Facultad de Educación

MÁSTER EN FORMACION DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

La enseñanza y aprendizaje del porcentaje

Un estudio exploratorio desde un enfoque interdisciplinar entre las materias de Economía y Matemáticas

Teaching and Learning Percent

An exploratory study from an interdisciplinary approach between the subjects of Economics and Mathematics

Alumna: Belén San Sebastián Agudo

Especialidad: Economía, FOL, Administración y Gestión

Director: Pedro Álvarez Causelo

Curso académico: 2023-24

Fecha 07/06/2024

Resumen

El porcentaje es un concepto que resulta difícil de enseñar y de aprender. En el presente trabajo se ha realizado un estudio exploratorio del proceso de enseñanza y aprendizaje del porcentaje con el objetivo de plantear un enfoque interdisciplinar entre las materias de Matemáticas y Economía. Para ello se ha revisado la literatura relevante sobre las singularidades del concepto y su didáctica, y se ha analizado la normativa curricular y una selección de libros de texto. Finalmente, se ha recabado información en dos grupos de Bachillerato que ha confirmado que el alumnado no es capaz de movilizar su conocimiento sobre el porcentaje en contextos de la vida cotidiana. Los resultados sugieren que la enseñanza aislada del concepto es insuficiente, siendo necesario vincular el conocimiento con las experiencias reales del alumnado. La doble raíz histórica del porcentaje: comercial y matemática, y su enorme aplicación real en economía, dejan clara la naturaleza interdisciplinar del concepto.

Palabras clave: porcentaje, economía, matemáticas, educación secundaria, interdisciplinaridad

Abstract

Percent is a concept that is difficult to teach and learn. In the present work, an exploratory study of the teaching and learning process of the percentage has been carried out with the aim of proposing an interdisciplinary approach between the subjects of Mathematics and Economics. To this end, the relevant literature on the singularities of the concept and its didactics has been reviewed, and the curricular regulations and a selection of textbooks have been analysed. Finally, information has been collected in two groups of Baccalaureate that has confirmed that students are not able to mobilize their knowledge about the percentage in contexts of daily life. The results suggest that teaching in isolation from the concept is insufficient, and that it is necessary to link knowledge with the real experiences of the students. The double historical root of the percentage: commercial and mathematical, and its enormous real application in economics, make clear the interdisciplinary nature of the concept.

Keywords: percentage, economics, mathematics, secondary education, interdisciplinarity

Índice

1 INTRODUCCIÓN Y JUSTIFICACIÓN

El porcentaje es un concepto muy utilizado en la sociedad con un enorme potencial para comunicar información. Los *mass media* ofrecen diariamente datos estadísticos, sanitarios, políticos, deportivos o económicos expresados en forma porcentual. El porcentaje es también la forma habitual de presentar las tasas, las ratios y los números índice, los cuales se utilizan constantemente para el cálculo de intereses, impuestos, beneficios o indicadores macroeconómicos…, constituyendo una herramienta de cálculo y de análisis fundamental en la economía y las finanzas.

Como concepto matemático, el porcentaje forma parte de estructuras multiplicativas en relaciones aritméticas como fracciones, razones, proporciones o tasas. Sin embargo, aunque se introduce muy temprano en el currículo de Matemáticas, y permanece a lo largo de toda la educación primaria y secundaria, el alumnado muestra dificultades en la resolución de problemas y escasa comprensión de su significado completo (Zurbano, 2002).

Las matemáticas se utilizan como herramienta fundamental en el estudio de la economía, pero se ha constatado con cierta frecuencia, una deficiencia en el entendimiento y la habilidad matemática del alumnado al ingresar en los Grados de Economía (GE) y Administración de Empresas (GADE) (Castillo, 2012; Gutiérrez-Portilla et al., 2021) Diversos estudios han constatado que el porcentaje, siendo un concepto aparentemente sencillo, resulta difícil de enseñar y de aprender (M. Parker & Leinhardt, 1995). ¿Qué tiene de especial? ¿A qué se debe esta dificultad? ¿Cómo es su proceso de enseñanza y aprendizaje?

El porcentaje es un concepto matemático socialmente complejo y ambiguo que a menudo parece tener varios significados a la vez (Parker & Leinhardt, 1995). Sin embargo, es posible que se haya simplificado en exceso en la instrucción. La enseñanza de conceptos matemáticos en el vacío parece ser un problema para su estudio. Para corregir esta deficiencia, el currículo de Matemáticas establece entre sus competencias específicas la necesidad de establecer conexiones entre los diferentes elementos matemáticos, con otras materias y con la realidad.

El uso del porcentaje en los diferentes ámbitos de la vida cotidiana constituye un puente entre las Matemáticas y el mundo real. Su uso fundamental en Economía evidencia la potencia interdisciplinar entre estas dos disciplinas para trabajar los distintos conceptos matemáticos desde una perspectiva integrada que tenga aplicación real. Por tanto, un enfoque interdisciplinar entre Economía y Matemáticas puede facilitar y enriquecer la enseñanza y aprendizaje de los porcentajes.

Como señala Delors (1996), el avance del conocimiento se produce en el punto en que convergen diversas disciplinas. Actualmente en la enseñanza, ha cobrado una especial importancia la necesidad de diseñar situaciones de aprendizaje en las que el alumnado, de forma colaborativa, pueda adquirir y desarrollar competencias en un contexto interdisciplinar, capaz de generar conocimientos que integren lo global y lo local y promuevan un aprendizaje significativo.

En el proceso de diseño de una intervención interdisciplinar eficaz que permita mejorar la enseñanza y el aprendizaje del porcentaje, el primer paso será lo que constituye el objetivo general de esta investigación: realizar un estudio exploratorio del proceso de enseñanza y aprendizaje del porcentaje en las áreas de Economía y Matemáticas.

Para ello se han fijado los siguientes objetivos específicos, que servirán para estructurar este trabajo:

- Revisar la literatura relevante sobre el concepto de porcentaje y su didáctica; como base teórica de análisis.
- Analizar el currículo de Matemáticas y Economía para estudiar qué tratamiento recibe el porcentaje e identificar saberes básicos coincidentes en su enseñanza.
- Analizar la enseñanza del porcentaje en los libros de texto de Matemáticas.
- Obtener datos sobre el conocimiento y destrezas que moviliza el alumnado de Bachillerato cuando se enfrenta a problemas que requieren del uso de porcentajes en el contexto económico de la vida diaria.

2 ESTADO DE LA CUESTIÓN

Siendo un concepto aparentemente sencillo, el porcentaje, resulta difícil de enseñar y de aprender. ¿Cuál es el origen de esta dificultad?, ¿qué hace que el porcentaje sea tan especial?, ¿cómo es su proceso de enseñanza y aprendizaje? y ¿qué problemas genera en el alumnado?

2.1 La historia del porcentaje

El porcentaje es un concepto dinámico que ha cambiado a lo largo del tiempo para adaptarse a sus diferentes aplicaciones en contextos comerciales, matemáticos y científicos (ver **Tabla 1**).

2.1.1 Uso comercial: una cantidad monetaria sobre cien

Siguiendo a Parker y Leinhardt (1995), el porcentaje tiene un doble origen que se remonta a las grandes civilizaciones de la Antigüedad como Babilonia (año 2100 a. C), India (300 a. C), China (200 a. C) o Grecia (300 a.C.). Un origen práctico de tipo comercial, ligado al cálculo de intereses o impuestos; y un origen matemático, vinculado a la proporcionalidad geométrica reconocida por los griegos.

La práctica comercial más primitiva para el cálculo de intereses o impuestos se encuentra en Babilonia, donde La Ley de Hammurabi expresaba el concepto en forma de unidad fraccionaria; por ejemplo, “1/3 de grano” o “1/5 de plata”. Este cálculo solo requería una medida de equivalencia: si la cantidad adeudada era 1/3, se dividía la producción en tres partes y se pagaba una cantidad equivalente a una de las partes, en concepto de intereses o impuestos.

Una noción posterior de interés aditivo permitió un sistema más flexible que se ocupaba de cantidades mayores; por ejemplo, “12 unidades de cada 400 prestadas”. En la India, se practicaba el cálculo de intereses mensuales por 100 y en la aritmética china se utilizaba la regla de tres; no obstante, el uso de la base 100 era ocasional y la idea de proporción se utilizaba como regla arbitraria en problemas comerciales.

Tabla 1 *Evolución histórica del porcentaje.*

Año	Lugar	Suceso	Concepto de Porcentaje
2.100 a. C	Babilonia	Ley de Hammurabi	Uso práctico para cálculo de intereses e impuestos que utiliza aleatoriamente o por conveniencia la base 100 y la regla de tres
300 a. C	Grecia	*Euclides* de Alejandría	
300 a. C	India	Intereses por 100 y por mes	
200 a. C	China	Uso de la regla de tres	
1202	Italia	*Leonardo Fibonacci* introduce los números indo-arábigos, elemento central de nuestro sistema decimal, y el uso de fracciones para describir proporciones	Se conecta por primera vez de forma explícita la base 100 con la regla de tres en los problemas comerciales.
s. XV	Italia	*Luca Pacioli.* Aritmética comercial	
1481	Italia	Primer uso de la expresión “perceto” Se privilegia la base 100	El “porcentaje” adquiere un estatus de concepto independiente.
s. XVI		*Tartaglia* y su *Tratado general de números y medidas*	
1650	Italia	Transformación del símbolo de porcentaje	Inicio de un proceso de cambio en la noción misma de porcentaje
1654		*Pascal y Fermat* sientan las bases de la Teoría de la Probabilidad,	
1719-1772	Alemania	*Gottfried Achenwall* acuñó el término “Estadística”	
1795	Francia	Se adopta oficialmente en Francia el Sistema métrico decimal.	
A principios del siglo XIX		Aumentó la cantidad de datos crecimiento de estudios estadísticos y sus correspondientes gráficos, diagramas, líneas de tiempo, etc.	El porcentaje se transforma en un concepto general comparativo que puede convertirse a decimal y ser mayor de 100
1830	Estados Unidos	Unificación de diversos temas comerciales de los libros de texto en un capítulo denominado *“Porcentaje”*	
1832	Estados Unidos	Comparaciones parte-todo no monetarias	
1845	Estados Unidos	Comparaciones no parte-todo, no monetarias.	

Nota: Elaboración propia a partir de Parker y Leinhardt (1995) y Landreth (2006)

La incorporación de la regla de tres en este tipo de cálculos convierte al porcentaje en una función matemática operativa que permite calcular el interés o el impuesto proporcional para cualquier base.

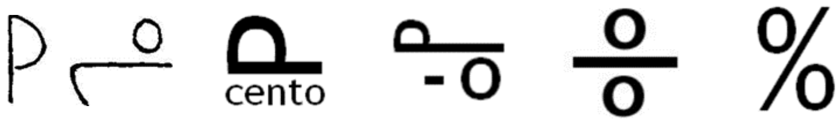
Sin embargo, la conexión matemática explícita entre la proporción y la regla de tres no se estableció hasta el Renacimiento italiano. Durante esta época, el comercio experimentó un avance significativo e Italia se convirtió en el centro comercial y financiero de Europa. El incremento de los negocios demandaba una contabilidad más precisa y las matemáticas debían adaptare para dar respuesta a las necesidades comerciales. Luca Pacioli, a finales del siglo XV, agregó a su aritmética un tratado sobre problemas comerciales, sentando así las bases de la aritmética financiera.

Hacia 1481 se empleó, por primera vez, la expresión “perceto” para referirse a una cantidad por cien. En este contexto, cuando el número 100 comenzó a ser utilizado como base privilegiada para el cálculo de intereses e impuestos, el porcentaje se convirtió en un concepto en sí mismo.

En el siglo XV el uso del porcentaje se popularizó y se aplicó en toda clase de problemas comerciales para cálculo de beneficios, impuestos, o cambio de divisas. El interés se expresaba como una cantidad monetaria de interés o impuesto sobre 100 unidades de la moneda dada; por ejemplo, “6 libras de 100”. Hasta este momento, las cantidades implicadas en la relación porcentual todavía eran identificables y representaban una parte del total, que no podía ser superior a 100.

Hacia 1650, se simplificó esta expresión (“Una cantidad monetaria sobre 100”), quedando convertida en un símbolo (%) que experimentaría diversas transformaciones iniciando un proceso de cambio en la noción misma de porcentaje (ver **Figura 1**).

Figura 1 *Transformación progresiva del símbolo de porcentaje*



2.1.2 *Una relación abstracta de uso general*

En 1795 Francia adoptó oficialmente el sistema métrico decimal en un proyecto de reforma y racionalización de las medidas y los cálculos matemáticos. Este deseo de someter todo a medida racional surgió en el Renacimiento, se fortaleció durante los siglos XVII y XVIII, culminando en la Ilustración y la aplicación de unas leyes que establecieron un sistema nacional de pesos y medidas.

Esta racionalidad que introducía la llamada modernidad exigía que toda persona pudiera ser reducida a número: los censos de población (el pueblo sometido a medida), los recuentos democráticos (un hombre, un voto), las calificaciones académicas (el conocimiento hecho número) ... (Etxeberria et al., 2017) Las unidades de medida (longitud, superficie, peso, etc.) debían de estar relacionadas entre sí, y todas se dividirían de acuerdo con una escala decimal. El objetivo era establecer un sistema de unidades único en el mundo que facilitase el intercambio científico, cultural, comercial y de datos.

A finales del siglo XVIII, el profesor alemán Gottfried Achenwall (1719 –1772) acuñó el término "Estadística": una ciencia de recopilación y análisis de datos muy poderosa para los gobernantes de una nación. El aumento en la cantidad de datos, a principios del siglo XIX, generó la necesidad de disponer de un instrumento de cálculo comparativo. Desde este momento, el porcentaje se empleó para analizar y comunicar información en un contexto más amplio.

Por el contrario, las reglas se simplificaron para el cálculo de intereses y los libros de texto de la época sustituyeron la regla de tres por una simple regla: "multiplicar el principal por la tasa por ciento y dividir entre 100". Parece que esta tendencia se aceleró durante la decimalización monetaria de base 12 imperial a base 10 federal: "multiplicar el principal por la tasa expresada en decimal".

La expresión decimal del porcentaje hizo invisible su significado relacional original; por ejemplo, "6 libras de interés de una cantidad de 100 libras prestadas" se convirtió en 0,06, un número real sin unidad de medida.

Con el tiempo, los libros de texto agruparon diversos temas generales bajo el epígrafe "porcentaje". En 1832 abarcaba ya comparaciones parte-todo no monetarias y en 1845 comparaciones no monetarias que no eran parte-todo; lo que permitía que el porcentaje fuera mayor que 100.

2.2 Concepto matemático del porcentaje

Los diferentes usos del porcentaje han provocado diversas interpretaciones de su significado. Esta ambigüedad ha generado debates sobre cómo debe definirse o enseñarse.

2.2.1 El porcentaje como una fracción

La forma clásica de introducir el porcentaje en la instrucción, según Parker y Leinhardt (1995), es definirlo realizando una traducción simple de su símbolo, es decir, como centésimas, o una cierta cantidad "a" de 100, por 100, o por cada 100. Esta definición lo identifica como una fracción (a/100) y se representa utilizando una recta numérica o un diagrama circular (**Figura 2**).

El porcentaje entendido como número disfruta de algunas de sus propiedades, ya que puede transformarse en fracciones o decimales y pueden ordenarse linealmente para facilitar la comparación.

Figura 2 *Diagrama circular que representa el porcentaje en un contexto parte-todo*

Sin embargo, la conversión a decimales implica transformar una razón en un número que puede considerare una unidad de medida y perder de vista la relación porcentual: 0,25 céntimos hace referencia a una magnitud extensiva, pero ¿cuántos son 0,25 votantes? La expresión "25% de los votantes" no indica realmente un número concreto de votantes, sino 25 votantes por cada 100. Todo esto obliga a preguntar si el porcentaje es realmente un número.

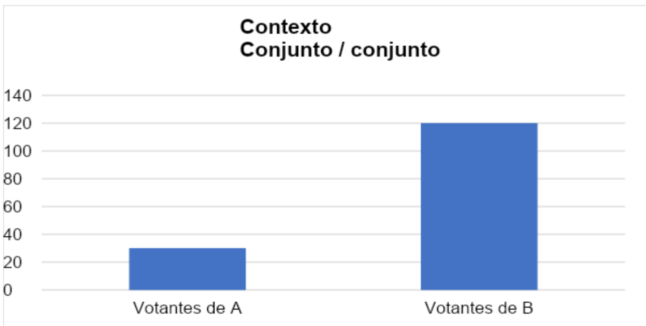
El sistema de numeración decimal, por sí solo, no es una representación apropiada de relaciones multiplicativas. El lenguaje porcentual, en cambio, introduce un mundo de relaciones y comparaciones.

Parker y Leindhart (1995) afirman que el porcentaje es una forma particular de cuantificar relaciones multiplicativas. Para pensar sobre ellas, Schwartz (1996) diferencia entre: *magnitudes extensivas*, que son aquellas que se pueden contar, medir y valorar (25 céntimos); y las *magnitudes intensivas*, que describen una relación (25 céntimos por kilo). Las magnitudes intensivas son de dos tipos: *proporciones externas*, cuando relacionan cantidades de distinto tipo (precio por kilo, km por hora) y *proporciones internas*, que relacionan cantidades del mismo tipo (euros por euros, estudiantes por estudiantes) y pierden las unidades en la comparación.

Entender el porcentaje como un número se enmarca en un sentido fraccionario dentro de un contexto parte-todo, donde los distintos porcentajes o partes, pueden agregarse hasta alcanzar el 100%, entendido como el total. Pero entenderlo así genera dos carencias: los porcentajes mayores de 100 no se entienden bien, ¿qué significa el 150% de los votantes? y tampoco tiene sentido agregar porcentajes cuando se comparan conjuntos distintos.

Entender el porcentaje en un sentido proporcional dentro de un contexto relacional más amplio (**Figura 3**) permite establecer comparaciones entre dos conjuntos y proporciona sentido a los porcentajes mayores de 100.

Figura 3 *Diagrama de barras que representa un contexto parte-parte*



Votantes de A	Votantes de B
son ¼ de los votantes de B	son 4 veces los votantes de A
el 25% de los votantes de B	el 400% de los votantes de A

2.2.2 *El porcentaje como una razón*

Al considerar su naturaleza relacional, el porcentaje puede definirse como una razón comparativa: *una razón estandarizada de base 100* (Dole, 2000). Parker (1994) distingue entre dos tipos de comparaciones porcentuales: *fracción,* que se utiliza en comparaciones parte-todo y *razón*, que establece relaciones entre dos cantidades separadas.

El porcentaje expresado como una *razón* puede describir el cambio de valor de una magnitud relativa a un objeto a lo largo del tiempo, o bien establecer una comparación entre cantidades de distintos objetos de referencia o diferentes atributos de un mismo objeto de referencia.

Parker, además del contexto fraccional, expone ocho contextos estructurales que, como puede observarse en la **Figura 4**, se agrupan en dos clases: *de cambio*, cuando los porcentajes se utilizan para describir el cambio de tamaño de una magnitud a lo largo del tiempo; y *comparativos*, o aquellos en los que el porcentaje establece una relación entre dos cantidades relativas a objetos diferentes en un mismo momento de tiempo (Parker & Leinhardt, 1995)

El porcentaje, dentro de los contextos de razón, puede representar 1) una parte de un todo; 2) una descripción del valor de la magnitud de un objeto con respecto al valor de la de otro o 3) la cantidad relativa en la que una magnitud difiere de otro.

Figura 4 *Esquema de los distintos contextos comparativos de Parker.*

<table>
<tr><td rowspan="8">Razón</td><td rowspan="4">Cambio</td><td rowspan="2">A) a % de</td><td>Aumento al % de la cantidad original</td></tr>
<tr><td>Disminución al % de la cantidad original</td></tr>
<tr><td rowspan="2">B) en un % de</td><td>Aumento en un % de la cantidad original</td></tr>
<tr><td>Disminución en un % de la cantidad original</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Comparación</td><td rowspan="2">C) entre dos cantidades</td><td>A es el % de B</td></tr>
<tr><td>B es el % de A</td></tr>
<tr><td rowspan="2">D) difieren en un %</td><td>A es un % más que B</td></tr>
<tr><td>A es un % menos que B</td></tr>
</table>

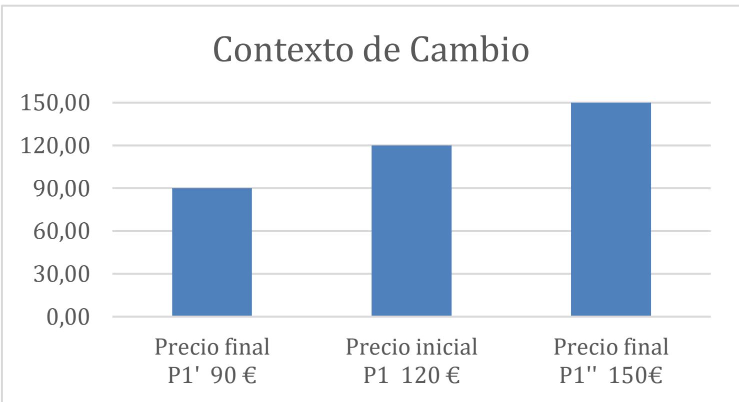
A) Cambio "a % de": cambio del valor de una magnitud a lo largo del tiempo

El objeto de estudio ha cambiado de tamaño y el nuevo tamaño se compara con el tamaño original. Por ejemplo, si un precio de 120 € aumenta a 150 € la relación entre ambos precios es de 150/120 y en lenguaje porcentual se dice que el precio ha aumentado *al 125% del* precio original. Igualmente, en el caso de una disminución del precio a 90€ el precio nuevo es *el 75% del* precio original. Estas comparaciones son exclusivas de estructuras multiplicativas.

B) Cambio proporcional "en un % de"

En este caso es la cantidad del cambio lo que se compara con el tamaño original del objeto de comparación. En el ejemplo anterior, el precio ha aumentado 30 € (la cantidad aditiva de cambio) para llegar a 150€, o se ha reducido 30 €, para llegar a 90€. La magnitud comparativa del aumento es 30/120 y la relación puede expresarse porcentualmente diciendo que el precio "aumenta un 25%" (de la cantidad original) o que el precio "disminuye un 25%".

Figura 5 *Representación gráfica de los contextos de cambio de Parker*



A un % de	El precio nuevo P1'' es el 125 % del precio original		$\frac{\mathbf{150\ €}}{\mathbf{120\ €}} = \mathbf{1,25}$;
	El precio nuevo P1' es el 75% del precio original		$\frac{\mathbf{90\ €}}{\mathbf{120\ €}} = \mathbf{0,75}$
En un % de	Aumenta en un 25% de P1	150€-120€=30€	$\frac{\mathbf{30\ €}}{\mathbf{120\ €}} = \mathbf{0,25}$
	Disminuye en un 25% P1	120€-90€=30€	

C) Comparación de los valores de magnitudes de objetos separados

Los tamaños de dos objetos distintos se comparan en un momento determinado. Este contexto también es exclusivo de las estructuras multiplicativas.

Por ejemplo, entre el precio de un producto A y un producto B hay dos comparaciones posibles. En primer lugar, tomando como referencia el precio del producto B (4 €) y como objetivo el precio del producto A (12 €), la relación entre los dos se puede enunciar de cualquiera de las siguientes maneras: el precio de A es el 300% del precio del producto B, o bien, el precio de A es 3 veces el precio de B. En segundo lugar, tomando como referencia el precio A (12 €) y como objetivo el precio de B (4 €), la relación entre los dos conjuntos puede enunciarse de la siguiente manera: el precio de B es ¼ del precio de A, o bien, el precio de B es el 33,33% del precio de A.

En este contexto, al igual que en el contexto A, la preposición “de” no tiene un significado inclusivo (parte de) sino que la nueva cantidad es un múltiplo o divisor “de” otro conjunto.

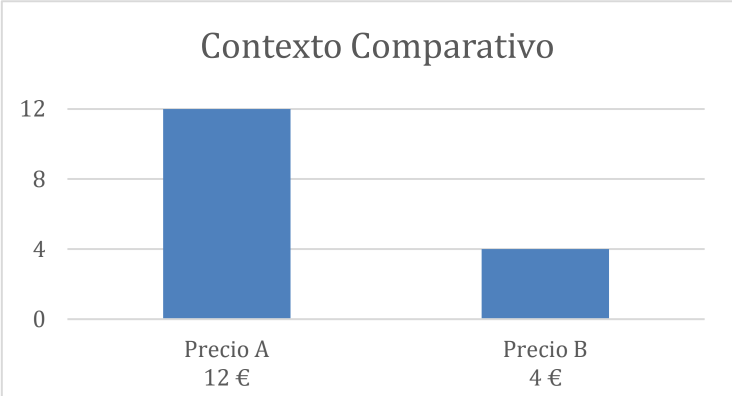
D) Comparación porcentual de la diferencia relativa

Se hacen comparaciones entre la diferencia relativa en el tamaño de los dos objetos; es decir, la diferencia de tamaño entre un objeto (12€) y otro objeto de referencia (4€) se compara con el tamaño del objeto de referencia (4€) en un momento determinado.

En nuestro ejemplo, podríamos hacer afirmaciones aditivas como: el precio de A es 8 € más que el precio de B, o multiplicativamente, el precio de A es dos veces más que el precio de B; en el lenguaje porcentual, el precio de A es un 200% más que el precio de B. Usando el precio de A como referencia, diremos que el precio de B es 8 € menos que el precio de A, el precio de B es un 66,66% menos que el precio de A, o el precio de B es un 66,66% menor que el precio de A.

La redacción tiene una importancia crucial en estos contextos pues la diferencia entre los contextos C y D radica únicamente en la distinción entre las palabras “de”, “más (o menos) que”.

Figura 6 *Representación gráfica de los contextos comparativos de Parker*



PA respecto de PB	El precio de A es el 300 % del precio de B	$\frac{\mathbf{12\ €}}{\mathbf{4\ €}} = \mathbf{3}$
	El precio de B es el 33,33 € del precio de A	$\frac{\mathbf{4\ €}}{\mathbf{12\ €}} = \mathbf{0,3333}$
Difieren en un %	El precio de A es un 200% más que el precio de B	$\frac{12\ €-4€}{4€}$=2
	El precio de B es un 66,66% menos que el precio de A	$\frac{12€ - 4€}{12} = 0{,}6666$

2.2.3 El lenguaje de una proporción privilegiada

El porcentaje es un lenguaje alternativo utilizado para describir relaciones proporcionales, un lenguaje que es conciso, elegante y utiliza una notación privilegiada que permite utilizar el ordenamiento natural del sistema decimal. Además, la aparición del signo de porcentaje señala que existe una proporción y establece una relación multiplicativa entre las cantidades de referencia (Parker & Leinhardt, 1995)

Podemos comparar los valores que toma una magnitud tanto en términos aditivos como multiplicativos. En la **Tabla 2**, vemos que todas estas relaciones pueden ser expresadas de manera concisa y elegante utilizando porcentajes.

El lenguaje del porcentaje permite establecer comparaciones y relaciones aditivas y multiplicativas según los diferentes contextos en los que se utiliza. Sin embargo, se han destacado tres problemas en este lenguaje: a) es tan conciso que oculta los referentes que deben de ser inferidos; b) la preposición “de” tiene muchos significados; y c) utiliza un lenguaje aditivo en un contexto multiplicativo.

La preposición “de” evoca una relación multiplicativa, pero la noción parte-todo interfiere en su interpretación. Por otro lado, las expresiones “más que”, “menos que”, “aumentado en” y “disminuido en” ocultan los significados multiplicativos del porcentaje y sugieren una simetría que no existe.

La suma y la reta son operaciones opuestas y simétricas cuando las cantidades extensivas son los operandos, pero en las relaciones proporcionales esta simetría se pierde. Por ejemplo, si un precio se incrementa en 5 € y después se reduce 5 €, se convierte en el precio original. En cambio, si se incrementa un 5% y se reduce un 5%, la simetría se pierde porque se establece una afirmación relativa sobre una relación multiplicativa. Estas relaciones asimétricas son contrarias a la intuición y generan dificultades en la enseñanza.

Tabla 2 *Expresión porcentual de relaciones matemáticas entre los números 25 y 10*

Número	Relaciones	Idea matemática	Expresión porcentual
10	Un componente aditivo de otro número	$10+15=25$	10 es el 40% *de* 25
10	Una parte fraccional de otro número $\frac{10}{25}=0,4$	10 es $\frac{2}{5}$ de 25	
25	Un contenedor aditivo de otros números	$25=10+15$	25 es el 250% *de* 10
25	Un escalar multiplicativo de otros números 25/10=2,5	25 es 2 y $\frac{1}{2}$ veces 10 $\frac{25}{10}=2,5$	
25 10	Difiere de otro número aditivamente 25-10=15	25 es 15 más que 10 10 es 15 menos que 25	25 es el 150% (de 10) *más que* 10
25 10	Difiere de otro número proporcionalmente $\frac{25-10}{10}=1,5$ $\frac{25-10}{25}=0,6$	25 es 1 y $\frac{1}{2}$ (de 10) más que 10 10 es $\frac{3}{5}$ (de 25) menos que 25	10 es el 60% (de 25) *menos que* 25

2.2.4 El porcentaje como estadístico o función.

El porcentaje puede utilizarse como una función para generar cantidades nuevas, o puede crearse a partir de la comparación de otros datos:

a) Por un lado, en el mundo real, el porcentaje se utiliza en expresiones estandarizadas de operadores funcionales para el cálculo de intereses, impuestos, márgenes de beneficios o descuentos.

b) Por otro lado, en su uso estadístico, el porcentaje se crea a partir de la relación entre dos cantidades, independientemente de que se declaren o no. En ocasiones estas cantidades deben ser inferidas lo que hace posible distorsionar o disfrazar la información.

2.3 Estudios previos sobre la enseñanza y aprendizaje del porcentaje.

2.3.1 Errores comunes encontrados

El interés por la enseñanza y aprendizaje de porcentajes no es nuevo. Durante los años 20 y 30 del siglo pasado, se llevaron a cabo diversas investigaciones con el objetivo de identificar las dificultades y errores que enfrentaba el alumnado al resolver tareas porcentuales tradicionales. Estas tareas consistían en realizar *conversiones* entre fracciones, decimales y porcentajes; *ejercicios* en los que había que encontrar una de las tres posibles incógnitas implicadas en la relación porcentual: base, tasa y porcentaje; *tares de sombreado*; y *problemas* en los que el alumnado, en un contexto determinado, debía extraer la información relevante, expresarla matemáticamente y operar para resolver el problema.

Los estudios encontraron los siguientes errores característicos:

1) *Ignorar el porcentaje* por completo, como si no tuviera significado. El alumnado que no estaba seguro del procedimiento utilizaba su conocimiento sobre otras áreas afines, como fracciones o decimales, para resolver las tareas. Una vez resueltas, el alumnado añadía el signo de porcentaje. Estas respuestas habrían sido correctas si el singo de porcentaje no hubiera estado presente: por ejemplo, podía responder que $\frac{9}{9}\, de\, N = 1\,\%$, en lugar de 100%.

2) *“Regla del numerador”* que consiste en creer que el signo de porcentaje a la derecha del numeral puede sustituirse por un punto decimal a la izquierda del número. Por ejemplo, 110 %=0.110, en lugar de 1,10

3) *“Algoritmo aleatorio”*: el alumnado tendía a manipular los números dados utilizando una regla (real o inventada) en lugar de un razonamiento. Cuando el alumnado no sabía cómo operar, multiplicaba o dividía de forma aleatoria. Este caso muestra la interferencia causada por las “tablas de multiplicar”; por ejemplo, $8 = \square\ \%\ de\ 32$ era contestado como 4%, en lugar de 25. La noción parte-todo del porcentaje (como mitad) también podía interferir: por ejemplo, $60 = \square\ \%\ de\ 30$ era contestado como 50 en lugar de 200.

Estos errores mostraban que el alumnado tenía problemas con porcentajes superiores a 100 y Brueckner (como se citó en Parker & Leinhardt, 1995) advirtió que el alumnado sufría un grave problema de confusión entre la notación fraccionaria, decimal y porcentual, y una falta de comprensión del proceso porcentual.

2.3.2 Procedimientos y razonamientos utilizados

Más recientemente, Lembke y Reys (1994), estudiaron las estrategias formales e informales que utilizaba el alumnado para resolver los problemas porcentuales y el efecto que la instrucción formal tenía en su aplicación. Otros investigadores prestaron atención a cómo el alumnado entendía el concepto de porcentaje (Dole, 2000) o a la influencia recibida por conceptos previos y afines como decimales, fracciones, razones y proporcionalidad (Parker & Leinhardt ,1995; Dewar ,1984).

El conjunto de estudios realizados destacó, de nuevo, la existencia de una confusión significativa entre fracciones, decimales y porcentajes. En la resolución de problemas, cuando el alumnado se sentía agobiado aplicaba reglas en lugar de razonamientos y mostraba errores computacionales porque no distinguía entre una magnitud intensiva relacional, como el porcentaje, y una magnitud extensiva.

También reveló, una falta de entendimiento tanto del procedimiento como del significado de los procesos implicados, especialmente en aquellos que involucran incrementos y disminuciones porcentuales. En estos casos, se observó que gran parte del alumnado dividía el número más pequeño por el número más grande. Esto podría estar relacionado con la interferencia de la noción parte-todo del porcentaje y una mala interpretación de la base.

Se encontraron evidencias de la interferencia causada por la noción-parte todo del porcentaje, ya que cuando el resultado de las operaciones era un porcentaje mayor de 100, el alumnado, en busca de sentido, tendía a revertir el orden de las operaciones para conseguir una cantidad menor de 100.

Montgomery (como se citó en Parker & Leinhardt ,1995) matizó algunas generalizaciones sobre las dificultades encontradas en estos estudios. Diseñó unas tareas de sombreado que dieron al alumnado la oportunidad de extender su razonamiento más allá de las ideas parte-todo y simplificó los números y relaciones implicadas en la operación. Esto dio buen resultado, demostrando que el alumnado era capaz de proporcionar respuestas correctas si se le daba la oportunidad.

También se observó que cuando se utilizaba un lenguaje que detallaba expresamente las cantidades implicadas en la relación porcentual (por ejemplo, "un estudiante de cada 100 estudiantes") la resolución de problemas mejoraba. Una vez que los referentes de la relación porcentual eran analizados correctamente, el estudiantado no tenía dificultad al realizar los cálculos y procedimientos mecánicos.

Las investigaciones realizadas por Lembke y Reys (1994) mostraron que cuando el estudiantado se enfrenta a la interpretación y resolución de problemas con porcentajes, aplica conocimientos e intuiciones formales e informales sobre porcentajes, fracciones, razones, proporciones, multiplicaciones y divisiones. Por ejemplo, tiene ideas intuitivas muy útiles relativas al significado parte-todo del porcentaje y una noción de que el 100 % actúa como un contenedor aditivo de porciones o partes porcentuales. También maneja diversos indicadores de referencia como partes fraccionales del todo, por ejemplo, sabe que el 50% significa la mitad, o que el 100% representa el total.

El alumnado, al pensar en estas relaciones, puede usar sus conocimientos previos sobre relaciones fraccionarias y transformar los porcentajes en fracciones familiares, sin embargo, estas ideas enmascaran la base comparativa de 100.

En muchos casos, el alumnado no posee un conocimiento del porcentaje como una cantidad proporcional relativa a una base de 100. Por ejemplo, aunque comprende que el 50% es la mitad, puede no reconocer que esto también implica 50 unidades por cada 100 unidades.

Según Parker y Leinhardt (1995) la proximidad del porcentaje a otros conceptos y procedimientos matemáticos, como fracciones y decimales, puede tener un impacto negativo en la comprensión de este porque en la instrucción existe una tendencia al uso de reglas computacionales, y con frecuencia no se proporciona una información detallada sobre los múltiples significados y sutiles diferencias entre todos los conceptos implicados. Como resultado, el estudiantado tiende a confundir procedimientos y a realizar operaciones sin sentido.

Dole (2000) encontró que la instrucción formal tiende a hacer que los conceptos de porcentaje del alumnado sean menos intuitivos y más basados en reglas. Indicó que en realidad reducen en lugar de expandir las estrategias y los métodos computacionales utilizados por el alumnado.

Una vez que comienza el proceso de instrucción, el conocimiento intuitivo que funciona en la resolución de problemas tiende a desvanecerse porque el alumnado confía más en los cálculos numéricos que en sus razonamientos Las estrategias que eran utilizadas eficazmente son sustituidos por otros métodos formales o informarles. Por ejemplo, abandona el uso intuitivo de indicadores de referencia por la estrategia de la ecuación o un incremento del uso decimal del porcentaje como operador multiplicativo (Lembke & Reys,1994).

Pero el alumnado muestra una visión limitada del porcentaje como operador, ya que no es capaz de reconocer su utilidad para crear una nueva cantidad. Esta conversión requiere entender el concepto de base 100 en la comparación porcentual. Por ejemplo, en los aumentos porcentuales el procedimiento mayoritariamente utilizado ha sido calcular el incremento como parte del total y después sumarlo al total.

Para Lembke y Reys (1994), el componente importante en la comprensión del porcentaje es entender el concepto de base 100, es decir, entender que el porcentaje siempre envuelve una comparación de algo con 100.

En la misma línea, Parker y Leinhardt, (1995) sostienen que la esencia del porcentaje es la proporcionalidad y sugieren utilizar el conocimiento proporcional previo del alumnado para construir el conocimiento porcentual. Sin embargo, (Dole, 2000) advierte que el alumnado no tiene un concepto bien desarrollado de proporción en el momento que accede a la instrucción del porcentaje.

El pensamiento proporcional implica realizar múltiples comparaciones en términos relativos. Los razonamientos necesarios incluyen el pensamiento multiplicativo y relacional y una comprensión muy desarrollada de conceptos como fracciones, decimales, multiplicación y división. Pero el razonamiento proporcional no se desarrolla de forma natural; el alumnado tiende a usar pensamiento aditivo y encuentra difícil distinguir las situaciones de proporcionalidad o confía demasiado en el pensamiento multiplicativo cuando es inapropiado (Hilton et al., 2016)

2.3.3 Didáctica del porcentaje

La **Tabla 3** muestra los distintos métodos presentados en la instrucción para el cálculo de porcentajes. Los estudios realizados para determinar su efectividad encontraron que el método de los tres casos resultó ser el menos efectivo y el método de la proporción se convirtió en uno de los métodos más populares al reconocer la proporción como la esencia del concepto de porcentaje.

En cuanto a la organización de las unidades didácticas, se observó que una presentación con especial énfasis en la interacción y las relaciones entre los tres casos era más efectiva que aquellas en las que se enfatizaba la competencia computacional.

En relación con el currículo, Edwards (como se citó en Parker y Leinhardt, 1995) atribuyó la alta tasa de error al poco tiempo de instrucción dirigido hacia porcentajes superiores a 100 o a las singularidades del caso 3.

Tabla 3 *Métodos de cálculo de porcentajes.*

Método	Ejemplo
Los tres casos	
Caso 1: Dada la base y el tanto, calcular el porcentaje *(Significado operador funcional)* Se expresa el tanto en forma decimal y se multiplica por la base	$¿\textit{Cuál es el } 10\% \textit{ de } 250?$ $250\ x\ 0.10 = 25\%$
Caso 2: Encontrar el tanto por ciento, dada la base y el porcentaje *(Significado fracción o razón)* Se calcula dividiendo el porcentaje entre la base y convirtiendo el resultado decimal en porcentaje	$¿\textit{Qué tanto por ciento es } 25 \textit{ de } 250?$ $\frac{25}{250} = 0.10\ \ 10\%$
Caso 3: Encontrar la base dada la tasa y el porcentaje. Se divide el porcentaje entre el decimal	$¿25 \textit{ es el } 10\ \% \textit{ de qué número}?$ $\frac{25}{0.10} = 250$
Ecuación $Factor\ x\ factor = Producto$	$25 \textit{ es el } 10\% \textit{ de qué número}?$ $0.10\,x = 25$ $x = \frac{25}{0.10} \quad x = 250$
Fórmula $P = BXR$ *P= Porcentaje* *B= Base* *R= Tanto por ciento*	$B = \frac{P}{R}$ $B = \frac{25}{0,10} \quad B = 250$
Análisis unitario Tratar el tanto por ciento de algo, como una unidad en sí misma, desde la cual derivar todas las demás	$\textit{Si } 10\% \textit{ de algo es } 25$ $\textit{Entonces } 1\% \textit{ de algo es } 2{,}5$ $\textit{Luego } 100\% \textit{ de algo es}$ $2{,}5 * 100 = 250$
Proporcional Requiere entender la relación proporcional subyacente. Se ha convertido en una simple regla nemotécnica.	$\frac{25}{x} = \frac{10}{100}$

. Nota: Elaboración propia a partir de Parker & Leinhardt (1995)

Las investigaciones realizadas destacan que la enseñanza del porcentaje mejora cuando se presenta de forma integrada con el resto de los conceptos. Un conocimiento más flexible del porcentaje implica establecer conexiones, no solo entre los elementos envueltos en la relación porcentual, sino también entre otros temas del currículo de Matemáticas.

Concretamente, para Lembke y Reys (1994), el currículo debe diseñarse de tal manera que el alumnado sea capaz de reconocer que el porcentaje significa partes de 100, que tenga una comprensión clara de la relación entre porcentajes, fracciones y decimales, y que utilice una buena representación pictórica. Además, debe aprovechar el conocimiento intuitivo del alumnado y el uso que hace del porcentaje en el mundo real.

Cuando Parker y Leindhardt (1995) estudiaron diferentes modelos de representación pictórica del porcentaje, concluyeron que no era el método de solución presentado en el aula lo que determinaba el éxito o fracaso del alumnado en la comprensión, sino que toda traducción y toda construcción de representaciones debía estar respaldada por la verbalización activa de los pensamientos y razonamientos del alumnado.

Hoy se propone una enseñanza de las matemáticas que haga hincapié en la creación de entornos de aula ricos en actividades de construcción, conexión y representación de conceptos, y generen discusiones reflexivas de ideas.

Como afirman Parker y Leinhardt (1995):

> *Las contribuciones más recientes para mejorar la instrucción en porcentaje sugieren formas de mejorar el diálogo, centrar la atención de los estudiantes a través de modelos y representación, y basar el porcentaje en las experiencias reales de los estudiantes. Sin embargo, hasta ahora ha habido una grave falta de investigación empírica que realmente pruebe y evalúe estas afirmaciones en entornos reales de aula (p.472)*

3 MATERIALES Y MÉTODOS

En esta investigación cualitativa, se ha realizado un estudio exploratorio del proceso de enseñanza y aprendizaje del porcentaje utilizando los siguientes métodos e instrumentos:

- Primero, se ha revisado el currículo de Matemáticas y Economía, en el Decreto 73/2022, de 27 de julio, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Cantabria.
- Se ha analizado una selección de libros de texto de Matemáticas de las etapas de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) y Bachillerato (**Anexo I**)
- Se recogió información en dos centros de educación Secundaria de la ciudad de Santander. Se empleó un método de muestreo no probabilístico por conveniencia, seleccionando dos grupos de estudiantes de Bachillerato por cuestiones de accesibilidad y adecuación. Se diseñó un cuestionario y con el fin de explorar la idoneidad de las preguntas de investigación, primero se realizó una prueba piloto a un grupo de 7 estudiantes de 2º de Bachillerato, en uno de los centros; después, se diseñó un segundo cuestionario que se realizó a un grupo de 20 estudiantes de 1º de Bachillerato del segundo centro (**Anexo II**)

Antes de llevar a cabo la prueba escrita, se informó a los sujetos experimentales sobre el objeto y características de la investigación y se recogió su consentimiento por escrito para cumplir con la Ley de Protección de Datos, previa autorización del Comité de Ética de Proyectos de Investigación de la Universidad de Cantabria (**Anexo III**)

4 RESULTADOS

4.1 El porcentaje en el currículo de Matemáticas

En esta sección se ha revisado la normativa educativa analizando su estructura y aquellos saberes básicos, competencias específicas y criterios de evaluación relacionados con la enseñanza del porcentaje y su relación con la economía. Para ello, se ha tomado como referencia el Real decreto 73/2022, de 27 de julio, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Cantabria.

Debido a su complejidad, el porcentaje se ve envuelto en el amplio y extenso campo de las estructuras multiplicativas; que comprende divisiones y multiplicaciones, números racionales, fracciones, decimales, razones, tasas y proporciones. Todos estos conceptos se observan entre los saberes básicos del currículo a lo largo de todos los cursos de educación secundaria; no obstante, la presencia de los porcentajes es diferente según la etapa e itinerario formativo (Ver **Anexo IV**)

a) *De 1º a 3º de ESO*, los porcentajes se introducen después de los números reales, fracciones y decimales. Se estudian junto a la proporcionalidad y en diferentes contextos de tipo financiero, como el cálculo de intereses. El currículo dedica un apartado exclusivo a "la comprensión e interpretación de porcentajes mayores de 100 y menores de 1". También a la "comparación y ordenación de fracciones, decimales y porcentajes"

b) *El 4º curso de ESO* tiene un carácter orientador y la asignatura se divide en Matemáticas A o "aplicadas" y Matemáticas B o "científicas". El estudio del porcentaje en Matemáticas A se aplica a la resolución de problemas comerciales y financieros; y en Matemáticas B, ya no aparece la educación financiera.

c) Los porcentajes desaparecen en el Bachillerato de Ciencias y Tecnología, pero permanecen en el Bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales, y en el Bachillerato General. Las asignaturas de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I y II, y Matemáticas Generales, intensifican la educación financiera donde según el RD 73/2022, se estudian las relaciones entre razones, proporciones, porcentajes, tasas (tanto por uno, tanto por ciento, tanto por mil…), impuestos e incrementos absolutos y relativos, para la representación de relaciones cuantitativas en contextos reales.

El currículo de Matemáticas hace hincapié en el carácter multidisciplinar de sus competencias específicas, saberes básicos y criterios de evaluación, y señala que no se trata de una colección de saberes separados e inconexos, sino que constituyen un campo integrado de conocimiento. La competencia específica 6 está centrada en resolver problemas en situaciones diversas, utilizando procesos matemáticos, estableciendo conexiones entre el mundo real, otras áreas de conocimiento y las matemáticas.

En definitiva, el currículo de Matemáticas se sirve de la educación financiera y el contexto económico para abordar los porcentajes y establecer su conexión con el mundo real.

4.2 El porcentaje en los libros de texto de Matemáticas

Para realizar esta tarea se han seleccionado diversos libros de texto utilizados actualmente en los centros (**Anexo I**) En este análisis, se ha prestado atención a la definición de porcentaje que se plantea, a los métodos de cálculo que se utilizan o a qué tipo de ejercicios se proponen. También, a cuestiones reflejadas en la literatura analizada, como: si prestan atención a las relaciones entre conceptos afines, los porcentajes mayores de 100, las singularidades de los casos 2 y 3 o si distinguen entre las relaciones aditivas y multiplicativas.

a) *1º y 2º ESO*

Definiciones: Los libros de texto de 1º y 2º de ESO dedican un capítulo entero al estudio de los porcentajes y la proporcionalidad después del estudio de fracciones y decimales. El concepto de porcentaje se introduce, generalmente, como una fracción, más tarde, cuando se estudia la proporcionalidad, se define como una razón y, en algunos casos, como una proporción, pero no se presta atención a sus diferencias y todos los métodos parecen distintos e intercambiables.

"A percentage can be expressed as a proportion, a fraction or a decimal number" (Anaya 2º ESO, p114)

"Un porcentaje es una razón con denominador 100. Su símbolo es % (Marea verde 1º ESO) (Edelvives 2º ESO)

"El porcentaje o tanto por ciento es la proporción directa más utilizada en nuestra vida cotidiana". (Marea verde 1º ESO)

En algunos libros se advierte expresamente, pero de forma breve, que no debe confundirse fracción con razón; pero la diferencia no se explica en términos de proporcionalidad.

"No se debe confundir una razón con una fracción. En una fracción, sus términos deben ser números enteros; y en una razón, pueden ser decimales". (Bruño 1º ESO P66)

Métodos de cálculo: Junto al estudio de la proporcionalidad se introducen la regla de tres o de cinco, el método de reducción a la unidad, los tipos de proporcionalidad directa o indirecta, el cálculo de la constante de proporcionalidad y los repartos proporcionales. Aunque el porcentaje expresa una proporción con referencia al 100, y esto se afirma en algunos libros, la presentación conjunta de diferentes reglas, formas de cálculo o ejercicios característicos, provoca una pérdida de visión de sus relaciones comunes fundamentales. Tampoco se presta especial atención a la idea de 100 como base comparativa.

También es común encontrar diversos métodos clásicos de cálculo, como el método de los tres casos, una regla de tres "o alguna fórmula como "el triángulo mágico" (Bruño 2º ESO).

"Triángulo mágico" (Bruño 2º ESO). Fórmula ¿Cómo se resuelven problemas de porcentajes? – GeoGebra (p.70)

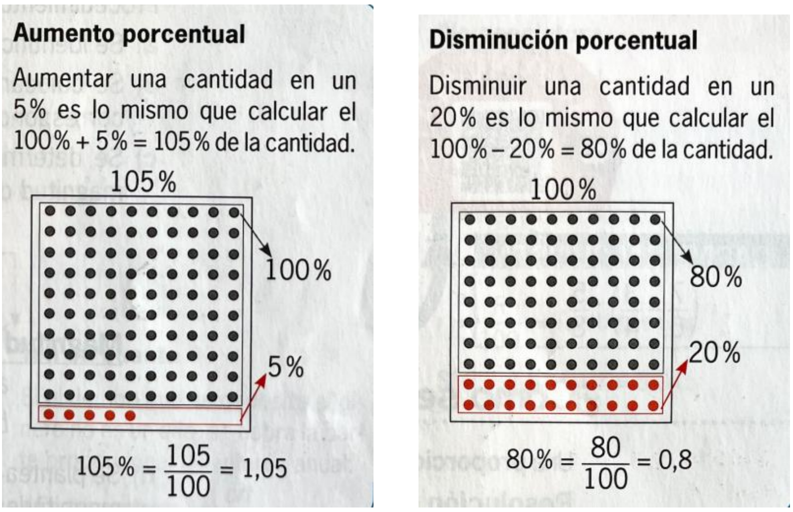
"En los problemas de porcentajes intervienen magnitudes directamente proporcionales; por tanto, se pueden resolver con reglas de tres directas" (Santillana 2º ESO, p.156)

Ejercicios: los libros de texto comienzan con diferentes conversiones entre porcentajes, fracciones y decimales. Y se describen reglas prácticas para su cálculo como:

> *"El tanto por ciento se puede interpretar como una razón y como un decimal (tanto por ciento 40%; fracción 40/00; y decimal 0,40) (Bruño 2º ESO, p.70).*
>
> *"Para calcular el % de una cantidad se multiplica por el tanto y se divide entre 100" (Marea verde 2º ESO, p.178)*

En los primeros cursos, una vez definido el porcentaje y aprendido a calcularlo, se abordan ejercicios de aumentos y disminuciones porcentuales junto al estudio del índice de variación, los porcentajes encadenados o el cálculo de intereses. No es habitual encontrar representaciones gráficas o porcentajes mayores de 100; no obstante, si se han encontrado en algunos libros (ver **Figura 7**)

Figura 7 *Representación gráfica de un aumento y disminución proporcional*



Nota: porcentajes mayores de 100 en Bruño 2º ESO, p71

b) 3º y 4º de ESO

A medida que avanza la instrucción en 3º y 4º de ESO ya no se hace referencia al concepto de porcentaje y se observa un énfasis en la resolución de problemas. Se ofrecen formas de cálculo o reglas prácticas para cada tipo de ejercicios:

> *"Si conocemos la cantidad final que resulta después de haber aplicado una variación porcentual, la cantidad inicial se obtiene dividiendo la cantidad final*

por el índice de variación; cantidad inicial = cantidad final: índice de variación" (Anaya 3º ESO, p.69)

"Para encadenar aumentos y disminuciones porcentuales se multiplican los índices de variación de los sucesivos pasos" (Anaya 3º ESO, p.70)

c) *Bachillerato*

En Bachillerato, en Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales el capítulo dedicado a los porcentajes se titula habitualmente "Aritmética mercantil". La idea de proporcionalidad ya no aparece explícitamente y se abordan conceptos como tasas, números índices o cálculos de intereses y préstamos. De nuevo se proponen problemas de aumentos y disminuciones porcentuales o de porcentajes encadenados aplicando índices de variación. Vemos un ejemplo en el libro de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I, de Anaya en 1º de Bachillerato:

"Para calcular el valor final, en un aumento o disminución porcentual, se halla el índice de variación (que conviene expresarlo en forma decimal) y se multiplica por la cantidad inicial" (p.54)

"Para encadenar aumentos y disminuciones porcentuales, se calculan los índices de variación correspondientes a los distintos pasos y se multiplican. Se obtiene, así, el índice de variación global" (p.54)

Se observa un énfasis en la aplicación de reglas para cada tipo de situaciones o ejercicios y poca atención al análisis de las relaciones o los razonamientos implicados en la relación porcentual. En ninguno de los libros analizados se han encontrado referencias a las relaciones aditivas o multiplicativas implicadas en las operaciones o referencia expresa a los porcentajes mayores de 100.

Esta carencia evidencia la necesidad de que esta labor sea realizada por parte del profesorado durante el proceso de enseñanza y aprendizaje.

4.3 Aplicación del porcentaje en el currículo de Economía

En esta sección se han analizado las asignaturas de Economía, de 1º de Bachillerato, y Empresa y Diseño de Modelos de Negocio, de 2º de Bachillerato. Ambas asignaturas se plantean como materias de modalidad en el Bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales.

Revisando el Decreto 73/2022, se advierte en la introducción la estrecha conexión establecida entre estas materias y el mundo real. El objetivo principal destacado en la asignatura de Economía es:

> *"proporcionar al alumnado, de manera introductoria, conocimientos económicos necesarios para entender el contexto en el que vive, despertar su interés y promover iniciativas dirigidas a actuar sobre la propia realidad, tras un análisis crítico de la misma, y tomar sus propias decisiones con repercusión económica y financiera de manera razonada y responsable". (p 472/881).*

En esta línea, en la asignatura de Empresa y Diseño de Modelos de Negocio, el currículo también destaca la influencia del mundo de la empresa en la sociedad y en la vida de miles de personas y hogares.

Las matemáticas son una herramienta imprescindible para el estudio y medición de la actividad económica y financiera. Las asignaturas de Matemáticas y Economía, en la etapa de Bachillerato, comparten saberes básicos de tipo económico y financiero. Existe una conexión interdisciplinar clara, ya que en estas asignaturas los conceptos y destrezas matemáticos se aplican en contextos económicos y empresariales donde los porcentajes constituyen un instrumento de cálculo y análisis fundamental.

Las dos asignaturas analizadas se abordan desde un enfoque teórico práctico y en sus saberes básicos se aprecia una aplicación permanente de los porcentajes, mayor que en el currículo de Matemáticas.

Tabla 4 *Saberes básicos relacionados entre sí y vinculados con los porcentajes en Bachillerato*

Matemáticas Aplicadas a las CCSS I y II	**Economía**
Educación financiera Resolución de problemas relacionados con la educación financiera *(cuotas, tasas, intereses, préstamos…)* con herramientas tecnológicas. *Relaciones entre razones, proporciones, porcentajes, tasas (tanto por uno, tanto por ciento, tanto por mil…), impuestos e incrementos absolutos y relativos, para la representación de relaciones cuantitativas en contextos reales*. Aplicación del *razonamiento proporcional* a la resolución de problemas financieros: medios de pago con cobro de comisiones, cambios de divisas, etc., utilizando herramientas digitales cuando sea necesario.	Las decisiones económicas: Planificación y gestión de las decisiones financieras: la inversión, el ahorro y el consumo. Dinero y transacciones. Funcionamiento de los productos financieros como préstamos, hipotecas, y sus sustitutos. Los seguros. La realidad económica Visión microeconómica: la elasticidad, el análisis coste-beneficio. Visión macroeconómica: indicadore del crecimiento económico, el sistema financiero Las políticas economías: Política fiscal, los impuestos, el déficit público, la deuda pública y sus efectos. La política monetaria y la estabilidad de precios. Funcionamiento del mercado monetario. La inflación.
	Empresa y Diseño de Modelos de Negocio
	La función productiva. Proceso productivo. Eficiencia y productividad. Actividades clave. Recursos clave. Asociaciones clave. Estructura de costes: clasificación y cálculo de coste La función financiera. Estructura económica y financiera. Inversión. Valoración y selección de inversiones: métodos estáticos y métodos dinámicos. Recursos financieros. Análisis de fuentes alternativas de financiación interna y externa. La información en la empresa: obligaciones contables. Composición y valoración del patrimonio. Cuentas anuales e imagen fiel. Elaboración de balance y cuenta de pérdidas y ganancias.

La asignatura de Economía de 1º de Bachillerato tiene un carácter introductorio para que el alumnado tome un primer contacto con los saberes de economía, los comprenda y los relacione, adquiriendo una visión global e integradora. La omnipresencia de los porcentajes en el mundo real y su utilidad para calcular, analizar y comunicar información, los convierten en un instrumento imprescindible en estos saberes.

En la asignatura de Empresa y Diseño de Modelos de Negocio, los saberes básicos abordan la función productiva y financiera de la empresa y la información contable. En cada una de estas partes se plantean diversos ejercicios prácticos que el alumnado debe dominar. La Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad (EBAU), incluye tres tipos de ejercicios en la prueba: el primero, implica el cálculo de costes, márgenes y umbral de rentabilidad; el segundo, corresponde al bloque de selección de inversiones y el tercero, aborda el análisis contable económico y financiero. Estos ejercicios requieren el manejo de porcentajes de dos maneras:

a) *Intrínsecamente*: en los ejercicios de selección de inversiones se trabaja con tasas de interés y descuento donde el razonamiento proporcional y los incrementos o reducciones porcentuales tienen una alta aplicación. Por otro lado, el análisis contable económico y financieros utiliza los porcentajes para el cálculo e interpretación de la rentabilidad y las ratios financieras.

b) Transversalmente: la habilidad para interpretar adecuadamente los enunciados es crucial para resolver el problema de forma correcta. En ocasiones la información que proporcionan se ofrece utilizando porcentajes.

> *"En el año 2022, el incremento de los costes de energía, de transporte y de materias primas, modificó la estructura de costes: <u>los costes fijos aumentaron un 4 % y los costes variables aumentaron un 0,75 % respecto al 2021.</u> ¿Cuánto debería aumentar el precio de venta para mantener en 2022 el umbral de rentabilidad de 2021? Justifique su respuesta" (EBAU Cantabria, junio 2022.)*
>
> *Si la tasa de descuento baja hasta el 3,25 % durante los tres años, ¿cambiaría el análisis realizado en el apartado anterior? Justifique su respuesta. <u>Exprese en términos porcentuales las variaciones que puedan observarse (EBAU Cantabria, junio 2023).</u>*

4.4 Aprendizaje del porcentaje

El objetivo de este estudio es encontrar evidencias del razonamiento y procedimientos que emplea el alumnado, así como los problemas que encuentra al resolver los ejercicios.

El cuestionario diseñado para la investigación (**Anexo II**) pretende conocer los razonamientos y las dificultades del alumnado al utilizar porcentajes en el mundo real y en las distintas asignaturas en las que aparecen. Se divide en tres bloques:

- Bloque 1. Concepto, complejidad y aplicación del porcentaje.
- Bloque 2. Ejercicios clásicos problemáticos
- Bloque 3. Cuestiones más específicas

4.4.1 Análisis de respuestas del bloque 1: Concepto, complejidad y aplicación del porcentaje

Se preguntó al alumnado sobre situaciones en las que se utilicen porcentajes. Las siguientes respuestas reflejan que fue capaz de identificar su uso en situaciones de la vida real:

- Rebajas y descuentos (12 de 20 estudiantes)
- Uso estadístico comparativo (7 de 20)
- Calificaciones académicas (6 de 20)
- Cálculo de intereses, impuestos o indicadores económicos (6 de 20)
- Uso abstracto de tipo matemático (2 de 20). Por ejemplo: *“sacar una cantidad de otra cantidad”* o *“para calcular la mitad de algo*”.
- Otros usos del entorno cotidiano (3 de 20). Por ejemplo: *“al descargar información o aplicaciones informáticas”*, *“el porcentaje de meter un gol en el FIFA” “porcentaje de intensidad en el gimnasio”, “el día sin IVA”*.

Recordaba haber estudiado los porcentajes en Matemáticas (20 de 20), Economía y Educación financiera (13 de 20) o en Física y Química (7 de 20) lo que sugiere la naturaleza interdisciplinar del porcentaje.

En relación con las dificultades al trabajar con porcentajes:

- Ningún problema: 6 estudiantes afirmaron no tener ningún problema, pero después cometieron muchos fallos en el cuestionario. Se evidencia falta de conocimiento sobre la profundidad y complejidad que envuelve al porcentaje.
- Confianza en la regla de tres para superar las dificultades:

  "A veces no tengo muy claro cómo proceder, pero utilizar una regla de tres me suele funcionar siempre".
- Falta de conocimiento del proceso porcentual:

  "Al terminar las operaciones: calculo el porcentaje, pero cuando hay que restar el porcentaje de algo siempre se me olvida".

  "Se me olvida la fórmula, además de que se me olvida poner el 100%".
- Redacción e interpretación de problemas:

  "Los enunciados por su vocabulario o cómo están redactados".

  "En los problemas, son muy enrevesados".
- Casos 2 o 3:

  "En cómo sacarles".

  "Me cuesta más pasar de un porcentaje a un número normal, que calcular el % de algo".

  "A la hora de calcularlo, saber qué tengo que identificar para hallarlo".
- Computacionales:

  "En operaciones con decimales".

  "Si vienen muchas cifras".

  "Cuando tengo que calcular un tanto por ciento de un porcentaje".

  "Cuando son muy grandes o varía el % del interés precio".

4.4.2 Análisis de respuestas del bloque 2: ejercicios clásicos problemáticos

El **ejercicio 1** del Bloque 2 (**Figura 8**) combina varias dificultades:

Primero, ilustra un ejemplo brevemente modificado del Caso 3: *"Encontrar la base dada la tasa y el porcentaje"*, que se resuelve dividiendo el porcentaje entre el decimal (1400 /1,06) =1320,75 €.

Segundo, existe un incremento proporcional sobre la base, que requiere el cálculo de un índice de variación (1,06). Además, el alumnado debe reconocer la relación que existe entre los valores relativos de la cantidad original, el incremento del 6 %, y la cantidad resultante de 1400; sin confundir la base.

Finalmente, existen claves aditivas en relaciones multiplicativas. Como explica Parker (1994) adición y sustracción son operaciones simétricas y equivalentes cuando se aplican a cantidades extensivas. Por ejemplo, si una cantidad es incrementada en 84 € y después decrece en 84 €, vuelve a la cantidad original. Sin embargo, cuando una cantidad aumenta un 6% y después se reduce un 6%, se pierde la simetría porque las cantidades que se toman como referente para calcular el porcentaje no son las mismas.

Este razonamiento es contraintuitivo porque el lenguaje utilizado en la redacción del ejercicio invita a pensar en adición al afirmar que se ha subido el sueldo un 6%. En el ejemplo mencionado, el sueldo inicial (1400/1.06=1320.75€) se habría incrementado un 6% (1320.75*0.06=79.24 €) hasta llegar a los 1400 € actuales, que en ningún caso son 84 € (6% 1400).

- Respuesta (a): fue la más común, el alumnado no identificó correctamente la relación entre las cantidades, ya que calculó el porcentaje sobre la base errónea y después lo restó del número incorrecto. El alumnado razonó el incremento del 6% de forma aditiva.
- Respuestas (b): las tres personas que resolvieron correctamente el ejercicio utilizaron una regla de tres aplicando un porcentaje de 106% lo que demuestra el conocimiento del 100 como base comparativa, incluso en situaciones de incremento porcentual.
- Respuesta (c): muestra un ejemplo de confusión severa entre fracciones, porcentajes y decimales. También del significado del símbolo del porcentaje.

Figura 8 *Razonamientos en un incremento porcentual*

1. Un trabajador está cobrando al mes 1400 euros después de haberle subido el sueldo el 6% ¿Cuánto cobraba antes de la subida?

a)

6% de 1400 = 84 €

1400 − 84 = 1316 €

1400 ———— 100%
x ———— 6%
= 84 → 1400 − 84 = $\boxed{1316€}$

b)

1400 ——— 106%
x ——— 100%

$\frac{1400 \cdot 100}{106} = \underline{1320,7€}$

c)

$\frac{6}{100}$ de 1400 = 84 x100 = 0'84 %

El **ejercicio 2.1** de la **Figura 9**, plantea un ejemplo del caso 3. Ninguna respuesta en la prueba aplicó la estrategia formal del caso 3, es decir, dividir el porcentaje entre el decimal (31,5/0,21=150)

- Respuesta a): el razonamiento más frecuente fue aplicar erróneamente la tasa del IVA sobre el importe de IVA. Esta respuesta puede reflejar diversas dificultades: desconocimiento del porcedimiento de apliación del impuesto o de la emisión de facturas y dificultades para resolver ejercicios del caso 3.

Figura 9 *Razonamientos para resolver un ejercicio del Caso 3*

2.1 En la factura de compra de un determinado artículo figura como importe de IVA 31,5 euros. Si sabemos que el tipo de IVA aplicado es del 21%, ¿cuál es el importe total de la factura, IVA incluido?

a)

31,5 —— 100
x —— 21

$\llcorner$ 6,61 $\rightarrow$ 31,5 + 6,61 = $\boxed{38,11}$ IVA INCLUIDO

b)

31'5 € → 21%
X → 100%
Valor del producto

$\rightarrow \dfrac{31'5}{\left(\frac{21}{100}\right)} = 150$ € vale el producto

c)

21 % de 31,5 = 6,615.

d)

$\frac{21}{100}$ de 31,5 = 6.615 x100 = 661,5

e)

31,5 —— 21%
x —— 100%

Importe total + IVA = 150 + 31,5 = 181,5 €

f)

Si 31,5 € → 21%
x → 121%

$\dfrac{121 \cdot 31,5}{21}$ = 181,5 € con IVA incluido

- Respuesta b): 5 de 27 estudiantes calcularon correctamente el precio original del artículo (150€), pero olvidaron sumar el IVA para obtener el importe total de la factura, IVA incluido.

- Respuestas c) y d): 4 de 20 estudiantes confundieron la base intentando resolver el ejercicio como si fuera el caso 1. Parece que la norma fue aplicar el porcentaje sobre la cantidad dada, sin importar su pertinencia y resolver el ejercicio. De las 4 respuestas anteriores, 2 añadieron o quitaron el símbolo del porcentaje de forma aleatoria. Ambas sugieren una falta de razonamiento para plantear el problema, además de un uso inadecuado del porcentaje que refleja la falta de comprensión del concepto.

- Respuestas e) y f): únicamente 3 personas de 27 resolvieron correctamente el ejercicio, pero utilizaron razonamientos distintos. En la respuesta e) se calculó la base utilizando una regla de tres y después se añadió el importe de IVA para calcular el importe total de la factura. En la respuesta f) se calculó directamente el importe total de la factura, aplicando un porcentaje mayor de 100 (121%) para calcular el importe total de la factura. Este sería un ejemplo del Contexto A de cambio de Parker (1994).

El **ejercicio 2.2** de la **Figura 10** propone un ejercicio de porcentajes encadenados.

- La respuesta a) muestra un razonamiento aditivo que suma los dos descuentos sin advertir el cambio conjunto que experimenta la base inicial. Fue utilizado por 6 de 20 estudiantes.
- En la respuesta b), 2 de 20 estudianes resolvieron correctamente el ejercicio. En ambos casos se inventó un ejemplo utilizando una base, 1000 o 100, y se calculó el resultado.

Cuatro estudiantes plantearon bien el procedimiento, pero no realizaron ningún cálculo; el resto informó sobre dificultades para resolver el ejercicio, como no saber realizar los calculos sin una base o no saber calcular un porcentaje sobre un porcentaje.

Resulta llamativo que el alumnado encuentre tantas dificultades para resolver este ejercicio; es uno de los más comunes en los libros de texto desde 1º de ESO hasta Bachillerato.

Figura 10 *Razonamientos utilizados en ejercicio de descuentos encadenados*

2.2. Un artículo se rebaja inicialmente un 20% y luego un 25% adicional, ¿qué porcentaje supone la rebaja conjunta respecto al precio inicial?

a)

Supone un $20 + 25 = 45$ %.

b)

Ej:

$1000 - 200 = 800$

$\frac{1000 \cdot 20}{100} = 200 \quad \frac{800 \cdot 25}{100} = 200$ 600€ sería un total de 40 %

En **el ejercicio 3** de la **Figura 11,** encontramos un ejemplo de los problemas que provoca el lenguaje asociado a los porcentajes:

- En la respuesta a) 14 de 20 estudiantes contestaron correctamente a la primera pregunta, pero 7 no fueron capaces de responder a la segunda. La estrategia más utilizada en la primera pregunta fue calcular la depreciación de cada año y restarla de cada base consecutivamente; esto refleja una visión limitada del porcentaje como operador para generar otra cantidad y del significado de la base 100. La variación total en la segunda pregunta se resolvió planteando una regla de tres.
- La respuesta b) muestra un razonamiento aditivo, que fue utilizado por 6 de 20 estudiantes. No fueron capaces de darse cuenta de la variación proporcional en la base.

- En la respuesta c) únicamente en estudiante utilizó un índice de variación para realizar la reducción porcentual, pero no fue capaz de encadenarlo.

Es importante señalar que el ejercicio podría haberse resuelto aplicando porcentajes encadenados, utilizando índices de variación 15.000 x 0,90^3. Llama la atención que no se aplicasen índices de variación teniendo en cuenta que se estudian en todos los cursos de secundaria.

Figura 11 *Claves aditivas en relaciones multiplicativas*

3. María ha comprado un coche nuevo por un importe de 15.000 euros. Si sabemos que cada año que pase su valor en el mercado de segunda mano será un 10% menos que el año anterior, ¿cuánto valdrá después de 3 años? ¿Qué porcentaje de su valor ha perdido en esos 3 primeros años?

a)

El 10% de 15 000 = 1500

1º Año 15 000 − 1500 = 13500 €

2º Año . 13500 − 1350 = 12150 €

3º Año : 12150 − 1215 = 10935 €

15 000 — 100%

10935 € — x

$x = \frac{10935 \cdot 100}{15.000} = 72{,}9\%$

100 − 72,9 = 27,1% de valor ha perdido.

b)

15.000 ⟶ 3 años $\xrightarrow{10\% \text{ cada año}}$ 30% menos

15.000 · 0'7 = 10.500 €

El coche vale 10.500€ actualmente y es de un 70% su valor inicial

c)

1º 15.000 · 0'9 = 13.500

2º 13.500 · 0'9 = 12.150

3º 12.150 · 0'9 = 10.935 €

~~3·10 = 30%~~

15.000 − 10.935 = = 4.065 € de valor he perdido

4.4.3 Análisis de respuestas del bloque 3: cuestiones más específicas

El ejercicio 4 plantea una relación multiplicativa en la que se aplican dos porcentajes consecutivos sobre la misma base.

4. Acabas de comprar un artículo que está sujeto a un IVA del 21%. El vendedor te dice que te va a aplicar un descuento del 15%. Si te dieran a elegir qué preferirías:

a. Que te aplicase primero del descuento y luego el IVA

b. Que te aplicase primer el IVA y luego el descuento.

Justifica tu respuesta.

- Opción a): 12 de 27 estudiantes eligieron aplicar primer el descuento. Argumentaron que, al aplicar primero el descuento, el IVA se aplicaría posteriormente sobre una cantidad inferior.
- Opción b): 9 de 27 estudiantes eligieron aplicar primer el IVA. Argumentaron que, al sumar primero el IVA, el descuento se aplicará posteriormente sobre una cantidad mayor.

Las respuestas sugieren que el alumnado pierde de visa la base y no es consciente de cómo esta se ve afectada por los cambios proporcionales. También se observa la dificultad para diferenciar los contextos aditivos de los multiplicativos.

- Por último, 6 de 27 contestó correctamente. Dos estudiantes realizaron algún tipo de cálculo para comprobarlo, el resto ofreció diversas explicaciones:

> *"Ninguna porque el valor va a ser el mismo haciéndolo de cualquier modo; porque, aunque apliques antes el descuento habrá que sumarle después el IVA y lo mismo al revés, ya que partes del mismo número"*.
>
> *"Da igual cual elijas porque el IVA al ser mayor un 6% que el descuento, vas a tener que pagar lo mismo aplicándose primero o después".*

La segunda respuesta sugiere cierta confusión. Sería interesante plantear un ejercicio en el que el importe del IVA y del descuento fuera igual y se pidiera calcular el precio definitivo, puesto que este tipo de razonamientos, probablemente, llevarían a pensar que el precio final sería igual que el inicial, después de sumar y restar 21%.

El ejercicio 5 de la **Figura 12** plantea el cálculo de una tasa de variación utilizando números enteros sencillos.

- Respuesta a): 17 de 20 respuestas fueron correctas, de las cuales 2 utilizaron reglas de tres y 12 fueron capaces de calcular las variaciones porcentuales del 40% y el 20%.

- En la respuesta b) se utiliza un razonamiento aditivo y demuestra la incapacidad de advertir la relación proporcional.

- En la respuesta c) no se interpretó correctamente la relación al invertir el orden de las cantidades implicadas en la razón comparativa.

Figura 12 *Tasa de variación con números enteros sencillos*

5. Un artículo ha subido de 5 a 7 y otro de 10 a 12, ¿cuál se ha encarecido más? Explica tu respuesta.

a)

5 a 7 $= \frac{7 \cdot 100}{5} = 140\,\%$ ~~en~~ 10 a 12 $= \frac{12 \cdot 100}{10} = 120$

140 - 100 ha subido un 40 %. 120 - 100 ha subido un 20 %.

b)

$7 - 5 = \boxed{2}$

$12 - 10 = \boxed{2}$

~~igual de ca~~

Se han encarecido igual.

c)

$\frac{5}{7} \cdot 100 = 71\,\%$

$\frac{10}{12} \cdot 100 = 83'3\,\%$

Se ha encarecido más el segundo producto porque el porcentaje de subida es mayor.

El ejercicio 6 en la **Figura 13** resultó especialmente difícil y desconcertante para el alumnado; 8 estudiantes lo dejaron en blanco. Para resolverlo adecuadamente es necesario entender el porcentaje como una razón comparativa y conocer las relaciones multiplicativas y aditivas entre dos cantidades, dentro de los contextos comparativos de Parker (1994).

Además, las únicas diferencias en el enunciado descansan en las expresiones "% de" "% superior (o inferior) a". También, es imprescindible superar la visión parte-todo del porcentaje y ser capaz de entender la relación proporcional envuelta en los porcentajes mayores de 100.

Otro inconveniente es que este tipo de relaciones no se atienden expresamente en la instrucción.

Si comparamos este ejercicio con el anterior, observamos que es necesario establecer relaciones similares entre las cantidades implicadas. Sin embargo, mientras gran parte del alumnado realizó correctamente el ejercicio anterior, no ha sido capaz de resolver este. Únicamente 4 personas respondieron correctamente a la pregunta a), 4 correctamente a la b), 2 a la c) y 5 a la respuesta d). Ninguna de las personas de la prueba contestó bien a las cuatro opciones.

- Respuesta a) sugiere la importancia del lenguaje utilizado en cada uno de los ejercicios. En el ejercicio anterior estaba muy clara cuál era la pregunta y la relación existente entre los dos precios, sin embargo, en este ejercicio el alumnado no tiene destreza para comparar dos cantidades distintas y distinguir entre las diferencias aditivas y multiplicativas implicadas. En consecuencia, no advierte la diferencia entre las opciones a y b, y las opciones c y d, contestando lo mismo
- Respuesta b): aquí encontramos un ejemplo del error denominado "algoritmo aleatorio" motivado, en este caso, por la interferencia de las tablas de multiplicar al contestar que el precio del aceite de oliva 12€ es 3% superior al aceite de girasol 4%.

Figura 13 *Contextos comparativos de Parker (1994)*

a)

a. El gasto mensual en aceite de oliva es un 30 % superior al gasto en aceite de girasol

b. El gasto mensual en aceite de girasol es un 33 % inferior al gasto en aceite de oliva

c. El gasto en aceite de oliva es el 30 % € del gasto en aceite de girasol

d. El gasto mensual en aceite de girasol es el 33 % € del gasto en aceite de oliva.

b)

a. El gasto mensual en aceite de oliva es un 3 % superior al gasto en aceite de girasol

b. El gasto mensual en aceite de girasol es un 3 % inferior al gasto en

El ejercicio 7 de Montgomery, **Figura 14**, también resultó muy desconcertante para algunos sujetos que no contestaron o sombrearon recuadros al azar.

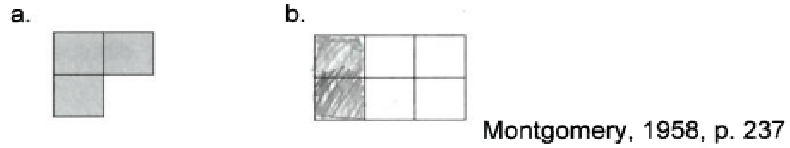
- La respuesta a) pertenece a un estudiante en la prueba piloto que depués de dudar y realizar diversos cálculos, solicitó aclaraciones sobre el significado del enunciado. Depues, logró resolver el ejericio visualmente sin realizar ningún cálculo.
- La respuesta b) resulve el ejercicio planteando una relación proporcional entre a y b; sería correcta, si el enunciado pidiera sombrear los recuadros en b, hasta que sea equivante al 150% de a.

Como la redacción del enunciado parecía presentar problemas de interpretación para el alumnado, en la segunda prueba se redactó uno nuevo. Igualmente, las respuestas a) y b) fueron las más populares. En una futura prueba sería conveniente plantear este ejercicio utilizando la misma secuencia que utilizó Montgomery para facilitar la interpretación del enunciado.

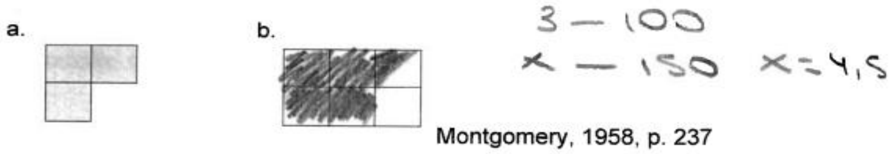
Figura 14 *Ejercicio con representación visual de Montgomery,1958, p.237*

7. Sombrea los recuadros en "b" hasta que "a" sea igual al 150% de "b"

(a)

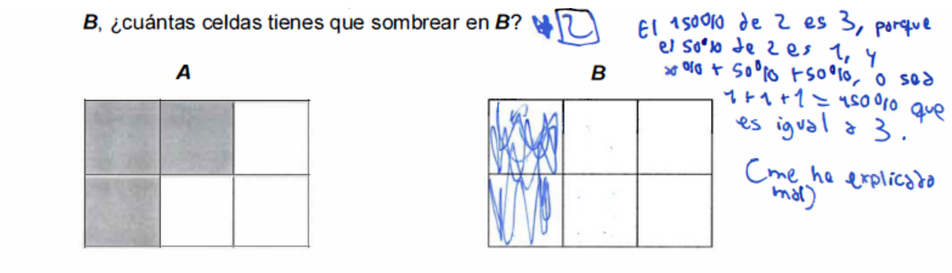


(b)

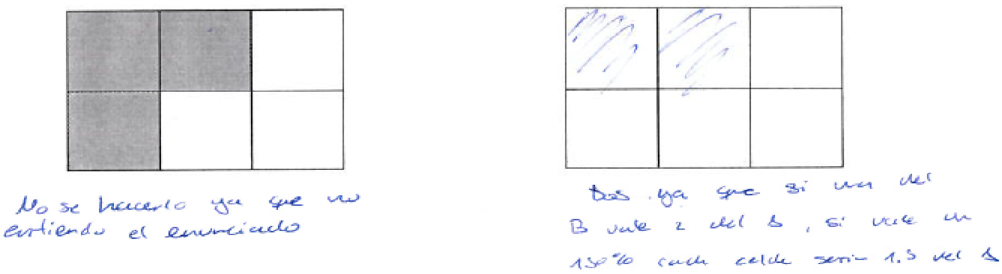


7. Si sabemos que el número de celdas sombreadas en la matriz *B* es tal que la parte sombreada de la matriz *A* representa el 150% de la parte sombreada en *B*, ¿cuántas celdas tienes que sombrear en *B*?

(c)



(d)



5 DISCUSIÓN DE RESULTADOS

¿Por qué el porcentaje es difícil de enseñar y de aprender? El origen de esta dificultad parece descansar en las diversas transformaciones que experimentó a lo largo del tiempo para adaptarse a múltiples usos. Inicialmente se utilizaba en diferentes relaciones comerciales bajo un concepto parte-todo y con el tiempo se transformó en una expresión concisa, susceptible de ser ordenada y expresada en forma decimal. Esta expresión, que indica una proporción, establece una relación multiplicativa entre las cantidades asociadas en conjuntos distintos (M. Parker & Leinhardt, 1995). A pesar de su elegancia y concisión, la expresión porcentual no aporta información sobre las cantidades subyacentes, lo que hace difícil su interpretación.

A la vista del desarrollo histórico y académico del porcentaje, se aprecia una división disciplinar: una parte financiera, más práctica y aplicada al contexto de la vida real, y otra puramente matemática, relacionada con la rama científica y tecnológica.

Al explorar el proceso de enseñanza del porcentaje y analizar el currículo de Matemáticas, observamos que se estudia, durante los tres primeros cursos, junto a fracciones, decimales y números reales. También, junto al razonamiento proporcional y la educación financiera. En los cursos superiores el porcentaje pierde presencia, desapareciendo totalmente en las matemáticas académicas o científicas y manteniéndose junto al razonamiento proporcional o los contenidos financieros en las matemáticas aplicadas o sociales.

Los estudios realizados para mejorar la didáctica del porcentaje proponen presentar el porcentaje de forma integrada con el resto de los conceptos e informar sobre las singularidades y diferencias entre porcentajes, fracciones y decimales. Parker (2004) recomienda utilizar un método de representación visual, prestar atención al lenguaje de interpretación del porcentaje y a las partes especialmente difíciles para el alumnado como los porcentajes mayores de 100 o distintos tipos de aumentos y disminuciones porcentuales. En este sentido, el currículo dedica un apartado específico al estudio de las relaciones entre conceptos y otro apartado, al estudio de los porcentajes mayores de 100 y menores de 1. También propone, entre las competencias específicas, abordar su enseñanza de forma integrada con el resto de los elementos matemáticos.

Los libros de texto de Matemáticas analizados reservan un capítulo al estudio del porcentaje. Lo presentan como una fracción, como una razón o como una proporción, y también como una forma alternativa de escribir fracciones o decimales. No informan, o lo hacen muy ligeramente, de las relaciones entre todos los conceptos.

Se presta poca atención a la idea de 100 como base comparativa proporcional o a los porcentajes mayores de 100, tampoco a las singularidades de los casos 2 y 3, o a estudiar las diferencias entre estructuras aditivas y multiplicativas.

Se dedica un apartado específico a estudiar el cálculo de intereses y, en los cursos más avanzados, a las tasas y ratios. Sin embargo, se aprecia mayor énfasis en la competencia computacional que en el fomento del razonamiento proporcional.

Las respuestas aportadas por el alumnado en la prueba realizada en esta investigación reflejan estas carencias. El alumnado de Bachillerato no es capaz de razonar correctamente cuando tienen que utilizar porcentajes en situaciones o contextos de la vida diaria. Comete los mismos errores que se documentaron por primera vez hace ya casi un siglo. Confusión severa entre porcentajes, fracciones y decimales, interferencia del concepto parte-todo fraccional, desconocimiento de la diferencia entre estructuras aditivas y multiplicativas, y de 100 como base comparativa. Sin embargo, es capaz de identificar las diferentes situaciones de la vida real en las que intervienen porcentajes (rebajas, calificaciones, estadística…) y reconoce la naturaleza interdisciplinar del concepto al afirmar su uso en otras materias como Física, Química y en mayor medida en Economía y Educación financiera.

En Matemáticas, los porcentajes están vinculados con la Economía desde los primeros cursos, puesto que comparte con esta disciplina diversos saberes básicos de tipo financiero. El currículo de Economía plantea la enseñanza de esta disciplina desde un enfoque teórico practico en el que la destreza y conocimiento matemáticos son fundamentales. Los porcentajes en las materias de Economía tienen una aplicación intrínseca para la resolución de algunos ejercicios específicos y transversal, puesto que los porcentajes están muy presentes en los análisis y el lenguaje económico.

La literatura sobre la didáctica del porcentaje ha destacado la conveniencia de utilizar un enfoque constructivista y colaborativo (Lo & Ko, 2013) y fomentar un ambiente en el que se dialogue y se debatan los problemas, lo que incrementa un entendimiento del concepto más significativo. Las materias de Economía, por su fuerte vinculación con el mundo real, son especialmente útiles para conectar con los conocimientos previos que tiene el alumnado y que aplica en sus experiencias cotidianas.

Por todo esto, una intervención interdisciplinar entre las materias de Economía y Matemáticas puede mejorar y enriquecer tanto la enseñanza como el aprendizaje del porcentaje.

6 CONCLUSIONES

Después de explorar el proceso de enseñanza y aprendizaje del porcentaje hemos llegado a las siguientes conclusiones:

- La enseñanza aislada del porcentaje es insuficiente. El alumnado no comprende adecuadamente este concepto y no consigue razonar correctamente en contextos que requieren utilizar porcentajes. El proceso de enseñanza no ha cambiado y tampoco los errores más habituales que enfrenta el alumnado en el cálculo y resolución de problemas.
- El origen histórico del porcentaje y su doble raíz económica y matemática, lo convierten en un concepto con una indudable naturaleza interdisciplinar; como así lo ha reconocido el alumnado en su experiencia académica y cotidiana.
- Es importante reflexionar sobre el papel del profesorado en el estudio interdisciplinar de los diversos conceptos y saberes básicos. Se hace necesario desdibujar las fronteras invisibles, o no tan invisibles, que existen entre las disciplinas y las competencias atribuidas a cada figura profesional. El estudio detallado de conceptos, como el porcentaje, se amplifica y enriquece cuando se amplía la mirada y se observa desde otras perspectivas. Ningún concepto existe aislado en el vacío de una única disciplina, sino que se construye a partir del uso intersubjetivo entre los sujetos sociales que generan el conocimiento.
- Debido a la enorme aplicación del porcentaje en Economía y su estrecho vínculo con el entorno cotidiano del alumnado, desde esta disciplina se pueden diseñar situaciones de aprendizaje en las que se fomente el diálogo y basen el porcentaje en las experiencias reales del alumnado, fomentando un aprendizaje significativo.

Dado que se ha lamentado la grave falta de investigación empírica que pruebe y evalúe realmente estas afirmaciones en entornos reales de aula, el siguiente paso necesario de esta investigación será diseñar una intervención interdisciplinar entre las asignaturas de Matemáticas y Economía desde una perspectiva de innovación educativa.

6 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Castillo, G. C. (2012). Las matemáticas como instrumento para la enseñanza de la Economía en el Bachillerato. *eXtoikos*, *5*.

Delors, J. (1996). “Los cuatro pilares de la educación”. En *La Educación encierra un tesoro, informe a la UNESCO de la Comisión Internacional sobre la Educación para el Siglo XXI* (pp. 91-103).

Dole, S. (2000). Promoting Percent as a Proportion in Eighth-Grade Mathematics. *School Science and Mathematics*, *100*(7), 380-389. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2000.tb18180.x

Etxeberria, O., Romero, P. G., Lizcano, E., & Lujanbio, M. (2017). El metro: primer arma de destrucción masiva. *Pure data*, 88-96.

Decreto 73/2022, de 27 de julio, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Cantabria. *Boletín Oficial de Cantabria, núm. 151* (pp. 20441-21321).

Gutiérrez-Portilla, M., Gutiérrez-Portilla, P., & Álvarez-Causelo, P. (2021). Towards an interdisciplinary approach to introduce economic modelling in Secondary Education: a proposal on the derivative and the marginal analysis. *International Journal of Educational Research and Innovation*, *2021*(16), 236-259. https://doi.org/10.46661/ijeri.4701

Hilton, A., Hilton, G., Dole, S., & Goos, M. (2016). Promoting middle school students’ proportional reasoning skills through an ongoing professional development programme for teachers. *Mathematics*, *92*(2), 193-219. https://doi.org/10.1007/s

Landreth H, C. D. (2006). *Historia del pensamiento económico Cuarta edición*.

Lembke, L. O., & Reys, B. J. (1994). The Development of, and Interaction between, Intuitive and School-Taught Ideas about Percent. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(3), 237-259.

Lo, J.-J., & Ko, Y.-Y. (2013). A Bargain Price for Teaching about Percentage. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *19*(2), 108-115. https://doi.org/10.5951/mathteacmiddscho.19.2.0108

Parker, M. (2004). Reasoning and Working Proportionally with Percent. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *9*(6), 326-330. https://about.jstor.org/terms

Parker, M., & Leinhardt, G. (1995). Percent: A Privileged Proportion. *Review of Educational Research*, *65*(4), 421-481. https://www.jstor.org/stable/1170703

Parker, M. S. (1994). *Instruction in percent: Moving prospective teachers under procedures and beyond conversions* [Doctoral dissertation]. University of Pittsburg.

Schwartz, J. L. (1996). Semantic Aspects of Quantity. *Unpublished manuscript: Cambridge, MA: MIT and Harvard Graduate School of Education*.

Zurbano Fernández, E. M. (2002). Porcentajes y profesores: un estudio exploratorio. *Aula Abierta, 80*, 113-120. http://hdl.handle.net/10651/27254

7 ÍNDICE DE TABLAS Y FIGURAS

8 ANEXOS

ANEXO I: Libros de texto de Matemáticas analizados

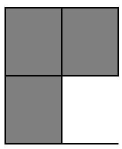
- Mathematics 2 Global thinkers. Colera J, González, I y Colera R. ANAYA
- Matemáticas 2º ESO. Ocaña JM, Mejía D y Romero. EDELVIVES
- Matemáticas 1º ESO. Zuasti N. www.apuntesmareaverde.org
- Matemáticas 2º ESO. Salvador A. www.apuntesmareaverde.org
- Matemáticas 2º ESO. Arias JM, Maza I. BRUÑO
- Matemáticas 2º ESO Saber hacer. Serie resuelve. Grupo Santillana
- Matemáticas 3º ESO. Colera J. Operación mundo. ANAYA
- Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales I 1º Bachillerato. Colera J, Oliviera MJ, Colera R y Santaella E. ANAYA

ANEXO II: Prueba piloto realizada en 2º de Bachillerato.

Resuelve las preguntas de la forma que estimes más conveniente, utilizando las estrategias que te resulten más sencillas (fórmulas, cálculos, dibujos…) Por favor, justifica tus respuestas y explica el procedimiento que has utilizado

(Si alguno de los ejercicios te parece muy sencillo, indícalo en la respuesta a la pregunta. De igual forma, si alguno de los ejercicios te resulta difícil o confuso, intenta explicar por qué)

1. ¿Podrías definir qué es un porcentaje y para qué se utiliza?
2. Un trabajador está cobrando al mes 1400 euros después de haberle subido el sueldo un 6%, ¿cuánto cobraba antes de la subida?
3. En la factura de compra de un determinado artículo figura como importe de IVA 31,5 euros. Si sabemos que el tipo de IVA aplicado es del 21%, ¿cuál es el importe total de la factura, IVA incluido?
4. ¿Cuál es el 0,75% de 1000?
5. Sombrea los recuadros en "b" hasta que "a" sea igual al 150% de "b" (Montgomery, 1958, p.237)

a. 

b. 

6. El precio de una determinada botella de aceite es de 10€, lo que supone un 250% del precio que tenía hace un año, ¿cuál era su precio en euros hace un año?
7. El precio de unos esquís es de 360 euros. En la tienda A, en las rebajas se le ha aplicado un primer descuento del 20% y después se ha vuelto a rebajar un 25%, mientras que en la tienda B, se ha aplicado un único descuento del 40%. ¿Cuál de las dos tiendas ha aplicado mayor descuento? ¿Qué porcentaje supone la rebaja conjunta en la tienda A?
8. Acabas de comprar un artículo que está sujeto a un IVA del 21%. El vendedor te dice que te va a aplicar un descuento del 15%. Si te dieran a elegir qué preferirías:
    a. Que te aplicase primer el descuento y luego el IVA
    b. Que te aplicase primero el IVA y luego el descuento.

(Justifica tu respuesta)

9. El gasto medio por persona y mes en España en aceite de oliva es de 12 € y en aceite de girasol de 4 €. Completa las siguientes afirmaciones para que reflejen correctamente la información anterior.
   a. El gasto mensual en aceite de oliva es un ___% superior al gasto en aceite de girasol
   b. El gasto mensual en aceite de girasol es un ___% inferior al gasto en aceite de oliva
   c. El gasto en aceite de oliva es el___% del gasto en aceite de girasol
   d. El gasto mensual en aceite de girasol es el ___% del gasto en aceite de oliva.

   (Recuerda mostrar las operaciones que realizas para su cálculo)

10. Si unas playeras te costaron 120 € y las has vendido en eBay por 90 €.
   a. El nuevo precio es el ___% del precio original
   b. ¿Qué porcentaje de descuento has aplicado
   c. Si en lugar de venderlas a 90 € las vendiste a 150 € ¿Cuántas veces has multiplicado incrementado su valor?

ANEXO II: Prueba realizada en 1º de Bachillerato.

Con las preguntas que os formulamos a continuaci6n tan solo queremos conocer c6mo razonáis a la hora de utilizar los porcentajes, tanto en el mundo real, como en las distintas asignaturas en las que aparecen.

Para nosotros es muy importante que nos expliquéis los pasos que dais a la hará de intentar resolver los ejercicios o, en el caso de que no sepáis resolver alguno, que nos digáis dónde creéis vosotros que esta la dificultad (algo que no entendéis en el enunciado, alguna operaci6n matemática que siempre os ha costado...). No se trata tanto de que los cálculos están bien, sino tan solo de plantear las operaciones que hay que realizar para resolver el ejercicio.

Recordad que no se trata de ningún examen y que lo importante es que en vuestras respuestas se pueda ver c6mo pensáis y que tipo de dificultades encontráis.

¡Muchas gracias por participar!

Bloque 1

Elena está estudiando Primaria y se ha encontrado por primera vez con los porcentajes, pero no entiende muy bien para que sirven.

1) ¿Podrías ponerle algunos ejemplos de situaciones en las que se utilicen los porcentajes y que tu consideres importantes?
2) Intenta recordar la primera vez que estudiaste tú los porcentajes y las veces que luego te los has encontrado en distintas asignaturas:
    a) Describe brevemente que recuerdas haber estudiado sobre los porcentajes y en que asignaturas
3) Describe brevemente en que sueles encontrar dificultades cuando tienes que usar los porcentajes o cuando encuentras informaci6n que viene expresada en porcentajes.

Bloque 2

1) Un trabajador está cobrando al mes 1400 euros después de haberle subido el sueldo el 6% ¿Cuánto cobraba antes de la subida?
2) En la factura de compra de un determinado artículo figura como importe de IVA 31,5 euros. Si sabemos que el tipo de IVA aplicado es del 21%, ¿cuál es el importe total de la factura, IVA incluido?
3) Un artículo se rebaja inicialmente un 20% y luego un 25% adicional, ¿qué porcentaje supone la rebaja conjunta respecto al precio inicial?
4) María ha comprado un coche nuevo por un importe de 15.000 euros. Si sabemos que cada año que pase su valor en el mercado de segunda mano será un 10% menos que el año anterior, ¿cuánto valdrá después de 3 años? ¿Qué porcentaje de su valor ha perdido en esos 3 primeros años?

Bloque 3

4) Acabas de comprar un artículo que está sujeto a un IVA del 21%. El vendedor te dice que te va a aplicar un descuento del 15%. Si te dieran a elegir qué preferirías:

a. Que te aplicase primero del descuento y luego el IVA

b. Que te aplicase primer el IVA y luego el descuento.

Justifica tu respuesta.

5) Un artículo ha subido de 5 a 7 y otro de 10 a 12, ¿cuál se ha encarecido más? Explica tu respuesta.

6) El gasto medio por persona y mes en España en aceite de oliva es de 12 € y en aceite de girasol de 4 €. Completa las siguientes afirmaciones para que reflejen correctamente la información anterior.

a) El gasto mensual en aceite de oliva es un ___% superior al gasto en aceite de girasol

b) El gasto mensual en aceite de girasol es un ___% inferior al gasto en aceite de oliva

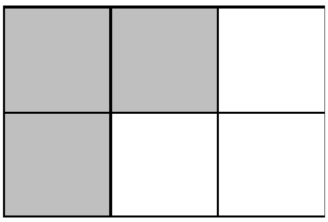
c) El gasto en aceite de oliva es el___% del gasto en aceite de girasol

d) El gasto mensual en aceite de girasol es el ___% del gasto en aceite de oliva.

(Recuerda mostrar las operaciones que realizas para su cálculo)

7) Si sabemos que el número de celdas sombreadas en la matriz ***B*** es tal que la parte sombreada de la matriz ***A*** representa el 150% de la parte sombreada en ***B***, ¿cuántas celdas tienes que sombrear en ***B***?

A



B

Anexo III Documentos CEPI

TÍTULO DEL ESTUDIO: Enseñanza y aprendizaje del concepto de porcentaje. Un análisis exploratorio desde un enfoque interdisciplinar
INVESTIGADORA: Belén San Sebastián Agudo
DIRECTOR: Pedro Álvarez Causelo
CONTACTO: belen.san-sebastian@alumnos.unican.es
CENTRO de trabajo del investigador: Universidad de Cantabria

1. INTRODUCCIÓN

Nos dirigimos a Ud. para informarle sobre **un estudio de investigación**, que llevarán a cabo la autora de este y el director del proyecto Pedro Álvarez Causelo, dentro del Máster de Formación del Profesorado de Secundaria que se imparte en **la Universidad de Cantabria**.

La intención es tan sólo que Ud. reciba **la información correcta y suficiente** para que pueda evaluar y juzgar, si quiere o no que sus datos se incluyan en nuestro estudio.

Para ello le ruego lea esta hoja informativa con atención, pudiendo consultar con las personas que considere oportuno, y le aclararemos las dudas que le puedan surgir.

2. PARTICIPACIÓN VOLUNTARIA

Debe saber que su participación en este estudio es **totalmente voluntaria**, y que puede decidir no participar, o cambiar su decisión y retirar su consentimiento en cualquier momento.

3. DESCRIPCIÓN GENERAL DEL ESTUDIO

El estudio consiste en la realización de un análisis exploratorio sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de porcentajes. Toda la información requerida se obtendrá mediante la realización de **una prueba escrita**, compuesta de varios apartados en los que se pedirá responder a varias preguntas y resolver algunos ejercicios. También se pretende realizar un número pequeño de **entrevistas**, a algunas de las personas que participen en la prueba escrita.

Esta información se recogerá con el objetivo de estudiar el conocimiento que tiene el alumnado sobre el concepto de porcentaje y su destreza en la resolución de los problemas para ampliar las dimensiones de su enseñanza y aprendizaje desde un enfoque interdisciplinar entre matemáticas y economía.

Debe saber que, al aceptar participar en el estudio, no se alterará de ningún modo el trato que reciba durante el curso académico.

4. BENEFICIOS Y RIESGOS DERIVADOS DE SU PARTICIPACIÓN EN EL ESTUDIO.

Debe saber que **siempre que lo desee podrá interrumpir su participación en el proyecto**. Aunque no recibirá beneficios personales por participar en este estudio de investigación, su colaboración nos será de gran ayuda para poder llevar a cabo la investigación planteada.

5. CONFIDENCIALIDAD Y TRATAMIENTO DE DATOS

Si decide participar en el estudio únicamente se recogerán los siguientes datos: **Nombre, apellidos, edad y curso** actualmente cursado en la escuela.

Debe conocer además que, aunque sus datos se recogerán al completo, **en el estudio no figurarán sus datos personales**, puesto que les someteremos a un proceso de anonimización de manera que nadie externo al proyecto pueda relacionarlos con el mismo.

Las **entrevistas** serán grabadas en audio y luego transcritas, procediendo a la eliminación de la entrevista grabada y garantizando el anonimato de la trascripción.

La custodia de los datos será llevada a cabo por la autora y director de la investigación. Los datos en soporte papel serán destruidos a la finalización del estudio y los datos en soporte informático serán almacenados en un equipo de la UC.

El tratamiento, la comunicación y la cesión de los datos de carácter personal de todos los sujetos participantes se ajustará a lo dispuesto en el Reglamento General de Protección de Datos (RGPD), que entró en vigor el 25 de mayo de 2018 que supone la derogación de Ley Orgánica 15/1999, de 13 de diciembre referidos a la protección de las personas físicas en lo que respecta al tratamiento de datos personales.

De acuerdo con lo que establece la legislación mencionada, **usted puede ejercer los derechos de acceso, rectificación, supresión, limitación del tratamiento, portabilidad de los datos y oposición**, para lo cual deberá dirigir a la responsable del estudio, para dejar constancia de su decisión.

Para **ejercer sus derechos sobre los datos recogidos**, puede ponerse en contacto con la investigadora responsable, en la dirección de email belen.san-sebastian@alumnos.unican.es

AUTORIZACIÓN PATERNA PARA EL TRATAMIENTO DE DATOS PERSONALES DE UN MENOR

DECLARACIÓN DE CONSENTIMIENTO INFORMADO

D./Dña.………………………………………………… (Padre, madre, Tutor/a legal) y

D/ Dña.………………………………………………… (Padre, madre, Tutor/a legal) mayor de edad, con domicilio en ……………………………………………y con DNI nº………………………… y DNI nº ……………………

Manifiesto que he leído y entendido la hoja de información que se me ha entregado, y que he recibido información suficiente sobre el mismo.

Comprendo que la participación es **totalmente voluntaria**, siendo posible la retirada del estudio en cualquier momento sin tener que dar explicaciones.

Presto libremente mi conformidad para la participación de mi hijo/a en el Proyecto de Investigación titulado "Enseñanza y aprendizaje del concepto de porcentaje. Un análisis exploratorio desde un enfoque interdisciplinar"

He sido también informado/a de que **los datos personales** tratados serán protegidos e incluidos en un fichero que deberá estar sometido a y con las garantías del Reglamento General de Protección de Datos (RGPD), que entró en vigor el 25 de mayo de 2018 que supone la derogación de Ley Orgánica 15/1999, de 13 de diciembre referidos a la protección de las personas físicas en lo que respecta al tratamiento de datos personales

Tomando ello en consideración, **OTORGO mi CONSENTIMIENTO** para cubrir los objetivos especificados en el proyecto.

Santander, a de de 20

CONSENTIMIENTO INFORMADO PARA EL ESTUDIO:

Título del Proyecto: Enseñanza y aprendizaje del concepto de porcentaje. Un análisis exploratorio desde un enfoque interdisciplinar
Investigador Principal: Belén San Sebastián Agudo

Yo, ____
(Nombre y apellidos en MAYÚSCULAS)

Declaro que:

- He leído la hoja de información que me han facilitado.
- He podido formular las preguntas que he considerado necesarias acerca del estudio.
- He recibido información adecuada y suficiente por el investigador abajo indicado sobre:
    - Los objetivos del estudio y sus procedimientos.
    - Los beneficios e inconvenientes del proceso.
    - Que mi participación es voluntaria y altruista
    - El procedimiento y la finalidad con que se utilizarán mis datos personales y las garantías de cumplimiento de la legalidad vigente.
    - Que en cualquier momento puedo revocar mi consentimiento y solicitar la eliminación de mis datos personales.
    - Que tengo derecho de acceso y rectificación a mis datos personales.

CONSIENTO EN LA PARTICIPACIÓN EN EL PRESENTE ESTUDIO

SÍ **NO**

(marcar lo que corresponda)

Para dejar constancia de todo ello, firmo a continuación:

Fecha ……………………

Firma……………………………

Nombre investigador: Belén San Sebastián Agudo
Firma del investigador…...………………………….

ANEXO IV: Saberes básicos relacionados con porcentajes en el Currículo de Matemáticas LOMLOE

<table>
<tr><th colspan="2">1º a 3º ESO</th></tr>
<tr><td>
A. Sentido numérico

2. Cantidad.

● **Números enteros, fraccionarios, decimales y raíces** en la expresión de cantidades en contextos de la vida cotidiana con la precisión requerida.

● **Diferentes formas de representación de números enteros, fracciones y decimales, incluida la recta numérica**.: selección y utilización de la representación más adecuada de una misma cantidad para cada situación o problema.

● ***Porcentajes mayores que 100 y menores que 1***: comprensión e interpretación.

3. Sentido de las operaciones.

● Estrategias de **cálculo mental con números naturales, enteros, fracciones y decimales.**

● **Operaciones** con **números enteros, fraccionarios o decimales** en **situaciones contextualizadas.**

● **Relaciones recíprocas entre las operaciones** (adición y sustracción; multiplicación y división; elevar al cuadrado y extraer la raíz cuadrada): comprensión y utilización en la simplificación y resolución de problemas.

● Efecto de las **operaciones aritméticas con números enteros, fracciones y expresiones decimales.**

● Propiedades de las operaciones (suma, resta, multiplicación, división y potenciación): cálculos de manera eficiente con números naturales, enteros, fraccionarios y decimales tanto mentalmente como de forma manual, con calculadora u hoja de cálculo, adaptando las estrategias a cada situación, valorando si los resultados son razonables.
</td><td>
4. Relaciones.

● **Números enteros, fracciones, decimales y raíces**: comprensión y representación de cantidades con ellos.

● Relación de conjeturas, generalización y justificación de relaciones entre números.

● Factores, múltiplos y divisores. Factorización en números primos para resolver problemas: estrategias y herramientas diversas, incluido el uso de la calculadora.

● ***Comparación y ordenación de fracciones, decimales y porcentajes*: situación exacta o aproximada en la recta numérica.**

5. Razonamiento proporcional.

● Reconocimiento **de relaciones de proporcionalidad numérica** y de relaciones no proporcionales.

● **Razones y proporciones**: comprensión y representación de relaciones cuantitativas.

● ***Porcentajes: comprensión y resolución de problemas*.**

● **Situaciones de proporcionalidad en diferentes contextos**: análisis y desarrollo de métodos para la resolución de problemas (aumentos y disminuciones porcentuales, rebajas y subidas de precios, impuestos, escalas, cambio de divisas, velocidad y tiempo, etc.).

6. Educación financiera.

● Información numérica en contextos financieros sencillos: interpretación.
● Métodos para la toma de decisiones de consumo responsable: relaciones calidad-precio y valor-precio en contextos cotidianos.
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">4º ESO</td></tr>
<tr><th>Matemáticas A</th><th>Matemáticas B</th></tr>
<tr><td>A. Sentido numérico

5. Razonamiento proporcional.

● Situaciones de proporcionalidad directa e inversa en diferentes contextos: desarrollo y análisis de métodos para la resolución de problemas.

6. Educación financiera.

● Métodos de resolución de problemas relacionados con aumentos y disminuciones porcentuales, intereses y tasas en contextos financieros, interpretando la solución obtenida en el contexto del problema.</td><td>A. Sentido numérico

3. Relaciones.

● Los conjuntos numéricos (naturales, enteros, racionales y reales): relaciones entre ellos y propiedades
● Orden en la recta numérica. Intervalos
● Valoración de las ventajas del sistema decimal frente a otros sistemas de numeración, investigando desde cuándo se usa.

4. Razonamiento proporcional.

● Situaciones de proporcionalidad directa e inversa en diferentes contextos: desarrollo y análisis de métodos para la resolución de problemas.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">1º Y 2º BACHILLERATO</th></tr>
<tr><th>HUMANIDADES Y CIENCIAS SOCIALES</th><th>GENERAL</th></tr>
<tr><td>Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I</td><td>Matemáticas Generales (1º Bachillerato)</td></tr>
<tr><td>A. Sentido numérico
2. Cantidad.
● Números reales (racionales e irracionales): comparación, ordenación, clasificación y contraste de sus propiedades.
4. Educación financiera.
● Resolución de problemas relacionados con la educación financiera (cuotas, tasas, intereses, préstamos…) con herramientas tecnológicas.
● Relaciones entre razones, proporciones, porcentajes, tasas (tanto por uno, tanto por ciento, tanto por mil…), impuestos e incrementos absolutos y relativos, para la representación de relaciones cuantitativas en contextos reales.
● Aplicación del razonamiento proporcional a la resolución de problemas financieros: medios de pago con cobro de comisiones, cambios de divisas, etc., utilizando herramientas digitales cuando sea necesario.</td><td rowspan="3">3. Relaciones.
● Razones, proporciones, porcentajes y tasas: comprensión, relación y aplicación en problemas en contextos diversos.
4. Educación financiera.
● Razonamiento proporcional en la resolución de problemas financieros: medios de pago con cobro de intereses, cuotas, comisiones, cambios de divisas, utilizando herramientas tecnológicas cuando sea necesario.</td></tr>
<tr><td>Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II</td></tr>
<tr><td>A. Sentido numérico
3. Educación financiera.
● Resolución de problemas de las ciencias sociales y de la economía.</td></tr>
</table>