Facultad de Educación

MÁSTER EN FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Conexiones entre representaciones algebraicas y gráficas de funciones polinómicas

Connections between algebraic and graphical representations of polynomial functions

Alumno: Rubén Martínez Fernández

Especialidad: Matemáticas

Director: Mario Alfredo Fioravanti Villanueva

Curso 2023-2024

Septiembre 2024

Resumen:

Las funciones matemáticas, son un concepto complejo e importante para entender y modelizar el mundo que nos rodea. Dicho concepto se comienza a aprender en la Educación Secundaria Obligatoria, el cual se puede representar a través de distintos sistemas de representación, como por ejemplo, el algebraico, el tabular y el gráfico. Debido a la gran importancia que tiene la manipulación de los distintos sistemas de representación y la transformación en el proceso de aprendizaje del concepto, el objetivo fundamental de este trabajo es analizar cómo los alumnos establecen conexiones entre las representaciones gráficas y algebraicas de las funciones polinómicas. Para ello, se llevará a cabo una investigación en un Instituto de Educación Secundaria, en el que se realizará una actividad con un grupo de alumnos de Bachillerato de la que posteriormente se obtendrán conclusiones.

Palabras clave: sistema de representación, representación, tratamiento de representaciones, conversión de representaciones, funciones polinómicas.

Abstract:

Mathematical functions are a complex and important concept for understanding and modeling the world around us. This concept begins to be taught in Secondary Education, and it can be represented through different representation systems, such as algebraic, tabular, and graphical ones. Due to the significant importance of manipulating different representation systems and transforming them in the learning process, the main objective of this work is to analyze how students establish connections between the graphical and algebraic representations of polynomial functions. To carry out this research, an activity will be conducted at a Secondary Education Institute with a group of high school students. Based on the participation of the students in this activity, the necessary conclusions for the study will be obtained.

Keywords: representation system, representation, representations treatment, conversion of representations, polynomial functions.

ÍNDICE DE CONTENIDOS

1 Introducción 6
2 Objetivos y preguntas de investigación 7
3 Marco teórico 8
3.1 Dominios de referencia y sistemas de representación 10
3.2 Conexiones entre representaciones 16
3.3 Proceso de conversión 17
3.4 Dificultades y errores asociados al concepto de función 18
4 Propuesta de investigación 21
4.1 Muestra 21
4.2 Ubicación y programación de la investigación 22
4.3 Diseño del proyecto de investigación 23
5 Análisis de los resultados 28
5.1 Ejercicio 1 29
5.1.1 Apartado a) 29
5.1.1.1 Apartado a).1. 29
5.1.1.2 Apartado a).2 30
5.1.1.3 Apartado a).3. 30
5.1.2 Apartado b) 31
5.1.3 Apartado c) 32
5.1.4 Apartado d) 35
5.1.4.1 Apartado d).1 35
5.1.4.2 Apartado d).2 35
5.2 Ejercicio 2 36
5.2.1 Apartado I 36
5.2.2 Apartado II) 39
5.2.3 Apartado III 42
5.2.3.1 Apartado III a) 42
5.2.3.2 Apartado III b) 44
5.2.3.3 Apartado III c) 44
6 Conclusiones 50
7 Referencias 51
8 Anexos 53

8.1 Anexo I: Hoja de enunciados 53
8.2 Anexo II: Actividad resuelta 60

1 Introducción

En las matemáticas, una de las áreas más importantes y con gran aplicación directa en el mundo real, es el análisis, dentro del cual entra el estudio y análisis de las funciones. Existen funciones de diversos tipos como son las funciones exponenciales, las racionales y las polinómicas, entre otras.

En este trabajo, se pretende llevar a cabo una investigación en un Instituto de Educación Secundaria con el fin de analizar cómo los alumnos conectan las representaciones gráficas con las algebraicas, y viceversa, en el dominio de las funciones polinómicas. Además, se examinarán los errores cometidos por los alumnos en la realización de la actividad planteada.

Para poder alcanzar el objetivo principal y los específicos planteados en el segundo capítulo, así como responder a las preguntas de investigación una vez llevada a cabo la misma, se dispone de un marco teórico en el tercer capítulo. Dentro de este, se expone la definición de los términos de dominio de referencia, sistema de representación y representación, entre otros, junto con ejemplos clarificadores.

Posteriormente se mencionan algunas de las causas que generan dificultades en los alumnos, tanto en la comprensión de conceptos como en el abordaje de problemas o tareas propuestas. Se nombran algunos de los errores causantes de las dificultades en torno al concepto de función.

En el cuarto capítulo se describe la actividad que se ha desarrollado para realizar el estudio planteado, incluyendo la planificación llevada a cabo para su ejecución. El análisis de cada uno de los resultados aportados por los alumnos se expone en el quinto capítulo.

Para concluir con la memoria, en el sexto capítulo, se realiza una conclusión en base a los resultados obtenidos después de analizar las respuestas de los alumnos. Asimismo, se contrastan dichos resultados con las aportaciones de los autores plasmadas en el marco teórico. Además, se les dará respuesta a las preguntas de investigación planteadas, indicando también si se ha alcanzado el objetivo principal de la investigación.

2 Objetivos y preguntas de investigación

En esta primera sección se establecerán tanto el objetivo principal como los específicos de la investigación realizada, además de plantear unas preguntas de investigación.

El objetivo principal de este Trabajo de Fin de Máster es analizar las conexiones que establecen los alumnos entre las representaciones gráficas y algebraicas de funciones polinómicas, con el fin de conocer la comprensión del concepto de función polinómica por parte del alumnado. La investigación se realizará a alumnos de primer curso de Bachillerato de Ciencias Sociales de un instituto ubicado en Santander.

Para realizar el análisis previamente mencionado, se les propondrán a los alumnos una serie de ejercicios y/o problemas que tendrán que efectuar de manera cooperativa en horas lectivas mayoritariamente, de donde se podrán observar las actitudes y el razonamiento empleado por cada uno de los estudiantes en su resolución.

Los objetivos específicos a lograr a través de la investigación planteada son:

- Descubrir los razonamientos empleados por los alumnos en el abordaje de las actividades propuestas.
- Detectar las dificultades que presentan los alumnos en los procesos de transformación en el ámbito de las funciones polinómicas.
- Observar cómo los alumnos realizan el proceso de transformación de una de las representaciones a la otra.
- Fomentar la participación por parte de todo el alumnado en su respectivo grupo, aportando ideas en la resolución de las cuestiones planteadas.
- Verificar la comprensión del concepto de función polinómica por parte de los alumnos, tanto en su representación gráfica como en la algebraica.
- Analizar la capacidad de retención de conclusiones obtenidas por el alumnado en problemas planteados, para una mejor resolución de problemas posteriores.

- Motivar a los alumnos a abstraerse de los procesos de aprendizaje estándares vistos en el aula de Matemáticas, generando nuevas formas de pensar y razonar en la resolución de problemas.
- Observar la forma en la que los alumnos abordan problemas que no han visto planteados en ocasiones anteriores, y la capacidad de razonar en base a los conocimientos previos.

A continuación, se procede a enunciar unas preguntas de investigación de acuerdo con los objetivos establecidos y a las cuales se pretende dar respuesta una vez concluida la investigación:

- ¿Son los alumnos capaces de identificar correctamente la representación de la función polinómica?
- ¿Cómo realizan los estudiantes los procesos de transformación entre las distintas representaciones de las funciones polinómicas?
- ¿La actividad propuesta ha sido útil en la construcción de nuevos conocimientos y formas de razonar para mejorar el desarrollo de la materia?
- ¿La propuesta realizada ha favorecido el uso de las tecnologías y la competencia digital, generando en los alumnos formas alternativas de obtener la solución de problemas?

3 Marco teórico

El concepto de función se comienza a manejar en la Educación Secundaria Obligatoria, siendo en eje fundamental desde su comienzo en los contenidos de la materia de Matemáticas. Tal y como destacan Tall y Bakar (1992) y Oehrtman et al. (2008), es un concepto que los planes de estudio no enfatizan, causando inconsistencia e inseguridad del propio concepto en los alumnos. Según apunta Hitt (1998), uno de los principales objetivos del plan de estudios de secundaria, debería ser desarrollar en los alumnos un sentido de las funciones más amplio, y enfatizar más en el propio concepto, así como en subconceptos vinculados con este.

Al no profundizar lo suficiente sobre el concepto de función, el cual requiere un profundo y extenso proceso madurativo por parte del alumno, puede que cause en ellos ciertas dificultades. Estas afectarán en la comprensión y la adquisición del conocimiento, y en consecuencia, en el su posterior manejo y desarrollo de la materia (Tall y Bakar, 1992). Gómez (2013), especifica que dichas dificultades se deben a la complejidad y generalidad del concepto, el cual tiene reconocida su dificultad de manera internacional. La importancia del concepto es fundamental ya no sólo en el aprendizaje de las matemáticas, sino en las demás áreas científicas (Tall y Bakar, 1992; Oerhtman et al., 2008; Hitt, 1998).

Según apuntan Gómez (2013) y Hitt (1998), otros factores importantes como obstáculos del aprendizaje son las distintas representaciones y conceptos interrelacionados con el concepto de función, además de las conexiones que hay que establecer entre las representaciones. Gómez (2013), demanda que habría que enfatizar en los distintos sistemas de representación en el proceso de aprendizaje, poniendo en valor cada uno de ellos. Hitt (1998) y, Ortega y Pecharromán (2010) afirman que, para comprender plenamente el concepto de función, o en general, cualquier concepto matemático, se han de poder vincular coherentemente y sin contradicciones las distintas representaciones del concepto en cuestión. Es por ello que se establece como un objetivo principal de la enseñanza en matemáticas. Todas las dificultades mencionadas pueden ser causantes del abandono de la materia de Matemáticas (Oerhtman et al., 2008).

El concepto de función viene expresado de distintas maneras a través de diversas definiciones, cada cual, con su nivel de abstracción, Gómez (2013). Gómez (2013), Tall y Bakar (1992), Goldin (1998) y Duval (2006) consideran que en la Educación Secundaria Obligatoria y en el Bachillerato, les enseñan a los alumnos matemáticas manipulativas, proporcionándoles una serie de procedimientos para la consecución de las actividades. No fomentan el pensamiento y razonamiento del formalismo del concepto, y en consecuencia, no contribuyen al desarrollo general de las capacidades de razonamiento, análisis y visualización de los estudiantes. Como muestra Oehrtman et al. (2008), lo anterior hace que los alumnos no sostengan y asimilen el concepto, y por lo tanto lo vean con carencia de significado y de coherencia, siendo incapaces de

ver el concepto de función como una correspondencia entre conjuntos (Thompson, 1994).

No obstante, según Gómez (2013) y Goldin (1998), la actividad y el aprendizaje de las matemáticas favorece el desarrollo de las habilidades de razonamiento y estrategias en el alumnado, pudiendo así generar mayor interés y motivación en el afrontamiento de la asignatura por parte de estos.

Primeramente, con el fin de poder analizar en la investigación llevada a cabo cómo los alumnos realizan las conexiones entre las representaciones algebraicas y gráficas de una función polinómica, se describirán los términos de dominio de referencia, sistema de representación y representación. Posteriormente, se explica cómo se dan las conexiones entre representaciones y se expone el modelo que plantea Boseé et al. (2014) sobre el proceso de conversión entre ellas.

A continuación, se profundizará en los distintos factores que influyen en el aprendizaje de las matemáticas, que en ocasiones suelen convertirse en obstáculos de la materia. Se comienza profundizando, como ya se ha comentado, en la dificultad que presenta el concepto de función, así como los errores más comunes que están vinculados a dicho concepto.

3.1 Dominios de referencia y sistemas de representación

Debido a que el objetivo fundamental de este trabajo es ver cómo los alumnos establecen las conexiones entre la representación algebraica y la representación gráfica de funciones polinomiales, hay que esclarecer el concepto de representación.

Para ello, se considera el Enfoque Lógico Semiótico (ELOS), que permite facilitar el aprendizaje de propiedades de funciones mediante la coordinación de representaciones. Al igual que Ortega y Pecharromán (2010), Duval (2006), Adu-Gyamfi y Bossé (2014), Zabalza (1998) y Goldin (1998), nos centraremos en el Modelo de Competencia Cognitivo, que permite describir la comprensión de los conceptos desde el punto de vista de vínculos entre los elementos del modelo: los sistemas de representación, los estados del desarrollo cognitivo de estos, y

las dificultades y errores en el aprendizaje. De dicho modelo únicamente se tendrá en cuenta el vínculo entre las representaciones gráficas y algebraicas de las funciones polinómicas, además de estudiar los errores cometidos por los alumnos.

Para poder hablar de representaciones matemáticas, primero se ha de establecer el dominio matemático en el que se trabaja. Un dominio de referencia en matemáticas es un objeto de conocimiento o idea matemática completamente desarrollada, que incluye todas las nociones respectivas de las cuales está construida (Adu-Gyamfi et al., 2017). En este estudio, el dominio de referencia, también llamado objeto de conocimiento (Adu-Gyamfi et al., 2017) o dominio de representación (Even, 1998) es el de las funciones, concretamente el de funciones polinómicas.

Por tanto, en este documento, al trabajar con el dominio de las funciones, se considerarían dentro del mismo la noción de conjuntos, correspondencia entre conjuntos y unicidad, entre otros. En lo que respecta a la propia construcción del concepto y los subconceptos, ideas o nociones que surgen del concepto de función, se pueden destacar el dominio y rango de una función, la continuidad, crecimiento, decrecimiento, etc. En ocasiones, estos subconceptos se podrían considerar como dominio de referencia, siempre sin perder de vista el marco general que sería el de las funciones polinómicas.

Una vez delimitado el dominio de referencia principal, se puede explicar la noción de representación. Al igual que Adu-Gyamfi et al. (2017) disciernen entre sistema de representación o registro, representación y registro de representación, se considerará dicha distinción en este documento.

El sistema de representación hace mención, como su propio nombre indica, al sistema o medio por el que se representa el concepto del dominio fijado (Adu-Gyamfi y Bossé, 2014). Según Goldin (1998), un sistema de representación consta de una serie de caracteres o signos, como pueden ser letras de un alfabeto, signos de puntuación, números o símbolos de operaciones aritméticas. También incluyen reglas para combinar los signos en configuraciones permitidas.

Según Bossé et.al (2014) y, Adu-Gyamfi y Bossé (2014), cada sistema de representación tiene sus caracteres, reglas, convenciones y configuraciones que permiten la representación, englobándose todas las nociones anteriores en la palabra microconceptos. Estos microconceptos varían en función del registro de representación.

En lo que a este trabajo respecta, los sistemas de representación serían el gráfico y el algebraico, aunque como sistemas de representación matemática común del concepto de función, también se podría considerar el tabular. No está claramente definido el límite entre un sistema de representación y otro (Goldin, 1998).

Goldin (1998) y Bossé et al. (2014), clasifican los sistemas de representación en sistemas externos e internos, siendo ambos importantes en el proceso de aprendizaje de las matemáticas y en la resolución de problemas. En este trabajo nos centraremos en los sistemas de representación externos, a pesar de que los internos son fundamentales en todos los humanos. Se hace más complicado analizar las representaciones internas ya que generalmente constituyen concepciones mentales. Los sistemas externos sirven para codificar, describir relaciones o ideas matemáticas, comunicar conocimientos matemáticos y operar con construcciones matemáticas.

Por otro lado, una representación es una forma de plasmar el concepto del dominio de referencia, siempre ubicada en un sistema de representación, por lo que para su construcción se emplearán caracteres, símbolos y objetos asociados al sistema. En otras palabras, las representaciones son medios que permiten visualizar el concepto en cuestión.

Según apunta Zabalza (1998), la importancia de la forma de la representación (representante) sólo se puede observar en el paso de un registro de representación a otro. Según Duval (2006), los objetos matemáticos (ideas, conceptos y relaciones) solo son accesibles mediante las representaciones, y la actividad matemática solo se puede llevar a cabo mediante el uso de una representación. Las representaciones sirven para comunicar ideas o relaciones matemáticas (Duval, 2006).

En la siguiente figura se muestra a modo de esquema lo que significan el dominio de referencia, los sistemas de representación y la representación en sí misma.

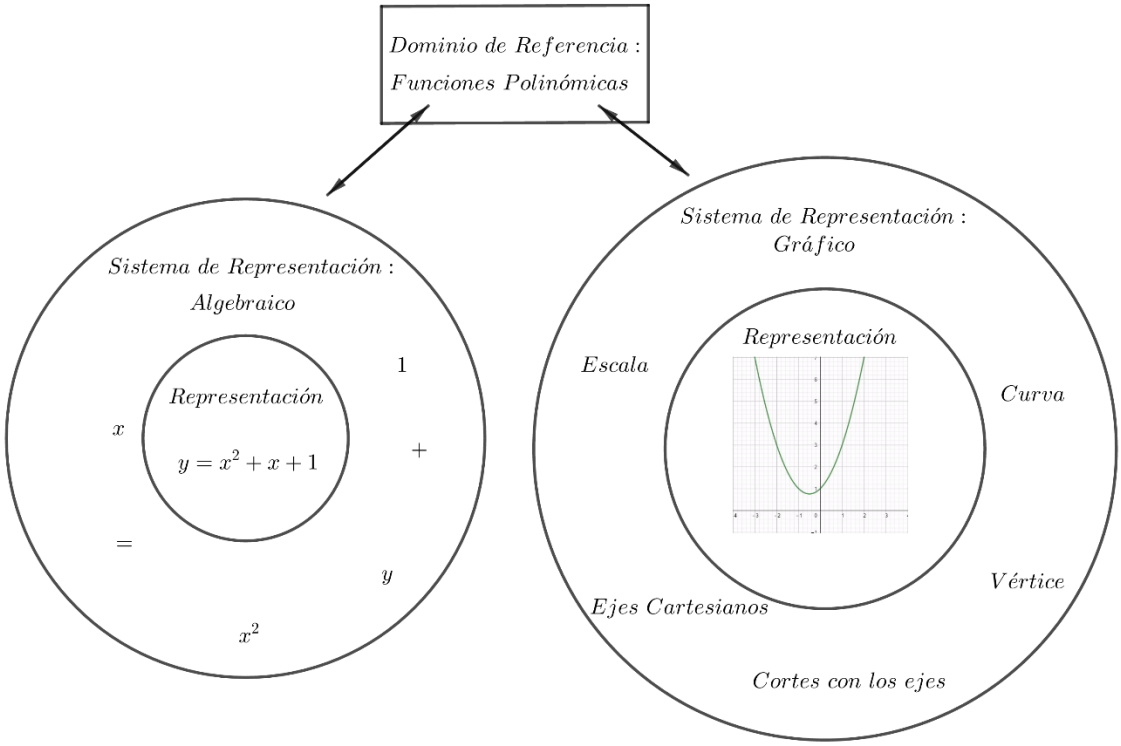


Figura 1: Esquema de dominio, sistema de representación y representación.

Zabalza (1998) apunta que el hecho de que existan una gran variedad de representaciones de objetos matemáticos enriquece la materia y facilita la exposición de la misma al docente. Esto favorecerá el aprendizaje de los alumnos, ya que el docente tendrá distintos modos de explicar ciertas nociones. El hecho de tener tantos registros hace que el docente sienta cómo su capacidad de explicación aumenta.

Even (1998) hace ver la importancia y lo fructífero que es el uso de las distintas representaciones en el aprendizaje de las matemáticas, ya que permite construir en los alumnos relaciones matemáticas y mitigar sus dificultades vinculadas a conceptos problemáticos de las funciones.

Para una mejor comprensión de lo que se denomina sistema de representación y representación, se considera la siguiente situación: $y = 2x$ e $y = x + x$ son dos representaciones distintas dentro del sistema de representación algebraico.

Ambas son representaciones de la misma función, pero no hay que confundir, al igual que apuntan Adu-Gyamfi y Bossé (2014) y, Duval (2006), la representación con el objeto. Es decir, representan el mismo objeto con representaciones distintas. Lo que se podría decir de manera habitual es que son expresiones equivalentes, pero técnicamente lo que hay es una transformación de la representación como se ilustrará posteriormente.

Goldin (1998) y, Adu-Gyamfi y Bossé (2014), afirman que para poder acceder a un dominio y manipularlo, solo se puede lograr a través de la representación en registros adecuados. Los registros de representación tienen significados que están estrechamente ligados al dominio de referencia y que permiten dar una explicación de los conceptos del dominio. Todos los sistemas de representación, según apunta Gómez (2013), están interconectados por el dominio de referencia. También es importante tener en cuenta que no a todo dominio se puede acceder a través de un registro de representación. Por ejemplo, tomando como dominio la noción de continuidad, no se puede considerar como representación una tabla de valores.

Resulta que no todas las nociones que pertenecen a un registro de representación son útiles para dar significado al dominio. Por ejemplo, la escala es una noción del sistema gráfico que no tiene repercusión a la hora de expresar la función, pero sí que dará lugar a distintas representaciones.

Duval (2006) y Bossé et al. (2014), entre otros, establecen dos tipos de transformaciones distintas vinculadas a los sistemas de representación: el tratamiento y la conversión.

El tratamiento consiste en transformar una representación en otra sin salir del registro de representación, mientras que la conversión es pasar de una representación a otra cambiando de registro, pero sin modificar los objetos que se denotan (por ejemplo, pasar de la expresión algebraica de una función a su gráfica). Según Duval (2006), esta última transformación es más compleja, ya que para poder cambiar de registro se han de conocer y manejar ambos sistemas de representación. Dichas transformaciones, tal y como apunta Duval (2006), corresponden a procesos cognitivos diferentes y son fuentes distintas de

incomprensión en el aprendizaje de las matemáticas. El tratamiento es más importante desde el punto de vista matemático y la conversión es el factor decisivo para el aprendizaje, siendo ambas fundamentales para la comprensión matemática (Duval, 2006).

Siguiendo con el ejemplo propuesto, se estaría hablando de un tratamiento de la representación. Si se considera como representación de partida $y = 2x$ basta con expresar $2x$ como la suma de $x + x$. En cambio, considerando $y = x + x$, basta con operar el binomio (Véase Figura 2). Ejemplo de una conversión es tomar la representación $y = 2x$ que pertenece al registro de representación algebraico y pasar a la gráfica de la función, caso en el que se estaría en el sistema de representación gráfico (Véase Figura 2).

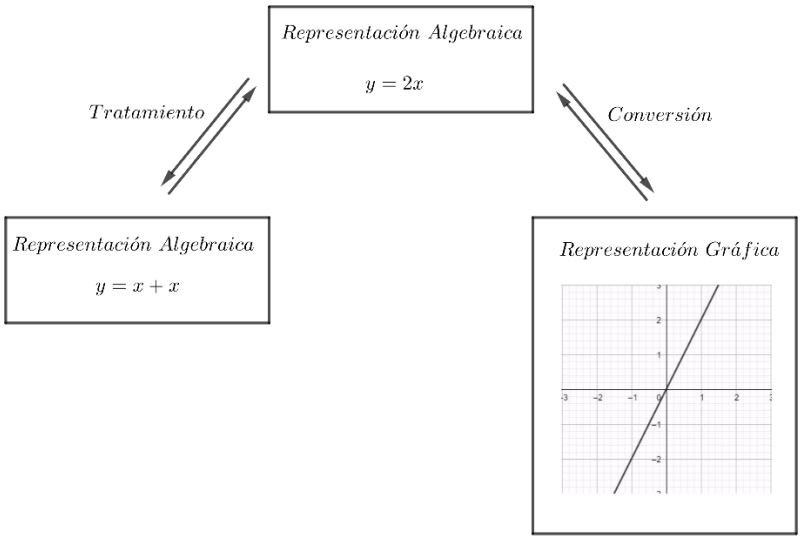


Figura 2: Transformaciones de los sistemas de representación.

Even (1998), considera que los individuos que son capaces de hacer un análisis global de los cambios de representaciones gráficas tienen una mayor y poderosa comprensión de las relaciones que los que se restringen a características concretas. Según apunta Duval (2006), para el aprendizaje de un concepto, es importante el uso de diferentes representaciones de este, así como la

transformación ya sea dentro del mismo sistema de representación como de distintos.

La conversión permitirá ver la conexión entre representaciones que pertenecen a registros distintos, que es en lo que al estudio respecta interesa. Al igual que afirma Bossé et al. (2014) y Duval (2006), hay que observar para detectar las habilidades y dificultades de los alumnos en las traducciones.

Según Adu-Gyamfi y Bossé (2014), y Adu-Gyamfi et al. (2017), los temas comunes en el razonamiento y las estrategias de solución de los estudiantes a la hora de enfrentarse a un problema y resolverlo, se caracterizan mediante las siguientes tres categorías de conocimientos:

- DK (Domain Knowledge): conocimiento del dominio.
- RK (Representation System Knowledge): corresponde al conocimiento del sistema de representación, o el conocimiento del registro y sus características, convenciones y reglas de manipulación o tratamiento.
- DRK (Domain Register Knowledge): conocimiento del registro de dominio. Trata de observar cómo acceder e interactuar con nociones centrales del dominio mediante convenciones y caracteres del registro.

Este último conocimiento de los alumnos, DRK, es fundamental para que vinculen el dominio con el sistema de representación, ya que proporcionará información de la representación sobre el dominio y el dominio proporciona un contexto interpretativo para la representación. En este trabajo únicamente se considerarán el conocimiento de dominio y del sistema de representación.

3.2 Conexiones entre representaciones

Para enriquecer tanto la actividad como el aprendizaje de las matemáticas, es fundamental, como apuntan Hitt (1998) y, Ortega y Pecharromán (2010), establecer conexiones entre las actividades representacionales con respecto al dominio de referencia. La conexión entre diferentes representaciones desarrolla conocimientos sobre la comprensión del concepto, así como de las múltiples facetas del mismo (Even, 1998).

Las conexiones se establecen a través de interacciones entre representaciones, sus registros y dominios de referencia asociados. A través de estas interacciones, los alumnos tienen la oportunidad de explotar y profundizar en las estructuras subyacentes a los dominios y registros de referencia. Los estudiantes que son capaces de establecer conexiones desarrollan más sus capacidades, así como las propias estrategias en el afrontamiento de la actividad matemática, logrando una mayor comprensión entre las representaciones y los dominios de referencia.

Even (1998) establece una serie de factores implicados en la vinculación de representaciones de funciones: diferentes formas de abordar funciones, el contexto de las representaciones y las nociones subyacentes.

Para establecer las conexiones anteriores, primeramente, los alumnos tienen que usar su RK para poder comprender la representación dada y, simultáneamente, su DK para darle una interpretación a dicha representación.

A continuación, se presenta, según muestra Bossé et al. (2014), cómo se lleva a cabo el proceso de conversión entre dos representaciones, el cual será útil para el posterior análisis de la actividad propuesta a los alumnos.

3.3 Proceso de conversión

Bossé et al. (2014) establece el proceso de conversión en cuatro fases o subprocesos, que permiten un análisis profundo del proceso:

- Desempacar la representación: consiste en analizar en profundidad la representación inicial con el fin de poder comprender el objeto que representa.
- Coordinación preliminar: Se identifican los diferentes objetos, propiedades y conceptos de la representación dada y se articulan o fusionan con diferentes caracteres, reglas y configuraciones del sistema de representación.
- Construcción de la representación objetivo: Según Duval (2006), para poder llevar a cabo bien el proceso de conversión, se han de localizar los

conceptos de ambas representaciones que son comunes y pueden asociarse, es decir, quedarse con lo relevante de las representaciones.

- Determinación de la equivalencia: Requiere considerar ideas que se comparten entre las dos representaciones.

Con estos subprocesos del proceso de conversión, se hará posible una observación e interpretación más detallada de la actividad con respecto a la realización de conversiones entre representaciones.

Se procede en la próxima sección a plasmar cuáles son las dificultades que generalmente presentan los alumnos al manipular el concepto de función y las causas de las mismas, así como los errores más llamativos vinculados con las funciones.

3.4 Dificultades y errores asociados al concepto de función

En lo que a las dificultades que presentan los alumnos en la comprensión de las matemáticas se refiere, Duval (2006) indica que para comprenderlas hay que determinar el funcionamiento cognitivo que subyace a la diversidad de los procesos matemáticos.

Bossé et al. (2014) considera que la dificultad para aprender el concepto de función se puede deber al diverso número de representaciones por el que se puede expresar, y a las dificultades que se presentan en los procesos de articular sistemas de representación en la resolución de problemas, como se ha mencionado previamente.

La perspectiva de Ortega y Pecharromán (2010), es que las dificultades que presentan los alumnos se concretan en forma de obstáculos y se manifiestan en forma de errores. Los orígenes de los errores, en general, pueden ser a causa de un obstáculo, ya sea por las actitudes con las que el alumno afronta la materia, o la ausencia de significado, debido a la complejidad del concepto o los procesos de pensamiento matemático. Como manifiesta Goldin (1998), los errores cometidos por los alumnos pueden estar ligados a sus propias creencias.

Según afirma Oehrtman et al. (2008) es fundamental para la futura comprensión de conceptos vinculados al concepto de función, que los alumnos tengan

conocimientos fundamentales de funciones y de subconceptos relacionados con dicho concepto.

Según Duval (2006), para analizar qué constituye la comprensión matemática y explicar los obstáculos que experimentan los estudiantes, hay que analizar con especial atención las siguientes características:

- La importancia de representaciones semióticas:
  Esenciales en la historia para desarrollar el pensamiento matemático. Los sistemas de representación no sirven únicamente para designar objetos matemáticos o comunicarse, sino también para trabajar sobre objetos matemáticos y con ellos. Todo proceso matemático requiere de un sistema de representación como se analizará posteriormente.

- La dificultad en la manipulación y comprensión de los objetos de conocimiento:
  Es fundamental en matemáticas el uso constante de representaciones y signos para acceder al conocimiento de un objeto/concepto, también conocido como dominio de referencia. Un alumno, siempre que se enfrenta a una actividad matemática, tiene que emplear distintas representaciones, las cuales no se deben de confundir con el objeto matemático en cuestión (Adu-Gyamfi y Bossé, 2014), pudiendo cambiar sin problemas de registro de representación (conversión) (Zabalza (1998) y Duval (2006)). Según Duval (2006), el contenido de una representación depende más del sistema de representación que del propio objeto. Por lo que, al cambiar de registro, cambian los medios de tratamiento y las propiedades que pueden llevarse a cabo. Las dificultades en la comprensión de la materia surgen cuando no se diferencian con claridad los objetos matemáticos con las representaciones de dichos objetos.

- La amplia variedad de representaciones matemáticas:
  A veces conviene usar un sistema de representación u otro en función de la actividad planteada. En todo proceso matemático se emplean, ya sea directa o indirectamente, dos o más sistemas de representación distintos.

La incomprensión en matemáticas, según afirma Duval (2006), se debe a dos fuentes, la complejidad específica de los tratamientos realizados en un registro y las conversiones de representaciones. Habría que fomentar las actividades matemáticas planteadas de tal manera que les permitiera a los alumnos trabajar más las conversiones entre representaciones (Duval, 2006).

De la dificultad que supone el aprendizaje del concepto de función, como muestra Oehrtman et al. (2008), nacen diversos errores en torno a la comprensión del mismo. Uno de los más significativos es que los alumnos para poder expresar una función siempre han de poder encontrar una expresión algebraica que la represente (Thompson, 1994). La propia representación algebraica (Oehrtman et al., 2008) suele ser un factor de error ya que consideran dicha representación como una ecuación en lugar de una relación entre variables.

Otro de los errores cometidos por los estudiantes es la tendencia a pensar que todas las representaciones gráficas, más concretamente de polinomios, son funciones lineales o cuadráticas (Oehrtman et al., 2008), ya que son las funciones que tienen establecidas como prototipos, por ser las primeras funciones con las que se manejan en la iniciación del concepto de función. No obstante, dichas concepciones son importantes para los alumnos, ya que les permiten desarrollar destrezas para llevar a cabo la actividad matemática. Dichos prototipos mentales son contestación recurrente a cuestiones planteadas por el docente, ya que como manifiesta Tall y Bakar (1992), los alumnos no poseen de una definición consistente y operativa.

Flores (2004) apunta a que no hay que perder de vista las concepciones alternativas creadas por los alumnos en torno al concepto de función, por mucho que estas sean erróneas, ya que le permitirá al profesor mejorar su práctica docente, pudiendo enfatizar en aspectos más concretos del concepto en sí

mismo. Estas concepciones erróneas se producen en el proceso de aprendizaje, ya que los alumnos establecen interpretaciones con lo que visualizan y los significados que atribuyen, las cuales son causa del conflicto entre la propia concepción del alumno y los significados reales de los conceptos (Flores, 2004).

Esas concepciones cognitivas son muy diversas en los alumnos, ya que dependen de las interpretaciones que haga el propio alumno. Flores (2004) dice que habría que considerar estas concepciones alternativas de los alumnos a la hora de realizar una actividad matemática, ya que le permiten obtener al docente información sobre los pensamientos e interconexiones que hace el alumno entre los conocimientos previos con los novedosos.

Otro factor, según expresa Bossé et al. (2014) en su investigación, es que los alumnos pueden tener errores en los microconceptos (conceptos/nociones en un sistema de representación), repercutiendo en la no comprensión, en ocasiones, de actividades planteadas.

Se procede a describir la actividad llevada a cabo en un Instituto de Educación Secundaria, de la cual se analizarán los errores cometidos, así como la forma en la que los alumnos vinculan las representaciones gráficas y las algebraicas.

4 Propuesta de investigación

Con el fin de poder investigar sobre las conexiones que establecen los alumnos de secundaria entre las representaciones gráficas y algebraicas, se ha propuesto una actividad la cual está focalizada y tiene como eje vertebrador el modelo basado en las representaciones, sistemas de representación y dominios de referencia. La conexión que se intenta analizar se podrá observar a través de los procesos de conversión de los alumnos, esto es, la forma en la que ellos van a ser capaces de pasar de un registro de representación a otro, en este caso del registro gráfico al algebraico y viceversa.

4.1 Muestra

La muestra escogida para llevar a cabo la investigación planteada ha sido de 18 estudiantes pertenecientes a una clase de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias

Sociales I, del Bachillerato de Ciencias Sociales, de un instituto ubicado en Santander (Cantabria). Se ha escogido este nivel por ser una de las clases en las que se han desarrollado las Prácticas del Máster, y por tener los alumnos una mayor madurez en lo que al concepto de función respecta. Nótese que, dado al tamaño de la muestra, no se trata de un estudio estadístico, sino de un estudio de casos.

4.2 Ubicación y programación de la investigación

La investigación se ha llevado a cabo al finalizar la unidad didáctica de funciones impartida en este curso, en el tercer trimestre de Bachillerato, establecido por la Consejería de Educación.

La actividad propuesta se llevó a cabo mayoritariamente en clase, con el fin de poder atender a cualquier cuestión que tuvieran los alumnos en cuanto a la comprensión del propio enunciado, o pregunta de cualquier otro tipo. Además, se realizó por parejas mayoritariamente heterogéneas, mediante un sorteo previo.

El siguiente cronograma plasma las horas lectivas empleadas (en naranja) para realizar la actividad, aparte de dos días extra tras la última sesión para rematar los últimos detalles y entregarla en formato digital. En las horas lectivas, o bien se ha acudido a una sala de ordenadores, o se han empleado las tablets que dispone el centro educativo.

Abril 2024						
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30					

A continuación, se procede a concretar la programación de cada una de las sesiones en las que se ha llevado a cabo el proyecto:

- Primera sesión: Se realizaron los apartados a) y b) del Ejercicio 1 (Ver Anexo I).
- Segunda sesión: En esta sesión, los alumnos finalizaron en su totalidad el primer ejercicio. Además, se les envió de tarea para casa, por falta de tiempo, la realización del apartado I del Ejercicio 2 (Anexo I) redactando detallada y justificadamente la factorización de los polinomios.
- Tercera sesión: Muchos alumnos no realizaron la tarea encomendada y como esta tenía relevancia para los ejercicios posteriores, la sesión se empleó para que los alumnos finalizaran los ejercicios pendiente de días previos. Los estudiantes que tenían todo realizado, comenzaron a pensar el apartado II del Ejercicio 2 (Anexo I).
- Cuarta sesión: En esta sesión únicamente se realizó el segundo apartado del ejercicio 2, debido al gran salto de abstracción del que requería.
- Quinta sesión: Los alumnos realizaron los dos primeros apartados de la tercera parte del Ejercicio 2 (Anexo I).
- Sexta sesión: En la sexta y última sesión, los alumnos finalizaron con el apartado c) del punto III del Ejercicio 2 (Anexo I).

Una vez descritos los días en los que se ha llevado a cabo la investigación, se procede a explicar con más claridad los ejercicios diseñados.

4.3 Diseño del proyecto de investigación

La actividad versa de dos ejercicios compuestos por diversos apartados cada uno de ellos (Anexo I). Para analizar propiamente el proceso de conversión entre la representación gráfica y la algebraica de las funciones polinómicas, y viceversa, se tendrá en cuenta únicamente el segundo de los ejercicios propuestos. No obstante, el primero es de gran utilidad y ayuda para realizar el segundo, ya que les permitirá a los alumnos obtener ciertas conclusiones a emplear posteriormente. Las cuestiones planteadas en la actividad están organizadas con un orden de tal manera que la dificultad de estas vaya aumentando.

La finalidad del primer ejercicio, como se ha mencionado, será que los alumnos puedan adquirir ciertos conocimientos, como propiedades que tienen las

funciones polinómicas, que puede ser que no hayan adquirido en el curso de manera explícita. Se fomentará que, mediante representaciones gráficas a través del recurso tecnológico de GeoGebra, deduzcan ciertos patrones o comportamientos, con el fin de poder contestar a las preguntas planteadas.

De este primer ejercicio se pretenderá que los alumnos, a través de razonamientos, sepan contestar las preguntas planteadas sin necesidad de recurrir a la representación gráfica, simplemente con el bagaje de conocimientos respecto al concepto de función, y pensando e imaginando la situación mentalmente. Como se realizará por parejas, podrán debatir sobre las posibles respuestas a las preguntas planteadas, cada cual con sus propias concepciones y creencias de tal manera que sea un aprendizaje a la par que cooperativo, basado en las opiniones de sus compañeros de trabajo. Esta práctica será muy fructífera para los alumnos, ya que entre ambos integrantes del grupo podrán concluir hechos que de manera individual no podrían llegar a deducir.

Al finalizar este primer ejercicio, se pretende que sepan deducir el carácter de la multiplicidad de una cierta raíz de un polinomio, simplemente viendo el corte de la función con el eje X asociado a dicha raíz. Es decir, si en un entorno del punto de corte con el eje X la función toma valores positivos o negativos y cero, han de deducir que el valor de la abscisa de ese punto, que es la raíz del polinomio, tendrá una multiplicidad par. Mientras que, si la representación gráfica de la raíz corta transversalmente el eje X, entonces la multiplicidad de esta será impar, es decir, que, en un entorno del punto de corte, la función tome valores positivos y negativos, incluido el cero. Esta conclusión la han de sacar simplemente observando unas representaciones gráficas concretas, de tal manera que puedan extrapolar dicha situación y abstraerla a la distinción de dos casos: si “n” es par o si “n” es impar.

Otra cosa que han de haber aprendido al concluir este primer ejercicio es que las raíces de un polinomio no varían si se multiplica a este por una constante no nula. Las dos ideas anteriores serán imprescindibles para la realización de algún apartado del ejercicio dos, como se precisará adelante.

El Ejercicio 2 (Anexo I) está diseñado propiamente para ver cómo los alumnos realizan conexiones entre los sistemas de representación gráfico y algebraico. Dicho ejercicio es de gran interés en lo que respecta a la investigación, y es por ello por lo que se van a analizar en profundidad las distintas transformaciones que han de realizar en cada uno de los apartados planteados. Además, se mencionarán errores cometidos por los alumnos.

En el Ejercicio 2.I, los alumnos deberán realizar de forma bastante rutinaria la factorización de todos los polinomios planteados. A pesar de que este apartado vaya en contra de lo que muchos de los autores citados en el marco teórico apuntan, y lo que se pretende, que es el razonamiento y pensamiento de los alumnos en la resolución, se les pide que determinen el número de raíces reales, cuáles son y qué multiplicidad tienen, cosa a lo que puede ser que no estén tan acostumbrados. De todos modos, debido a la complejidad que requiere el último de los apartados del ejercicio, lo que se pretende en este primer apartado es generar en el alumno un sentimiento de confianza en el manejo de los contenidos básicos asociados al álgebra, con el fin de motivarlos en el desarrollo de lo que resta de la actividad.

Este apartado tendrá su importancia posteriormente, ya que toda la información a extraer sobre el polinomio será fundamental para la asociación con la representación gráfica (apartado a) Ejercicio 2.III). En realidad, lo que el apartado pretende es desgranar el proceso de conversión de la representación algebraica a la gráfica, ya que se les pide un paso auxiliar que les permita realizar la conexión de forma más efectiva.

Nótese que en este apartado se está realizando una transformación de la representación, más concretamente un tratamiento, ya que el sistema de representación en todo el apartado es el algebraico. Este tratamiento se produce cuando se factoriza el polinomio, ya que sin salir del registro algebraico se encuentran las raíces del polinomio resolviendo una ecuación y, posteriormente, al dar el polinomio en forma factorizada, es otra forma de representar el polinomio inicial.

El apartado II del Ejercicio 2 (Anexo I) está diseñado en contraposición al primero, con la finalidad de que los alumnos pongan en valor su conocimiento respecto a lo aprendido tanto en su formación académica como en las tareas previas realizadas en la actividad planteada. En todos los ejercicios es fundamental los conocimientos e interacción con el compañero del grupo, pero especialmente en este tipo de ejercicios, ya que los alumnos han de determinar estrategias que no son estándares en el proceso de aprendizaje impartido en los centros educativos en el área de las ciencias, concretamente en Matemáticas.

Este apartado consiste en realizar de manera abstracta la factorización de un polinomio de grado “n”, sabiendo cuáles son las raíces reales y la multiplicidad de cada una de ellas. En este ejercicio es muy importante tener presente el apartado anterior, ya que, al comparar las distintas factorizaciones de los distintos polinomios, han de deducir que en la factorización de un polinomio no simplemente aparecen factores que provienen de las raíces reales obtenidas al resolver la ecuación.

Hay que reconocer que el nivel de este apartado es elevado en comparación con el anterior, por el hecho de la complejidad de especificidad del ejercicio y por la abstracción de las nociones que para los alumnos pueden ser comunes y manipulables. En este ejercicio, al igual que en el anterior, la transformación predominante es el tratamiento, ya que en líneas generales es la misma idea de lo realizado en el primer apartado, pero abstrayéndolo a un polinomio genérico por el cual se aproximan al propio pensamiento matemático, más que el metódico y el estático.

El tercer y último apartado (Ejercicio 2.III) está compuesto por diversos subapartados. En líneas generales, el primero de ellos es en el que los alumnos tienen que hacer conversiones de las representaciones algebraicas a las gráficas, en el tercero han de hacer el proceso inverso y, finalmente, en el segundo de los subapartados la finalidad es que los alumnos repasen otros contenidos de la unidad vista en clase, que son ajenos al análisis del estudio. Por todo ello, se va a profundizar el análisis de la primera y tercera parte de este tercer apartado.

La finalidad de este apartado es que los alumnos mediante la información extraída del primer apartado de este Ejercicio 2 y observando una serie de funciones representadas gráficamente, sean capaces de poder vincular la representación algebraica de las funciones (apartado I del Ejercicio 2) con la correspondiente representación gráfica. Es importante que en el proceso de conversión los alumnos detecten que las raíces obtenidas dentro del sistema de representación algebraico se asocian con puntos de corte de la función con el eje X. A través de esa estrategia, podrán determinar de manera casi directa qué función corresponde a cada una de las funciones polinómicas del apartado I del Ejercicio 2 (Anexo I).

Además, en la representación gráfica se les proporcionan más puntos que los puntos de corte con el eje X, de tal manera que puedan comprobar que la asociación o correspondencia realizada está bien, simplemente sustituyendo el punto en la expresión algebraica del mismo. Hay que mencionar que las estrategias seguidas en esta tarea pueden ser muy diversas. Dichas estrategias y los procesos realizados por los alumnos se visualizarán en el capítulo de análisis de los resultados.

El siguiente apartado, como no tiene especial relevancia en el estudio, simplemente comentar que sirve para que los alumnos den un repaso a algunos contenidos vistos en la unidad didáctica.

Continuando con el siguiente, la segunda parte del Ejercicio 2.III, lo que los alumnos han de hacer es, como ya se ha comentado anteriormente, realizar el proceso inverso al del apartado anterior. En este caso la conversión se realizará de la representación gráfica a la representación algebraica.

Esta tarea, igual que apuntan muchos de los autores, es más compleja que la anterior. Ya que en la anterior, como simplemente tenían que asociar la función polinómica representada algebraicamente con la representada gráficamente, los alumnos podrían haber considerado una vía larga pero segura. Esta podría consistir en la realización de una tabla de valores y ser los alumnos los que representaran la gráfica, para posteriormente compararla con las proporcionadas en la actividad.

La conversión del registro gráfico al registro algebraico se complica, y gran parte de la complejidad proviene de que los alumnos no realizan generalmente esta tarea, ya que no forma parte de los procedimientos que se les enseña para la resolución de problemas.

En esta tarea, para comenzar, los alumnos han de coger las representaciones gráficas que no han sido asociadas con ninguna expresión algebraica del apartado a), de este mismo ejercicio, y tienen que construir el polinomio cuya representación gráfica corresponde a las funciones que no han sido asociadas.

El proceso que se pretende que los alumnos realicen es que cojan cada una de las representaciones que no son asociadas y, con todos los puntos de la función proporcionados junto con conclusiones de apartados anteriores, construyan la representación algebraica de la función polinómica.

Para ello se recomienda considerar el comportamiento de los puntos de corte con el eje X y las conclusiones que se sacaron en un ejercicio previo para determinar si la multiplicidad de la raíz es par o impar. Posteriormente se hace una propuesta de factorización en base a los ejercicios anteriores. A continuación, se trata de ajustar las multiplicidades de las raíces, para lo que hay que emplear que el polinomio es a lo sumo de grado 4. Realizando casos y descartando algunos debido a que la combinación de posibles multiplicidades no es compatible con el grado máximo del polinomio, o que no verifica todos los puntos dados de la representación gráfica, se obtendrá el polinomio.

5 Análisis de los resultados

A pesar de que los alumnos hayan enviado de forma individual los trabajos para su posterior evaluación, al haberlos realizado de manera conjunta son esencialmente los mismos trabajos. Es por ello que, para hacer una primera criba en la visualización de los resultados obtenidos en la investigación, se considera un trabajo por cada una de las parejas.

El análisis se realizará por cada uno de los apartados, en el que se mencionarán los resultados mayoritarios. Siguiendo propiamente con el análisis se estudiará

de qué manera han realizado las transformaciones. Además, se mencionarán las categorías de conocimientos (DK y RK) de los alumnos, que establecen Adu-Gyamfi y Bossé (2014), y Adu-Gyamfi et al. (2017) en sus investigaciones. Para concluir se comentarán errores cometidos por los alumnos.

5.1 Ejercicio 1

5.1.1 Apartado a)

Este primer apartado muchos de los alumnos no lo han realizado, puede ser que se deba a que no viene expresado como un apartado dentro de este. Pero las parejas que lo han realizado lo han llevado a cabo de manera satisfactoria, de hecho, ordenan muy bien todos los conceptos a los cuales hay que dar respuesta.

En este apartado en realidad se ha enfatizado en conceptos del registro algebraico, como son determinar el grado del polinomio o buscar las raíces de los mismos. Sin embargo, en la cuestión referente a la obtención de los puntos de corte, realmente se está realizando una conversión entre representaciones, ya que el concepto de punto de corte de la función es un concepto que pertenece al sistema de representación gráfico, por lo que implícitamente se trabaja con dos representaciones que pertenecen a registros distintos.

Dichos alumnos ponen en valor el RK, ya que para buscar los puntos de corte directamente igualan a cero la expresión algebraica dada, sin ni siquiera plantearse si la expresión dada corresponde a una función o no, por lo que no emplean el DK.

5.1.1.1 Apartado a).1.

Dos de las parejas contestan satisfactoriamente a la pregunta, concretando que las raíces han de ser reales y distintas. Otros en cambio responden a la pregunta con una reformulación de la misma o incluso escriben procesos para la obtención de los puntos de cortes, dejando a un lado lo que se les está preguntando.

En este apartado se están vinculando nociones del sistema algebraico y gráfico, aunque como tal no se esté trabajando con uno de esos sistemas en concreto.

Por las respuestas aportadas, se considera en este caso que manejan el DK y el RK, ya que sí que saben que los conceptos están vinculados con la noción de función y diferencian que los puntos de corte corresponden al sistema gráfico y las raíces al algebraico.

Algo a destacar en las respuestas dadas por algunas de las parejas es que el número de cortes coincide con el grado del polinomio. Dicha justificación es errónea, ya que no disciernen entre tener raíces reales o complejas. Por esa suposición, las raíces complejas cortarían al eje y, por tanto, serían reales.

5.1.1.2 Apartado a).2

Las parejas que contestan correctamente se respaldan en lo que ocurre en el caso de la familia de funciones polinómicas del ejercicio planteado. Es decir, tienen los conocimientos y resultados obtenidos de la primera tarea a realizar en el ejercicio. Por lo contrario, entre los que no realizan de forma satisfactoria la actividad, se destaca la argumentación basada en el comportamiento que tiene la función en su representación gráfica alrededor del punto de corte de la función con el eje X (Figura 3).

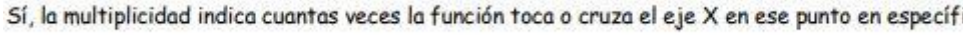


Figura 3: Repuesta aportada por un alumno.

Los alumnos contestan diciendo que es relevante, ya que la multiplicidad determina el número de veces que corta la gráfica al eje X, pero dicho razonamiento es contradictorio con la noción de función, ya que mediante esta argumentación estarían contradiciendo la propia definición. Los alumnos a través de este razonamiento muestran cierta inconsistencia de conocimientos vinculados con el dominio de las funciones (DK). Respecto al RK, los alumnos son conscientes de qué nociones corresponden a cada uno de los sistemas de representación.

5.1.1.3 Apartado a).3.

Se pretendía que los alumnos buscaran, fijando una raíz y observando el número de cortes que produce dicha raíz en una representación gráfica, una desigualdad entre estas.

Fijado $x = 2$ como raíz y contrastando la repercusión que tiene la multiplicidad en el número de cortes que se producen en la representación gráfica, pueden llegar a concluir que la multiplicidad siempre va a ser mayor o igual que el número de puntos de corte que produce dicha raíz en su representación gráfica. Todo lo anterior, que es lo esperado a contestar por los alumnos, no tuvo nada de éxito en la consecución de la tarea. Los que más se aproximaron a la respuesta de la pregunta únicamente realizaron el caso en el que se da la igualdad en la desigualdad que deberían de haber planteado.

Al igual que en apartados anteriores, nuevamente se hacen presentes ambos registros de representación, el gráfico y el algebraico. En cuanto a las transformaciones, en este apartado se ha tenido que entender lo que cada una de las nociones significa en cada uno de los registros de representación, y se les ha pedido que fusionen ambas en una desigualdad a través de una representación numérica.

Entre las respuestas erróneas, se encuentra que los alumnos buscan una relación entre el grado del polinomio y los cortes producidos, en lugar de la multiplicidad de una raíz y el número de cortes obtenido por la misma. Dichos alumnos afirman que el número de soluciones coincide con el grado del polinomio.

Otros hablan de que la multiplicidad de una raíz es cero, cuando no tiene sentido plantearse esa cuestión si se comprende la definición de multiplicidad, que consiste en el número de veces que se repite una raíz en un polinomio. Este error viene asociado a que no se ha realizado una interpretación correcta de lo que define la multiplicidad de una raíz, habiéndose generado una posible concepción errónea de la noción. Es por ese motivo que las parejas que contestaron lo anterior pueden tener una posible carencia en el RK.

5.1.2 Apartado b)

Como primera aproximación a la respuesta, muchas parejas afirman que se necesita más información, sin especificar nada sobre el polinomio para poder llegar a determinarlo. Mientras que otros, mencionan conceptos que son

invariantes en el registro gráfico sobre el dominio de funciones polinómicas (Figura 4).

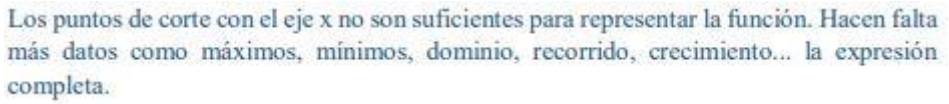

Los puntos de corte con el eje x no son suficientes para representar la función. Hacen falta más datos como máximos, mínimos, dominio, recorrido, crecimiento... la expresión completa.

Figura 4: Respuesta proporcionada por una pareja.

La sensación que producen las respuestas dadas es que saben que hay conceptos concretos que tienen una interpretación diferente a medida que se cambia de función, pero no han sabido deducir que en ningún momento se les dice el grado del polinomio, por lo que podrían considerar infinitas funciones verificando las características que mencionan.

Se ha de tener en cuenta que, en esta ocasión, aunque no se diga explícitamente, el sistema de representación al que hace mención el enunciado es el gráfico. En ese punto lo que necesitaban para la realización del ejercicio propuesto es comprender con especificidad los conceptos vinculados a este sistema. Demuestran un nivel de RK bajo, ya que son capaces de considerar conceptos relacionados con el concepto de función, como es la continuidad, el dominio y el recorrido, sin tener en cuenta que para la actividad en cuestión no hay repercusión de dichas características.

Por otro lado, hay ciertas parejas que sí que muestran que lo imprescindible para poder determinar la función polinómica, en este caso, es tener determinado el grado del polinomio en cuestión. Estos, al igual que sus demás compañeros, hacen mención a que se deberían de considerar más características de las funciones, cosa que una vez esté determinado el grado del polinomio, sí que tienen relevancia.

5.1.3 Apartado c)

En este apartado los alumnos han de deducir, mediante la observación de la representación gráfica generada con el recurso tecnológico de GeoGebra, los hechos que ocurren con el comportamiento de la representación gráfica de funciones polinómicas alrededor de los puntos de corte de la misma con el eje

X. Para ello se les proporciona una pista con el fin de circunscribir el objetivo del ejercicio.

La respuesta deducida de la observación mencionada es que, si la multiplicidad de uno de los factores de la factorización del polinomio es par, en un entorno del punto de corte, la función toma valores positivos y cero, o negativos y cero. Mientras que si la multiplicidad es impar no ocurre lo anterior, tomando la función valores positivos, negativos y cero en un entorno del punto de corte.

Este apartado únicamente lo ha resuelto correctamente una pareja, no lo han concluido con rigurosidad matemática, pero sí que han sabido expresar la noción matemática a través del lenguaje coloquial (Figura 5).

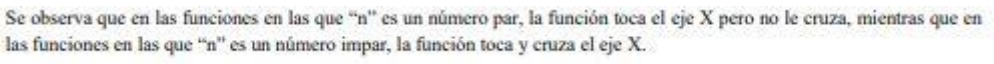

Se observa que en las funciones en las que "n" es un número par, la función toca el eje X pero no le cruza, mientras que en las funciones en las que "n" es un número impar, la función toca y cruza el eje X.

Figura 5: Respuesta dada por la única pareja que responde correctamente.

En este ejercicio se han llevado a cabo una concatenación de conversiones. Para comenzar, partiendo del registro algebraico se ha transformado la función obteniendo una representación gráfica, que en este caso se ha realizado mediante GeoGebra, con el fin de poner en valor los recursos tecnológicos. Posteriormente, con esta representación gráfica a través de la observación, se ha vuelto al registro algebraico, para poder dar respuesta a la cuestión.

Entre las respuestas incorrectas realizadas, se destaca que los prototipos son concepciones mentales que tienen los alumnos. En realidad estas concepciones a veces pueden perjudicar la consecución de actividades planteadas, como es el caso de la presente tarea. Esos alumnos han justificado que, si la multiplicidad es par, entonces la función es una parábola, sin saber qué decir en el caso de que dicha multiplicidad sea impar (Figura 6).

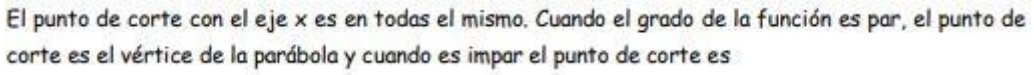

El punto de corte con el eje x es en todas el mismo. Cuando el grado de la función es par, el punto de corte es el vértice de la parábola y cuando es impar el punto de corte es

Figura 6: Respuesta incorrecta dada por una de las parejas.

Otro error cometido es que, si la multiplicidad es par, se entiende que la función tiene únicamente una raíz real. En ese caso, las ramas de la función polinómica

van hacia arriba y si es impar, las ramas van hacia abajo, conclusión que no se sostiene con la representación de las funciones. Basta considerar la función $f_3(x) = (x-2)^3$. Intentando interpretar lo que los alumnos pretenden expresar, puede ser que quisieran mostrar que en el caso de que sea impar, la función toma valores positivos como negativos, mientras que, si la función es par, únicamente toma valores positivos o negativos y cero (depende de la función polinómica que se tenga), que en este caso únicamente toma valores positivos.

Otro error que es llamativo, pero se pretende aproximar a la respuesta correcta de la actividad, es que ciertos alumnos dicen que si la multiplicidad es impar la función es simétrica respecto al origen del punto de corte con el eje X, $(2,0)$. En cambio, si es par, entonces es simétrica respecto al eje Y en el punto de corte.

Se considera esta una aproximación a la solución ya que los alumnos han intentado expresarse correctamente, pero sin concretar y ser rigurosos en cuanto al ámbito matemático. Los alumnos son conocedores de los conceptos que han empleado, lo que ha ocurrido es que no han sabido relacionarlos y ponerlos en conjunto adecuadamente, buen DK y, por lo contrario, RK reducido.

Son conscientes de que una función es simétrica respecto al origen, o es una función impar, siempre que en la representación gráfica de la función la parte del semiplano positivo del eje X coincida con la del semiplano negativo, considerando los valores opuestos que toma la función. Es por ello que han expresado "respecto al origen del punto $(2,0)$", que con mayor rigurosidad deberían haber escrito que en el caso de considerar los ejes de coordenadas en el punto $(2,0)$, la función sería simétrica respecto al origen.

Uno de los posibles motivos por el que no han sabido expresarlo de la forma indicada, se puede deber a que expresar lo anterior requiere de un proceso complejo. Se necesita un tratamiento de la representación, para lo cual primero en el registro algebraico habría que definir una nueva variable $z = x - 2$ y, de esta manera, obtener una función que dependa de esta nueva variable, para posteriormente volver a realizar una conversión a la representación gráfica, obteniendo una representación distinta de la misma función. En esta última

representación sí que se podría afirmar que la función es simétrica respecto al origen.

En base a los resultados obtenidos, en este apartado se puede considerar que hay un considerable manejo de DK, mientras que el RK se ve reducido debido a la falta de interconectar conceptos del registro de representación.

5.1.4 Apartado d)

5.1.4.1 Apartado d).1

En este apartado los alumnos han de representar mediante GeoGebra las funciones polinómicas planteadas, para obtener posteriormente los puntos de corte mediante el programa. Todos los alumnos han realizado con éxito la cuestión, salvo una pareja que ha modificado la función polinómica al introducirla en GeoGebra. No se va a profundizar más en esta actividad ya que simplemente se trata de introducir correctamente la expresión algebraica en el programa para una posterior manipulación de esta.

5.1.4.2 Apartado d).2

La respuesta a la pregunta planteada es afirmativa, ya que todas las representaciones algebraicas que se obtengan de multiplicar la representación algebraica de otra función por una constante no nula tienen los mismos puntos de corte.

Alguna pareja realiza correctamente esta pregunta sin ningún tipo de impedimento, pero con una imprecisión, que es que el factor que diferencia a las funciones tiene que ser no nulo. Uno de los errores que muchos manifiestan en la resolución, es que las funciones polinómicas que tienen los mismos cortes con el eje X tienen raíces opuestas (Figura 7).

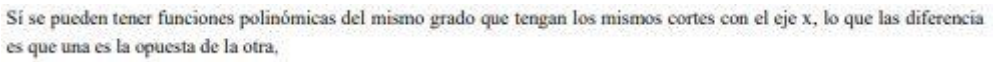

Sí se pueden tener funciones polinómicas del mismo grado que tengan los mismos cortes con el eje x, lo que las diferencia es que una es la opuesta de la otra,

Figura 7: Respuesta proporcionada por una de las parejas.

Como se puede observar mediante todas las representaciones gráficas que componen el ejercicio, no solamente ocurre lo dicho con la función opuesta. Otros interpretando las funciones en el registro gráfico, manifiestan que la

representación gráfica es la misma, pero al revés, lo cual indica esencialmente la misma noción de la función opuesta; con la diferencia de que es una noción que se identifica y expresa de una manera diferente debido a que una hace mención a la terminología empleada en el registro gráfico, y la otra al registro algebraico.

Estas parejas para generar la respuesta parece que únicamente han comparado la función original con su opuesta. Puede que esas respuestas hayan sido causa de no saber bien qué contestar, dejando entrever que hay falta de comprensión.

Como se ha mencionado en este caso, los alumnos pueden considerar la representación algebraica o la gráfica, una vez realizada la conversión de las representaciones empleando el programa GeoGebra. Aunque para contestar a la pregunta es más común que empleen directamente la representación gráfica, ya que analizando las representaciones de las distintas funciones pueden concluir, al ver que todas tienen los mismos puntos de corte (apartado anterior), que se diferencian en un factor constante no nulo.

En cambio, mediante la representación algebraica para poder concluir lo mismo se debería realizar un tratamiento de la representación con el fin de obtener las raíces y ver que estas son las mismas para todas las funciones del enunciado, y como todas están generadas por la primera; concluir que se diferencian en un factor constante no nulo.

De los resultados aportados por los alumnos se puede considerar que el DK y RK están correctamente empleados y los errores pueden ser causa de falta de comprensión o de desconocimiento hacia la respuesta, entre otros.

5.2 Ejercicio 2

5.2.1 Apartado I

Se trata de completar la tabla, para ello se realiza un proceso de tratamiento de la expresión algebraica dentro del registro algebraico, para obtener la factorización de cada uno de los polinomios, de esta manera se tendrá otra representación dentro del mismo registro. Es un claro ejemplo dentro de la actividad en el que se hace el proceso de tratamiento. Los alumnos en general

han realizado correctamente la actividad ya que se asemeja a las actividades matemáticas que llevan a cabo frecuentemente. A continuación, se procede a comentar algunos de los resultados y se analiza el propio proceso del tratamiento.

A pesar de ser una tarea rutinaria y con la que los alumnos están familiarizados, se han cometido muchos errores por todos los alumnos, aunque con distinta gravedad. Se comienza comentando los más comunes por toda la clase y, posteriormente, se mencionarán los más concretos.

Uno de los errores que la mayoría de las parejas ha cometido es que, al emplear como configuración el tratamiento de la función polinómica con el fin de obtener la factorización, se empeñan en emplear el método de Ruffini para todos los polinomios. A causa de ello, una vez que en el propio método les queda un polinomio de grado dos, concluyen en la mayoría de los casos que es irreducible, como, por ejemplo, con el polinomio $x^2 - x - 1$.

Una pareja, en concreto, a pesar de que empleó la fórmula para la resolución de una ecuación de segundo grado y obtuvo por raíces $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ y $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, afirmó que no eran reales y en consecuencia el polinomio mencionado sería irreducible. La justificación de la irreducibilidad es correcta, lo que falla es que afirman que las raíces no son reales cuando sí lo son.

A través de esa justificación se observa que, respecto al conocimiento de registro numérico, que, en este caso, aunque no sea el fundamental a estudiar en la investigación, hay algunos conceptos que no están claros, como es la noción de los distintos conjuntos numéricos. La confusión se produce debido a que consideran que los números irracionales no son números reales.

Otro error común que presentan en general es que no muestran el dominio del significado de la multiplicidad con lo que representa dicha noción en la factorización del polinomio. Ejemplo de ello es que obtienen $x_1 = \sqrt{2}$ y $x_2 = -\sqrt{2}$ raíces del polinomio $x^4 - 4x^2 + 4$, estableciendo que tienen por multiplicidades $m_1 = 1$ y $m_2 = 1$, respectivamente. Por otro lado, en los factores de la

factorización del polinomio asociados a dichas raíces ponen $\left(x-\sqrt{2}\right)^2$ y $\left(x+\sqrt{2}\right)^2$.

Otra incoherencia que se ha podido ver en muchas de las respuestas aportadas por los alumnos, y vinculada con la anterior, es que las multiplicidades de las raíces no concuerdan con el número de raíces obtenidas.

Por ejemplo, del polinomio $x^4-9x^3+27x^2-27x$ obtienen por soluciones $x_1=0$ y $x_2=3$, con multiplicidades $m_1=1$ y $m_2=4$ respectivamente, pero por otro lado establecen que el número de raíces reales es dos. Lo anterior se debe a que para el cómputo del número de raíces han considerado el número de raíces reales distintas, pero para obtener ese valor hay que tener en consideración el posible polinomio irreducible de la factorización.

Otro error común es, a la hora de obtener la factorización del polinomio mencionado anteriormente, $x^4-9x^3+27x^2-27x$, no poner el factor asociado a la raíz $x=0$ en la misma. También ocurre la situación inversa, que es poner en la factorización el factor asociado a dicha raíz, pero en la tabla no considerar al cero como raíz.

El primero de los errores, por lo que se ha podido analizar de la resolución de los alumnos, es que primeramente antes de emplear el método de Ruffini han sacado factor común la x, olvidándose de esta posteriormente en la factorización completa del polinomio inicial.

Por otro lado, el segundo de los errores mencionado se puede deber a que tienen una concepción errónea del concepto de factor en una factorización, ya que puede que en su constructo mental tengan establecido que dichos factores han de ser de la forma $(x-a)^m$ siendo a un número real y m un número entero mayor o igual que uno.

Un error bastante llamativo para el curso en el que se sitúa la muestra de la investigación, debido a la supuesta adquisición y maduración de conceptos y nociones que los alumnos tienen de cursos anteriores sobre nociones básicas asociadas a la representación algebraica de un polinomio, fue que una alumna

empleó incorrectamente una de las identidades notables en la búsqueda de la factorización del polinomio $x^2 + 9$, afirmando que esta expresión algebraica correspondía con $(x - 3)(x + 3)$. En una posible duda sobre si dichas representaciones representarían la misma función polinómica, la alumna no comprobó que dichas expresiones fueran equivalentes, transformando la factorización a través de la operación de ambos monomios con el fin de obtener la expresión inicial.

Analizando las respuestas obtenidas, se considera que los alumnos en este contexto manejan correctamente el DK y RK dentro del dominio de funciones polinómicas, pero en cambio si se considerara el dominio de expresiones algebraicas, claramente se ve un conocimiento de registro y de dominio bastante escaso.

5.2.2 Apartado II)

En este apartado del ejercicio dos, los alumnos tuvieron que realizar un salto cognitivo bastante amplio respecto a los procedimientos y razonamientos que son frecuentes y están habituados en la resolución de actividades matemáticas.

El fin era que los alumnos realizaran una generalización sobre los conocimientos adquiridos, ya no solo en su formación educativa en Matemáticas, sino en las propias concepciones y conclusiones obtenidas de las tareas realizadas en la investigación hasta el momento.

La actividad consiste en obtener la factorización de un polinomio genérico de grado n, sabiendo cuáles son sus raíces reales distintas y sus multiplicidades. Para ello, primeramente, deberán de buscar una relación entre las multiplicidades de las raíces reales y el grado del polinomio.

Analizando los resultados de este ejercicio, se observa que algunas de las parejas han comprendido la finalidad del mismo con alguna cuestión que influye en la falta de precisión y rigor matemático. Otros se aproximan a la factorización que han de obtener, aún sin haber establecido la relación entre las multiplicidades y el grado del polinomio. No hay que obviar que en este apartado los alumnos tuvieron más orientación que en el resto de ejercicios.

Se comienza con el análisis de lo que han expresado los alumnos que más se han aproximado a la respuesta correcta de la actividad. Estos alumnos han realizado dos versiones diferentes en la parte de buscar una relación entre las multiplicidades de las raíces del polinomio y el grado del mismo.

Unos han expresado correctamente y con rigurosidad la representación algebraica de que la suma de las multiplicidades es menor o igual que el grado del polinomio y, otros, se han aproximado a dicha relación, pero han obviado un elemento fundamental a la hora de representar la suma finita. Es decir, han dado como contestación que la relación es $m_1 + m_2 + m_t \leq n$ en lugar de expresar $m_1 + m_2 + \cdots + m_t \leq n$.

Puede ser que ellos no sean conscientes de la importancia y significado de los puntos suspensivos, pero matemáticamente son muy relevantes, sobre todo en los procesos matemáticos de problemas generalizados. En el caso expresado, la primera de las desigualdades en realidad no estaría involucrando a todas las multiplicidades de las raíces, sino a tres de ellas, mientras que, en la segunda, dichos puntos sirven para expresar que todas las multiplicidades entre m_2 y m_t también forman parte de dicha suma.

En cuanto a la factorización obtenida por estos alumnos, se observa que todos han tenido en cuenta los factores que provienen de las raíces genéricas del polinomio y, de hecho, han intentado expresar el posible polinomio irreducible de la factorización. El factor anterior lo han expresado como $p(x)^{n-(m_1+m_2+\cdots+m_t)}$ en el que hay algunas imprecisiones. Es importante tener en cuenta la complejidad del ejercicio a la hora de analizar los resultados obtenidos, aunque lo correcto hubiera sido que consideraran en la factorización un polinomio $p(x)$ definiéndolo como un polinomio de grado $n - (m_1 + m_2 + \cdots + m_t)$.

Respecto a otros errores cometidos por los alumnos, se considera el error realizado por dos de las parejas, que en el momento de expresar la factorización, únicamente tienen en cuenta los factores asociados a las raíces del polinomio, sin tener en consideración que el polinomio inicial no tiene por qué tener raíces reales ni que todas ellas sean reales. Además de ese error, no ubican

correctamente la multiplicidad de la raíz, ya que escriben $(x - k_1^{m_1})$ en lugar de $(x - k_1)^{m_1}$.

Es en este momento cuando se observa, al igual que se ha podido comprobar a través de ciertos errores de otros ejercicios, que los alumnos no manejan con claridad el concepto de multiplicidad y lo que supone dicho concepto a la hora de representar el factor mediante la representación algebraica. Es por ello que los alumnos que abordan de esta manera el ejercicio muestran un RK reducido, ya que realizan el ejercicio sin manejar correctamente los conceptos y sin conectarlos para formar objetos más complejos.

Otro error que se ha percibido es el cambio repentino de notación realizado por una de las alumnas, el cual da pie a pensar que no sabía cómo realizar la actividad y, en busca de soluciones, se ha documentado para su realización. Esta práctica es lícita a pesar de que de esta manera puede que no genere los conocimientos que otros alumnos han podido desarrollar, aún sin haber realizado con éxito la actividad. Lo anterior se concluye por la no adecuación a la notación preestablecida en el enunciado del ejercicio.

En este caso la representación empleada para hacer mención a las funciones polinómicas es la algebraica, ya que para crear la expresión que vincula el concepto de multiplicidad de las raíces y el grado del polinomio, se ha empleado una desigualdad. Además, la factorización del polinomio, propiamente, es una representación algebraica. Realmente, al igual que en el apartado precedente, ha habido un proceso de transformación de representaciones, ya que el propio proceso de factorizar un polinomio es un tratamiento del polinomio.

Cabe destacar que muchos alumnos no han realizado una de las dos partes que componen el ejercicio, o incluso ninguna. Se observa mediante esta situación que los alumnos están habituados a que la realización de tareas matemáticas esté compartimentada y que las conclusiones o resultados que se pueden obtener no serán de utilidad en un futuro. Se ha diseñado de esta manera la actividad para intentar fomentar esa vinculación de conocimientos e ideas. Es por ello por lo que esta actividad permite analizar cómo los alumnos, además de

establecer conexiones entre las distintas representaciones, les sirve para desarrollar conexiones cognitivas significativas.

5.2.3 Apartado III

5.2.3.1 Apartado III a)

El ejercicio consistía en determinar qué representaciones gráficas aportadas correspondían con las representaciones algebraicas de funciones polinómicas del apartado I. Esta actividad es una de las que se han considerado relevantes, como ya se ha explicado anteriormente, para analizar las conexiones que establecen los alumnos entre representaciones gráficas y algebraicas.

En este caso, para estudiar dicha conexión, se interpreta el proceso de conversión realizado por los alumnos del registro algebraico al registro gráfico. A efectos de la investigación, lo que es tangible de la resolución de los alumnos es ver cómo realizan dicha asociación y la justifican. Además, deben comprobar que los puntos aportados en las representaciones gráficas verifican que al sustituir la coordenada x de dichos puntos en la representación algebraica del polinomio asociado, coincide con la coordenada y del punto en cuestión, verificando este procedimiento para todos los puntos aportados.

En realidad, en cuanto a constructos mentales y el razonamiento que siguen en la realización de la actividad, puede que se lleve a cabo la conversión partiendo de la representación gráfica y llegando a la algebraica o recíprocamente. Es decir, cuando los alumnos se han enfrentado a la actividad, puede ser que algunos hayan empezado mirando las representaciones gráficas de las funciones, analizando sus puntos de corte con el eje X y viendo que representaciones algebraicas tienen por raíz la coordenada x de dichos puntos de corte proporcionados en la representación gráfica.

Por el lado contrario, otros alumnos, partiendo de la representación algebraica de las funciones polinómicas del apartado I y observando las raíces de estos, puede que hayan buscado una representación gráfica la cual tuviera a $(a, 0)$ por punto de corte con el eje X, siendo a una raíz del polinomio.

Analizando los resultados de los alumnos, absolutamente todos han asociado de manera correcta las representaciones algebraicas cuya representación gráfica estaba proporcionada en la actividad. A pesar de ello, cada una de las parejas, viendo las soluciones aportadas, han realizado dicha asignación empleando una misma estrategia, pero con aspectos explicativos y expresivos diferentes. A continuación, se van a concretar en qué consisten los distintos enfoques del proceso de conversión realizado por las parejas.

Para poder observar el proceso de conversión, se les insistió justificaran la asociación del polinomio con la gráfica. Para ello, debían verificar que todos los puntos proporcionados en la representación gráfica cumplían que al sustituir la coordenada x de estos en la representación algebraica, correspondía con la coordenada y de los mismos.

En esa justificación se encuentran diversas explicaciones proporcionadas. La mayoría de los alumnos, para argumentar la asociación, únicamente manifestaban, de palabra y sin comprobar que los puntos extra verificaban la función polinómica representada algebraicamente, que las raíces de los polinomios en cuestión coincidían con los puntos de corte de la representación gráfica asociada a este.

Un par de parejas en cambio realizaron la misma justificación, pero mostrando un nivel de RK y de DRK más elevado, debido a que para ello emplearon caracteres, signos y símbolos concretos del sistema de representación de origen, obteniendo que los puntos aportados verifican la representación polinómica.

Hay que destacar que para comprobar que los puntos verifican la representación algebraica del polinomio, primeramente, los alumnos tienen que realizar una conversión de la noción de punto de la gráfica a lo que significa en la representación algebraica, que como se ha comentado previamente consiste en abstraer las coordenadas del punto y darles significado algebraico.

Por otro lado, a las parejas que presentaban un mayor nivel de conocimiento del sistema de representación se les vio contrarrestado, ya que realizaron un error

referente a diferentes nociones del sistema de representación algebraica. El error consistió en que a la hora de rellenar la celda correspondiente a “Asociada” (ver tabla del Ejercicio 2.III), estos alumnos, en lugar de escribir la función polinómica, confundieron dicha noción con una ecuación ya que pusieron el polinomio igualado a cero.

5.2.3.2 Apartado III b)

En este apartado del ejercicio los alumnos, únicamente con el fin de que repasen conceptos de la unidad didáctica, han de determinar ciertas características de las representaciones algebraicas de las funciones polinómicas que no hayan sido asociadas en el apartado I de este mismo ejercicio, pero empleando solamente el recurso didáctico GeoGebra. No vamos a analizar en profundidad los resultados obtenidos por los alumnos en esta cuestión ya que la finalidad del ejercicio era que los alumnos repasaran conceptos asociados a las funciones, pero que en lo que a la investigación respecta no es de interés.

5.2.3.3 Apartado III c)

El ejercicio consiste en que los alumnos, con las representaciones gráficas que han sobrado al realizar la asociación del apartado III a), obtengan la representación algebraica correspondiente a la función de la representación gráfica.

Los resultados obtenidos son de interés, ya que mediante la consecución de la actividad los alumnos deberán realizar el proceso de conversión, tal y como mencionan los autores (Duval, 2006), es más complejo. La conversión a realizar consiste en partir de la representación gráfica de funciones polinómicas junto con ciertas nociones asociadas a esta en ese registro, y obtener la representación algebraica de dichas funciones.

Se procede a explicitar el proceso de conversión a llevar a cabo por los alumnos con cada una de las representaciones gráficas. Primeramente, los alumnos, partiendo de la representación gráfica, deberán observar los puntos dados. Vinculando con las ideas trabajadas en apartados anteriores, los alumnos deben deducir que a través de los puntos de corte de la representación gráfica se pueden obtener las raíces del polinomio (representación algebraica). En ese

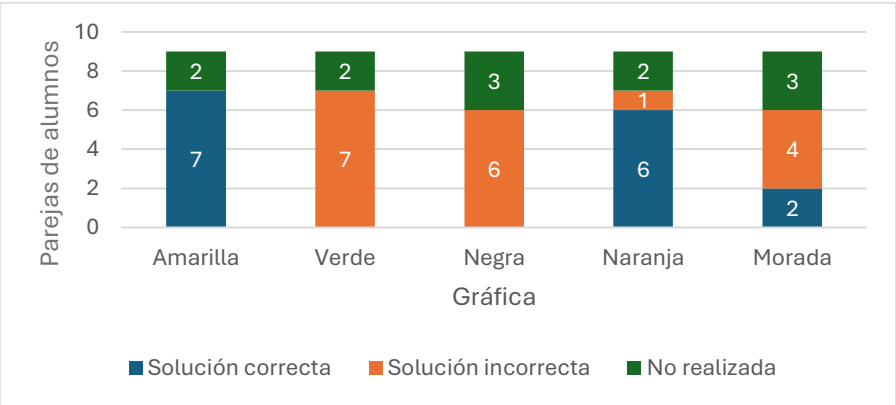
momento estarían en posesión de las raíces, pero no de la multiplicidad de cada una de ellas, y es entonces cuándo deberán recordar las conclusiones del apartado c) del Ejercicio I.

Observando el comportamiento de la gráfica en el entorno de cada uno de esos puntos de corte, se obtienen candidatos a multiplicidad, y es en este momento cuando los alumnos necesitarán la pista proporcionada. Dicha pista les permitirá acotar las posibles casuísticas de la combinación de las multiplicidades y plantear una factorización candidata del polinomio a construir (para ello se emplearán las conclusiones del apartado II del Ejercicio 2).

Una vez planteadas las casuísticas de multiplicidades de las raíces reales de la función, se emplearán los demás puntos aportados en la representación gráfica, transformando previamente dichos puntos al registro de llegada, que es el registro algebraico. Dichos puntos permitirán discernir cuáles de los casos planteados serán posibles y cuáles no, debido a que pueden surgir contradicciones en la determinación de los factores de un posible polinomio irreducible planteado al usar la información obtenida de los puntos.

A continuación, se procede a analizar lo realizado por los alumnos y, en caso de optar por el proceso de conversión planteado, determinar hasta qué parte del proceso los alumnos han sido capaces de llegar y qué causas o factores han sido relevantes en la no conclusión de obtención de la representación algebraica, en caso de no llegar a concluirla.

El siguiente gráfico de barras muestra el número de parejas que han obtenido correcta e incorrectamente el polinomio, o no han realizado la tarea.



Se analizan los procedimientos realizados en la obtención del polinomio de cada una de las gráficas, ya sea obtenido exitosamente o no.

Gráfica Amarilla:

Obtención correcta del polinomio buscado: De las parejas que han obtenido el polinomio correctamente, solo dos han justificado su obtención. Los alumnos han partido de la expresión general de la factorización de un polinomio que tiene un número determinado de raíces reales distintas con sus respectivas multiplicidades. Han justificado que en la factorización únicamente aparecerán factores que provienen de los puntos de corte de la representación gráfica de la función y que todas las raíces han de tener multiplicidad uno, ya que el grado del polinomio es, a lo sumo, de grado cuatro.

Grafica Verde:

Obtención incorrecta del polinomio: Debido a los errores cometidos se consideran dos subgrupos. Primeramente, están cinco parejas que no realizan ningún tipo de procedimiento ni justificación para determinar el polinomio y todos ellos, en la celda "Obtenida" de la tabla proporcionada, pusieron como polinomio $(x+2)(x-5/2)$, ya que simplemente consideraron las raíces que proporcionan los puntos de corte de la representación gráfica con el eje X. Les faltó verificar si los demás puntos proporcionados cumplían la representación gráfica.

Por otro lado, se destacan los que consideran como función polinómica en su representación algebraica $(x+2)^3(x-5/2)^2$. Estos, a diferencia de los anteriores, sí que tienen en consideración la multiplicidad de las raíces, pero no son capaces de contemplar que esta configuración de multiplicidades no es compatible con que el polinomio sea como máximo de grado cuatro. Además, al igual que los mencionados previamente, no comprueban que los demás puntos de la representación gráfica verifiquen la representación algebraica.

Gráfica Negra:

Obtención incorrecta del polinomio: De todas las parejas de alumnos que pertenecen a este grupo, únicamente una ha explicado de forma concisa el procedimiento seguido para obtener el polinomio. Esta persona sin obtener la

respuesta plantea como factorización $(x-7/8)^2\,p(x)^2$. Se ha de tener en cuenta que ha considerado correctamente el factor asociado al punto de corte, determinando que la raíz real del polinomio a construir es $x=7/8$.

Además, ha argumentado que necesariamente la multiplicidad de esta raíz debía ser dos, ya que al considerar la otra posible opción de multiplicidad sería el próximo número par, que es cuatro, polinomio que no verifica los demás puntos aportados en la representación gráfica. Otra objeción que falta por precisar y determinar es el polinomio $p(x)$, el cual no es que esté elevado a dos, sino que es de grado dos (concepción errónea).

Por otro lado, el resto de los alumnos únicamente consideran en la factorización del polinomio a construir el factor que proviene del corte de la representación gráfica con el eje X, es decir, $x-7/8$. Pero no son capaces de deducir que dicho polinomio es imposible que corresponda a la gráfica, ya que su representación gráfica sería una recta, que no corresponde con la representación proporcionada.

Es en este momento que se puede deducir que los conocimientos que tienen adquiridos sobre las funciones y sus conceptos asociados no están vinculados, sino que los manipulan de manera compartimentada. En consecuencia, el nivel tanto de RK como de DK se ven reducidos.

Gráfica Naranja:

Obtención correcta del polinomio: Dentro de este grupo, al igual que en el caso del análisis de otras gráficas, se diferencian dos subgrupos. Por un lado, hay una única pareja que concluye el polinomio de forma correcta y realiza completamente el proceso de conversión descrito previamente, realizando todas las posibles combinaciones de las multiplicidades de cada una de las raíces y descartando casos a través de la comprobación de los otros puntos de la representación gráfica proporcionados.

Por otro lado, se encuentran los que consideran como polinomio $(x+3)(x-2)$, pero no justifican ningún procedimiento para su obtención, aunque aparentemente parece que únicamente han tenido en cuenta que los puntos de

corte de la representación gráfica permiten obtener las raíces del polinomio, sin tener en consideración ni tan si quiera, las posibles multiplicidades de cada una de ellas. A pesar de que el resultado esté bien, debería haberse contemplado las distintas combinaciones de las multiplicidades de las raíces reales distintas.

Obtención incorrecta del polinomio: El polinomio que considera esta pareja es $(x-3)(x-2)$ y el error proviene de la transformación de una raíz al considerar el factor de la factorización.

Gráfica Morada:

Obtención correcta del polinomio: Únicamente han sido dos las parejas que han obtenido correctamente la representación algebraica de la función polinómica representada, con la diferencia de que una de ellas justifica la factorización del polinomio y la otra no.

La pareja que no argumenta la elección del polinomio es probable que haya tenido en cuenta las multiplicidades de las distintas raíces, aunque no se ve explicado el motivo de dicha elección, sin ni tan siquiera sustituir el punto extra de la representación gráfica. Por el contrario, la pareja que justifica la representación algebraica de la función polinómica lo hace imprecisamente.

Mencionan que hay cuatro raíces y que como el polinomio a construir es a lo sumo de grado cuatro, determinan que la multiplicidad de las funciones impares será uno, mientras que la de las pares necesariamente dos. Uno de los errores que se observa en dicha respuesta es que consideran cada uno de los factores del polinomio como una función, además de decir que hay cuatro raíces, cuando presuponen indicar tres raíces distintas.

Aunque las palabras empleadas en la justificación no son las idóneas, se puede deducir que son capaces de manejar las ideas que se han trabajado a lo largo de toda la actividad, pero sin manejar ni conocer de forma específica y con claridad los objetos y la terminología técnica del propio lenguaje matemático (falta de RK). Algo que cabe destacar es que justifica que el punto extra proporcionado verifica la expresión algebraica.

Obtención incorrecta del polinomio: Las parejas restantes solamente rellenan la celda correspondiente con el polinomio que consideran que tiene por representación gráfica la dada. Todas ellas concretan que la representación algebraica que le corresponde a dicha representación gráfica es $(x+3)(x+1)(x-2)$, de donde se puede deducir que, o bien no retienen lo visto en los ejercicios realizados previamente, o no realizan correctamente la conversión entre representaciones.

Concretamente, el último error mencionado puede ser causa de que en el proceso de conversión los alumnos no saben plasmar, en términos del sistema de representación algebraico, lo que significa el comportamiento que tiene la función polinómica alrededor de las raíces en el sistema de representación gráfico. En resumen, no justifican la multiplicidad de cada una de las raíces obtenidas de la representación gráfica, además de no verificar que el punto extra aportado corresponde a un punto de la función polinómica que representa el polinomio indicado.

Generalmente del análisis de este apartado se tiene que los alumnos tienen falta de RK del sistema algebraico, producido por errores cometidos en el proceso de conversión. Se van a comparar los procesos de conversión que se han llevado a cabo con el modelo propuesto por Bossé et al. (2014). El conocimiento del sistema gráfico es bastante alto, ya que entienden todos los objetos proporcionados en dicha representación y, de hecho, son capaces de relacionarlos. Por tanto, en el proceso propuesto por Bossé et al. (2014), el desempacar la representación y la coordinación de conceptos se da con satisfacción.

El problema se da en la fase de construcción de la representación objetivo, ya que en esta se han de vincular conceptos comunes a ambas representaciones para poder construir la representación final. Dicho problema no proviene de los puntos aportados como cortes de la función con el eje X, ya que en la factorización del polinomio la mayoría los expresa y traduce correctamente. El error resulta de la incomprensión del concepto de multiplicidad, ya sea porque no entienden cómo se manifiesta en el sistema algebraico, gráfico o en ambos.

6 Conclusiones

Como conclusión general, a través de este estudio se ha podido ver que los alumnos mayoritariamente no establecen correctamente conexiones entre las representaciones gráficas y algebraicas de una función, debido a que manifiestan un conocimiento del sistema de representación mínimo.

De los resultados obtenidos la representación en la que más dificultades pueden presentar es la algebraica, ya que el error que más se ha producido ha sido expresar las multiplicidades de las raíces incorrectamente en los factores de la factorización del polinomio. Coincide que las representaciones y conexiones son uno de los factores de obstáculo en el aprendizaje de las matemáticas, tal y como afirmaban Gómez (2013) y Hitt (1998).

Según el enfoque de Hitt (1998) y, Ortega y Pecharromán (2010), los alumnos no comprenden el concepto de función ya que para ello deberían poder vincular sin problemas distintas representaciones.

Contestando a las preguntas de investigación se ve que los alumnos son capaces de identificar las distintas representaciones. En lo que muestran más dificultades es en el propio manejo de los sistemas de representación y en conectar representaciones. Respecto a la realización de los procesos de transformación, los que menos dificultades les ha supuesto ha sido el tratamiento llevado a cabo fundamentalmente en el Ejercicio 2.II, pero aun así, no realizan de forma ordenada y clara las transformaciones realizadas.

A pesar de que la conclusión del objeto a estudiar no ha sido del todo favorable, sí que se han obtenido todos los objetivos específicos planteados. Además, la propuesta ha permitido mostrar a los alumnos un planteamiento de actividad diferente a lo que ellos pueden estar más acostumbrados, focalizando en ella el uso de la tecnología. No obstante, a modo de autocrítica, en vista de los resultados y lo percibido en la realización de la actividad, se puede enmarcar como una actividad compleja y la cual debería haber sido planteada en un curso superior. Otra opción para futuras investigaciones sería replantear la actividad modificando parte de ella o incluso aportando más ayuda a través de la misma.

7 Referencias

Adu-Gyamfi, K., & Bossé, M. J. (2014). Processes and reasoning in representations of linear functions. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *12*, 167-192.

https://link.springer.com/article/10.1007/s10763-013-9416-x

Adu-Gyamfi, K., Bossé, M. J., & Chandler, K. (2017). Student connections between algebraic and graphical polynomial representations in the context of a polynomial relation. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *15*, 915-938.

https://link.springer.com/article/10.1007/s10763-016-9730-1

Bossé, M. J., Adu-Gyamfi, K., & Chandler, K. (2014). Students' differentiated translation processes. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, *828*, 1-28. https://www.cimt.org.uk/journal/bosse5.pdf

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, *61*, 103-131. https://link.springer.com/article/10.1007/S10649-006-0400-Z

Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(1), 105-121. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(99)80063-7

Flores, C. D. (2004). Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas: concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, *7*(3), 195-218. https://www.redalyc.org/pdf/335/33570301.pdf

Goldin, G. A. (1998). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(2), 137-165. https://doi.org/10.1016/S0364-0213(99)80056-1

Gómez, J. L. D. (2013). El Concepto de Función: Ideas pedagógicas a partir de su historia e investigaciones. *El Cálculo y su enseñanza*, *4*, 13-25.

http://inst-mat.utalca.cl/~cdelpino/16-seminario/articulos/conceptos-fun/concepto-de-funcion.pdf

Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(1), 123-134. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(99)80064-9

Oehrtman, M., Carlson, M., & Thompson, P. W. (2008). Foundational reasoning abilities that promote coherence in students' function understanding. *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics education*, *27*, 150-170.

https://doi.org/10.5948/UPO9780883859759.004

Ortega, T., & Pecharromán, C. (2010). Diseño de enseñanza de las propiedades globales de las funciones a través de sus gráficas. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas*, *28*(2), 215-226. https://doi.org/10.5565/rev/ec/v28n2.337

Tall, D., & Bakar, M. (1992). Students' mental prototypes for functions and graphs. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *23*(1), 39-50.

https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1992c-bakar-ijmest.pdf

Thompson, P. W. (1994). Students, functions, and the undergraduate curriculum. *Research in collegiate mathematics education*, *4*(1), 21-44. https://pat-thompson.net/PDFversions/1994StuFunctions.pdf

Zabalza, E. L. (1998). Funcionamiento didáctico de los gráficos de funciones. *Segundo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 135-154). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

https://redined.educacion.gob.es/xmlui/bitstream/handle/11162/47881/01120093000016.pdf?sequence=1&isAllowed=y

8 Anexos

8.1 Anexo I: Hoja de enunciados

Raíces de Polinomios

Nombre y Apellidos:..... Curso:.....

Nombre y Apellidos (compañero):.....

Fecha:.....

Definición de multiplicidad de una raíz: La multiplicidad de una raíz es el número de veces que se repite la raíz.

EJERCICIO 1

Sean las funciones polinómicas $f_n(x) = (x-2)^n$ con $n = 1, 2, 3, 4$.

a) Determina el grado del polinomio que constituye cada función polinómica, calcula sus raíces y halla la multiplicidad de cada una. Determina los puntos de corte de cada función con el eje X.

   Dado un polinomio cualquiera:

   1. ¿Cómo se puede determinar el número de cortes de la función polinómica con el eje X teniendo en cuenta sus raíces?
   2. ¿Es relevante la multiplicidad de cada raíz para determinar el número de cortes de la función con el eje X? Justifica tu respuesta.
   3. Busca una relación entre la multiplicidad de una raíz real y el número de cortes de la función con el eje X que determina dicha raíz. ¿En qué caso se da la igualdad en la relación?

b) Vinculado con el apartado anterior, ¿basta con conocer los puntos de corte de una función polinómica con el eje X para poder determinarla?

   - Si la respuesta es afirmativa, halla el polinomio que tenga al número 2 por única raíz.
   - Si la respuesta es negativa, ¿qué información es imprescindible saber sobre el polinomio a construir?

c) Representa gráficamente cada una de las funciones $f_n(x)$ mediante GeoGebra. ¿Qué relación observas entre el valor de n en cada caso, con el comportamiento de la respectiva gráfica alrededor de los puntos de corte obtenidos en el apartado a)?
   Pista: Ver que ocurre si n es par y si n es impar.

d) Representa con GeoGebra las siguientes funciones polinómicas de grado 4:

$$g_1(x) = 8x^4 - 2x^3 - 7x^2 - 2x - 15$$
$$g_2(x) = 2g_1(x) \quad g_3(x) = g_1(x)/4$$
$$g_4(x) = -g_1(x) \quad g_5(x) = \sqrt{3}g_1(x)/3$$

   1. Obtén los puntos de corte de cada función con el eje X, ¿qué observas en ellos?
   2. En relación con los apartados anteriores, ¿se pueden tener funciones polinómicas del mismo grado que tengan los mismos cortes con el eje X?
      - En caso afirmativo, ¿qué las diferencia?
      - En caso negativo, dar un ejemplo.

2

EJERCICIO 2

I. Rellena la tabla resolviendo las ecuaciones polinómicas resultantes de igualar a cero los polinomios. En caso de tener espacios que no se puedan rellenar, hacer un aspa.

Polinomio	Número de raíces reales	Raíces reales distintas	Multiplicidad de cada raíz
$x^4 + 1$			
Factorización del polinomio			

Polinomio	Número de raíces reales	Raíces reales distintas	Multiplicidad de cada raíz
$x^2 + 9$			
Factorización del polinomio			

Polinomio	Número de raíces reales	Raíces reales distintas	Multiplicidad de cada raíz
$4x^4 - 20x^3 + 18x^2 + 80x - 136$			
Factorización del polinomio			

Polinomio	Número de raíces reales	Raíces reales distintas	Multiplicidad de cada raíz
$4x^3 - 4x^2 - 3x + 5$			
Factorización del polinomio			

Polinomio	Número de raíces reales	Raíces reales distintas	Multiplicidad de cada raíz
$x^3 - 3x^2 + 3x - 1$			
Factorización del polinomio			

Polinomio	Número de raíces reales	Raíces reales distintas	Multiplicidad de cada raíz
$9x^4 - 18x^3 + 13x^2 - 8x + 4$			
Factorización del polinomio			

Polinomio	Número de raíces reales	Raíces reales distintas	Multiplicidad de cada raíz
$x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$			
Factorización del polinomio			

Polinomio	Número de raíces reales	Raíces reales distintas	Multiplicidad de cada raíz
$x^4 - 9x^3 + 27x^2 - 27x$			
Factorización del polinomio			

4

Polinomio	Número de raíces reales	Raíces reales distintas	Multiplicidad de cada raíz
$3x-8$			
Factorización del polinomio			

Polinomio	Número de raíces reales	Raíces reales distintas	Multiplicidad de cada raíz
x^3-4x^2+2x+3			
Factorización del polinomio			

Polinomio	Número de raíces reales	Raíces reales distintas	Multiplicidad de cada raíz
x^4-4x^2+4			
Factorización del polinomio			

II. Sea $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ un polinomio de grado $n \in \mathbb{N}$ con $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$. Supongamos que $k_1, k_2, \ldots, k_t$ con $t \leq n$ son las distintas raíces reales del polinomio con multiplicidades $m_1, m_2, \ldots, m_t$ ($m_i \geq 1 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, t$) respectivamente. Obtén la expresión que relaciona las multiplicidades de las raíces reales con el grado del polinomio y halla la factorización del mismo, para ello ayúdate de la tabla anterior.

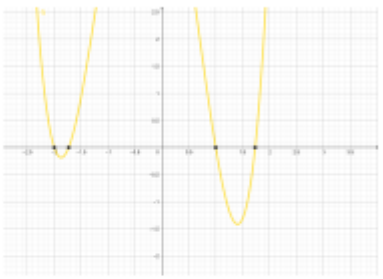
III. Las raíces de los polinomios anteriores se obtienen igualando los polinomios a cero, es decir, $f(x) = 0$ siendo $f(x)$ la función polinómica correspondiente en cada caso. Cinco de esas funciones polinómicas se encuentran representadas en las siguientes figuras.

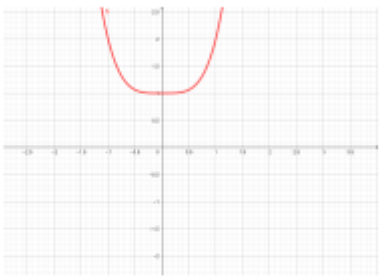
a) Asocia cinco de las funciones polinómicas de I. con su respectiva representación gráfica rellenando solamente el espacio "Asociada". Justifica la elección de cada una de ellas comprobando que todos los puntos aportados son puntos de la función.

b) Construye mediante GeoGebra las funciones restantes de I e indica las raíces, extremos relativos y extremos absolutos (aproximados en algunos casos), así como los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

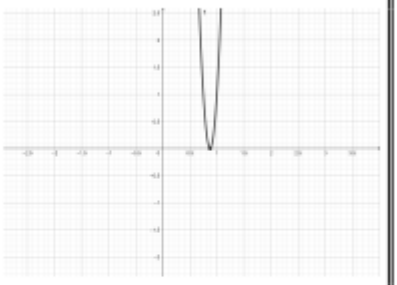
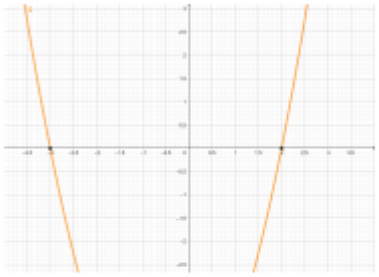
c) Obtén las funciones polinómicas de las representaciones gráficas que sobren al asignar las de *a*) y escríbelas en el espacio "Obtenida". Para determinarlas emplea las conclusiones del apartado II, y los apartados *c*) y *d*) del Ejercicio 1. Justifica todos los pasos realizados. Pista: Los polinomios son como mucho de grado 4.

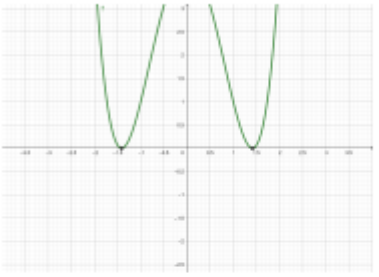
5

Representación gráfica		Representación gráfica	
			
Puntos de corte con el eje X	$(-2,0)$ $(-\sqrt{3},0)$ $(1,0)$ $(\sqrt{3},0)$	Puntos de corte con el eje X	$(-2,0)$ $(5/2,0)$
Otros puntos	$(0,6)$	Otros puntos	$(0,50)$ $(2,4)$
Asociada		Asociada	
Obtenida		Obtenida	

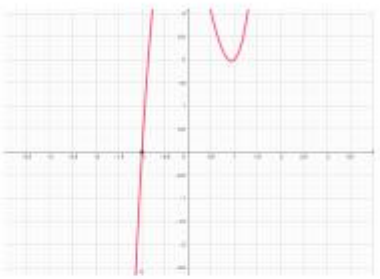
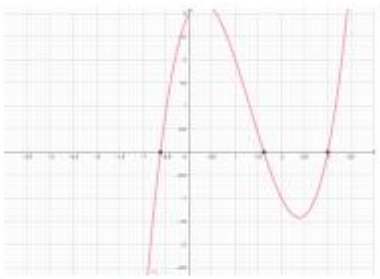
Representación gráfica		Representación gráfica	
			
Puntos de corte con el eje X	No tiene	Puntos de corte con el eje X	$(0,0)$ $(3,0)$
Otros puntos	$(0,1)$	Otros puntos	$(1,-8)$
Asociada		Asociada	
Obtenida		Obtenida	

6

Representación gráfica		Representación gráfica	
			
Puntos de corte con el eje X	$(7/8, 0)$	Puntos de corte con el eje X	$(-3, 0)$ $(2, 0)$
Otros puntos	$(0, 49)$ $(1, 1)$ $(3/4, 1)$	Otros puntos	$(-1, -6)$ $(0, -6)$ $(1, -4)$
Asociada		Asociada	
Obtenida		Obtenida	

Representación gráfica		Representación gráfica	
			
Puntos de corte con el eje X	$(-3, 0)$ $(-1, 0)$ $(2, 0)$	Puntos de corte con el eje X	$(-\sqrt{2}, 0)$ $(\sqrt{2}, 0)$
Otros puntos	$(0, -6)$	Otros puntos	$(0, 4)$
Asociada		Asociada	
Obtenida		Obtenida	

7

Representación gráfica		Representación gráfica	
			
Puntos de corte con el eje X	$(-1, 0)$	Puntos de corte con el eje X	$((1-\sqrt{5})/2, 0)$ $(3, 0)$ $((1+\sqrt{5})/2, 0)$
Otros puntos	$(0, 5)$	Otros puntos	$(0, 3)$
Asociada		Asociada	
Obtenida		Obtenida	

8.2 Anexo II: Actividad resuelta

Raíces de Polinomios

Nombre y Apellidos:..... Curso:.....

Nombre y Apellidos (compañero):.....

Fecha:.....

Definición de multiplicidad de una raíz: La multiplicidad de una raíz es el número de veces que se repite la raíz.

EJERCICIO 1

Sean las funciones polinómicas $f_n(x) = (x-2)^n$ con $n = 1, 2, 3, 4$.

a) Determina el grado del polinomio que constituye cada función polinómica, calcula sus raíces y halla la multiplicidad de cada una. Determina los puntos de corte de cada función con el eje X.

Respuesta:

- **Los grados son 1, 2, 3 y 4 respectivamente.**
- **La única raíz de todos los polinomios es, $x = 2$.**
  Cambia la multiplicidad de la raíz, siendo 1, 2, 3 y 4 respectivamente.
- **Todas las funciones tienen un único punto de corte con el eje X. Dicho punto es: $(2, 0)$.**

Dado un polinomio cualquiera:

1. ¿Cómo se puede determinar el número de cortes de la función polinómica con el eje X teniendo en cuenta sus raíces?

   Respuesta:
   Contando el número de raíces reales distintas.

2. ¿Es relevante la multiplicidad de cada raíz para determinar el número de cortes de la función con el eje X? Justifica tu respuesta.

   Respuesta:
   NO es relevante, basta con considerar las funciones f_n con $n = 1, 2, 3, 4$ anteriores. Todas ellas tienen una única raíz, que es la misma en todas, y en cambio la multiplicidad varía.

3. Busca una relación entre la multiplicidad de una raíz real y el número de cortes de la función con el eje X que determina dicha raíz. ¿En qué caso se da la igualdad en la relación?

   Respuesta:
   Multiplicidad de una raíz real $\geq$ Número de cortes de la función con el eje X que determina dicha raíz. La igualdad se da si la multiplicidad de una raíz real es 1, ya que el número de cortes de una función con el eje X que determina una raíz concreta es 1.

b) Vinculado con el apartado anterior, ¿basta con conocer los puntos de corte de una función polinómica con el eje X para poder determinarla?

- Si la respuesta es afirmativa, halla el polinomio que tenga al número 2 por única raíz.
- Si la respuesta es negativa, ¿qué información es imprescindible saber sobre el polinomio a construir?

Respuesta:
NO basta con conocer los puntos de corte con el eje X. Lo que necesitamos saber sobre el polinomio es su grado.

c) Representa gráficamente cada una de las funciones $f_n(x)$ mediante GeoGebra. ¿Qué relación observas entre el valor de n en cada caso, con el comportamiento de la respectiva gráfica alrededor de los puntos de corte obtenidos en el apartado a)?
Pista: Ver que ocurre si n es par y si n es impar.

Respuesta:

- **Si n es par: La gráfica toca al eje X en el punto $(2, 0)$.**
- **Si n es impar: La gráfica atraviesa el eje X por el punto $(2, 0)$.**

d) Representa con GeoGebra las siguientes funciones polinómicas de grado 4:

$$g_1(x) = 8x^4 - 2x^3 - 7x^2 - 2x - 15$$
$$g_2(x) = 2g_1(x) \quad g_3(x) = g_1(x)/4$$
$$g_4(x) = -g_1(x) \quad g_5(x) = \sqrt{3}g_1(x)/3$$

1. Obtén los puntos de corte de cada función con el eje X, ¿qué observas en ellos?

   Respuesta:
   Los puntos de corte de todas las funciones son $(-1.25, 0), (1.5, 0)$. Podemos observar que son los mismos en todas las funciones.

2. En relación con los apartados anteriores, ¿se pueden tener funciones polinómicas del mismo grado que tengan los mismos cortes con el eje X?
   - En caso afirmativo, ¿qué las diferencia?
   - En caso negativo, dar un ejemplo.

   Respuesta:
   SI. Las diferencia un factor constante real no nulo.

EJERCICIO 2

I. Rellena la tabla resolviendo las ecuaciones polinómicas resultantes de igualar a cero los polinomios. En caso de tener espacios que no se puedan rellenar, hacer un aspa.

Polinomio	Número de raíces reales	Raíces reales distintas	Multiplicidad de cada raíz
x^4+1	**0**		
Factorización del polinomio	**No hay factorización en $\mathbb{R}$**		

Polinomio	Número de raíces reales	Raíces reales distintas	Multiplicidad de cada raíz
x^2+9	**0**		
Factorización del polinomio	**No hay factorización en $\mathbb{R}$**		

Polinomio	Número de raíces reales	Raíces reales distintas	Multiplicidad de cada raíz
$4x^4-20x^3+18x^2+80x-136$	**2**	**-2**	**1**
		2	**1**
Factorización del polinomio	$(x-2)(x+2)(4x^2-20x+34)$		

Polinomio	Número de raíces reales	Raíces reales distintas	Multiplicidad de cada raíz
$4x^3-4x^2-3x+5$	**1**	**-1**	**1**
Factorización del polinomio	$(x+1)(4x^2-8x+5)$		

4

Polinomio	Número de raíces reales	Raíces reales distintas	Multiplicidad de cada raíz
$x^3 - 3x^2 + 3x - 1$	**3**	**1**	**3**
Factorización del polinomio	$(x-1)^3$		

Polinomio	Número de raíces reales	Raíces reales distintas	Multiplicidad de cada raíz
$9x^4 - 18x^3 + 13x^2 - 8x + 4$	**2**	**1**	**2**
Factorización del polinomio	$(x-1)^2(9x^2+4)$		

Polinomio	Número de raíces reales	Raíces reales distintas	Multiplicidad de cada raíz
$x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$	**4**	**2**	**4**
Factorización del polinomio	$(x-2)^4$		

Polinomio	Número de raíces reales	Raíces reales distintas	Multiplicidad de cada raíz
$x^4 - 9x^3 + 27x^2 - 27x$	**4**	**0**	**1**
		3	**3**
Factorización del polinomio	$x(x-3)^3$		

Polinomio	Número de raíces reales	Raíces reales distintas	Multiplicidad de cada raíz
$3x-8$	**1**	**8/3**	**1**
Factorización del polinomio	$x-8/3$		

Polinomio	Número de raíces reales	Raíces reales distintas	Multiplicidad de cada raíz
x^3-4x^2+2x+3	**3**	**3**	**1**
		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	**1**
		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	**1**
Factorización del polinomio	$(x-3)\left(x-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right)\left(x-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)$		

Polinomio	Número de raíces reales	Raíces reales distintas	Multiplicidad de cada raíz
x^4-4x^2+4	**4**	$-\sqrt{2}$	**2**
		$\sqrt{2}$	**2**
Factorización del polinomio	$\left(x-\sqrt{2}\right)^2\left(x+\sqrt{2}\right)^2$		

II. Sea $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ un polinomio de grado $n\in\mathbb{N}$ con $a_0,a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R}$, $a_n\neq 0$. Supongamos que $k_1,k_2,\ldots,k_t$ con $t\leq n$ son las distintas raíces reales del polinomio con multiplicidades $m_1,m_2,\ldots,m_t$ $(m_i\geq 1 \quad \forall i=1,2,\ldots,t)$ respectivamente. Obtén la expresión que relaciona las multiplicidades de las raíces reales con el grado del polinomio y halla la factorización del mismo, para ello ayúdate de la tabla anterior.

Respuesta:

Sea $\mathbf{d}:=\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{t}}\mathbf{m_i}$**, entonces** $\mathbf{d\leq n}$**.**

Factorización: $(x-k_1)^{m_1}(x-k_2)^{m_2}\cdots(x-k_t)^{m_t}(a_nx^{n-d}+b_{n-d-1}x^{n-d-1}+\cdots+b_1x+b_0)$ **con** $\mathbf{b_0,b_1,\ldots,b_{n-d-1}}\in\mathbb{R}$**.**

III. Las raíces de los polinomios anteriores se obtienen igualando los polinomios a cero, es decir, $f(x)=0$ siendo $f(x)$ la función polinómica correspondiente en cada caso. Cinco de esas funciones polinómicas se encuentran representadas en las siguientes figuras.

a) Asocia cinco de las funciones polinómicas de I. con su respectiva representación gráfica rellenando solamente el espacio "Asociada". Justifica la elección de cada una de ellas comprobando que todos los puntos aportados son puntos de la función.

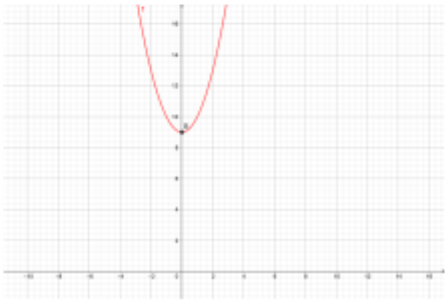
6

b) Construye mediante GeoGebra las funciones restantes de I e indica las raíces, extremos relativos y extremos absolutos (aproximados en algunos casos), así como los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

Respuesta:

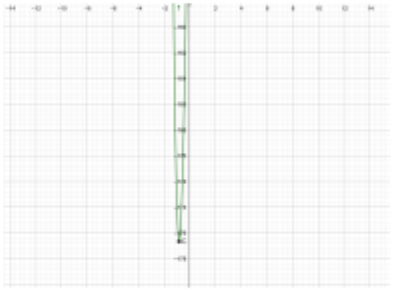
1) $x^2 + 9$

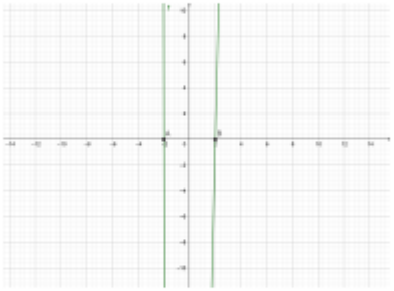
- **Raíces: No tiene.**
- **Máximo relativo: No tiene. Máximo absoluto: No tiene.**
- **Mínimo relativo: (0,9). Mínimo absoluto: (0,9).**
- **Decrece:** $(-\infty, 0)$.
- **Crece:** $(0, \infty)$.



2) $4x^4 - 20x^3 + 18x^2 + 80x - 136$

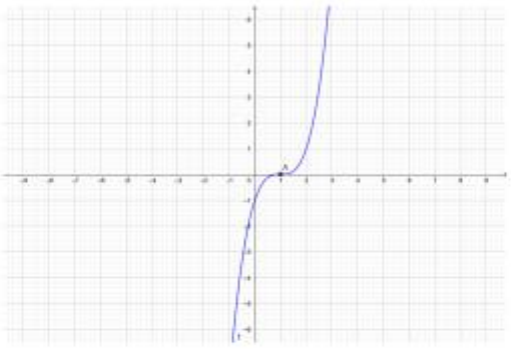
- **Raíces:** $(-2, 0), (2, 0)$
- **Máximo relativo: No tiene. Máximo absoluto: No tiene.**
- **Mínimo relativo: (-0.83,-176.67). Mínimo absoluto: (-0.83,-176.67).**
- **Decrece:** $(-\infty, -0.83)$.
- **Crece:** $(-0.83, \infty)$.





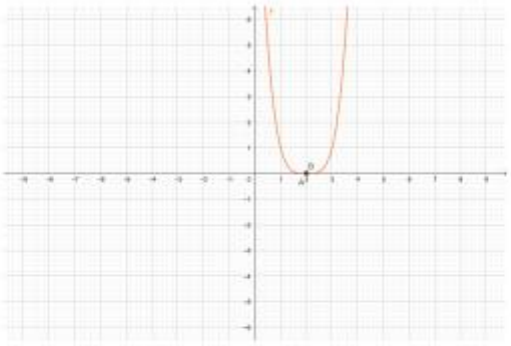
3) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

- **Raíces:** $(1, 0)$
- **Máximo relativo: No tiene. Máximo absoluto: No tiene.**
- **Mínimo relativo: No tiene. Mínimo absoluto: No tiene.**
- **Creciente en todo** $D = \mathbb{R}$



4) $x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$

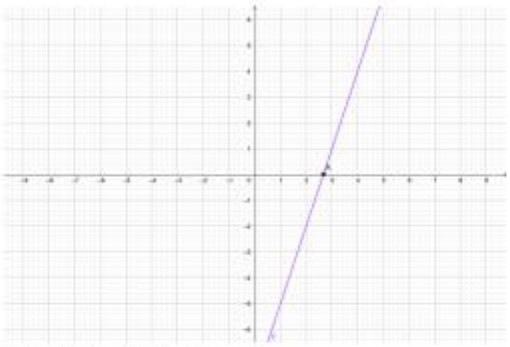
- **Raíces:** $(2, 0)$
- **Máximo relativo: No tiene. Máximo absoluto: No tiene.**
- **Mínimo relativo:** $(2, 0)$**. Mínimo absoluto:** $(2, 0)$**.**
- **Decrece:** $(-\infty, 2)$**.**
- **Crece:** $(2, \infty)$



5) $3x - 8$

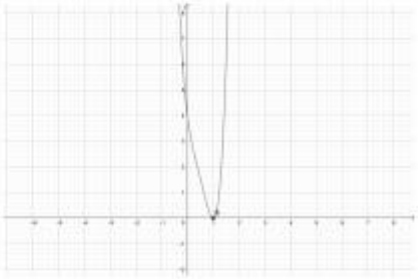
- **Raíces:** $(2.67, 0)$
- **Máximo relativo: No tiene. Máximo absoluto: No tiene.**
- **Mínimo relativo: No tiene. Mínimo absoluto: No tiene.**
- **Crece en todo** $D = \mathbb{R}$

8



6) $9x^4 - 18x^3 + 13x^2 - 8x + 4$

- **Raíces:** $(1, 0)$
- **Máximo relativo: No tiene. Máximo absoluto: No tiene.**
- **Mínimo relativo:** $(1, 0)$**. Mínimo absoluto:** $(1, 0)$**.**
- **Decrece:** $(-\infty, 1)$**.**
- **Crece:** $(1, \infty)$



c) Obtén las funciones polinómicas de las representaciones gráficas que sobren al asignar las de *a*) y escríbelas en el espacio "Obtenida". Para determinarlas emplea las conclusiones del apartado II, y los apartados *c*) y *d*) del Ejercicio 1. Justifica todos los pasos realizados.
Pista: Los polinomios son como mucho de grado 4.

Respuesta:
Gráfica Amarilla: Al tener cuatro raíces reales distintas y como el grado del polinomio es como mucho 4, estamos ante un polinomio de grado 4 cuya factorización es de la forma:

$$f(x) = a(x+2)(x+\sqrt{3})(x-1)(x-\sqrt{3})$$

con $a \in \mathbb{R}$ **a determinar. Para obtener** a **empleamos que** $f(0) = 6$**, de donde se deduce que** $a = 1$**. Por lo que el polinomio que buscamos es:** $\boxed{x^4 + x^3 - 5x^2 - 3x + 6}$

Gráfica Verde: Empleando las raíces extraídas de la representación gráfica y el apartado c) del Ejercicio 1 y II, sabemos que la factorización será

de la siguiente forma:

$$f(x) = (x+2)^{m_1}(x-5/2)^{m_2}(a_n x^{n-m_1-m_2} + \cdots + b_0)$$

con $1 \leq m_1, m_2 \leq 4$, siendo $m_1 = 2k_1 + 1$, $m_2 = 2k_2$ ($k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$) y $a_n, \ldots, b_0 \in \mathbb{R}$. Por la primera parte del apartado II, $m_1 + m_2 \leq 4$. Casos posibles:

a) $m_1 = 1$ y $m_2 = 2$. En este caso tendríamos

$$f(x) = (x+2)(x-5/2)^2(a_4 x + b_0)$$

con $a_4, b_0 \in \mathbb{R}$ a determinar. Para obtener las constantes empleamos que $f(0) = 50$ y $f(2) = 4$, de donde se deduce que $a_4 = 0$ y $b_0 = 4$. Sustituyendo dichos valores en la factorización y operando: $\boxed{4x^3 - 12x^2 - 15x + 50}$

b) $m_1 = 1$ y $m_2 = 4$. Imposible.

c) $m_1 = 3$ y $m_2 = 2$. Imposible.

d) $m_1 = 3$ y $m_2 = 4$. Imposible.

Gráfica Negra: Empleando las raíces extraídas de la representación gráfica y el apartado c) del Ejercicio 1 y II, sabemos que la factorización será de la siguiente forma:

$$f(x) = (x-7/8)^{m_1}(a_n x^{n-m_1} + \cdots + b_0)$$

con $1 \leq m_1 \leq 4$, siendo $m_1 = 2k_1$ ($k_1 \in \mathbb{Z}$) y $a_n, \ldots, b_0 \in \mathbb{R}$. Casos posibles:

a) $m_1 = 2$. En este caso tendríamos

$$f(x) = (x-7/8)^2(a_4 x^2 + b_1 x + b_0)$$

con $a_4, b_1, b_0 \in \mathbb{R}$ a determinar. Para obtener las constantes empleamos que $f(0) = 49$, $f(3/4) = 1$ y $f(1) = 1$, de donde se deduce que $a_4 = 0$, $b_1 = 0$ y $b_0 = 64$. Sustituyendo dichos valores en la factorización y operando: $64x^2 - 16x + 49$.

b) $m_1 = 4$. En este otro caso, el polinomio candidato sería:

$$f(x) = a(x-7/8)^4$$

con $a \in \mathbb{R}$ a determinar. Teniendo en cuenta que $f(0) = 49$ y $f(1) = 1$, obtendríamos dos valores de a distintos cosa que es imposible.

Por tanto el polinomio que buscamos es: $\boxed{64x^2 - 16x + 49}$

Gráfica Naranja: Empleando las raíces extraídas de la representación gráfica y el apartado c) del Ejercicio 1 y II, sabemos que la factorización será de la siguiente forma:

$$f(x) = (x+3)^{m_1}(x-2)^{m_2}(a_n x^{n-m_1-m_2} + \cdots + b_0)$$

con $1 \leq m_1, m_2 \leq 4$, siendo $m_1 = 2k_1 + 1$, $m_2 = 2k_2 + 1$ ($k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$) y $a_n, \ldots, b_0 \in \mathbb{R}$. Casos posibles:

10

a) $m_1 = 1$ **y** $m_2 = 1$**. En este caso tendríamos:**

$$f(x) = (x+3)(x-2)(a_4x^2 + b_1x + b_0)$$

con $a_4, b_1, b_0 \in \mathbb{R}$ **a determinar. Para obtener las constantes empleamos que** $f(-1) = -6$**,** $f(0) = -6$ **y** $f(1) = -4$**, de donde se deduce que** $a_4 = 0$**,** $b_1 = 0$ **y** $b_0 = 1$**. Sustituyendo dichos valores en la factorización y operando:** $x^2 + x - 6$**.**

b) $m_1 = 1$ **y** $m_2 = 3$**. En este otro caso, el polinomio candidato sería:**

$$f(x) = a(x+3)(x-2)^3$$

con $a \in \mathbb{R}$ **a determinar. Teniendo en cuenta que** $f(-1) = -6$ **y** $f(0) = -6$**, obtendríamos dos valores de** a **distintos cosa que es imposible.**

c) $m_1 = 3$ **y** $m_2 = 1$**. En este otro caso, el polinomio candidato sería:**

$$f(x) = a(x+3)^3(x-2)$$

con $a \in \mathbb{R}$ **a determinar. Teniendo en cuenta que** $f(-1) = -6$ **y** $f(0) = -6$**, obtendríamos dos valores de** a **distintos cosa que es imposible.**

d) $m_1 = 3$ **y** $m_2 = 3$**. Imposible.**

Por tanto el polinomio que buscamos es: $\boxed{x^2 + x - 6}$

Gráfica Morada: Empleando las raíces extraídas de la representación gráfica y el apartado c) del Ejercicio 1 y II, sabemos que la factorización será de la siguiente forma:

$$f(x) = (x+3)^{m_1}(x+1)^{m_2}(x-2)^{m_3}(a_nx^{n-m_1-m_2-m_3} + \cdots + b_0)$$

con $1 \leq m_1, m_2, m_3 \leq 4$**, siendo** $m_1 = 2k_1+1$**,** $m_2 = 2k_2$**,** $m_3 = 2k_3+1$ **(**$k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$**) y** $a_n, \ldots, b_0 \in \mathbb{R}$**. Casos posibles:**

a) $m_1 = 1$**,** $m_2 = 2$ **y** $m_3 = 1$**. En este caso tendríamos:**

$$f(x) = a(x+3)(x+1)^2(x-2)$$

con $a \in \mathbb{R}$ **a determinar. Para obtener las constantes empleamos que** $f(0) = -6$**, de donde se deduce que** $a = 1$**. Sustituyendo dichos valores en la factorización y operando:** $x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 11x - 6$**.**

b) $m_1 = 1$**,** $m_2 = 2$ **y** $m_3 = 3$**. Imposible.**

c) $m_1 = 1$**,** $m_2 = 4$ **y** $m_3 = 1$**. Imposible.**

d) $m_1 = 1$**,** $m_2 = 4$ **y** $m_3 = 3$**. Imposible.**

e) $m_1 = 3$**,** $m_2 = 2$ **y** $m_3 = 1$**. Imposible.**

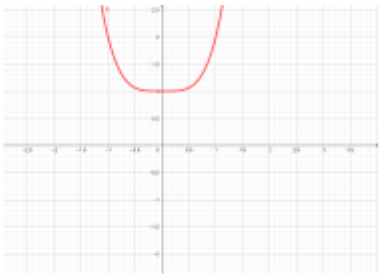
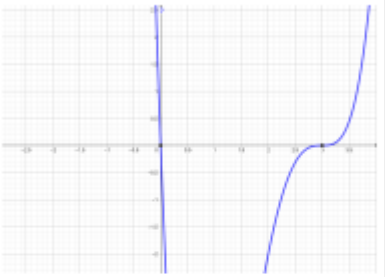
f) $m_1 = 3$**,** $m_2 = 2$ **y** $m_3 = 3$**. Imposible.**

g) $m_1 = 3$**,** $m_2 = 4$ **y** $m_3 = 1$**. Imposible.**

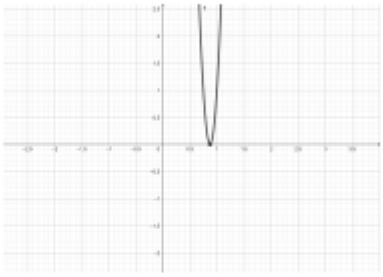
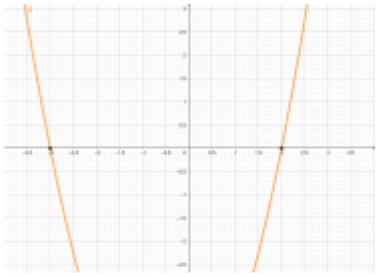
h) $m_1 = 3$**,** $m_2 = 4$ **y** $m_3 = 3$**. Imposible.**

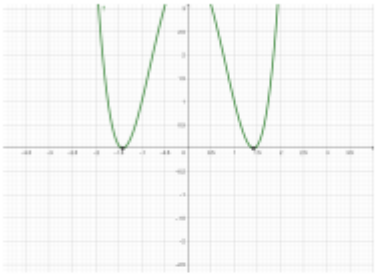
Por tanto el polinomio que buscamos es: $\boxed{x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 11x - 6}$

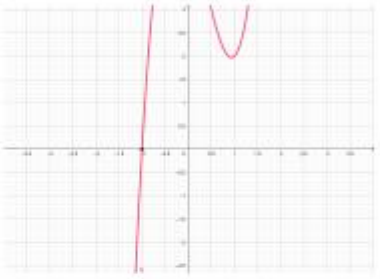
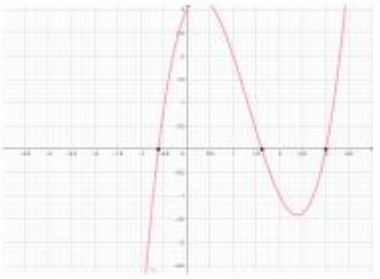
Representación gráfica		Representación gráfica	
Puntos de corte con el eje X	$(-2,0)$ $(-\sqrt{3},0)$ $(1,0)$ $(\sqrt{3},0)$	Puntos de corte con el eje X	$(-2,0)$ $(5/2,0)$
Otros puntos	$(0,6)$	Otros puntos	$(0,50)$ $(2,4)$
Asociada		Asociada	
Obtenida	$x^4+x^3-5x^2-3x+6$	Obtenida	$4x^3-12x^2-15x+50$

Representación gráfica		Representación gráfica	
			
Puntos de corte con el eje X	No tiene	Puntos de corte con el eje X	$(0,0)$ $(3,0)$
Otros puntos	$(0,1)$	Otros puntos	$(1,-8)$
Asociada	x^4+1	Asociada	$x^4-9x^3+27x^2-27x$
Obtenida		Obtenida	

12

Representación gráfica		Representación gráfica	
			
Puntos de corte con el eje X	$(7/8, 0)$	Puntos de corte con el eje X	$(-3, 0)$ $(2, 0)$
Otros puntos	$(0, 49)$ $(1, 1)$ $(3/4, 1)$	Otros puntos	$(-1, -6)$ $(0, -6)$ $(1, -4)$
Asociada		Asociada	
Obtenida	$64x^2 - 112x + 49$	Obtenida	$x^2 + x - 6$

Representación gráfica		Representación gráfica	
			
Puntos de corte con el eje X	$(-3, 0)$ $(-1, 0)$ $(2, 0)$	Puntos de corte con el eje X	$(-\sqrt{2}, 0)$ $(\sqrt{2}, 0)$
Otros puntos	$(0, -6)$	Otros puntos	$(0, 4)$
Asociada		Asociada	$x^4 - 4x^2 + 4$
Obtenida	$x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 11x - 6$	Obtenida	

Representación gráfica		Representación gráfica	
			
Puntos de corte con el eje X	$(-1, 0)$	Puntos de corte con el eje X	$((1-\sqrt{5})/2, 0)$ $(3, 0)$ $((1+\sqrt{5})/2, 0)$
Otros puntos	$(0, 5)$	Otros puntos	$(0, 3)$
Asociada	$4x^3 - 4x^2 - 3x + 5$	Asociada	$x^3 - 4x^2 + 2x + 3$
Obtenida		Obtenida	