemos considerar el siguiente subconjunto del espacio producto de X e Y.

$$X \times_{f,g,Z} Y := \{(x, y) \in X \times Y : f(x) = g(y)\}$$

A este conjunto se le denomina *producto fibrado de f y g sobre Z*. Si no hay lugar a confusión, se denota $X \times_Z Y$. El producto fibrado es además el mayor subconjunto de $X \times Y$ que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X \times_Z Y \arrow[r, "proy_2"] \arrow[d, "proy_1"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Z \end{tikzcd} \tag{3.2}$$

Esta construcción tiene numerosas propiedades interesantes, no obstante, en esta sección nos limitaremos a probar que nos permite construir fibrados nuevos a raíz de uno conocido.

Sean $\zeta = (E, B, p)$ un fibrado y $g : Y \longrightarrow B$ una aplicación continua. Consideremos el *Diagrama* (3.2) adaptado a nuestras hipótesis

$$\begin{tikzcd} Y \times_B E \arrow[r, "proy_2"] \arrow[d, "p_g^*"'] & E \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & B \end{tikzcd} \tag{3.3}$$

donde la aplicación continua $p_g^* = proy_1|_{Y \times_B E}$ es la restricción de la proyección sobre la primera coordenada.

Definición 3.3.1. En las condiciones anteriores, la aplicación $p_g^* : Y \times_B E \longrightarrow Y$ define un fibrado $\eta = (Y \times_B E, Y, p_g^*)$. Este fibrado se denomina *fibrado inducido por p a través de g.*

La sobreyectividad de la aplicación p_g^* es consecuencia de la sobreyectividad de p. Dado $y \in Y$, $g(y) \in B$, luego ha de existir $e \in E$ tal que $p(e) = g(y)$, dicho de otra forma, existe un par $(y, e) \in Y \times_B E$ tal que $p_g^*(y, e) = proy_1(y, e) = y$.

El siguiente resultado recoge propiedades que el fibrado inducido η hereda del fibrado ζ.

Proposición 3.3.2. *Sean $\zeta = (E, B, p)$ un fibrado, $g : Y \longrightarrow B$ una aplicación continua y $\eta = (Y \times_B E, Y, p_g^*)$ el fibrado inducido por p a través de g. Se cumple que*

1. *Si p es inyectiva, también lo es p_g^*.*
2. *Si g es una aplicación constante, η es un fibrado trivial.*
3. *Si $Y \subseteq B$ y $g = i : Y \hookrightarrow B$ es la inclusión, entonces η es equivalente sobre Y al fibrado $\zeta_Y = (p^{-1}(Y), Y, p_Y)$.*
4. *Si ζ es un fibrado trivial, entonces η también lo es.*

5. *Si ζ es un fibrado localmente trivial, entonces η también lo es.*

Demostración. Consideremos los fibrados ζ y η y la aplicación continua g como en las condiciones de la proposición. Demostremos cada uno de los enunciados.

(1). Supongamos que la aplicación p es inyectiva. Comprobemos la inyectividad de p_g^*. Sean $(y_1, e_1), (y_2, e_2) \in Y \times_B E$ tales que $p_g^*(y_1, e_1) = p_g^*(y_2, e_2)$. Por la definición de la aplicación p_g^*, es inmediato que $y_1 = y_2$, y por tanto $g(y_1) = g(y_2)$. Como el *Diagrama* (3.3) es conmutativo, tenemos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} g(y_1) =& g \circ p_g^*(y_1, e_1) = p \circ proy_2(y_1, e_1) = p(e_1) \\ g(y_2) =& g \circ p_g^*(y_2, e_2) = p \circ proy_2(y_2, e_2) = p(e_2) \end{aligned}$$

de donde deducimos que $p(e_1) = p(e_2)$. Al ser p una aplicación inyectiva, tenemos que $e_1 = e_2$, por lo que $(y_1, e_1) = (y_2, e_2)$ y p_g^* es inyectiva.

(2). Supongamos que la aplicación g es constante, es decir, existe $b_0 \in B$ de forma que $g = c_{b_0} : Y \longrightarrow B$. Entonces, el producto fibrado verifica lo siguiente

$$\begin{aligned} Y \times_B E =& \{(y, e) \in Y \times E : p(e) = g(y) = b_0\} \\ & \{(y, e) : y \in g^{-1}(b_0) = Y, e \in p^{-1}(b_0)\} = Y \times p^{-1}(b_0) \end{aligned}$$

Por lo tanto, para ver que el fibrado η es trivial, basta considerar el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} Y \times_B E \arrow[rr, "Id_{Y \times_B E}"] \arrow[dr, "p_g^*"'] & & Y \times p^{-1}(b_0) \arrow[dl, "proy_1"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

donde la aplicación identidad $Id_{Y \times_B E}$ es un homeomorfismo. Concluimos que η es equivalente a un fibrado producto y por tanto, es un fibrado trivial.

(3). Supongamos que $g = i : Y \hookrightarrow B$ es la aplicación de inclusión. Denotamos $E_Y := p^{-1}(Y)$. Para ver que η es equivalente sobre Y al fibrado $\zeta_Y = (E_Y, Y, p_Y)$, buscamos un homeomorfismo $f : Y \times_B E \longrightarrow E_Y$ tal que el siguiente diagrama sea conmutativo

$$\begin{tikzcd} Y \times_B E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p_g^*"'] & & E_Y \arrow[dl, "p_Y"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

Tomando $f = proy_2$ tenemos el homeomorfismo que buscamos. Veamos que f está bien definida. Dado $(y, e) \in Y \times_B E$, tenemos que $g(y) = y = p(e)$, luego $e \in p^{-1}(y) \subseteq E_Y$, por lo tanto $f(y, e) = proy_2(y, e) = e \in E_Y$ y f está bien definida. Además, como $f(Y \times_B E) \subseteq E_Y \subseteq E$ y $proy_2 : Y \times_B E \longrightarrow E$ es continua, entonces f es continua (ver *Ejemplo* 2.1.16).

Consideramos la aplicación $\tilde{f} : E_Y \longrightarrow Y \times_B E$ dada por $\tilde{f}(e) = (p(e), e)$. Esta aplicación también está bien definida, ya que dado $e \in E_Y$, tenemos que $g(p(e)) = p(e)$, lo que implica que $\tilde{f}(e) = (p(e), e) \in Y \times_B E$. Por *Ejemplo* 2.1.16, la aplicación $\tilde{f}$ es continua si lo es la aplicación $\hat{f} : E_Y \longrightarrow Y \times E$ dada por $\hat{f}(e) = (p(e), e)$. Se cumple que $\hat{f}$ es continua por serlo las aplicaciones $p : E_Y \longrightarrow Y$ e Id_{E_Y} (ver *Ejemplo* 2.1.17), de forma que la aplicación $\tilde{f}$ es continua.

Veamos que $\tilde{f}$ es la aplicación inversa de f.

- Por un lado, se cumple que $\tilde{f} \circ f(y, e) = \tilde{f}(e) = (p(e), e)$. Como $(y, e) \in Y \times_B E$, necesariamente $p(e) = g(y) = y$, luego $\tilde{f}(e) = (p(e), e) = (y, e) = Id_{Y \times_B E}(y, e)$.
- Por otro lado, tenemos que $f \circ \tilde{f}(e) = f(p(e), e) = e = Id_{E_Y}(e)$.

Por lo tanto $\tilde{f}$ es una aplicación inversa continua de f, de forma que f es un homeomorfismo y η es un fibrado trivial.

(4). Supongamos que $\zeta = (E, B, F, p)$ es un fibrado trivial, es decir, existe un homeomorfismo $f : E \longrightarrow B \times F$ tal que $p = proy_1 \circ f$. Sean f_1, f_2 aplicaciones tales que $f(e) = (f_1(e), f_2(e))$. Notemos que $f_1 = proy_1 \circ f = p$. Como f es una aplicación continua, por *Lema* 2.1.17, también lo son f_1 y f_2. Observemos además que se cumple $(y, z) = f(f^{-1}(b, z)) = (p(f^{-1}(b, z)), f_2(f^{-1}(b, z)))$, luego $z = f_2(f^{-1}(b, z))$.

Para demostrar que η es un fibrado trival, buscamos un homeomorfismo $h : Y \times_B E \longrightarrow Y \times F$ que haga conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
Y \times_B E \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "p_g^*"'] & & Y \times F \arrow[dl, "proy_1"] \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

Definimos $h(y, e) := (y, f_2(e))$. Se comprueba inmediatamente que la aplicación h hace conmutativo el diagrama: $proy_1(h(y, e)) = proy_1(y, f_2(e)) = y = p_g^*(y, e)$. Además, por el *Lema* 2.1.17, h es continua por serlo las aplicaciones Id_Y y f_2. Veamos que h admite una aplicación inversa continua.

Consideremos la aplicación $\hat{h} : Y \times F \longrightarrow Y \times E$ dada por $\hat{h}(y, z) = (y, f^{-1}(g(y), z))$. Como Id_Y es una aplicación continua, por el *Lema* 2.1.17, la aplicación $\hat{h}$ es continua si lo es la aplicación $f^{-1}(g(y), z) = f^{-1} \circ (g \times Id_F)(y, z)$. Teniendo en cuenta que g e Id_F son continuas y f es un homeomorfismo, tenemos que $f^{-1} \circ (g \times Id_F)$ es continua, luego $\hat{f}$ también es continua. Además, $p(f^{-1}(g(y), z)) = proy_1(g(y), z) = g(y)$, por lo que $\hat{h}(y, z) \in Y \times_B E$. De acuerdo con el *Ejemplo* 2.1.16, la aplicación $\tilde{h} : Y \times F \longrightarrow Y \times_B E$ dada por $\tilde{h}(y, z) = \hat{h}(y, z)$ es continua. Veamos que h y $\tilde{h}$ son aplicaciones inversas.

- Dado $(y, e) \in Y \times_B E$, como $f_1 = p$, se verifica que

$$\begin{aligned}
\tilde{h} \circ h(y, e) &= \tilde{h}(y, f_2(e)) = (y, f^{-1}(g(y), f_2(e))) \\
&= (y, f^{-1}(p(e), f_2(e))) = (y, f^{-1}(f(e))) = (y, e) = Id_{Y \times_B E}(y, e)
\end{aligned}$$

- Dado $(y, z) \in Y \times F$, como $z = f_2(f^{-1}(b, z))$ para cada $(b, z) \in B \times F$, se cumple que

$$h \circ \tilde{h}(y, z) = h(y, f^{-1}(g(y), z)) = (y, f_2(f^{-1}(g(y), z))) = (y, z) = Id_{Y \times F}(y, z)$$

Esto prueba que $\tilde{h}$ es la aplicación inversa de h, por lo que h es un homeomorfismo y η es un fibrado trivial.

(5). Supongamos que ζ es un fibrado localmente trivial. Sean $y \in Y$ y $b = g(y) \in B$. Como ζ es localmente trivial, existe un abierto U_b de B con $b \in B$ y un espacio topológico F_b tales que existe un homeomorfismo $f_b : p^{-1}(U_b) \longrightarrow U_b \times F_b$ que verifica $p_{U_b} = proy_1 \circ f_b$. De forma análoga a la demostración del enunciado (4), podemos escribir $f_b(e) = (f_1^b(e), f_2^b(e))$, donde $f_1^b : p^{-1}(U_b) \longrightarrow U_b$ y $f_2^b : p^{-1}(U_b) \longrightarrow F_b$ son continuas, $f_1^b = p_{U_b}$ y $z = f_2^b(f_b^{-1}(a, z))$.

Denotamos $V_y := g^{-1}(U_b)$. Es claro que $y \in V_y$. Para probar la trivialidad del fibrado restringido ζ_{V_y}, buscamos un homeomorfismo $h_y : (p_g^*)^{-1}(V_y) \longrightarrow V_y \times F_b$ que haga conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(p_g^*)^{-1}(V_y) \arrow[rr, "h_y"] \arrow[dr, "(p_g^*)|_{V_y}"'] & & V_y \times F_b \arrow[dl, "proy_1"] \\
& V_y &
\end{tikzcd}$$

Para construir la aplicación h_y seguimos un razonamiento análogo al de la construcción del homeomorfimo h de la demostración del enunciado (4), de forma que argumentos análogos prueban la continuidad de las aplicaciones que vamos a definir. Consideramos h_y la aplicación continua dada por $h_y(x, e) = (x, f_2^b(e))$ y $\hat{h}_y : V_y \times F_b \longrightarrow Y \times E$ la aplicación continua dada por $\hat{h}_y(x, z) = (x, f_b^{-1}(g(x), z))$. Se cumple que $p(f_b^{-1}(g(x), z)) = proy_1(g(x), z) = g(x)$, por lo que $Im(\hat{h}_y) \subseteq Y \times_B E$. Observamos que $p_g^*(\hat{h}_y(x, z)) = p_g^*(x, f_b^{-1}(g(x), z)) = x \in V_y$, es decir, $\hat{h}_y(x, z) \in (p_g^*)^{-1}(V_y)$. Por lo tanto, la aplicación $\tilde{h}_y : V_y \times F_b \longrightarrow (p_g^*)^{-1}(V_y)$ dada por $\tilde{h}_y(x, z) = \hat{h}_y(x, z)$ es continua. Veamos que $\tilde{h}$ es la aplicación inversa de h_y. Esta comprobación es esencialmente la misma que la hecha en (4).

- Dado $(x, e) \in (p_g^*)^{-1}(V_y)$, como $f_1^b = p_{U_b}$, se verifica que

$$\begin{aligned}
\tilde{h}_y \circ h_y(x, e) &= \tilde{h}_y(x, f_2^b(e)) = (x, f_b^{-1}(g(x), f_2^b(e))) \\
&= (x, f_b^{-1}(pU_b(e), f_2(e))) = (x, f_b^{-1}(f_b(e))) = (x, e) = Id_{(p_g^*)^{-1}(V_y)}(x, e)
\end{aligned}$$

- Dado $(x, z) \in V_y \times F_b$, como $z = f_2^b(f_b^{-1}(a, z))$ para cada $(a, z) \in U_b \times F$, se cumple que

$$h_y \circ \tilde{h}_y(x, z) = h_y(x, f_b^{-1}(g(x), z)) = (x, f_2^b(f_b^{-1}(g(x), z))) = (x, z) = Id_{V_y \times F_b}(x, z)$$

Lo que nos permite concluir que h_y es un homeomorfismo y el fibrado ζ_{V_y} es trivial para cada $y \in Y$. Como para cada $y \in Y$, podemos considerar los abiertos V_y tales que ζ_{V_y} son triviales, tenemos que η es un fibrado localmente trivial. $\square$

Capítulo 4

Levantamiento de Homotopías y Fibrados de *Hurewicz*

En esta sección vamos a definir los levantamientos de homotopías y relacionarlos con los fibrados. Este capítulo sigue mayoritariamente las referencias [1] y [10].

4.1. Propiedad del levantamiento de Homotopías

Definición 4.1.1. Sean X un espacio topológico, $\zeta = (E, B, p)$ un fibrado y $f : X \longrightarrow B$ una aplicación continua. En general, se dice que una aplicación continua $\bar{f} : X \longrightarrow E$ es un *levantamiento de* f *por el fibrado* ζ (o *levantamiento de* f *por* p, o simplemente *levantamiento de* f) si $p \circ \bar{f} = f$, es decir, si hace conmutativo el diagrama:

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, dashed, "\bar{f}"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

En el caso de las homotopías, tenemos una particularidad extra. Sea X un espacio topológico e $I := [0, 1]$. Consideramos $i_0 : X \longrightarrow X \times I$ la identificación de X con el conjunto $X \times \{0\} \subset X \times I$, es decir, la aplicación dada por $i_0(x) = (x, 0)$ para cada $x \in X$, que es continua.

Nos interesa el caso de un fibrado $\zeta = (E, B, p)$, una homotopía $H : X \times I \longrightarrow B$ y una aplicación continua $h : X \longrightarrow E$ como en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "H"'] & B \end{tikzcd} \tag{4.1}$$

donde el cuadrado es conmutativo, es decir, se cumple $p \circ h = H \circ i_0$, o, equivalentemente, $(p \circ h)(x) = H(x, 0)$, para todo $x \in X$.

Definición 4.1.2. Un fibrado $\zeta = (E, B, p)$ se dice que tiene la *propiedad de levantamiento de homotopía, PLH, para el espacio* X (en inglés *'homotopy lifting property, HLP'*) si para cualquier par de aplicaciones h y H como en el *Diagrama* (4.1), existe una aplicación $\bar{H} : X \times I \longrightarrow E$ continua que haga conmutativos ambos triángulos del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dashed, "\bar{H}"] & B \end{tikzcd} \tag{4.2}$$

es decir, si satisface simultáneamente

$$h = \bar{H} \circ i_0$$
$$H = p \circ \bar{H}$$

En tal caso, se dice que la aplicación $\bar{H}$ es un *levantamiento de la homotopía* H *que empieza en la aplicación* h, o bien que la aplicación $\bar{H}$ *levanta la homotopía* H *hasta la aplicación* h.

Esta propiedad se comporta bien con nociones acerca de los fibrados explicadas en la sección anterior, como la noción de fibrados equivalentes.

Proposición 4.1.3. *Sean* ζ *y* ζ' *dos fibrados equivalentes. El fibrado* ζ *tiene la propiedad de levantamiento de homotopías para un espacio* X *si y sólo si el fibrado* ζ' *también la tiene.*

Demostración. Sean $\zeta = (E, B, p)$ y $\zeta' = (E', B', p')$ fibrados y $(f, \bar{f}) : \zeta \longrightarrow \zeta'$ una equivalencia de fibrados entre ellos. Supongamos que el fibrado ζ tiene la PLH para un espacio topológico X, es decir, dado un esquema como el del *Diagrama* (4.2), existe una aplicación $\bar{H}$ que hace conmutativo el cuadrado. Veamos que entonces el fibrado ζ' también tiene la PLH para el espacio X.

Sean $H : X \times I \longrightarrow B'$ una homotopía y $h : X \longrightarrow E'$ una aplicación continua tales que $p' \circ h = H \circ i_0$. Queremos ver que existe una aplicación continua $\bar{H} : X \times I \longrightarrow E'$ tal que $h = \bar{H} \circ i_0$ y $H = p' \circ \bar{H}$. Se tiene el siguiente esquema de aplicaciones continuas entre los espacios

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "i_0"'] & E' \arrow[r, "f^{-1}"] \arrow[d, "p'"] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "H"'] & B' \arrow[r, "\bar{f}^{-1}"'] & B \end{tikzcd}$$

Del anterior diagrama, podemos considerar uno nuevo mediante la composición de aplicaciones

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f^{-1} \circ h"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "\bar{f}^{-1} \circ H"'] & B \end{tikzcd}$$

Como ζ tiene la PLH para el espacio X, existe una aplicación continua $\bar{G} : X \times I \longrightarrow E$ tal que $f^{-1} \circ h = \bar{G} \circ i_0$ y $\bar{f}^{-1} \circ H = p \circ \bar{G}$. De esta forma, tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f^{-1}\circ h"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"] & E' \arrow[d, "p'"] \\ X \times I \arrow[r, "\bar{f}^{-1}\circ H"'] \arrow[ur, dashed, "\bar{G}"] & B \arrow[r, "\bar{f}"'] & B' \end{tikzcd}$$

Definimos $\bar{H} := f \circ \bar{G} : X \times I \longrightarrow E'$. Esta aplicación es continua por ser composición de aplicaciones continuas. Además, teniendo en cuenta las propiedades de la composición de aplicaciones, la biyectividad de la aplicación f y la primera igualdad que cumple la aplicación $\bar{G}$, se sigue que

$$\bar{H} \circ i_0 = (f \circ \bar{G}) \circ i_0 = f \circ (\bar{G} \circ i_0) = f \circ (f^{-1} \circ h) = h.$$

De forma similiar, teniendo en cuenta que $(f, \bar{f})$ es una equivalencia de fibrados, la biyectividad de la aplicación $\bar{f}$ y la segunda igualdad que cumple la aplicación $\bar{G}$, deducimos

$$\begin{aligned} p' \circ \bar{H} &= p' \circ (f \circ \bar{G}) = (p' \circ f) \circ \bar{G} = \\ &= (\bar{f} \circ p) \circ \bar{G} = \bar{f} \circ (p \circ \bar{G}) = \bar{f} \circ (\bar{f}^{-1} \circ H) = H. \end{aligned}$$

Lo que nos permite concluir que la aplicación $\bar{H}$ es un levantamiento de la homotopía H que empieza en la aplicación h y, por tanto, el fibrado ζ' tiene la PLH para el espacio X.

Esto demostraría la implicación de izquierda a derecha, no obstante, como la relación de ser fibrados equivalentes es simétrica, si ζ' tiene la PLH para el espacio X entonces ζ también la tendrá, ya que la demostración es válida para la equivalencia $(f^{-1}, \bar{f}^{-1})$.

□

La propiedad del levantamiento de homotopías también se respeta por restricción

Proposición 4.1.4. *Si un fibrado $\zeta = (E, B, p)$ tiene la PLH para un espacio topológico X, entonces, cualquier restricción $\zeta_A = (p^{-1}(A), A, p_A)$, con $A \subseteq B$, también la tiene.*

Demostración. Sea $\zeta = (E, B, p)$ un fibrado con la PLH y $\zeta_A = (E_A = p^{-1}(A), A, p_A)$ su restricción a un subconjunto $A \subseteq B$. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "i_0"'] & E_A \arrow[d, "p_A"] \\ X \times I \arrow[r, "H"'] & A \end{tikzcd}$$

donde h y H son aplicaciones continuas.

Queremos comprobar que existe una aplicación continua $\bar{H} : X \times I \longrightarrow E_A$ tal que $h = \bar{H} \circ i_0$ y $H = p_A \circ \bar{H}$. Como $E_A \subseteq E$ y $A \subseteq B$, podemos considerar h y H como aplicaciones con imagen en E y B respectivamente, y, al tener ζ la PLH para el espacio X, existe una aplicación continua $\bar{H} : X \times I \longrightarrow E$ que cumple $h = \bar{H} \circ i_0$ y $H = p \circ \bar{H}$.

Basta demostrar que, esta aplicación tiene imagen en E_A, es decir, $\bar{H}(X \times I) \subseteq E_A$, lo cual es inmediato por las propiedades de $\bar{H}$. Dado $(x, t) \in X \times I$, tenemos que $\bar{H}(x, t) \in E_A = p^{-1}(A)$ si y solo si $p(\bar{H}(x, t)) \in A$. Como $p \circ \bar{H} = H$ y $H(x, t) \in A$, se cumple lo que queremos.

Así, es evidente que también verifica $H = p_A \circ \bar{H}$, ya que $p = p_A$ en todo E_A y, por lo tanto, el fibrado ζ_A tiene la PLH para el espacio X. □

Teorema 4.1.5. *Un fibrado trivial tiene la propiedad de levantamiento de homotopía para cualquier espacio topológico.*

Demostración. Por definición, un fibrado trivial es equivalente a un fibrado producto, de forma que, por la *Proposición* 4.1.3, basta demostrar que los fibrados producto tiene la PLH para todo espacio topológico.

Sean X un espacio topológico cualquiera, $\zeta = (B \times F, B, proy_1)$ un fibrado producto y sean $h : X \longrightarrow B \times F$ una aplicación continua y $H : X \times I \longrightarrow B$ una homotopía, representadas en el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "i_0"'] & B \times F \arrow[d, "proy_1"] \\ X \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dashed, "\bar{H}"] & B \end{tikzcd}$$

Definimos la aplicación $\bar{H} : X \times I \longrightarrow B \times F$ dada por

$$\bar{H}(x,t) := (H(x,t), (proy_2 \circ h)(x)) \text{ para cada } x \in X, t \in I,$$

donde $proy_2 : B \times F \longrightarrow F$ es la proyección sobre la segunda coordenada. Como las aplicaciones h y $proy_2$ son continuas, también lo es su composición y, por lo tanto, $\bar{H}$ es continua. Veamos que la aplicación $\bar{H}$ levanta la homotopía H hasta la aplicación h.

De la definición de $\bar{H}$, se tiene que $proy_1 \circ \bar{H} = H$, es decir, el triángulo inferior es conmutativo.

Comprobemos ahora la conmutatividad del triángulo superior. Dado $x \in X$, por la conmutatividad del cuadrado del diagrama, deducimos lo siguiente

$$\begin{aligned} (\bar{H} \circ i_0)(x) &= \bar{H}(x,0) = (H(x,0), (proy_2 \circ h)(x)) \\ &= ((H \circ i_0)(x), proy_2(h(x))) \\ &= (proy_1(h(x)), proy_2(h(x))) = h(x). \end{aligned}$$

Lo que prueba que la aplicación $\bar{H}$ hace conmutativos ambos triángulos, es decir, $\bar{H}$ levanta la homotopía H hasta la aplicación h y nos permite concluir que un fibrado trivial tiene la PLH para cualquier espacio topológico. □

Este teorema nos asegura que si un fibrado tiene buenas propiedades, como la de ser trivial, entonces se puede garantizar que tiene la PLH para algunos espacios (todos en el caso de los fibrados triviales). Esto nos invita a pensar que se puede asegurar la PLH para algunos espacios aunque las propiedades del fibrado son más débiles, como ser un fibrado localmente trivial. El siguiente resultado se puede encontrar en el *Capítulo 4* de [6].

Proposición 4.1.6. *Todo fibrado localmente trivial $\zeta = (E, B, F, p)$ tiene la propiedad del levantamiento de homotopías para los cubos I^n, $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Sean $\zeta = (E, B, F, p)$ un fibrado localmente trivial y $n \in \mathbb{N}$. Consideremos aplicaciones continuas $h : I^n \longrightarrow E$ y $H : I^n \times I \longrightarrow B$ tales que $p(h(x)) = H(x, 0)$, es decir, tales que hagan conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} I^n \arrow[r, "h"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ I^n \times I \arrow[r, "H"'] & B \end{tikzcd}$$

Buscamos una aplicación continua $\bar{H} : I^n \times I \longrightarrow E$ que verifique las condiciones para ser levantamiento la homotopía H, es decir, $\bar{H}(x, 0) = h(x)$ y $p(\bar{H}(x, t)) = H(x, t)$. Como ζ es localmente trivial, para cada $b \in B$ existe un abierto U_b con $b \in U_b$ de forma que existe un homeomorfismo $f_b : p^{-1}(U_b) \longrightarrow U_b \times F$ con $p = proy_1 \circ f_b$. La familia $\{U_b\}_{b \in B}$ constituye un recubrimiento abierto de B. Como consecuencia del *Lema del número de Lebesgue* (ver *Lema* 2.1.25), como $I^n \times I$ es un espacio métrico compacto, podemos subdividir I^n en cubos C_k y el intervalo I en subintervalos $I_j = [t_j, t_{j+1}]$ de forma para cada k, j se tiene que $H(C_k \times I_j) \subseteq U_b$ para algún $b \in B$. Por inducción sobre n, podemos asumir que $\bar{H}_t$ ya ha sido construida en ∂C_k para uno de los subcubos C_k. Para extender $\bar{H}_t$ a todo el subcubo C_k, podemos proceder por tramos, construyendo $\bar{H}_t$ para cada t en los sucesivos intervalos I_j. Pegando convenientemente, podemos definir $\bar{H}$ en todo $I^n \times I$. Esto nos permite limitarnos al caso en el que no es necesaria ninguna subdivisión de $I^n \times I$, de forma que $H(I^n \times I) \subseteq U_{b_0}$ para algún $b_0 \in B$.

Supongamos $n = 0$, es decir $I^n = I^0 = \{0\}$. Luego $(I^n \times \{0\}) \cup (\partial I^n \times I) = \{(0, 0)\}$. Podemos considerar que $\bar{H}$ ya está definida en $(0, 0)$. Basta tomar $\bar{H}(0, 0) = h(0) = e_0 \in E$. Notemos que $p(e_0) = H(0, 0) \in U_{b_0}$, es decir, $e_0 \in p^{-1}(U_{b_0})$, por lo que podemos calcular su imagen por el homeomorfismo f_{b_0}. Sea $z_0 \in F$ tal que $f_{b_0}(e_0) = (H(0, 0), z_0) \in U_{b_0} \times F$. Podemos considerar la aplicación

$$\begin{array}{ccccccccc} \bar{H}: & \{0\} \times I & \xrightarrow{H \times c_{z_0}} & U_{b_0} \times F & \xrightarrow{f_{b_0}^{-1}} & p^{-1}(U_{b_0}) & \xhookrightarrow{i} & E \\ & (0, t) & \longmapsto & (H(0, t), z_0) & \longmapsto & f_{b_0}^{-1}(H(0, t), z_0) & \longmapsto & f_{b_0}^{-1}(H(0, t), z_0) \end{array}$$

Como H y c_{z_0} son aplicaciones continuas, lo es $H \times c_{z_0}$. Tanto $f_{b_0}^{-1}$ como la inclusión i son aplicaciones continuas, por lo que $\bar{H}$ también es una aplicación continua. Además, se cumple que

$$\bar{H}(0, 0) = f_{b_0}^{-1}(H(0, 0), z_0) = e_0 = h(0)$$
$$p \circ \bar{H}(0, t) = (p \circ f_{b_0}^{-1})(H(0, t), z_0) = proy_1(H(0, t), z_0) = H(0, t)$$

Por lo tanto $\bar{H}$ levanta la homotopía H hasta la aplicación h.

Supongamos por inducción sobre n que $\bar{H}$ ya está definida en las caras $(I^n \times \{0\}) \cup (\partial I^n \times I)$ y veamos que se puede extender a $I^n \times I$. Denotamos $\Sigma^n = (I^n \times \{0\}) \cup (\partial I^n \times I)$. Tenemos que $p(\bar{H}(\Sigma^n)) = H(\Sigma^n) \subseteq U_{b_0}$, por lo que $\bar{H}(\Sigma^n) \subseteq p^{-1}(U_{b_0})$. Entonces, podemos considerar la aplicación $G : \Sigma^n \longrightarrow U_{b_0} \times F$ dada por $G = f_{b_0} \circ \bar{H}$. Supongamos $G(x, t) = (G_1(x, t), G_2(x, t))$. Como G es composición de aplicaciones continuas, es una aplicación continua, y, por tanto, también lo son las aplicaciones G_1 y G_2 (ver *Ejemplo* 2.1.17). En el conjunto Σ^n, se verifica que

$G_1 = proy_1 \circ f_{b_0} \circ \bar{H} = p \circ \bar{H} = H$.
Sea $\phi : I^n \times I \longrightarrow \Sigma^n$ una retracción y consideremos la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \bar{G}: & I^n \times I & \longrightarrow & U_{b_0} \times F \\ & (x,t) & \longmapsto & (H(x,t), (G_2 \circ \phi)(x,t)) \end{array}$$

Como la aplicación H es continua y la aplicación $G_2 \circ \phi$ es continua por ser composición de aplicaciones continuas, entonces $\bar{G}$ es continua.

Finalmente, tomamos $\bar{H} = f_{b_0}^{-1} \circ \bar{G}$. La aplicación $\bar{H}$ es continua por ser composición de aplicaciones continuas. Comprobemos que satisface las condiciones del levantamiento de la homotopía H.

- Por un lado, dado $(x,t) \in \Sigma^n = I^n \times \{0\} \cup \partial I^n \times I$, se verifica que

  $$\begin{aligned} f_{b_0}^{-1} \circ \bar{G}(x,t) &= f_{b_0}^{-1}(H(x,t), (G_2 \circ \phi)(x,t)) = f_{b_0}^{-1}(G_1(x,t), G_2(x,t)) \\ &= f_{b_0}^{-1} \circ G(x,t) = \bar{H}(x,t) \end{aligned}$$

  debido a que, por ser ϕ una retracción, $\phi|_{\Sigma^n} = Id_{\Sigma^n}$ (ver la *Definición* 2.2.7). Por lo tanto la extensión de $\bar{H}$ está bien construida y se cumple por hipótesis de inducción que $\bar{H}(x,0) = h(x)$.

- Por otro lado, dado $(x,t) \in I^n \times I$, se cumple que

  $$\begin{aligned} p \circ \bar{H}(x,t) &= p(f_{b_0}^{-1} \circ \bar{G}(x,t)) = (p \circ f_{b_0}^{-1})(H(x,t), (G_2 \circ \phi)(x,t))) \\ &= proy_1(H(x,t), (G_2 \circ \phi)(x,t)) = H(x,t) \end{aligned}$$

Esto nos permite concluir que la aplicación $\bar{H}$ es un levantamiento de la homotopía H hasta la aplicación h, por lo todo fibrado localmente trivial tiene la PLH para el cubo unidad I^n. □

Observación 4.1.7. Los fibrados que tienen la PLH para los cubos I^n se denominan *fibrados de Serre*. Estos fibrados de Serre pueden ser caracterizados a través de $CW-$complejos y tienen propiedades interesantes como se puede leer en [1].

4.2. Fibrados de Hurewicz

La idea de considerar fibrados con la propiedad de levantamiento de homotopías surge como generalización de las aplicaciones de recubrimiento, las cuales admiten un levantamiento único de caminos y levantamientos de homotopías de caminos. De hecho, en algunos trabajos, se consideran “fibrados” a las aplicaciones continuas y sobreyectivas que tienen la PLH para cualquier espacio. Esta noción de fibrado fue dada por Hurewicz. Sin embargo, en este trabajo, tratamos de dar un concepto más general fibrado que permita adecuarse a otras lecturas.

Por lo tanto, damos la siguiente definición siguiendo [1].

Definición 4.2.1. Un fibrado se denomina *fibrado de Hurewicz* si posee la PLH para cualquier espacio topológico.

De acuerdo con el *Teorema* 4.1.5, todo fibrado trivial es de Hurewicz. Veamos otros ejemplos de fibrados de Hurewicz.

Ejemplo 4.2.2. ***Fibrado inducido por un fibrado de Hurewicz***

Dado un fibrado $\zeta = (E, B, p)$ y una aplicacion continua $g : Y \longrightarrow B$, tenemos que la terna $\eta = (Y \times_B E, Y, q)$ es un fibrado, donde $q = proy_1$ (ver *Ejemplo* 3.3). Veamos que si el fibrado ζ es de Hurewicz, entonces el fibrado η también lo es.

Supongamos que el fibrado ζ tiene la PLH para cualquier espacio topológico X. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "i_0"'] & Y \times_B E \arrow[r, "proy_2"] \arrow[d, "q"] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "H"'] & Y \arrow[r, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

donde $h : X \longrightarrow Y \times_B E$ y $H : X \times I \longrightarrow Y$ son aplicaciones continuas que hacen conmutativo el cuadrado izquierdo. Buscamos una aplicación continua $\bar{H} : X \times I \longrightarrow Y \times_B E$ tal que $\bar{H} \circ i_0 = h$ y $q \circ \bar{H} = H$. De la composición de aplicaciones del diagrama anterior, tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "proy_2 \circ h"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "g \circ H"'] & B \end{tikzcd}$$

cuya conmutatividad es consecuencia de la de ambos cuadrados previos. Por ser ζ un fibrado de Hurewicz, existe una aplicación $\bar{G} : X \times I \longrightarrow E$ tal que $\bar{G} \circ i_0 = proy_2 \circ h$ y $p \circ \bar{G} = g \circ H$.

Así, podemos definir la aplicación $\bar{H} : X \times I \longrightarrow Y \times_B E$ que buscábamos. Para cada $x \in X$, $t \in I$, $\bar{H}(x,t) := (H(x,t), \bar{G}(x,t))$. Es sencillo ver que la aplicación $\bar{H}$ está bien definida, ya que de acuerdo con las propiedades de la aplicación $\bar{G}$,

$$p(\bar{G}(x,t)) = p \circ \bar{G}(x,t) = g \circ H(x,t) = g(H(x,t))$$

de forma que efectivamente, $\bar{H}(x,t) := (H(x,t), \bar{G}(x,t)) \in Y \times_B E$. La aplicación $\bar{H}$ es continua por serlo las aplicaciones H y $\bar{G}$. Comprobemos que $\bar{H}$ es efectivamente un levantamiento de H hasta h. Tenemos que

$$\bar{H} \circ i_0(x) = (H \circ i_0(x), \bar{G} \circ i_0(x)) = (q \circ h(x), proy_2 \circ h(x)) = h(x)$$

$$q \circ \bar{H}(x,t) = q(H(x,t), \bar{G}(x,t)) = H(x,t)$$

Por lo tanto η tiene la PLH para cualquier espacio, es decir, es un fibrado de Hurewicz.

Ejemplo 4.2.3. ***El fibrado del Espacio de Caminos es de Hurewicz***

Recordemos los fibrados $\Psi_s = (X^I, X, \psi_s)$ definidos en el *Ejemplo* 3.1.6, donde $\psi_s : X^I \longrightarrow X$ está dada por $\psi_s(\alpha) = \alpha(s)$. Demostraremos con detalle que el fibrado Ψ_1 es de Hurewicz..

Sea Z un espacio topológico. Supongamos que existen aplicaciones continuas $h : Z \longrightarrow X^I$, $H : Z \times I \longrightarrow X^I$ tales que $\psi_1 \circ h = H \circ i_0$, es decir, tales que $h(z)(1) = H(z, 0)$. Se obtiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, "i_0"'] & X^I \arrow[d, "\psi_1"] \\ Z \times I \arrow[r, "H"'] & X \end{tikzcd}$$

Buscamos una aplicación continua $\bar{H} : Z \times I \longrightarrow X^I$ que cumpla $\bar{H} \circ i_0 = h$ y $\psi_1 \circ \bar{H} = H$. Para cada $z \in Z$, $t \in I$, definimos $\bar{H}(z,t)$ como el siguiente camino en X

$$\bar{H}(z,t)(s) := \begin{cases} h(z)(s+st) & \text{si } 0 \le s \le \frac{1}{1+t} \\ H(z, s+st-1) & \text{si } \frac{1}{1+t} \le s \le 1 \end{cases}$$

El camino está bien definido, ya que si $s = \frac{1}{1+t}$, se tiene que

$$h(z)(s+st) = h(z)(\tfrac{1+t}{1+t}) = h(z)(1) = H(z,0) = H(z, \tfrac{1+t}{1+t} - 1) = H(z, s+st-1)$$

Además, su continuidad como camino viene asegurada por el *Lema de pegado* 2.1.18. Sin embargo, también debemos comprobar la continuidad de $\bar{H}$ como aplicación de $Z \times I$ en X^I. Para ello, utilizaremos los resultados sobre la topología compacto-abierta introducidos en el *Capítulo 2*.

Buscamos demostrar que $\bar{H} : Z \times I \longrightarrow X^I$ es continua. Por el tercer enunciado de la *Proposición* 2.3.5, es suficiente probar que la aplicación $G : Z \times I \times I \longrightarrow X$ dada por

$$G(z,t,s) := \begin{cases} h(z)(s+st) & \text{si } 0 \le s \le \frac{1}{1+t} \\ H(z, s+st-1) & \text{si } \frac{1}{1+t} \le s \le 1 \end{cases}$$

es continua. En primer lugar, definimos la aplicación $\hat{h} : Z \times I \longrightarrow X$ como $\hat{h}(z,s) := h(z)(s)$. Como $h : Z \longrightarrow X^I$ es continua, por el segundo enunciado de la *Proposición* 2.3.5, se tiene que $\hat{h}$ también es continua. Con esta nueva aplicación, podemos entender la aplicación G de la siguiente manera. Consideremos los siguientes subconjuntos de $Z \times I \times I$

$$\begin{aligned} C_1 :=& \{(z,t,s) \in Z \times I \times I : 0 \le s \le \frac{1}{1+t}\} \\ C_2 :=& \{(z,t,s) \in Z \times I \times I : \frac{1}{1+t} \le s \le 1\} \end{aligned}$$

que son cerrados de $Z \times I \times I$ y se cumple que $Z \times I \times I = C_1 \cup C_2$. Podemos considerar las aplicaciones $G_1 : C_1 \longrightarrow X$ y $G_2 : C_2 \longrightarrow X$ dadas por la composición de las siguientes aplicaciones

$$\begin{array}{ccccccc} G_1 : & C_1 & \xrightarrow{g_1} & Z \times I & \xrightarrow{\hat{h}} & X \\ & (z,t,s) & \longmapsto & (z, s+st) & \longmapsto & \hat{h}(z, s+st) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} G_2 : & C_2 & \xrightarrow{g_2} & Z \times I & \xrightarrow{H} & X \\ & (z,t,s) & \longmapsto & (z, s+st-1) & \longmapsto & H(z, s+st-1) \end{array}$$

Las aplicaciones g_1 y g_2 están bien definidas. En el caso de g_1, dado $(z,t,s) \in C_1$, se cumple que $0 \le s \le \frac{1}{1+t}$, luego $0 \le s+st \le 1$ y $(z, s+st) \in Z \times I$. En el caso de g_2, si $(z,t,s) \in C_2$, entonces $\frac{1}{1+t} \le s \le 1$, por ende $1 \le s+st \le 1+t$ o dicho de otra forma, $0 \le s+st-1 \le t \le 1$ y $(z, s+st-1) \in Z \times I$.

Las aplicaciones $g_1, g_2, \hat{h}$ y H son continuas, luego G_1 y G_2 también lo son. Basta observar que podemos escribir

$$G(z,t,s) = \begin{cases} G_1(z,t,s) & \text{si } (z,t,s) \in C_1 \\ G_2(z,t,s) & \text{si } (z,t,s) \in C_2 \end{cases}$$

y que además, en $C_1 \cap C_2 = \{(z,t,s) : s = \frac{1}{1+t}\}$, se tiene que G_1 y G_2 coinciden:

$$G_1\left(z, \frac{1}{1+t}, \frac{1}{1+t}\right) = \hat{h}\left(z, \frac{1}{1+t} + \frac{t}{1+t}\right) = h(z)(1) = H(z,0) =$$
$$= H\left(z, \frac{1}{1+t} + \frac{t}{1+t} - 1\right) = G_2\left(z, \frac{1}{1+t}, \frac{1}{1+t}\right).$$

Luego, por el *Lema de Pegado*, concluimos que G es continua y por lo tanto $\bar{H}$ también.

Veamos que cumple las condiciones que pedimos. Tenemos $\bar{H} \circ i_0(z,t) = \bar{H}(z,0)$. De acuerdo a la definición de $\bar{H}$, este es el camino dado por

$$\bar{H}(z,0)(s) = \begin{cases} h(z)(s+0) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{1+0} \\ H(z, s+0-1) & \text{si } \frac{1}{1+0} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

luego $\bar{H}(z,0)(s) = h(z)(s)$, por lo que, efectivamente, $\bar{H} \circ i_0 = h$.
Por otro lado $\psi_1 \circ \bar{H}(z,t) = \bar{H}(z,t)(1) = H(z, 1+t-1) = H(z,t)$, de acuerdo con la definición de $\bar{H}$. Luego cumple que $\psi_1 \circ \bar{H} = H$, es decir, $\bar{H}$ es un levantamiento de H hasta h y, por tanto, el fibrado Ψ_1 tiene la PLH para cualquier espacio.

Ahora que nos hemos familiarizado con la noción de fibrado de Hurewicz, veamos una construcción que relaciona cualquier aplicación continua con este tipo de fibrados.

Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación continua y sobreyectiva y consideramos la aplicación $\psi_1 : Y^I \longrightarrow Y$. Definimos el conjunto N_f como el producto fibrado de f y ψ_1 sobre el espacio Y, es decir

$$N_f := X \times_{f,\psi_1,Y} Y^I = \{(x,\alpha) : f(x) = \alpha(1)\}$$

Se cumple que la aplicación f se puede escribir como composición de las siguientes aplicaciones

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\mu} & N_f & \xrightarrow{\rho} & Y \\ x & \longmapsto & (x, c_{f(x)}) & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

que vienen dadas por $\mu(x) = (x, c_{f(x)})$ y $\rho(x,\beta) = \beta(1)$. Basta ver que dado $x \in X$

$$\rho \circ \mu(x) = \rho(x, c_{f(x)}) = c_{f(x)}(1) = f(x).$$

Teorema 4.2.4. *En las condiciones anteriores, la aplicación μ es una equivalencia homotópica y la terna (N_f, Y, ρ) es un fibrado de Hurewicz.*

Demostración. Veamos que μ es una equivalencia homotópica, es decir, que existe una aplicación $g : N_f \longrightarrow X$ tal que $g \circ \mu \simeq Id_X$ y $\mu \circ g \simeq Id_{N_f}$. Tomando $g = proy_1$, es inmediato ver que $g \circ \mu = Id_X$. Veamos que además que $\mu \circ g$ e Id_{N_f} son homótopas. Definimos la siguiente aplicación

$$\begin{array}{rccc} H : & N_f \times I & \longrightarrow & N_f \\ & ((x,\alpha),t) & \longmapsto & (x, \alpha_t) \end{array}$$

donde $\alpha_t : I \longrightarrow Y$ es el camino dado por $\alpha_t(s) := (1 - t + st)$. Esta aplicación H está bien definida; dado $((x,\alpha),t) \in N_f \times I$, entonces $\alpha_t(1) = \alpha(1 - t + t) = \alpha(1) = f(x)$, es decir, $(x, \alpha_t) \in N_f$.

Comprobemos la continuidad de H. Considérese la siguiente aplicación

$$\begin{array}{rccll} G: & X \times Y^I \times I & \longrightarrow & X \times Y^I & \\ & (x,\alpha,t) & \longmapsto & (G_1(x,\alpha,t), G_2(x,\alpha,t)) & = (x,\alpha_t) \end{array}$$

Se observa que si consideramos N_f como subconjunto del producto $X \times Y^I$, entonces la aplicación $H = G|_{N_f \times I}$, por lo tanto si G es continua, $\bar{H}$ lo es necesariamente. Por el *Lema* 2.1.17, la aplicación G es continua si lo son $G_1 : X \times Y^I \times I \longrightarrow X$ y $G_2 : X \times Y^I \times I \longrightarrow Y^I$. La continuidad de G_1 es inmediata, ya que coincide con la proyección sobre la primera componente, y la aplicación G_2 es la composición

$$\begin{array}{rccccc} G_2: & X \times Y^I \times I & \xrightarrow{proy_{(Y^I \times I)}} & Y^I \times I & \xrightarrow{\hat{g}_2} & Y^I \\ & (x,\alpha,t) & \longmapsto & (\alpha,t) & \longmapsto & \alpha_t \end{array}$$

es decir $G_2 = \hat{g}_2 \circ proy_{(Y^I \times I)}$. Como la proyección es una aplicación continua, si $\hat{g}_2$ es continua entonces G_2 también será una aplicación continua. De acuerdo con el tercer enunciado de la *Proposición* 2.3.5, para ver que $\hat{g}_2$ es continua es suficiente que la aplicación $g_2 : Y^I \times I \times I \longrightarrow Y$ definida de la forma $g_2(\alpha,t,s) := \alpha_t(s) = \alpha(1-t+st)$ es continua. La aplicación g_2 a su vez se puede interpretar como una composición de aplicaciones

$$\begin{array}{rccccc} g_2: & Y^I \times I \times I & \xrightarrow{g_1} & Y^I \times I & \xrightarrow{\omega} & Y \\ & (\alpha,t,s) & \longmapsto & (\alpha, 1-t+st) & \longmapsto & \alpha(1-t+st) \end{array}$$

donde ω es la aplicación de evaluación del espacio de caminos definida en la *Sección 2.2* sobre la topología compacto-abierta (ver *Ecuación* (2.2)). De acuerdo con el primer enunciado de la *Proposición* 2.3.5, ω es un aplicación continua.

Dado $(\alpha,t,s) \in Y^I \times I \times I$, se tiene que $0 \leq 1-t+st \leq 1 \iff -1 \leq (s-1)t \leq 0$, lo cual es cierto si $(t,s) \in I \times I$, por tanto $(\alpha, 1-t+st) \in Y^I \times I$ y g_1 está bien definida. La aplicación $proy_1 : Y^I \times I \times I \longrightarrow Y^I$ es continua y la composición $q := (r \circ proy_{I \times I}) : Y^I \times I \times I \longrightarrow I$, donde $r : I \times I \longrightarrow I$ es la aplicación continua dada por $r(t,s) = 1-t+st$, también es continua. Por el *Lema* 2.1.17, la aplicación g_1 es continua. Esto que asegura que las aplicaciones anteriores son continuas, luego G_2 es continua y concluimos que G es continua.

Como $H = G|_{N_f}$ y se cumple que $Im(H) \subseteq N_f$, por el *Lema* 2.1.16, concluimos que H es una aplicación continua, como queríamos demostrar.

Veamos que cumple las condiciones para ser una homotopía

- $H((x,\alpha),0) = (x,\alpha_0)$ donde $\alpha_0(s) = \alpha(1)$, es decir, $\alpha_0 = c_{\alpha(1)}$, el camino constante en $\alpha(1)$. Como $(x,\alpha) \in N_f$, se cumple que $f(x) = \alpha(1)$, por lo que

$$H((x,\alpha),0) = (x,\alpha_0) = (x, c_{f(x)}) = \mu(x) = \mu \circ g(x,\alpha)$$

- $H((x,\alpha),1) = (x,\alpha_1)$ donde $\alpha_1(s) = \alpha(1-1+s) = \alpha(s)$, es decir $\alpha_1 = \alpha$, de forma que

$$H((x,\alpha),1) = (x,\alpha_1) = (x,\alpha) = Id_{N_f}(x,\alpha)$$

Por lo que la aplicación H es una homotopía entre $\mu \circ g$ y Id_{N_f}, y la aplicación μ es una equivalencia homotópica.

Veamos a continuación que (N_f, Y, ρ) es un fibrado de Hurewicz. Notemos que $\rho = \psi_1 \circ proy_2$, donde ψ_1 es la aplicación del fibrado de Hurewicz Ψ_1 como se ve en el *Ejemplo* 4.2.3, por lo que ρ es continua. La sobreyectividad de ρ viene dada por la de la aplicación f. Dado $y \in Y$, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$, luego $(x, c_y) \in N_f$ y $\rho(x, c_y) = c_y(1) = y$.

También tiene la PLH para cualquier espacio topológico. Supongamos que tenemos un espacio topológico Z y aplicaciones continuas h y F que hacen el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, "i_0"'] & N_f \arrow[d, "\rho"] \\ Z \times I \arrow[r, "F"'] & Y \end{tikzcd}$$

Si escribimos $h(z) = (h_1(z), h_2(z))$, y consideramos la siguiente aplicación $\bar{F} : Z \times I \longrightarrow N_f$

$$\bar{F}(z,t) = (h_1(z), g(z,t))$$

es continua y levanta H hasta h, donde el camino $g(z,t)$ es el dado por

$$g(z,t)(s) := \begin{cases} h_2(z)(s+st) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{1+t} \\ F(z, s+st-1) & \text{si } \frac{1}{1+t} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

La demostración de que esta aplicación cumple las condiciones para levantar F hasta h es similar a la dada en el *Ejemplo* 4.2.3, de forma que omitiremos los detalles. Esto demuestra que efectivamente, cualquier aplicación continua se puede escribir como composición de una equivalencia homotópica y una aplicación de fibrado. $\square$

Observación 4.2.5. En las condiciones del teorema anterior, se pide que la aplicación continua $f : X \longrightarrow Y$ sea además sobreyectiva. No obstante, si la aplicación f no fuera sobreyectiva, se podría considerar el conjunto

$$N_f = X \times_{f, \psi_1, Im(f)} Im(f)^I$$

Es decir, bastaría restringirse a la imagen de la aplicación, de forma que la aplicación f podría verse como la siguiente composición de aplicaciones

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\mu} & N_f & \xrightarrow{\rho} & Im(f) & \xhookrightarrow{i} & Y \\ x & \longmapsto & (x, c_{f(x)}) & \longmapsto & f(x) & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

y, como consecuencia del teorema, μ es una equivalencia homotópica y la terna $(N_f, Im(f), \rho)$ es un fibrado de Hurewicz.

A raíz de los resultados anteriores, es claro que los fibrados de Hurewicz están ligados a los espacios de caminos. Veamos que podemos caracterizarlos a través de las *aplicaciones de levantamiento de caminos.* Sea $\zeta = (E, B, p)$ un fibrado. Consideremos el producto fibrado

$$E \times_B B^I := \{(e, \beta) \in E \times B^I : p(e) = \beta(0)\}$$

Definición 4.2.6. Una aplicación continua

$$\Gamma : E \times_B B^I \longrightarrow E^I$$

se denomina *aplicación de levantamiento de caminos* (*path lifting map* en inglés) si satisface las siguientes condiciones:

1. $\Gamma(e,\beta)(0) = e$, para cada $(e,\beta) \in E \times_B B^I$.

2. $p(\Gamma(e,\beta)(t)) = \beta(t)$, para cada $(e,\beta) \in E \times_B B^I$, para cada $t \in I$.

Para aligerar la escritura, usamos las siglas ALC para "aplicación de levantamiento de caminos".

Teorema 4.2.7. *Un fibrado $\zeta = (E, B, p)$ es de Hurewicz si y sólo si admite una aplicación de levantamiento de caminos $\Gamma : E \times_B B^I \longrightarrow E^I$.*

Demostración. Sea $\zeta = (E, B, p)$ un fibrado. Demostremos ambas implicaciones del teorema.

$\Longrightarrow$) Supongamos que el fibrado ζ es de Hurewicz, es decir, tiene la PLH para cualquier espacio. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} E \times_B B^I \arrow[r, "proy_E"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ E \times_B B^I \times I \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd} \tag{4.3}$$

donde la aplicación f viene dada por $f(e,\beta,t) = \beta(t)$. Esta aplicación f se puede ver como la composición

$$f : E \times_B B^I \times I \xrightarrow{proy_{B^I \times I}} B^I \times I \xrightarrow{\omega} B$$

con $\omega(\beta,t) = \beta(t)$ la aplicación de evaluación (definida en la *Sección* 2.3), que es continua (ver la *Proposición* 2.3.5), por lo que f es continua.

Además, el *Diagrama* (4.3) es conmutativo; dado $(e,\beta) \in E \times_B B^I$,

$$(p \circ proy_E)(e,\beta) = p(e) = \beta(0) = f(e,\beta,0) = (f \circ i_0)(e,\beta)$$

Como ζ tiene la PLH para cualquier espacio, necesariamente existe una aplicación continua $\bar{\Gamma} : E \times_B B^I \times I \longrightarrow E$ que levanta la aplicación f hasta $proy_E$ verificando

1. $\bar{\Gamma} \circ i_0(e,\beta) = \bar{\Gamma}(e,\beta,0) = proy_E(e,\beta) = e$ para cada $(e,\beta) \in E \times_B B^I$.

2. $(p \circ \bar{\Gamma})(e,\beta,t) = f(e,\beta,t) = \beta(t)$ para cada $(e,\beta) \in E \times_B B^I$ y cada $t \in I$.

Basta considerar la aplicación $\Gamma : E \times_B B^I \longrightarrow E^I$ dada por $\Gamma(e,\beta)(t) := \Gamma(e,\beta,t)$. Esta aplicación Γ es necesariamente continua por serlo $\bar{\Gamma}$ tal y como nos asegura el tercer enunciado de la *Proposición* 2.3.5 y verifica las condiciones de ser ALC de forma inmediata por las propiedades (1) y (2) que satisface $\bar{\Gamma}$.

$\Longleftarrow$) Ahora supongamos que el fibrado ζ admite una aplicación de levantamiento de caminos $\Gamma : E \times_B B^I \longrightarrow E^I$. Sea X un espacio topológico y sean $h : X \longrightarrow E$ y $H : X \times I \longrightarrow B$ dos aplicaciones continuas que hacen conmutativo el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "H"'] & B \end{tikzcd}$$

Buscamos una aplicación continua $\bar{H} : X \times I \longrightarrow E$ con $\bar{H}(x, 0) = h(x)$ y $p(\bar{H}(x, t)) = H(x, t)$.

Definimos la aplicación $F : X \longrightarrow B^I$ como la dada por $F(x)(t) = H(x, t)$. La aplicación F es necesariamente continua por serlo H (ver tercer enunciado de la *Proposición* 2.3.5). Entonces, podemos considerar la aplicación $G : X \longrightarrow E^I$ dada por la composición

$$\begin{array}{rcccccc} G: & X & \xrightarrow{g} & E \times_B B^I & \xrightarrow{\Gamma} & E^I \\ & x & \longmapsto & (h(x), F(x)) & \longmapsto & \Gamma(h(x), F(x)) \end{array}$$

La aplicación g está bien definida, ya que dado $x \in X$, tenemos que $p(h(x)) = H(x, 0) = F(x)(0)$ y por tanto $(h(x), F(x)) \in E \times_B B^I$, y es continua por serlo tanto h como H. Como $G = \Gamma \circ g$, necesariamente G es continua, y, por la *Proposición* 2.3.5, la aplicación $\bar{H} : X \times I \longrightarrow E$ dada por $\bar{H}(x, t) := G(x)(t)$ es continua.

Veamos que satisface las propiedades para levantar la aplicación H hasta h.

- $\bar{H}(x, 0) = G(x)(0) = \Gamma(h(x), F(x))(0) = h(x)$, luego $\bar{H} \circ i_0 = h$.
- $p(\bar{H}(x, t)) = p(\Gamma(h(x), F(x))(t)) = F(x)(t) = H(x, t)$, luego $p \circ \bar{H} = H$.

Concluimos entonces que $\bar{H}$ es un levantamiento de H hasta h, por lo que ζ tiene la PLH para cualquier espacio topológico X, es decir, ζ es un fibrado de Hurewicz. □

Capítulo 5

Grupos de Homotopía

La motivación de este capítulo es dar una idea de una aplicación para los fibrados. Para desarrollar plenamente los conceptos y resultados de este capítulo, necesitaríamos introducir en detalle nociones que, por falta de espacio, se escapan del alcance del trabajo. En este capítulo introduciremos la definición de los llamados *grupos de homotopía* de un espacio topológico. Estos grupos son invariantes por homeomorfismo por lo que son una de las principales herramientas de la Topología Algebraica para clasificar espacios topológicos.

Las definiciones y construcción de los grupos de homotopía los podemos encontrar con detalle en el *Capítulo 4* de [6] y en la *Parte II* de [15].

5.1. Grupos de Homotopía Relativa

En lo siguiente, consideraremos n un entero positivo. Denotamos por $I^n := [0,1]^n$ al cubo unidad n-dimensional. Se verifica que su frontera ∂I^n es el conjunto de puntos de I^n tales que al menos una de sus coordenadas es 0 o 1. En este contexto, entendemos el subespacio I^{n-1} como la cara $I^{n-1} \times \{0\}$ del cubo I^n. A la unión del resto de caras del cubo la denotamos por J^{n-1}, que formalmente, sería el espacio $Cl(\partial I^n \setminus I^{n-1})$. Notemos que $\partial I^n = I^{n-1} \cup J^{n-1}$.

Dada una terna (X, A, x_0) donde X es un espacio topológico, $A \subseteq X$ un subespacio y $x_0 \in A$ un punto base, definimos el conjunto $F^n(X, A, x_0)$ como el conjunto de aplicaciones continuas $f : I^n \longrightarrow X$ que cumplen

1. $f(I^{n-1}) \subseteq A$.

2. $f(J^{n-1}) = \{x_0\}$

Si $f \in F^n(X, A, x_0)$, escribimos $f : (I^n, I^{n-1}, J^{n-1}) \longrightarrow (X, A, x_0)$. Dadas aplicaciones $f, g \in F^n(X, A, x_0)$, definimos su producto como la aplicación $f * g : I^n \longrightarrow X$ dada por

$$(f * g)(s_1, s_2, ..., s_n) := \begin{cases} f(2s_1, s_2, ..., s_n) & \text{si } 0 \leq s_1 \leq \frac{1}{2} \\ g(2s_1 - 1, s_2, ..., s_n) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s_1 \leq 1 \end{cases}$$

Definición 5.1.1. Dos aplicaciones $f, g : (I^n, I^{n-1}, J^{n-1}) \longrightarrow (X, A, x_0)$ se dice que son *homótopas relativamente en* (X, A, x_0) si existe una homotopía $H : I^n \times I \longrightarrow X$ entre f y g tal que las aplicaciones $H_t(y) := H(y, t)$ pertenezcan a $F^n(X, A, x_0)$ para cada $t \in I$.

La relación de *homótopas relativamente en* (X, A, x_0) define una relación de equivalencia en el conjunto $F^n(X, A, x_0)$, por lo tanto, podemos considerar el conjunto $\pi_n(X, A, x_0)$ de sus clases de equivalencia (también llamadas clases de homotopía en estos casos). En este conjunto podemos considerar una operación dada por

$$[f] \cdot [g] := [f * g]$$

que dota al conjunto de estructura de grupo. No es difícil comprobar que dado $[f] \in \pi_n(X, A, x_0)$, se cumple que $[f] = [c_{x_0} * f] = [f * c_{x_0}]$, por lo que $[c_{x_0}]$ es el elemento neutro del grupo.

Definición 5.1.2. Se denomina *n-ésimo grupo de homotopía relativa* del par de espacios con un punto base (X, A, x_0) al grupo $(\pi_n(X, A, x_0)$ con el producto anterior.

Si $A = \{x_0\}$, el grupo $\pi_n(X, x_0) = \pi_n(X, \{x_0\}, x_0)$ se denomina *n-ésimo grupo de homotopía* del espacio X en el punto x_0.

Observación 5.1.3. Si $A = \{x_0\}$, el conjunto $F^n(X, x_0) = F^n(X, \{x_0\}, x_0)$ es el conjunto de las aplicaciones $f : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, x_0)$. Entonces, si consideramos la esfera como el cociente $\mathbb{S}^n = I^n/\partial I^n$ y denotamos s_0 como el punto de la esfera con el que identificamos ∂I^n, la aplicación f se puede ver como una aplicación $f : (\mathbb{S}^n, s_0) \longrightarrow (X, x_0)$. Por lo tanto, podemos entender el n-ésimo grupo de homotopía $\pi_n(X, x_0)$ como el grupo de las clases de homotopía de las aplicaciones de la esfera $\mathbb{S}^n$ en X.

5.2. Algunos resultados sobre Grupos de Homotopía de Fibrados

Una aplicación continua $f : (X, A, x_0) \longrightarrow (Y, B, y_0)$, induce el siguiente homomorfismo f_* entre los grupos de homotopía relativa

$$\begin{array}{rccc} f_* : & \pi_n(X, A, x_0) & \longrightarrow & \pi_n(Y, B, y_0) \\ & [g] & \longmapsto & [f \circ g] \end{array}$$

Esto es de especial interés cuando tenemos una aplicación de fibrado. Enunciemos algunos resultados interesantes.

Teorema 5.2.1 (Teorema fundamental)**.** *Sea B un espacio conexo y $\zeta = (E, B, F, p)$ un fibrado localmente trivial. Consideramos los subespacio $A \subseteq B$ y $E_A = p^{-1}(A)$ y los puntos base $e_0 \in E_A$ y $b_0 = p(e_0)$. Entonces, para $n \geq 2$ la aplicación de fibrado p induce un isomorfismo de grupos*

$$p_* : \pi_n(E, E_A, e_0) \longrightarrow \pi_n(B, A, b_0)$$

Corolario 5.2.2. *Si B es un espacio conexo, $\zeta = (E, B, F, p)$ es un fibrado localmente trivial y consideramos $e_0 \in E$, $b_0 = p(e_0)$, se tiene que*

$$p_* : \pi_n(E, p^{-1}(b_0), e_0) \longrightarrow \pi_n(B, b_0)$$

es un isomorfimo de grupos para todo $n \geq 2$.

Proposición 5.2.3. *Si* $p : E \longrightarrow B$ *es una aplicación de recubrimiento y consideramos* $e_0 \in E$ *y* $b_0 = p(b_0)$*, entonces se tiene que*

$$p_* : \pi_n(E, e_0) \longrightarrow \pi_n(B, b_0)$$

es un isomorfismo de grupos para todo $n \geq 2$*.*

Los anteriores resultados pueden encontrarse demostrados en [15] como *Teorema 17.1*, *Corolario 17.2* y *Teorema 17.6*.

Bibliografía

[1] M.A. Aguilar; C. Prieto. *Fibre Bundles*. UNAM, 2010. Disponible en `https://paginas.matem.unam.mx/cprieto/phocadownloadpap/fiber%20bundles.pdf`

[2] M.L. Arroyo. *Espacios Fibrados, Clases Caraterísticas y el Isomorfismo de Thom*, Tesis para optar el grado de Magister en Matemática. Pontificia Universidad Católica del Perú, 2013.

[3] R.L. Cohen. *The Topology of Fibre Bundles.*Lecture Notes. Universidad de Standford, 1998. Disponible en `https://math.stanford.edu/~ralph/fiber.pdf`.

[4] A. Fernández García. *Grupos de Homotopía de Orden Superior*. Trabajo Fin de Grado. Universidad de Cantabria, 2020.

[5] A.T. Fomenko; D.B. Fuchs; V.L. Gutenmacher.*Homotopic Topology*. Akadémiai Kiadó, 1986.

[6] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.Disponible en `https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT+.pdf`.

[7] S.-T. Hu. *Homotopy Theory*. 5º. Academic Press, 1959.

[8] I.M. James. *General Topology and Homotopy Theory*. 1ª. Springer-Verlag, 1984.

[9] C. Kosnioski. *Topología Algebraica*. 1ª. Editorial Reverté, S.A., 1989.

[10] J.P. May. *A Concised Course in Algebraic Topology*. University of Chicago Press, 1999.

[11] J.R. Munkres. *Elements of Algebraic Topology*. Addison-Wesley Publishing Company, 1984.

[12] J.R. Munkres. *Topología*. 2ª. Springer-Velag, 1994.

[13] L. Muñoz Pereiro. *El Fibrado de Hopf en Homotopía Estable*. Trabajo Fin de Grado. Universidad de Barcelona. 2018.

[14] A.S. Schwarz. *Topology for Physicists*. 1ª. Springer-Velag, 1994.

[15] N. Steenrod. *The Topology of Fibre Bundles*. Princeton University Press, 1951.

[16] S. Willard. *General Topology*. Addison-Wesley Publishing Company, 1970.