Facultad
de
Ciencias

Estudio de un modelo de flujo sanguíneo
(*Study of a bloow flow model*)

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al
Grado en Matemáticas

Autor: Diego Sierra Herrería.
Director: Rafael Granero-Belinchón.
Noviembre - 2024

Resumen

A lo largo de los años, los modelos unidimensionales han proporcionado valiosas perspectivas sobre la dinámica circulatoria y han sido ampliamente utilizados en la investigación cardiovascular. En particular, en este trabajo se analiza un trozo de arista del grado del sistema arterial humano, que ha servido como una herramienta fundamental en la simulación y estudio del flujo sanguíneo. El objetivo del trabajo es estudiar un sistema de ecuaciones en derivadas parciales, con un énfasis especial en las propiedades matemáticas de las soluciones.

Palabras Clave: Series de Fourier, función analítica, ecuaciones en derivadas parciales y flujo sanguíneo.

Abstract

Over the years, one-dimensional models have provided valuable insights into circulatory dynamics and have been widely used in cardiovascular research. In particular, this work analyzes a piece of the edge of the degree of the human arterial system, which has served as a fundamental tool in the simulation and study of blood flow. The aim of this work is to study a system of partial differential equations, with a special emphasis on the mathematical properties of the solutions.

Keywords: Fourier series, analytic function, partial differential equations, and blood flow.

Índice

Capítulo 1

Introducción

El estudio del flujo sanguíneo a través del sistema circulatorio humano es de gran importancia tanto en el ámbito científico como médico. La capacidad de comprender y modelar con precisión los complejos fenómenos hemodinámicos que ocurren en el cuerpo humano es crucial para el desarrollo de tratamientos médicos más efectivos y la prevención de enfermedades cardiovasculares. En este sentido, la modelización del flujo sanguíneo ha surgido como una herramienta para comprender y optimizar los procesos circulatorios.

A lo largo de los años, la modelización unidimensional del flujo sanguíneo ha proporcionado valiosas perspectivas sobre la dinámica circulatoria y ha impulsado avances significativos en la comprensión y el tratamiento de enfermedades cardiovasculares. Numerosos estudios han validado la precisión y la utilidad de estos modelos en una variedad de aplicaciones, desde la evaluación del flujo sanguíneo coronario hasta la predicción del riesgo de eventos cardiovasculares. Además, la modelización unidimensional ha allanado el camino para la integración de factores adicionales, como la gravedad en la simulación del flujo sanguíneo, lo que amplía aún más su aplicabilidad y relevancia clínica.

La modelización unidimensional del flujo sanguíneo se ha establecido como una técnica valiosa para investigar la dinámica circulatoria en arterias y venas. Este enfoque se basa en la simplificación del sistema vascular en una dimensión, lo que permite analizar el flujo sanguíneo a lo largo de segmentos arteriales o venosos con una precisión adecuada y a un costo computacional razonable. En esencia, estos modelos describen la relación entre la presión, el flujo y el área transversal de los vasos sanguíneos a lo largo del tiempo y la distancia.

El objetivo de este trabajo de fin de grado es explorar la modelización unidimensional del flujo sanguíneo. Una de las ventajas clave de los modelos unidimensionales es su capacidad para simular el sistema arterial completo con un alto nivel de detalle. Un ejemplo destacado en este sentido es el modelo ADAN56 (*Anatomically-Detailed Arterial Network 56*) [1], que representa una versión reducida pero precisa del sistema arterial humano. Este modelo, ha sido ampliamente utilizado en la investigación cardiovascular y proporciona una plataforma sólida para estudiar diversos aspectos del flujo sanguíneo en el cuerpo humano. Se estudiará un sistema de ecuaciones en derivadas parciales que modelan el flujo sanguineo y se probarán diversas propiedades matemáticas de la solución de dicho problema haciendo énfasis en calcular estimaciones a priori de las soluciones.

Capítulo 2

Implementación del modelo

Consideramos el modelo ADAN56 (*Anatomically-Detailed Arterial Network 56*) el cual es una version reducida de una red arterial [2]. El modelo incluye las 56 arterias mas grandes del sistema circulatorio humano y esta representado por 61 segmentos arteriales, 30 bifurcaciones y 31 salidas. Se origina en el arco aórtico y se trunca en las arterias carótida interna, tibial y radial. Además, se trunca en órganos principales, como los riñones, el hígado y los pulmones.

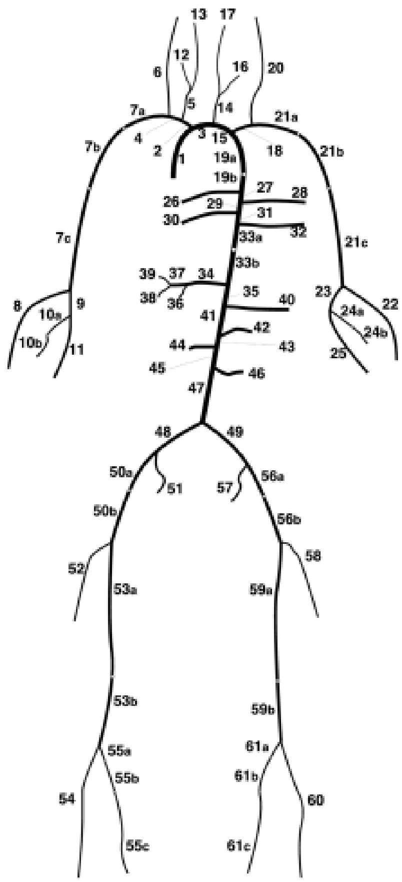

Figura 2.1: Topologia del modelo ADAN56

Usaremos como referencia el sistema de ecuaciones de [1] en el cual inicialmente se tomaron todos los parámetros del modelo de [3] para verificar los resultados y hacerlos repetibles. De forma que permitió comprender mejor como cambian los patrones de flujo con la optimización de los parámetros de las condiciones de contorno teniendo en cuenta la gravedad o no.

Ahora introduciremos los parámetros con los que trabajaremos y su unidad de medida correspondiente

U	Velocidad media del flujo sanguíneo, m/s
P	Presión, Pa
A	Área de la luz arterial como función de P, m^2
A_0	Área de la luz arterial a presión cero, m^2
E	Módulo de Young de la pared arterial, Pa
ρ	Densidad de la sangre, kg/m^3
μ	Viscosidad de la sangre, Pa*s
h	Grosor de la pared arterial, m
R	Radio de la arteria, m
$\boldsymbol{r}$	Posición en el espacio 3D del punto de la red arterial, m
$\boldsymbol{g}$	Aceleración de la gravedad, m/s^2
T	Periodo de tiempo del pulso, s
x	Coordenada a lo largo de la arteria, m
t	Tiempo, s

Tabla 2.1: Nomenclatura del modelo

De este modo, el sistema de ecuaciones que usaremos para el estudio se expresa en función de la presión P, el área del vaso A y la velocidad media U:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial A}{\partial t} + \dfrac{\partial (AU)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial t} + U\dfrac{\partial U}{\partial x} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{f(U)}{\rho} \\ x \in \mathbb{T} = [-\pi, \pi] \text{ con datos iniciales a } t = 0 \text{ para } A \text{ y } U \end{cases} \tag{2.1}$$

donde el término $f(U)$ se define en el supuesto de un perfil de velocidad de Poiseuille $f(U) = -8\mu\pi U$.

La primera ecuación del sistema es una ecuación de conservación de masa. Describe cómo la variación en A junto con la velocidad media U afecta el flujo sanguíneo a lo largo de la arteria. La segunda ecuación refleja el equilibrio de fuerzas, con la presión, la fricción y otros términos que afectan la velocidad de la sangre.

La relación entre la presión P y el área de lumel del vaso A es

$$P(A,x) = P_0 + \frac{4\sqrt{\pi}E(x)h(x)}{3A_0(x)}(\sqrt{A} - \sqrt{A_0(x)}) + \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{g} \cdot \rho \tag{2.2}$$

El modelo ADAN56 se trata de un grafo que representa el sistema circulatorio humano al completo. Nosotros no trabajaremos con el sistema completo, sino con un modelo en un trozo de arista de dicho grafo. Así surge el sistema (2.1).

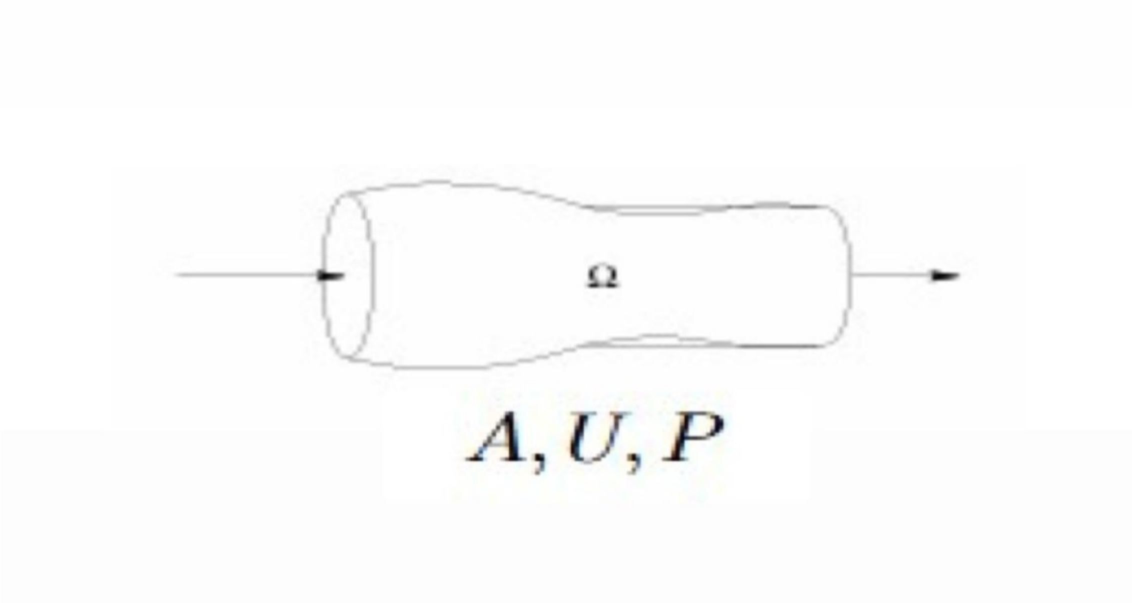

Figura 2.2: Dominio de una arteria

Se añade un término adicional de gravedad, donde $\boldsymbol{r}$ es una posición en el espacio 3D del punto de la red arterial y $\boldsymbol{g}$ es un vector de aceleración de la gravedad. Para reducir el número de parámetros del modelo se utiliza una relación fenomenológica entre el radio de referencia del vaso y el grosor de la pared:

$$h = R_0[\tilde{a}exp(\tilde{b}R_0) + \tilde{c}exp(\tilde{d}R_0)] \tag{2.3}$$

donde R_0 es el radio de referencia del vaso.

Parámetros	**Valor**
ρ	1040 kg$\cdot m^{-3}$
μ	4.0 mPa$\cdot s$
E	225.0 kPa
g	0 ò 9.8 m/s^2
$\tilde{a}$	0.2802 cm^{-1}
$\tilde{b}$	-5.053 cm^{-1}
$\tilde{c}$	0.1324 cm^{-1}
$\tilde{d}$	-0.1114 cm^{-1}

Tabla 2.2: Parámetros del modelo para todas las pruebas de verificación

Para obtener detalles sobre los parámetros y datos del árbol arterial, se remite al lector a [3] que también contiene datos complementarios que incluyen los resultados de 6 esquemas numéricos. Para obtener información de como funciona la introducción de la gravedad en este modelo unidimensional se remite al lector a [1] donde se presenta un método para calcular la resistencia de las arterias terminales durante los cambios de gravedad.

Capítulo 3

Conceptos básicos

En este capítulo vamos a introducir los diferentes conceptos y propiedades matemáticas en las que se basarán y apoyarán las demostraciones posteriores. La referencia principal de este capítulo es [4].

Definición 3.1 (**Serie de Fourier**). *Dado una función integrable f(x) definida para cada $x \in \mathbb{T}$, la serie de Fourier de f es*

$$f(x) = \sum_{\xi=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f](\xi)\frac{e^{i\xi x}}{\sqrt{2\pi}} \quad con \ \mathcal{F}[f](\xi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{e^{i\xi x}}{\sqrt{2\pi}}\, dx \quad \text{y} \ \ \xi \in \mathbb{Z}.$$

Observación 3.2. *Una condición suficiente para que exista el coeficiente de Fourier de una función f(x) para cada $\xi \in \mathbb{Z}$ es que $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < +\infty$, ya que entonces usando la identidad de Parseval tenemos que*

$$\|f(x)\|_{L^2}^2 = \sum_{\xi=-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}[f](\xi)|^2 < +\infty, \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Observación 3.3. *La serie de Fourier es un operador lineal, esto es, dadas dos funciones $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se verifica*

$$\mathcal{F}[\alpha f + \beta g](\xi) = \alpha \mathcal{F}[f](\xi) + \beta \mathcal{F}[g](\xi) \ \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Proposición 3.4. *Si $f(x)$ es una función continua y absolutamente integrable en $(-\pi, \pi)$, tal que $f'(x)$ sea continua y absolutamente integrable. Entonces se cumple:*

$$\mathcal{F}[f'](\xi) = i\xi \mathcal{F}[f](\xi).$$

Demostración. Con estas hipótesis se puede derivar término a término la suma parcial de la serie de Fourier y pasar al límite usando el Teorema de Beppo-Levi ([4]). □

Definición 3.5 (Convolución discreta). *Sean f y g dos funciones en L^2, definimos la convolución discreta de sus series de Fourier como*

$$\mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g](n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f](m)\mathcal{F}[g](n-m).$$

Definición 3.6 (Espacio Normado). *Un espacio normado es un par $(X, \|\cdot\|)$ formado por un espacio vectorial X sobre un cuerpo escalar $\mathbb{K}$ y una aplicación $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ denominada norma, con las siguientes propiedades:*

i) $\|x\| \geq 0; \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ (x \in X)$;

ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \ \|x\| \ (\lambda \in \mathbb{K}, x \in X)$;

iii) (Desigualdad triangular) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \ (x, y \in X)$.

Observación 3.7. *Cualquier espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ da lugar a un espacio metrico (X, d), donde $d(x, y) = \|x - y\| \ (x, y \in X)$.*

Definición 3.8 (Espacio de Banach). *Sea X un espacio vectorial normado, en el que se induce la métrica anterior. Si (X, d) es completo, X se dice un espacio de Banach.*

Consideramos el conjunto $\mathcal{L}^p(\mathbb{T})$

$$\mathcal{L}^p(\mathbb{T}) = \{ \ u(x) \text{ medible tal que } \|u\|^p_{\mathcal{L}^p(\mathbb{T})} = \textstyle\int_{-\pi}^{\pi} |u(x)|^p \, dx < \infty \ \}.$$

Aunque $\mathcal{L}^p(\mathbb{T})$ sea un espacio vectorial, $\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{T})}$ no es una norma, ya que dada $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{T}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{T})$, definimos

$$v(x) = \begin{cases} u(x) & si \ x \in \mathbb{T} - E \\ 0 & si \ x \in E \end{cases}$$

donde $E \subset \mathbb{T}$ es un conjunto de medida 0, $|E| = 0$. Observamos que $u = v$ en casi todo punto pero $u \neq v$ para todo $x \in \mathbb{T}$. Entonces, u y v son dos funciones diferentes tales que

$$\|u - v\|_{L^p(\mathbb{T})} = \int_{-\pi}^{\pi} |u(x) - v(x)|^p \, dx = 0.$$

Por lo tanto, para dotar a este tipo de funciones de la estructura de espacio vectorial normado debemos definir la relación de equivalencia:

$$u \sim v \text{ si } u = v \text{ en casi todo punto.}$$

Definición 3.9 (**Espacio** $L^p(\mathbb{T})$)**.**

$$L^p(\mathbb{T}) = \{\text{clases de equivalencia } u \text{ con respecto a } \sim \text{ tal que } \|u\|_{L^p(\mathbb{T})}^p = \int_{-\pi}^{\pi} |u(x)|^p \, dx < \infty\}.$$

Observación 3.10. *Los espacios* L^p *son espacios de Banach.*

Se puede consultar en los Teoremas 4.7 y 4.8 de [6].

Lema 3.11 (**Desigualdad de Hölder**)**.** *Los espacios* L^p *verifican la siguiente desigualdad conocida como desigualdad de Hölder,*

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{i=1}^{n} f_i(x) dx \right| \leq \prod_{i=1}^{n} ||f_i(x)||_{L^{p_i}(\mathbb{T})}, \ 1 \leq p_i \leq \infty, \ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} = 1.$$

Definición 3.12 (**Espacio** ℓ^p)**.** *Sea* p *con* $1 \leq p < \infty$*, el conjunto*

$$\ell^p = \left\{ f \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{j=-\infty}^{\infty} |f_j|^p < \infty \right\}$$

es un subespacio vectorial de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$*, el espacio de las sucesiones de* $\mathbb{K}$*, y esta equipado con la norma*

$$\|f\|_{\ell^p} = \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} |f_j|^p \right)^{1/p} \qquad (f \in \ell^p).$$

El caso ℓ^∞ *es diferente, se define como el espacio de todas las sucesiones acotadas dotado de la norma*

$$\|f\|_{\ell^\infty} = \sup_j |f_j|.$$

Observación 3.13. *Los espacios* ℓ^p *son espacios de Banach y también verifican la desigualdad de Hölder.*

Teorema 3.14 (**Teorema de Tonelli**)**.** *Si* $f \geq 0$ *entonces se tienen las siguientes igualdades*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(n,m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n,m) = \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} f(n,m).$$

Demostración. Se define $s_{u,v} = \sum_{n=-u}^{u} \sum_{m=-v}^{v} f(n,m)$ y $s = \sup_{u,v\geq 1} s_{u,v}$. Dado que

$$s_{u,v} \leq \sum_{n=-u}^{u} \sum_{m=-v}^{\infty} f(n,m) \leq \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} f(n,m) = t,$$

tenemos así que $s \leq t$.

Ahora elegimos $t' < t$. Entonces debe existir $\tilde{u}, \tilde{v}$ tal que

$$s_{\tilde{u},\tilde{v}} > t'.$$

lo que implica que $s > t'$. Pero t' era arbitrario, por lo que $s \geq t$.

De forma que nos queda que $s = t$. Por simetría, se sigue la afirmación. $\square$

Lema 3.15 (Desigualdad de Young). *Dadas $f \in \ell^p$ y $g \in \ell^q$ con*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$$

se tiene que

$$\|f * g\|_{\ell^r} \leq \|f\|_{\ell^p} \|g\|_{\ell^q}.$$

Demostración. El caso $r = \infty$ es una aplicación de la desigualdad de Hölder mientras que el caso $r = 1$ es una aplicación del teorema de Tonelli. Veamos el caso general:

Se tiene que

$$\begin{aligned} |f * g(x)| &\leq \sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} |f(x-y)||g(y)| \leq \sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} |f(x-y)|^{1\pm p/r} |g(y)|^{1\pm q/r} \\ &\leq \sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} |f(x-y)|^{p/r} |g(y)|^{q/r} |f(x-y)|^{(r-p)/r} |g(y)|^{(r-q)/r}. \end{aligned}$$

Ahora aplicamos la desigualdad de Hölder con tres términos y exponentes

$$p_1 = r,\ p_2 = pr/(r-p),\ p_3 = qr/(r-q).$$

Entonces se tiene

$$\||f(x-y)|^{p/r} |g(y)|^{q/r}\|_{\ell^r} = \left(\sum_{x=-\infty}^{\infty} |f(x-y)|^p |g(y)|^q \right)^{1/r},$$

$$\||f(x-y)|^{(r-p)/r}\|_{\ell^{pr/(r-p)}} = \|f\|_{\ell^p}^{(r-p)/r},$$

$$\||g(y)|^{(r-q)/r}\|_{L^{qr/(r-q)}} = \|g\|_{\ell^q}^{(r-q)/r}.$$

Por lo tanto

$$\|f * g\|_{\ell^r}^r \leq \|f\|_{\ell^p}^{r-p} \|g\|_{\ell^q}^{r-q} \sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} |f(x-y)|^p |g(y)|^q.$$

y aplicando el teorema de Tonelli obtenemos

$$\|f * g\|_{\ell^r}^r \leq \|f\|_{\ell^p}^{r-p} \|g\|_{\ell^q}^{r-q} \sum_{y=-\infty}^{\infty} \sum_{x=-\infty}^{\infty} |f(x-y)|^p |g(y)|^q.$$

para concluir que

$$\|f * g\|_{\ell^r} \leq \|f\|_{\ell^p} \|g\|_{\ell^q}.$$

□

Definición 3.16 (**Función Analítica**). *Una función real (compleja) es analítica en un punto x_0 de su dominio si existe una serie de potencias centrada en x_0:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + ...,$$

que converge en un entorno $U \subseteq \mathbb{R} (U \subseteq \mathbb{C})$ de x_0 y que coincide con la función en dicho entorno:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, \;\; \textit{para cada } \; x \in U.$$

Teorema 3.17 (**Teorema de Paley-Wiener**). *Una función $f \in L^p(\mathbb{T})$ tal que $\exists \nu > 0$ que cumple*

$$sup_n \; e^{|n|\nu} |\hat{f}(n)| \leq \infty,$$

es analítica en la banda

$$\mathcal{S} = \{x + iy \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{T}, |y| < \nu\}.$$

del plano complejo.

Para mas información ver ([5]).

Capítulo 4

Estimaciones a priori de las soluciones

En este capítulo vamos a calcular estimaciones a priori de la solución de (2.1), para ello suponemos que existe una solución analítica en espacio y C^1 en tiempo. Observamos que un argumento de tipo bootstrap implica que la función es C^∞ en tiempo, pero no exploraremos eso en este trabajo. Para estimar que la solución analítica tiene un tiempo de existencia uniforme usaremos ideas del tipo Cauchy-Kovalevskaya ([7, 8]).

Para facilitar la demostración realizamos el siguiente cambio de variable, $A = 1 + H$, por lo tanto el nuevo sistema será

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(H)}{\partial t} + \dfrac{\partial(U+HU)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial t} + U\dfrac{\partial U}{\partial x} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x} = -\dfrac{8\mu\pi}{\rho}U \\ x \in \mathbb{T} = [-\pi, \pi] \text{ con } \textit{datos iniciales} \text{ a } t = 0 \text{ para } H \text{ y } U \end{cases} \tag{4.1}$$

Si bien en [1] se considera una presión diferente, para simplificar y facilitar la prueba vamos a considerar

$$P(1 + H, x) = P_0 + \frac{1}{2}\log(1 + H) - 1 + \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{g} \cdot \rho. \tag{4.2}$$

Vamos a comenzar definiendo el siguiente espacio de Banach de funciones analíticas para $\tau > 0$ y $s \geq 0$

$$X^s_\tau = \left\{ f : \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{|n|\tau}|n|^s|\mathcal{F}[f](n,t)| < \infty \right\}.$$

Observamos que la sumabilidad de dicha serie, debido al Teorema de Paley-Wiener implica la analiticidad de las funciones. En efecto, las funciones en este espacio son analíticas en una franja compleja de anchura τ alrededor del eje real, como se observa en la sección 4 de [9].

Este espacio esta equipado con la siguiente norma

$$\|f(t)\|_{X_\tau^s} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{|n|\tau}|n|^s|\mathcal{F}[f](n,t)|.$$

Como $\|f(t)\|_{X_\tau^s} < \infty$ por el Teorema (3.17), el Teorema de Paley-Wiener, podemos afirmar que f es analítica en $|\Im(f)| < \tau$.

Teorema 4.1 (Estimaciones a priori). *Sea $c(0)$, $(H_0, U_0) \in X^0_{c(0)}$ con $\|H_0 - 1\|_{L^\infty} \leq \delta < 1$ con $\delta \ll 1$. Asumimos que existe una solución (H, U) analítica en espacio y C^1 en t. Entonces*

$$(H, U) \in L^\infty\left(0, T_0, X^0_{c(t)}\right).$$

siendo $c(t) = 1 - Ct$ para

$$C > 2\left[\left(\frac{8\pi\mu}{\rho} + 3\right)\|U(0)\|_{X^0_{c(0)}} + \frac{1}{2\rho}\frac{1}{1 - \|H(0)\|_{X^0_{c(0)}}} + \|H(0)\|_{X^0_{c(0)}} + 1\right].$$

Demostración. La serie de Taylor de una función alrededor de un punto a se expresa como

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + ...$$

Usando la expresión de la serie geométrica

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j x^j, \quad |x| < 1.$$

Observamos que, usando el desarrollo de Taylor de la serie geométrica unido a la continuidad en tiempo de las soluciones y la pequeñez de δ se tiene que

$$\frac{1}{1+H} = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j H^j(x,t), \quad |H| < 1.$$

Asumiendo que existe solución regular, se tiene que si

$$|H_0| < 1 \Rightarrow \exists \tilde{T} > 0 \text{ tal que } |H(x,t)| < 1 \;\; \forall t < \tilde{T}.$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{1+H} = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j H^j(x,t), \;\; |H| < 1 \;\; \forall t < \tilde{T}.$$

Además tomando la ecuación (4.2), tenemos que

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+H(x,t)}\frac{\partial H}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j H^j(x,t)\frac{\partial H}{\partial x}(x,t).$$

Vamos a tomar la serie de Fourier de la ecuación. Sabiendo que

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial P}{\partial x}\right] = \sum_{j=0}^{\infty}\alpha_j \mathcal{F}\left[H\right]^j * \mathcal{F}\left[\frac{\partial H}{\partial x}\right](n,t), \;\; \text{con } \alpha_j \text{ coeficientes a estimar.}$$

obtenemos

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial P}{\partial x}\right] = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \mathcal{F}\left[H\right] *^j \mathcal{F}\left[H\right] * \mathcal{F}\left[\frac{\partial H}{\partial x}\right](n,t).$$

siendo $\mathcal{F}\left[H\right] *^j \mathcal{F}\left[H\right](n,t)$ la convolución discreta de j $\mathcal{F}\left[H\right](n,t)$.

Calculamos ahora $\mathcal{F}\left[\frac{\partial H}{\partial x}\right](n,t)$ usando la Proposición (3.4), de forma que

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial P}{\partial x}\right] = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \mathcal{F}\left[H\right] *^j \mathcal{F}\left[H\right] * in\mathcal{F}\left[H\right](n,t).$$

Sea $c(t) = 1 - Ct$ para cierto C que fijaremos más adelante. Buscamos estimaciones para la norma de H, U en X_τ^s con $\tau = c(t)$ y $s = 0$.

Tomando $\|H(t)\|_{X^0_{c(t)}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{c(t)|n|}|\mathcal{F}\left[H\right](n,t)|$, vamos a comenzar calculando su derivada:

$$\frac{d}{dt}\|H(t)\|_{X^0_{c(t)}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_t(t)|n|e^{c(t)|n|}|\mathcal{F}\left[H\right](n,t)| + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{c(t)|n|}\frac{\partial}{\partial t}\left|\mathcal{F}\left[H\right](n,t)\right|.$$

Ahora vamos a calcular $\frac{\partial}{\partial t}|\mathcal{F}\left[H\right](n,t)|$ para lo que utilizamos la siguiente propiedad

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(|A|^2\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(A\overline{A}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(A)\,\overline{A} + A\frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{A}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(A)\,\overline{A} + A\overline{\frac{\partial}{\partial t}(A)} = \frac{\partial}{\partial t}(A)\,\overline{A} + \overline{\frac{\partial}{\partial t}(A)\,A}.$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(|A|^2\right) = 2\Re\left(\frac{\partial}{\partial t}(A)\,\overline{A}\right).$$

Por tanto se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(|A|^2\right)=2|A|\frac{\partial}{\partial t}\left(|A|\right)=2\Re\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(A\right)\overline{A}\right)\Rightarrow\frac{\partial}{\partial t}\left(|A|\right)=\Re\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(A\right)\frac{\overline{A}}{|A|}\right).$$

Continuamos la demostración aplicando la propiedad para $\mathcal{F}\left[H\right](n,t)$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|H(t)\|_{X^0_{c(t)}} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_t(t)|n|e^{c(t)|n|}|\mathcal{F}\left[H\right](n,t)| + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{c(t)|n|}\frac{\partial}{\partial t}|\mathcal{F}\left[H\right](n,t)| \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_t(t)|n|e^{c(t)|n|}|\mathcal{F}\left[H\right](n,t)| + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{c(t)|n|}\Re\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}\left[H\right](n,t)\frac{\overline{\mathcal{F}\left[H\right](n,t)}}{|\mathcal{F}\left[H\right](n,t)|}\right).\end{aligned}$$

Vamos a sustituir ahora $\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}\left[H\right](n,t)$ en la primera ecuación del sistema (4.1)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|H(t)\|_{X^0_{c(t)}} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_t(t)|n|e^{c(t)|n|}|\mathcal{F}\left[H\right](n,t)| + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{c(t)|n|}\Re\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}\left[H\right](n,t)\frac{\overline{\mathcal{F}\left[H\right](n,t)}}{|\mathcal{F}\left[H\right](n,t)|}\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_t(t)|n|e^{c(t)|n|}|\mathcal{F}\left[H\right](n,t)| \\ &\quad + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{c(t)|n|}\Re\left(-\mathcal{F}\left[\frac{\partial(U+HU)}{\partial x}\right](n,t)\frac{\overline{\mathcal{F}\left[H\right](n,t)}}{|\mathcal{F}\left[H\right](n,t)|}\right).\end{aligned}$$

A continuación calculamos $\mathcal{F}\left[\frac{\partial(U+HU)}{\partial x}\right](n,t)$ utilizando la Proposición (3.4)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|H(t)\|_{X^0_{c(t)}} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_t(t)|n|e^{c(t)|n|}|\mathcal{F}\left[H\right](n,t)| \\ &\quad + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{c(t)|n|}\Re\left(-\mathcal{F}\left[\frac{\partial(U+HU)}{\partial x}\right](n,t)\frac{\overline{\mathcal{F}\left[H\right](n,t)}}{|\mathcal{F}\left[H\right](n,t)|}\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_t(t)|n|e^{c(t)|n|}|\mathcal{F}\left[H\right](n,t)| \\ &\quad + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{c(t)|n|}\Re\left(-in\left(\mathcal{F}\left[U\right](n,t)+\mathcal{F}\left[HU\right](n,t)\right)\frac{\overline{\mathcal{F}\left[H\right](n,t)}}{|\mathcal{F}\left[H\right](n,t)|}\right).\end{aligned}$$

Usamos la Definición (3.5) para aplicar la convolución discreta de las series de Fourier

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|H(t)\|_{X^0_{c(t)}} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_t(t)|n|e^{c(t)|n|}|\mathcal{F}[H](n,t)| \\
&\quad + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{c(t)|n|}\Re\left(-in\left(\mathcal{F}[U](n,t)+\mathcal{F}[HU](n,t)\right)\frac{\overline{\mathcal{F}[H](n,t)}}{|\mathcal{F}[H](n,t)|}\right) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_t(t)|n|e^{c(t)|n|}|\mathcal{F}[H](n,t)| \\
&\quad + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{c(t)|n|}\Re\left(-in\left(\mathcal{F}[U](n,t)+\mathcal{F}[H]*\mathcal{F}[U](n,t)\right)\frac{\overline{\mathcal{F}[H](n,t)}}{|\mathcal{F}[H](n,t)|}\right) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_t(t)|n|e^{c(t)|n|}|\mathcal{F}[H](n,t)| + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{c(t)|n|}\Re\Bigg(-in\mathcal{F}[U](n,t) \\
&\quad -in\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathcal{F}[H](n-k,t)\mathcal{F}[U](k,t)\frac{\overline{\mathcal{F}[H](n,t)}}{|\mathcal{F}[H](n,t)|}\Bigg) \\
&\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_t(t)|n|e^{c(t)|n|}|\mathcal{F}[H](n,t)| + \sum_{n=-\infty}^{\infty}\Bigg|e^{c(t)|n|}\Re\Bigg(-in\mathcal{F}[U](n,t) \\
&\quad -in\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathcal{F}[H](n-k,t)\mathcal{F}[U](k,t)\frac{\overline{\mathcal{F}[H](n,t)}}{|\mathcal{F}[H](n,t)|}\Bigg)\Bigg|.
\end{aligned}$$

Estimamos la parte real de $\left(-in\mathcal{F}[U](n,t) - in\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathcal{F}[H](n-k,t)\mathcal{F}[U](k,t)\frac{\overline{\mathcal{F}[H](n,t)}}{|\mathcal{F}[H](n,t)|}\right)$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|H(t)\|_{X^0_{c(t)}} &\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_t(t)|n|e^{c(t)|n|}|\mathcal{F}[H](n,t)| + \sum_{n=-\infty}^{\infty}\Bigg|e^{c(t)|n|}\Re\Bigg(-in\mathcal{F}[U](n,t) \\
&\quad -in\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathcal{F}[H](n-k,t)\mathcal{F}[U](k,t)\frac{\overline{\mathcal{F}[H](n,t)}}{|\mathcal{F}[H](n,t)|}\Bigg)\Bigg| \\
&\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_t(t)|n|e^{c(t)|n|}|\mathcal{F}[H](n,t)| \\
&\quad + \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|e^{c(t)|n|}\left(-n\mathcal{F}[U](n,t) - n\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathcal{F}[H](n-k,t)\mathcal{F}[U](k,t)\right)\right|.
\end{aligned}$$

Aplicamos la desigualdad triangular

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|H(t)\|_{X^0_{c(t)}} \leq & \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_t(t)|n|e^{c(t)|n|}|\mathcal{F}\left[H\right](n,t)| \\
& + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| e^{c(t)|n|} \left(-n\mathcal{F}\left[U\right](n,t) - n \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\left[H\right](n-k,t)\mathcal{F}\left[U\right](k,t) \right) \right| \\
\leq & \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_t(t)|n|e^{c(t)|n|} \left|\mathcal{F}\left[H\right](n,t)\right| \\
& + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{c(t)|n|} \left(|n| \left|\mathcal{F}\left[U\right](n,t)\right| + |n| \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|\mathcal{F}\left[H\right](n-k,t)\right| \left|\mathcal{F}\left[U\right](k,t)\right| \right).
\end{aligned}
$$

Aplicamos ahora el Teorema (3.14), el Teorema de Tonelli, para cambiar el orden de los sumatorios

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|H(t)\|_{X^0_{c(t)}} \leq & \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_t(t)|n|e^{c(t)|n|} \left|\mathcal{F}\left[H\right](n,t)\right| \\
& + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{c(t)|n|} \left(|n| \left|\mathcal{F}\left[U\right](n,t)\right| + |n| \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|\mathcal{F}\left[H\right](n-k,t)\right| \left|\mathcal{F}\left[U\right](k,t)\right| \right) \\
\leq & \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_t(t)|n|e^{c(t)|n|}|\mathcal{F}\left[H\right](n,t)| + \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|e^{c(t)|n|}|\mathcal{F}\left[U\right](n,t)| \\
& + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|e^{c(t)|n|} \left|\mathcal{F}\left[H\right](n-k,t)\right| \left|\mathcal{F}\left[U\right](k,t)\right|.
\end{aligned}
$$

Aplicamos en el último término la desigualdad triangular $|n| \leq |n-k| + |k|$ y distribuimos en dos términos

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|H(t)\|_{X^0_{c(t)}} \leq& \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_t(t)|n|e^{c(t)|n|}|\mathcal{F}[H](n,t)| + \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|e^{c(t)|n|}|\mathcal{F}[U](n,t)| \\
&+ \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|e^{c(t)|n|}\left|\mathcal{F}[H](n-k,t)\right|\left|\mathcal{F}[U](k,t)\right| \\
\leq& \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_t(t)|n|e^{c(t)|n|}|\mathcal{F}[H](n,t)| + \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|e^{c(t)|n|}|\mathcal{F}[U](n,t)| \\
&+ \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} (|n-k|+|k|)e^{c(t)(|n-k|+|k|)}\left|\mathcal{F}[H](n-k,t)\right|\left|\mathcal{F}[U](k,t)\right| \\
\leq& \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_t(t)|n|e^{c(t)|n|}|\mathcal{F}[H](n,t)| + \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|e^{c(t)|n|}|\mathcal{F}[U](n,t)| \\
&+ \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n-k|e^{c(t)|n-k|}e^{c(t)|k|}\left|\mathcal{F}[H](n-k,t)\right|\left|\mathcal{F}[U](k,t)\right| \\
&+ \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} |k|e^{c(t)|n-k|}e^{c(t)|k|}\left|\mathcal{F}[H](n-k,t)\right|\left|\mathcal{F}[U](k,t)\right|.
\end{aligned}
$$

Ahora aplicamos una vez más el Teorema de Tonelli (3.14) y también la definición que hemos dado de los espacios de Banach con los que estamos trabajando

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|H(t)\|_{X^0_{c(t)}} \leq& \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_t(t)|n|e^{c(t)|n|}|\mathcal{F}[H](n,t)| + \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|e^{c(t)|n|}|\mathcal{F}[U](n,t)| \\
&+ \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n-k|e^{c(t)|n-k|}e^{c(t)|k|}\left|\mathcal{F}[H](n-k,t)\right|\left|\mathcal{F}[U](k,t)\right| \\
&+ \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} |k|e^{c(t)|n-k|}e^{c(t)|k|}\left|\mathcal{F}[H](n-k,t)\right|\left|\mathcal{F}[U](k,t)\right| \\
\leq& c_t(t)\|H(t)\|_{X^1_{c(t)}} + \|U(t)\|_{X^1_{c(t)}} + \|H(t)\|_{X^1_{c(t)}}\|U(t)\|_{X^0_{c(t)}} + \|H(t)\|_{X^0_{c(t)}}\|U(t)\|_{X^1_{c(t)}}.
\end{aligned}
$$

Por la definición que hemos dado de $c(t)$ tenemos que $c_t(t) = -C$, por lo que obtenemos como estimación

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|H(t)\|_{X^0_{c(t)}} \leq& -C\|H(t)\|_{X^1_{c(t)}} + \|U(t)\|_{X^1_{c(t)}} \\
&+ \|H(t)\|_{X^1_{c(t)}}\|U(t)\|_{X^0_{c(t)}} + \|H(t)\|_{X^0_{c(t)}}\|U(t)\|_{X^1_{c(t)}}.
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

Más adelante volveremos a utilizar esta desigualdad.

Ahora procedemos a calcular las estimaciones para U. Para ello vamos a tomar $\|U(t)\|_{X^0_{c(t)}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{c(t)|n|}|\mathcal{F}[U](n,t)|$, y comenzamos calculando su derivada:

$$\frac{d}{dt}\|U(t)\|_{X^0_{c(t)}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_t(t)|n|e^{c(t)|n|}|\mathcal{F}[U](n,t)| + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{c(t)|n|}\frac{\partial}{\partial t}|\mathcal{F}[U](n,t)|.$$

Ahora vamos a calcular $\frac{\partial}{\partial t}|\mathcal{F}[U](n,t)|$ por lo que utilizamos la propiedad que usamos anteriormente

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|U(t)\|_{X^0_{c(t)}} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_t(t)|n|e^{c(t)|n|}|\mathcal{F}[U](n,t)| + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{c(t)|n|}\frac{\partial}{\partial t}|\mathcal{F}[U](n,t)| \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_t(t)|n|e^{c(t)|n|}|\mathcal{F}[U](n,t)| + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{c(t)|n|}\Re\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}[U](n,t)\frac{\overline{\mathcal{F}[U](n,t)}}{|\mathcal{F}[U](n,t)|}\right).
\end{aligned}$$

Vamos a sustituir ahora $\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}[U](n,t)$ en la segunda ecuación del sistema (4.1) para obtener

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|U(t)\|_{X^0_{c(t)}} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_t(t)|n|e^{c(t)|n|}|\mathcal{F}[U](n,t)| + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{c(t)|n|}\Re\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}[U](n,t)\frac{\overline{\mathcal{F}[U](n,t)}}{|\mathcal{F}[U](n,t)|}\right) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_t(t)|n|e^{c(t)|n|}|\mathcal{F}[U](n,t)| + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{c(t)|n|}\Re\left(\left(-\mathcal{F}\left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{(U)^2}{2}\right](n,t)\right.\right. \\
&\quad \left.\left. -\frac{8\pi\mu}{\rho}\mathcal{F}[U](n,t) - \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\mathcal{F}[H] *^j \mathcal{F}[H] * in\mathcal{F}[H](n,t)\right)\frac{\overline{\mathcal{F}[U](n,t)}}{|\mathcal{F}[U](n,t)|}\right).
\end{aligned}$$

A continuación calculamos $-\mathcal{F}\left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{(U)^2}{2}\right](n,t)$ usando la Proposición (3.4) y usamos la Definición (3.5) para aplicar la convolución discreta de las series de Fourier

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|U(t)\|_{X^0_{c(t)}} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_t(t)|n|e^{c(t)|n|}|\mathcal{F}[U](n,t)| + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{c(t)|n|}\Re\left(\left(-\mathcal{F}\left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{(U)^2}{2}\right](n,t)\right.\right.\\
&\quad\left.\left.-\frac{8\pi\mu}{\rho}\mathcal{F}[U](n,t) - \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\mathcal{F}[H] *^j \mathcal{F}[H] * in\mathcal{F}[H](n,t)\right)\frac{\overline{\mathcal{F}[U](n,t)}}{|\mathcal{F}[U](n,t)|}\right)\\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_t(t)|n|e^{c(t)|n|}|\mathcal{F}[U](n,t)| + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{c(t)|n|}\Re\left(\left(-in\mathcal{F}[U] * \mathcal{F}[U](n,t)\right.\right.\\
&\quad\left.\left.-\frac{8\pi\mu}{\rho}\mathcal{F}[U](n,t) - \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\mathcal{F}[H] *^j \mathcal{F}[H] * in\mathcal{F}[H](n,t)\right)\frac{\overline{\mathcal{F}[U](n,t)}}{|\mathcal{F}[U](n,t)|}\right)\\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_t(t)|n|e^{c(t)|n|}|\mathcal{F}[U](n,t)|\\
&\quad+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{c(t)|n|}\Re\left(\left(-in\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathcal{F}[U](n-k,t)\mathcal{F}[U](k,t) - \frac{8\pi\mu}{\rho}\mathcal{F}[U](n,t)\right.\right.\\
&\quad\left.\left.-\frac{1}{2\rho}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathcal{F}[H]^j(n-k,t)ik\mathcal{F}[H](k,t)\right)\frac{\overline{\mathcal{F}[U](n,t)}}{|\mathcal{F}[U](n,t)|}\right)\\
&\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_t(t)|n|e^{c(t)|n|}|\mathcal{F}[U](n,t)|\\
&\quad+ \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|e^{c(t)|n|}\Re\left(\left(-in\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathcal{F}[U](n-k,t)\mathcal{F}[U](k,t) - \frac{8\pi\mu}{\rho}\mathcal{F}[U](n,t)\right.\right.\right.\\
&\quad\left.\left.\left.-\frac{1}{2\rho}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathcal{F}[H]^j(n-k,t)ik\mathcal{F}[H](k,t)\right)\frac{\overline{\mathcal{F}[U](n,t)}}{|\mathcal{F}[U](n,t)|}\right)\right|.
\end{aligned}$$

Estimamos la parte real

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|U(t)\|_{X^0_{c(t)}} \leq & \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_t(t)|n|e^{c(t)|n|}|\mathcal{F}[U](n,t)| \\
& + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| e^{c(t)|n|}\Re\left(\left(-in\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathcal{F}[U](n-k,t)\mathcal{F}[U](k,t) - \frac{8\pi\mu}{\rho}\mathcal{F}[U](n,t)\right.\right.\right. \\
& \left.\left.\left. -\frac{1}{2\rho}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathcal{F}[H]^j(n-k,t)ik\mathcal{F}[H](k,t)\right)\frac{\overline{\mathcal{F}[U](n,t)}}{|\mathcal{F}[U](n,t)|}\right)\right| \\
\leq & \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_t(t)|n|e^{c(t)|n|}|\mathcal{F}[U](n,t)| + \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left| e^{c(t)|n|}\left(-n\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathcal{F}[U](n-k,t)\mathcal{F}[U](k,t)\right.\right. \\
& \left.\left. -\frac{8\pi\mu}{\rho}\mathcal{F}[U](n,t) - \frac{1}{2\rho}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathcal{F}[H]^j(n-k,t)k\mathcal{F}[H](k,t)\right)\right|.
\end{aligned}$$

Aplicamos la desigualdad triangular

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|U(t)\|_{X^0_{c(t)}} \leq & \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_t(t)|n|e^{c(t)|n|}|\mathcal{F}[U](n,t)| + \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left| e^{c(t)|n|}\left(-n\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathcal{F}[U](n-k,t)\mathcal{F}[U](k,t)\right.\right. \\
& \left.\left. -\frac{8\pi\mu}{\rho}\mathcal{F}[U](n,t) - \frac{1}{2\rho}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathcal{F}[H]^j(n-k,t)k\mathcal{F}[H](k,t)\right)\right| \\
\leq & \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_t(t)|n|e^{c(t)|n|}|\mathcal{F}[U](n,t)| + \frac{8\pi\mu}{\rho}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{c(t)|n|}|\mathcal{F}[U](n,t)| \\
& + \sum_{n=-\infty}^{\infty}|n|e^{c(t)|n|}\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\mathcal{F}[U](n-k,t)|\,|\mathcal{F}[U](k,t)| \\
& + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{c(t)|n|}\frac{1}{2\rho}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\mathcal{F}[H]^j(n-k,t)||k||\mathcal{F}[H](k,t)|.
\end{aligned}$$

Aplicamos ahora el Teorema de Tonelli (3.14)para cambiar el orden de los sumatorios

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|U(t)\|_{X^0_{c(t)}} \leq & \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_t(t)|n|e^{c(t)|n|}|\mathcal{F}\left[U\right](n,t)| + \frac{8\pi\mu}{\rho}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{c(t)|n|}|\mathcal{F}\left[U\right](n,t)| \\
& + \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|e^{c(t)|n|} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}\left[U\right](n-k,t)|\,|\mathcal{F}\left[U\right](k,t)| \\
& + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{c(t)|n|}\frac{1}{2\rho}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}\left[H\right]^j(n-k,t)||k||\mathcal{F}\left[H\right](k,t)| \\
\leq & \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_t(t)|n|e^{c(t)|n|}|\mathcal{F}\left[U\right](n,t)| + \frac{8\pi\mu}{\rho}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{c(t)|n|}|\mathcal{F}\left[U\right](n,t)| \\
& + \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|e^{c(t)|n|}\,|\mathcal{F}\left[U\right](n-k,t)|\,|\mathcal{F}\left[U\right](k,t)| \\
& + \frac{1}{2\rho}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{c(t)|n|}|\mathcal{F}\left[H\right]^j(n-k,t)||k||\mathcal{F}\left[H\right](k,t)|.
\end{aligned}$$

Aplicamos en los dos últimos términos la desigualdad triangular $|n| \leq |n-k| + |k|$ y distribuimos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|U(t)\|_{X^0_{c(t)}} \leq & \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_t(t)|n|e^{c(t)|n|}|\mathcal{F}\left[U\right](n,t)| + \frac{8\pi\mu}{\rho}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{c(t)|n|}|\mathcal{F}\left[U\right](n,t)| \\
& + \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|e^{c(t)|n|}\,|\mathcal{F}\left[U\right](n-k,t)|\,|\mathcal{F}\left[U\right](k,t)| \\
& + \frac{1}{2\rho}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{c(t)|n|}|\mathcal{F}\left[H\right]^j(n-k,t)||k||\mathcal{F}\left[H\right](k,t)| \\
\leq & \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_t(t)|n|e^{c(t)|n|}|\mathcal{F}\left[U\right](n,t)| + \frac{8\pi\mu}{\rho}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{c(t)|n|}|\mathcal{F}\left[U\right](n,t)| \\
& + \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} (|n-k|+|k|)e^{c(t)(|n-k|+|k|)}\,|\mathcal{F}\left[U\right](n-k,t)|\,|\mathcal{F}\left[U\right](k,t)| \\
& + \frac{1}{2\rho}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{c(t)(|n-k|+|k|)}|\mathcal{F}\left[H\right]^j(n-k,t)||k||\mathcal{F}\left[H\right](k,t)|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_t(t)|n|e^{c(t)|n|}|\mathcal{F}[U](n,t)| + \frac{8\pi\mu}{\rho}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{c(t)|n|}|\mathcal{F}[U](n,t)| \\
&\quad + \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n-k|e^{c(t)|n-k|}e^{c(t)|k|}\,|\mathcal{F}[U](n-k,t)|\,|\mathcal{F}[U](k,t)| \\
&\quad + \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} |k|e^{c(t)|n-k|}e^{c(t)|k|}\,|\mathcal{F}[U](n-k,t)|\,|\mathcal{F}[U](k,t)| \\
&\quad + \frac{1}{2\rho}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{c(t)|n-k|}e^{c(t)|k|}|\mathcal{F}[H]^j(n-k,t)||k||\mathcal{F}[H](k,t)|.
\end{aligned}
$$

Ahora aplicamos una vez más el Teorema de Tonelli (3.14) y también la definición que hemos dado de los espacios de Banach con los que estamos trabajando

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|U(t)\|_{X^0_{c(t)}} &\le \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_t(t)|n|e^{c(t)|n|}|\mathcal{F}[U](n,t)| + \frac{8\pi\mu}{\rho}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{c(t)|n|}|\mathcal{F}[U](n,t)| \\
&\quad + \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n-k|e^{c(t)|n-k|}e^{c(t)|k|}\,|\mathcal{F}[U](n-k,t)|\,|\mathcal{F}[U](k,t)| \\
&\quad + \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} |k|e^{c(t)|n-k|}e^{c(t)|k|}\,|\mathcal{F}[U](n-k,t)|\,|\mathcal{F}[U](k,t)| \\
&\quad + \frac{1}{2\rho}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{c(t)|n-k|}e^{c(t)|k|}|\mathcal{F}[H]^j(n-k,t)||k||\mathcal{F}[H](k,t)| \\
&\le c_t(t)\|U(t)\|_{X^1_{c(t)}} + \frac{8\pi\mu}{\rho}\|U(t)\|_{X^0_{c(t)}} + 2\|U(t)\|_{X^1_{c(t)}}\|U(t)\|_{X^0_{c(t)}} \\
&\quad + \frac{1}{2\rho}\sum_{j=0}^{\infty}\|H(t)\|^j_{X^0_{c(t)}}\,\|H(t)\|_{X^1_{c(t)}}.
\end{aligned}
$$

Usando ahora el desarrollo en serie para $\frac{1}{1-x}$

$$
\frac{1}{1-x} = \sum_{j=0}^{\infty} x^j, \text{ válido si } |x| < 1.
$$

Vamos a obtener

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|U(t)\|_{X^0_{c(t)}} &\leq c_t(t)\|U(t)\|_{X^1_{c(t)}} + \frac{8\pi\mu}{\rho}\|U(t)\|_{X^0_{c(t)}} + 2\|U(t)\|_{X^1_{c(t)}}\|U(t)\|_{X^0_{c(t)}} \\
&\quad + \frac{1}{2\rho}\sum_{j=0}^{\infty}\|H(t)\|^{j-1}_{X^0_{c(t)}}\|H(t)\||_{X^1_{c(t)}} \\
&\leq c_t(t)\|U(t)\|_{X^1_{c(t)}} + \frac{8\pi\mu}{\rho}\|U(t)\|_{X^0_{c(t)}} + 2\|U(t)\|_{X^1_{c(t)}}\|U(t)\|_{X^0_{c(t)}} \\
&\quad + \frac{1}{2\rho}\frac{1}{1-\|H(t)\|_{X^0_{c(t)}}}\|H(t)\||_{X^1_{c(t)}}.
\end{aligned}$$

Por la definición que hemos dado de $c(t)$ tenemos que $c_t(t) = -C$, por lo que obtenemos como estimación

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|U(t)\|_{X^0_{c(t)}} \leq -C\|U(t)\|_{X^1_{c(t)}} &+ \frac{8\pi\mu}{\rho}\|U(t)\|_{X^0_{c(t)}} \\
&+ 2\|U(t)\|_{X^1_{c(t)}}\|U(t)\|_{X^0_{c(t)}} \\
&+ \frac{1}{2\rho}\frac{1}{1-\|H(t)\|_{X^0_{c(t)}}}\|H(t)\||_{X^1_{c(t)}}.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Definiendo ahora $E(t) = \|H(t)\|_{X^0_{c(t)}} + \|U(t)\|_{X^0_{c(t)}}$ y sumando las desigualdades (4.3) y (4.4) podemos estimar

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E(t) \leq -C&\left(\|H(t)\|_{X^1_{c(t)}} + \|U(t)\|_{X^1_{c(t)}}\right) + \frac{8\pi\mu}{\rho}\|U(t)\|_{X^0_{c(t)}} \\
&+ \|H(t)\||_{X^1_{c(t)}}\left(\|U(t)\|_{X^0_{c(t)}} + \frac{1}{2\rho}\frac{1}{1-\|H(t)\|_{X^0_{c(t)}}}\right) \\
&+ \|U(t)\|_{X^1_{c(t)}}\left(1 + 2\|U(t)\|_{X^0_{c(t)}} + \|H(t)\|_{X^0_{c(t)}}\right).
\end{aligned}$$

Por último nos queda elegir C tan grande como sea necesario para obtener $\frac{d}{dt}E(t) \leq 0$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E(t) &\leq -C\left(\|H(t)\|_{X^1_{c(t)}} + \|U(t)\|_{X^1_{c(t)}}\right) + \frac{8\pi\mu}{\rho}\|U(t)\|_{X^0_{c(t)}} \\
&\quad + \|H(t)\|\|_{X^1_{c(t)}}\left(\|U(t)\|_{X^0_{c(t)}} + \frac{1}{2\rho}\frac{1}{1-\|H(t)\|_{X^0_{c(t)}}}\right) \\
&\quad + \|U(t)\|_{X^1_{c(t)}}\left(1 + 2\|U(t)\|_{X^0_{c(t)}} + \|H(t)\|_{X^0_{c(t)}}\right) \\
&\leq \Bigg[-C + \frac{8\pi\mu}{\rho}\|U(t)\|_{X^0_{c(t)}} + \|U(t)\|_{X^0_{c(t)}} + \frac{1}{2\rho}\frac{1}{1-\|H(t)\|_{X^0_{c(t)}}} \\
&\qquad + 1 + 2\|U(t)\|_{X^0_{c(t)}} + \|H(t)\|_{X^0_{c(t)}}\Bigg]\left(\|H(t)\|_{X^1_{c(t)}} + \|U(t)\|_{X^1_{c(t)}}\right).
\end{aligned}$$

De manera que para $t = 0$

$$C > 2\left[\frac{8\pi\mu}{\rho}\|U(0)\|_{X^0_{c(0)}} + \|U(0)\|_{X^0_{c(0)}} + \frac{1}{2\rho}\frac{1}{1-\|H(0)\|_{X^0_{c(0)}}} + 1 + 2\|U(0)\|_{X^0_{c(0)}} + \|H(0)\|_{X^0_{c(0)}}\right].$$

Teniendo así

$$C > 2\left[\left(\frac{8\pi\mu}{\rho} + 3\right)\|U(0)\|_{X^0_{c(0)}} + \frac{1}{2\rho}\frac{1}{1-\|H(0)\|_{X^0_{c(0)}}} + \|H(0)\|_{X^0_{c(0)}} + 1\right].$$

De modo que

$$\frac{d}{dt}E(t) \leq 0 \text{ para cierto } 0 \leq t \leq T^*.$$

Consideramos ahora

$$H(x,t) - H_0(x) = \int_0^t H_t(x,t)\,dt.$$

De forma que

$$\|H(x,t) - H_0(x)\|_{L^\infty} \leq t\|H_t\|_{L^\infty} \leq t\|\|H_t\|_{X^0_{c(t)}}$$

$$\leq t\left(-C\|H(t)\|_{X^1_{c(t)}} + \|U(t)\|_{X^1_{c(t)}} + \|H(t)\|_{X^1_{c(t)}}\|U(t)\|_{X^0_{c(t)}} + \|H(t)\|_{X^0_{c(t)}}\|U(t)\|_{X^1_{c(t)}}\right).$$

Usando la desigualdad triangular se tiene que

$$\|H(x,t)\|_{L^\infty} \leq \|H(x,t) - H_0(x)\|_{L^\infty} + \|H_0(x)\|_{L^\infty}$$
$$\leq t\left(-C\|H(t)\|_{X^1_{c(t)}} + \|U(t)\|_{X^1_{c(t)}} + \|H(t)\|_{X^1_{c(t)}}\|U(t)\|_{X^0_{c(t)}} + \|H(t)\|_{X^0_{c(t)}}\|U(t)\|_{X^1_{c(t)}}\right) + \|H_0(x)\|_{L^\infty} < 1.$$

De donde $\exists\ \overline{T^*}$ tal que $\|H(x,t)\|_{L^\infty} < 1$. Elegimos $T_{max} = min\ \{\ T^*, \overline{T^*}\ \}$.

Además $\|H(x,t)\|_{X^0_{c(t)}} \leq \|H(x,t) - H_0(x)\|_{X^0_{c(t)}} + \|H_0(x)\|_{X^0_{c(t)}} < 1$.

Se tiene que $\tilde{T} \geq T_{max}$ y que para $t \leq T_{max}$ los desarrollos en serie son válidos.

$\square$

Quedan así calculadas estimaciones a priori para la solución analítica local que habiamos supuesto que existía, la cual no es global necesariamente ya que no podemos garantizar su existencia para ciertos t en los cuales la solución ya no sería analítica.

Capítulo 5

Conclusión

En este trabajo de fin de grado, hemos explorado la modelización unidimensional del flujo sanguíneo, con el objetivo de demostrar que los modelos unidimensionales, como el modelo ADAN56, son herramientas poderosas para analizar y predecir el comportamiento del sistema circulatorio humano con un alto nivel de detalle y precisión.

Hemos profundizado en la formulación matemática de estos modelos, centrándonos en un sistema de ecuaciones en derivadas parciales que describe la dinámica del flujo sanguíneo. A través de este enfoque, hemos examinado diversas propiedades matemáticas de las soluciones, obteniendo estimaciones para las soluciones del sistema (2.1)(Capítulo 4), para ello hemos aplicado diferentes técnicas y conceptos matemáticos que se aprenden durante el grado (Capítulo 3).

Este trabajo se podría complementar demostrando un nuevo teorema en cual se puede probar la existencia local de la solución, de cara a ello, hace falta tener un espacio y un tiempo donde la solución viva en ese espacio para ese rango de tiempo, es lo que da el Teorema (4.1), después se construye la solución sobre H para que A no se cero. Además se puede probar la unicidad de la solución, la cual se probaría mediante un argumento de contradicción estandar suponiendo que existen dos soluciones diferentes.

Tambien se podria continuar la investigación realizando un análisis numérico del sistema como en [1] o estudiando la posible formación de singularidades en tiempo finito.

Bibliografía

[1] Shramko, O.A., Svitenkov, A.I., Zun, P.S. (2023). Gravity influence in one-dimensional blood flow modeling. Procedia Computer Science, Volume 229, 2023, Pages 8-17, ISSN 1877-0509.

[2] Blanco, P.J., Watanabe, S.M., Passos, M.A., Lemos, P.A., Feijóo, R.A. (2015). An Anatomically Detailed Arterial Network Model for One-Dimensional Computational Hemodynamics. IEEE Transactions on Biomedical Engineering, 62, 736-753.

[3] Boileau, E., Nithiarasu, P., Blanco, P.J., Müller, L.O., Fossan, F.E., Hellevik, L.R., Donders, W.P., Huberts, W., Willemet, M., Alastruey, J. (2015). A benchmark study of numerical schemes for one-dimensional arterial blood flow modelling. International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering, vol 31, no. 10, pp. 1–33.

[4] Granero, R. (2023). Apuntes de Ampliación de Análisis. Universidad de Cantabria.

[5] Hörmander, L. (1963). Linear Partial Differential Operators. Springer-Verlag.

[6] Brezis, H. (2010). Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. Springer Science Business Media.

[7] Nirenberg, L. (1972). An abstract form of the nonlinear Cauchy-Kowalewski theorem. Journal of Differential Geometry, 6, 561-576.

[8] Nishida, T. (1977). A note on a theorem of Nirenberg. Journal of Differential Geometry, 12, 629-633.

[9] Bae, H., Granero-Belinchón, R. (2020). Singularity formation for the Serre-Green-Naghdi equations and applications to abcd-Boussinesq systems. Monatshefte für Mathematik, 198, 503 - 516.