



Facultad de Educación

**MÁSTER EN FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN
SECUNDARIA**

**La función exponencial y la modelización económica: las construcciones
dinámicas como recurso facilitador del aprendizaje.**

**The exponential function and the economic modeling: Dynamic
constructions as facilitator resource for learning.**

Alumna María Del Campo Blanco

Especialidad: Economía y FOL

Director: Pedro Álvarez Causelo

Curso académico: 2023/2024

Fecha: Junio de 2024

Resumen

En el presente trabajo se discute el concepto de función en términos de covariación como herramienta para un aprendizaje significativo de la función exponencial. Se revisa la literatura de la didáctica de las matemáticas entorno a la definición de función, analizando la brecha existente entre la definición dada por los estudiantes y una noción de función útil para la modelización económica. Nos fijamos en el currículo de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I y Economía Financiera, materias en las que se define o utiliza la función exponencial, así como los libros de texto en los que se apoyan dichas materias con el objetivo de analizar las posibles limitaciones o ineficiencias en el aprendizaje de esta. En vista de estos aspectos, se plantea una propuesta interdisciplinar para el primer curso de bachillerato, basada en el manejo de construcciones dinámicas elaboradas con el software GeoGebra, facilitando la movilización de la función exponencial en un contexto económico. El uso del software permite al alumno trabajar de forma simultánea con representaciones gráficas, algebraicas y tabulares de un mismo concepto, proporcionando un recurso innovador para el aprendizaje por manipulación de la función exponencial.

Abstract

This paper discusses the concept of function in terms of covariation as a tool for meaningful learning of the exponential function. The literature on the didactics of mathematics regarding the definition of function has been reviewed, analyzing the gap between the definition given by students and a notion of function useful for economic modeling. I focus on the curriculum of Applied Mathematics to Social Sciences I and Financial Economics, subjects in which the exponential function is defined or used, as well as the textbooks that support these subjects, with the aim of analyzing possible limitations or inefficiencies in its learning. In light of these aspects, an interdisciplinary proposal for the first year of high school is presented, based on the use of dynamic constructions made with GeoGebra software, facilitating the application of the exponential function in an economic context. The use of the software allows students to work simultaneously with graphical, algebraic, and tabular representations of the same concept, providing an innovative resource for learning by manipulation of the exponential function.

1. INTRODUCCIÓN	5
2. MARCO TEÓRICO.....	7
2.1. El concepto matemático de función: enseñanza y aprendizaje.....	7
2.2. El caso concreto de la función exponencial	12
2.3. La función exponencial en el currículo de Bachillerato	16
2.3.1. El currículo de Matemáticas en la educación secundaria	16
2.3.2. Currículo de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales	17
2.3.3. Currículo de Economía Financiera.....	23
2.3.4. Revisión de los libros de texto de Bachillerato.....	25
3. PROPUESTA DIDÁCTICA INTERDISCIPLINAR	27
3.1. Variaciones absolutas y variaciones relativas	31
3.2. Funciones y covariación: la función lineal como patrón de referencia	36
3.3. De la función lineal a la exponencial: dominio discreto	38
3.4. Hacia la comprensión de la covariación exponencial en un dominio continuo	43
4. CONCLUSIONES	47
5. BIBLIOGRAFÍA	49

1. INTRODUCCIÓN

El concepto de función es uno de los conceptos fundamentales dentro de las matemáticas, considerándose entre otros un elemento clave para un aprendizaje significativo del cálculo. Desde este punto de vista, la manera habitual de definir la función ha sido resaltando la correspondencia de valores, en donde los elementos de un conjunto se corresponden con los de otro, de modo que cada elemento del primero corresponde exactamente a un elemento del segundo. Esta definición es suficientemente general pero poco práctica para otras utilidades como la modelización matemática. Como se muestran en diversas investigaciones el concepto de función que se forma en el estudiante en su paso por la educación secundaria y el bachillerato es ineficiente para resolver problemas de la vida cotidiana, encontrar patrones de cambio o relacionar cambios entre magnitudes. En economía, y en ciencias es fundamental el aprendizaje del concepto de función como la relación entre dos magnitudes que varían. Para alcanzar dicho objetivo, en este trabajo, se considera clave la correcta comprensión del concepto de función en términos de covariación, entendiendo de este modo como responde la variable dependiente frente a cambios en la variable independiente.

Este salto en el concepto de función de una definición más estática basada en la manipulación infundada de símbolos a una definición de la función en movimiento es uno de los retos de la educación matemática actual.

La idea de covariación resulta más intuitiva cuando encontramos esquemas lineales o de proporcionalidad, sin embargo, a medida que vamos introduciendo otras relaciones, como la que podemos encontrar en el caso concreto de la función exponencial, lo que parecía un entendimiento intuitivo se torna una tarea difícil. Es en este contexto de dificultad y con el comienzo de la nueva materia optativa de Economía Financiera en 1º de Bachillerato implantada en la LOMLOE Ley orgánica 3/2020, (2020, 29 diciembre) surge la iniciativa del presente trabajo, dibujando un marco de aprendizaje interdisciplinar en donde se contextualiza la función lineal y exponencial en términos de capitalización compuesta y simple, a través de la idea de covariación.

Con este objetivo se realiza una propuesta didáctica con una serie de actividades que se apoyan en construcciones dinámicas elaboradas con el software GeoGebra, generando de esta forma un campo para el estudiante de aprendizaje por manipulación.

A continuación, se detallan los siguientes objetivos específicos:

- En primer lugar, se lleva a cabo una revisión de la literatura específica para establecer un marco teórico. Se analizan las limitaciones en los procesos de enseñanza actuales en torno al concepto de función, en concreto de la función exponencial, y las posibles alternativas teóricas planteadas para superar estas limitaciones.
- En segundo lugar, se revisa los currículos de secundaria de las materias de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I y de Economía Financiera, resaltando aquellas competencias específicas, criterios de evaluación y saberes básicos que aborden el concepto de función, en concreto la función lineal y la función exponencial.

En paralelo se analizan diferentes libros de texto de la materia de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales de Bachillerato para conocer la manera y la forma en la que se enseña las diferentes funciones, en concreto la función exponencial.

- Por último, se presenta una propuesta interdisciplinar a partir de construcciones dinámicas para un aprendizaje significativo de la función en términos de covariación.

De acuerdo con estos objetivos el trabajo se estructura de la siguiente manera. Como punto de partida se revisa la literatura entorno al concepto de función y su definición, haciendo un análisis de las formas en las que se ha construido tradicionalmente el concepto de función, y las diferentes alternativas propuestas desde un razonamiento covariacional, en concreto de la función exponencial. Seguido, revisamos el currículo de la materia de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I y Economía Financiera, así como de los libros de texto para conocer cómo se aborda la función exponencial en la materia de Matemáticas, y como se comprende y se hace uso de este concepto en la materia de Economía Financiera, para ello nos enfocaremos en los contenidos, así como en los ejercicios que se plantean. Una vez conocido el modo en el que se aborda estas

cuestiones planteamos una propuesta alternativa interdisciplinar que incluye actividades para llevar a cabo en el aula en la materia de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias sociales I y la materia de Economía Financiera, acompañadas de construcciones dinámicas elaboradas en el software GeoGebra con el objetivo de que el estudiante obtenga un aprendizaje por manipulación significativo. Por último, se presentan las principales conclusiones del trabajo.

2. MARCO TEÓRICO

2.1. El concepto matemático de función: enseñanza y aprendizaje

El concepto de función es, sin lugar a duda, uno de los conceptos fundamentales dentro de las matemáticas. No solo como concepto clave para el logro de un aprendizaje significativo del cálculo, sino que su aplicación es de gran utilidad para explicar y modelizar muchos fenómenos que acontecen a nuestro alrededor. No en vano, desde finales del siglo diecinueve se ha recomendado de manera reiterada incrementar en los currículos escolares el énfasis en el estudio de las funciones (Carlson et al., 1994). Sin embargo, esta enfatización será insuficiente si no se ve acompañada de una modificación en la forma de abordar el aprendizaje de este concepto, alejándose de la común manipulación infundada de símbolos (Thompson, 1994). A pesar de que se aboga por colocar el tema de las funciones en una posición central en los currículos de la secundaria, no se aborda explícitamente las cuestiones epistemológicas que surgen a medida que el tratamiento de las funciones se aleja del énfasis en las definiciones formales (Confrey y Smith, 1994) .

Diferentes investigaciones (Castillo-Garsow, 2013; Sierpinska, 1992; P. W. Thompson, 1994b, 1998) refieren que los estudiantes que acceden a la universidad siguen teniendo una comprensión deficiente de las funciones, la cual arrastran en cursos sucesivos dificultando la comprensión de conceptos más complejos, así como su aplicabilidad en diferentes campos (Carlson et al., 1994). Esto demuestra que la tarea no es simple, el concepto de función es bastante abstracto, lo que hace complicada su definición y comprensión. Por este motivo, analizando la literatura reciente, vemos que es un área de investigación que sigue estando vigente y en continua actualización.

Para poder analizar el aprendizaje de la función vamos a utilizar la distinción que realizan Tall y Vinner (1981) entre la definición de un concepto y la “imagen del concepto”. Ellos plantean que, saber la definición de un concepto no garantiza su comprensión, sino que es necesario analizar lo que llamaron “concept image”, (en este trabajo se traduce como “imagen del concepto o conceptualización”), que se forma en el estudiante. En su uso, la definición de un concepto es una formulación lingüística que demarca los límites de la aplicación de una palabra o frase. Por otro lado, una imagen conceptual comprende las representaciones visuales, imágenes mentales, experiencias e impresiones evocadas por el nombre del concepto (Thompson, 1994).

Como señalan Tall y Vinner (1981, p.152), “usaremos el término imagen del concepto para describir la estructura cognitiva total asociada a un concepto, lo que incluye todas las imágenes mentales y propiedades, y los procesos asociados. Se construye a lo largo de los años, a través de experiencias de todo tipo, cambiando a medida que el individuo recibe nuevos estímulos y madura”. En un contexto cotidiano para comprender una frase no acudimos a la definición de los términos presentes en ella, sino que evocamos al imaginario del concepto. Esto sucede porque en dichos contextos los términos no los hemos conocido a través de su definición, sino a través de su uso, y es esto lo que nos permite construir la imagen del concepto a la que recurrir.

Al igual que Tall y Vinner (1981), Sierpinska (1992) afirma que para comprender un concepto no es suficiente con leer su definición, sino, solamente cuando hemos visto ejemplos, cuando somos conscientes de sus relaciones con otros conceptos, cuando descubrimos la posición que el objeto tiene en una teoría, entonces podemos afirmar que lo hemos comprendido. La misma Sierpinska (1992) señala un conflicto clave en el aprendizaje del concepto de función; es el que se da entre el concepto de función y el prototipo que los estudiantes construyen a partir de los primeros ejemplos a los que han sido expuestos, las primeras representaciones gráficas dadas por una fórmula simple. Supone el estudiante que este prototipo acoge toda la definición, pero al encontrarse con otros ejemplos y situaciones diferentes al prototipo, rechaza la definición al verse modificado el prototipo (Sierpinska, 1992). Esto lo vamos a ver claro en el caso concreto de la función exponencial, cuando al estudiante se le presentan

exponentes menores que 1, o negativos, e incluso cuando se trabaja con bases menores que 1, que deja de considerar dicha función como una función exponencial, y cree encontrarse con una función diferente.

Así es, como muestra la literatura (Sierpinska, 1992), esta imagen del concepto que se genera en el estudiante puede ser confusa, existiendo una brecha entre la definición dada por los estudiantes y la noción de función.

Para poder analizar esta imagen del concepto pondremos el foco en la dinámica de las operaciones mentales que hacen posible su construcción. Trabajaremos en consistencia con la descripción de imagen que realiza Thompson (1994b): Un constructo dinámico, que se origina en acciones corporales y movimientos de la atención, entendida esta como la fuente y el vehículo de las operaciones mentales.

Al igual que hizo Thompson (1994a) nos centraremos en la idea de imagen que realizó Piaget y su relación con las operaciones mentales, de este modo entendemos que la imagen del concepto se forma de manera evolutiva, como una secuencia de fases o niveles que suceden de una manera ordenada.

En consonancia con esto, Dubinsky (1996), influenciado a su vez por la propuesta de Piaget de abstracción reflexiva, desarrolló la teoría Acción-Proceso-Objeto-Esquema (APOE), en la cual la comprensión se desarrolla a partir de la manipulación de los objetos, ya sean físicos o mentales, conformando acciones que se interiorizan como procesos que luego se encapsulan como objetos. Este mecanismo de aprendizaje tiene el carácter dinámico en el que se focaliza Thompson (y que nos interesa en el presente trabajo), y que el mismo señala como un entorno prometedor para que los estudiantes desarrollen un concepto de función como proceso útil. Esta visión del concepto de función como proceso, creemos que es de gran utilidad ya que implica una transformación dinámica donde el estudiante es capaz de coordinar el cambio de una variable con el cambio de otra, diferenciándola de una concepción de la función como acción que es entendida como la habilidad de calcular y atribuir valores uno a uno en la expresión algebraica, una concepción más estática que se asemeja a una receta para aplicar a los números. Una concepción de proceso de la función abre la puerta a una gran diversidad de imágenes. Los estudiantes, de esta forma

pueden, comenzar a imaginar el “recorrer” un continuo de números, dejando que la función se exprese rápidamente en cada número (Thompson, 1994).

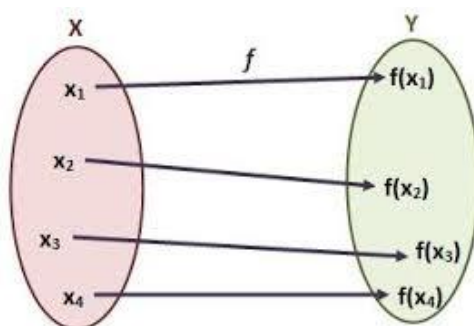
Pero como señala Thompson (1994) no es una tarea sencilla y rápida, los estudiantes deben practicar para ser capaces de alcanzar una imagen de este tipo.

De la correspondencia a la coordinación

La definición formal de función que encontramos habitualmente en los manuales educativos de matemáticas resalta la correspondencia de valores más que la coordinación o variación. Así la encontramos definida normalmente, como una relación entre dos magnitudes de forma que un valor cualquiera de una variable independiente le hacemos corresponder, un único valor de la otra variable independiente. Bajo esta definición, los elementos de un conjunto se corresponden con los elementos de otro, de modo que cada elemento del primero corresponde exactamente a un elemento del segundo.

Figura 1

Concepto de función



Esta idea de función es suficientemente general, pero poco práctica para otras utilidades como la modelización matemática.

Aunque es verdad que no podemos simplificar la idea de función como covariación, muchos autores afirman que el concepto de función en general se entendería mejor desde una perspectiva covariacional, por ello, muchos de los investigadores se han interesado en el estudio de la covariación como herramienta para su comprensión. Uno de los primeros trabajos en este sentido lo realizó Thompson (1994) sobre el límite y la acumulación. Los resultados nos muestran como los estudiantes efectivamente fueron capaces de aplicar sus

habilidades de razonamiento covariacional en una variedad de contextos. Las imágenes que surgen de estos contextos podrían ser indicios para considerar el razonamiento covariacional como (utilizando el término de Tall y Vinner) una “raíz cognitiva”.

El razonamiento covariacional lo entendemos bajo la definición que encontramos en Carlson et al. (2003, p 124), actividades cognitivas involucradas en la coordinación de dos cantidades, que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra.

Estos investigadores coinciden con la visión de Saldanha y Thompson (1998) de que las imágenes de covariación son evolutivas, se van formando; por lo tanto, a medida que la imagen de covariación se desarrolla, se va alcanzando un razonamiento más sofisticado. A pesar de que este desarrollo solo se podrá determinar mientras el individuo vaya desarrollando una tarea en particular, sí que podemos apreciar diferentes etapas y acciones mentales que suceden por lo general una detrás de otra, que nos sirven de guía para la elaboración de nuestras actividades.

A continuación, se muestran las fases de desarrollo o acciones mentales del razonamiento covariacional, basadas en las investigaciones de Carlson et al. (2003)

Tabla 1

Acciones mentales del marco conceptual elaborada por Carlson et al. (2003):

Acción mental	Descripción de la acción mental	Comportamientos
AM1	Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.	Designación de los ejes con indicaciones verbales de coordinación de las dos variables (e.g., y cambia con cambios en x).
AM2	Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable	Construcción de una línea recta creciente. Verbalización de la consistencia de la dirección del cambio del valor de salida mientras se consideran incrementos uniformes del valor de entrada.
AM3	Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable de entrada.	Localización de puntos/construcción de rectas secantes. Verbalización de la consciencia de la cantidad de cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM4	Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable entrada.	Construcción de rectas secantes contiguas para el dominio. Verbalización de la consciencia de la razón de cambio del valor de salida (con respecto al valor de entrada) mientras se consideran incrementos uniformes del valor de entrada.
AM5	Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.	Construcción de una curva suave con indicaciones claras de los cambios de concavidad. Verbalización de la consciencia de los cambios instantáneos en la razón de cambio para todo el dominio de la función (los puntos de inflexión y la dirección de las concavidades son correctos.)

2.2. El caso concreto de la función exponencial

Muchos de los avances logrados en materia de modelización del mundo real pasan por la capacidad de aplicar el razonamiento covariacional al interpretar y representar funciones asociadas a eventos dinámicos. En concreto, en el proceso de modelización en economía, una vez que se define el objeto de estudio, se realizan una serie de simplificaciones de una situación del mundo real y se establecen unas magnitudes, el siguiente paso sería matematizar el modelo estableciendo relaciones entre estas magnitudes, expresadas en variables mediante funciones. Para el desarrollo matemático del modelo, el razonamiento covariacional en el que se apoya el concepto de función es fundamental ya que determina como dos magnitudes varían simultáneamente (Carlson et al., 1994).

Si el estudiante comprende la idea de covariación, es relativamente sencillo que logre comprender los distintos tipos de relaciones de dependencia de las funciones más utilizadas: lineal, exponencial, logarítmica, etc. Sin embargo, la experiencia muestra como la idea de covariación resulta más intuitiva para los estudiantes en el caso de las relaciones lineales, cuando aumentos aditivos de una variable se coordinan con aumentos aditivos de la variable dependiente. Es decir, la idea de covariación tiene un mejor entendimiento en el caso de los estudiantes, cuando encontramos esquemas lineales o de proporcionalidad y, sin embargo, surgen serias dificultades cuando estos esquemas no son lineales, observando incluso una tendencia a asimilar modelos lineales a situaciones de no linealidad. Una de las posibles causas de la facilidad para comprender los esquemas lineales radica en que los esquemas mentales lineales de las personas son el producto de un largo proceso de construcción que se inicia con su propia participación en situaciones cotidianas que requieren, en su gran mayoría, ser modeladas mediante variaciones lineales. Es decir, esa imagen conceptual de la que hemos hablado en anteriores apartados se va construyendo cotidianamente, con un mayor número de observaciones que ejemplifican la relación lineal de las variables. Mientras que los esquemas no lineales, y en particular los exponenciales, son más complejos pues se apoyan parcialmente en la estructuras aditivas y multiplicativas y la escasa participación de las personas en este tipo de situaciones no colabora con su construcción, por lo que resulta necesario estudiar qué situaciones pueden facilitar o no con su enseñanza, y en particular la construcción de sus significados (Foti, 2021).

Tanto investigadores como educadores coinciden en la necesidad de lograr que los estudiantes tengan un aprendizaje significativo de la función exponencial, ya que se observa el arraigo a nociones que escolarmente se han trabajado con mayor intensidad. Una herramienta muy utilizada para el aprendizaje de la función exponencial es la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma, evidenciando que no se ha desarrollado un argumento funcional, quedando así en un acercamiento operatorio. Esto se reafirma al mirar las operaciones matemáticas que se invocan ante algunas expresiones algebraicas, o al realizar representaciones gráficas, pues prevalece la idea de que se requieren de una tabla para esbozar una función (Ferrari et al., 2010). Esta idea,

que se precisa una tabla para realizar la representación gráfica de una función, la veremos reflejada en algunos de los libros de texto de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales que veremos en siguientes apartados. Es decir, la manera de aproximarse al aprendizaje del crecimiento exponencial en el instituto es: presentando un problema cuya solución requiere de la multiplicación repetida y permitiendo en su resolución conectar con las nociones de la función exponencial como la base y el exponente (Castillo-Garsow, 2013).

El estudiante que razona el comportamiento exponencial solo como una multiplicación repetida, probablemente se verá limitado entre otras cuestiones a trabajar solo con exponentes de números naturales, es decir, para números como 0, -2, $\frac{3}{4}$ o $-\pi$ la interpretación del comportamiento exponencial como una multiplicación repetida es ineficaz (Kuper y Carlson, 2020).

La función exponencial desde el razonamiento covariacional: dos enfoques alternativos

Analizando la metodología habitual de enseñanza de la función exponencial basada en una multiplicación repetida, vemos no solo posible, sino deseable, otras formas de concebir la función exponencial. Entre ellas, podemos encontrar, principalmente, dos aproximaciones desde un enfoque covariacional, aunque ambas coinciden en describir la acción de *coordinar* como fundamental para el razonamiento acerca de las relaciones funcionales dinámicas.

Por un lado, una primera aproximación la encontramos en las investigaciones de Confrey y Smith que introdujeron dos nuevos constructos como son el de “*splitting*” y “*covariational approach to functions*”, argumentando que la combinación de ambos brindaba una aproximación eficiente a la comprensión de la función exponencial (Confrey y Smith, 1994).

Para Confrey y Smith (1994) no solo se puede ver la multiplicación como una repetición de la suma, si no que al igual que desarrollamos la idea de contar en el desarrollo de la suma y la resta, aparece este constructo denominado Split (o partición traducida al castellano) en la visión del desarrollo de la multiplicación y la división. Esta idea es básica para la comprensión o el manejo de la ratio o la tasa de cambio, fundamental en el trabajo de Confrey y Smith.

Para Confrey y Smith (1995) explicar la noción de covariación implica moverse entre los valores sucesivos de una variable, coordinando esos cambios o movimientos con los movimientos que se producen entre los valores sucesivos de otra variable. También explican que podemos aproximarnos a un movimiento covariacional entendido como la yuxtaposición de dos progresiones, las cuales se generan de manera independiente a partir del análisis numérico, identificando patrones en los datos (Ferrari y Farfán, 2008).

Es a través de este movimiento en donde el estudiante deduce o descubre la tasa de cambio. Por ejemplo, en un estudio que realizaron con estudiantes vieron como estos calcularon las tasas de cambio realizando comparaciones entre lo nuevo y lo viejo y llegando a expresiones proporcionales.

En el caso de las tablas, esto incluye la coordinación de la variación en dos o más columnas mientras se recorre la tabla de arriba abajo (Confrey y Smith, 1994).

Confrey y Smith sugieren que esto comprende una concepción importante del crecimiento multiplicativo que se encuentra calculando las razones entre valores sucesivos de y , y los cambios unitarios constantes en valores de x . Esta concepción es fundamental para el enfoque de la función exponencial en el que se alienta a los estudiantes a coordinar el factor de crecimiento (calculado como $\frac{y_2}{y_1}$) con los cambios aditivos correspondientes de x , calculados como $x_2 - x_1$ (Ellis et al., 2015).

Por otro lado, Saldanha y Thompson (1998) amplían esta idea de covariación buscando los fundamentos mentales que pueden apoyar la capacidad de pensar covariacionalmente. Ellos conciben la covariación como la acción de mantener en la mente, de manera simultánea, una imagen sostenida de dos cantidades (Thompson, 1998, p.3). Esta actividad mental involucra la coordinación de las dos cantidades, es decir, hacer el seguimiento de los valores de cada variable, y darse cuenta de que en el instante que una cambia, la otra también lo hace. Esta idea de covariación se desarrolla, y este desarrollo pasa de la coordinación de los valores de dos variables, a la imagen de una coordinación continua de ambas variables para un intervalo determinado. De acuerdo con Saldanha y Thompson (1998, p.2) “al inicio del desarrollo uno coordina dos valores de las variables – se piensa uno, después en otro, después en el primero, luego en el segundo, y

así sucesivamente. Posteriormente, las imágenes de la covariación suponen comprender el tiempo como una variable continua, de tal manera que en la imagen que uno tiene los dos valores de las variables persisten.”

2.3.La función exponencial en el currículo de Bachillerato

En este apartado nos disponemos a analizar la normativa educativa de la Comunidad Autónoma de Cantabria centrándonos en las competencias específicas, criterios de evaluación y saberes básicos vinculados con el desarrollo de la competencia de modelización matemática en contextos reales, así como el caso concreto de la función exponencial y la capitalización financiera. Para ello, recurrimos al Decreto 73/2022, de 28 de julio, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Cantabria, y la orden EDU/42/2022, 8 de agosto, porque se dictan instrucciones para la implantación del Bachillerato en la Comunidad de Cantabria. En concreto focalizándonos en las materias de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I y la reciente optativa de Economía Financiera.

2.3.1. El currículo de Matemáticas en la educación secundaria

Como hemos señalado al inicio del presente trabajo es muy difícil aislar el momento exacto en el que se forma el concepto de función en el estudiante (en concreto el concepto de la función exponencial), sino que este se va formando a lo largo del tiempo (en esa imagen del concepto mencionada con anterioridad) sobre los cimientos de saberes anteriores necesarios para la construcción de la idea de función. Por ello, es difícil señalar un punto de inicio en el currículo de matemáticas de la noción de función exponencial.

Sin embargo, acercándonos al currículo de Matemáticas (materia obligatoria que se imparte desde el primer hasta el tercer curso de la etapa de secundaria) podemos observar la importancia que se da, desde el inicio de esta etapa, a la modelización de la realidad; en concreto, dentro de los saberes que comprenden el sentido algebraico, se señala: “Ver lo general en lo particular, reconociendo patrones y relaciones de dependencia entre variables y expresándolas mediante diferentes representaciones, así como la modelización de situaciones

matemáticas o del mundo real con expresiones simbólicas son características fundamentales del sentido algebraico” (Decreto 73/2022, p.234). A su vez, dentro de los saberes básicos, se describe la importancia de la “Modelización de situaciones de la vida cotidiana usando representaciones matemáticas y el lenguaje algebraico”, así como las “Relaciones de la vida cotidiana y clases y funciones que las modelizan” (Decreto 73/2022, p.234).

Adentrándonos ya en el cuarto curso de secundaria, vemos como se afianza este conocimiento relacional, no solo basado en la proporcionalidad lineal, sino que se comienzan a interpretar las relacionales no lineales y sus contextos. En concreto, en ambas opciones a elegir por el estudiante de la materia de Matemáticas, Matemáticas A y Matemáticas B, se describe, dentro del apartado 5 de los saberes dedicado a las relaciones y funciones, la comprensión de: “relaciones lineales y no lineales: identificación y comparación de diferentes modos de representación, tablas, gráficas o expresiones algebraicas y sus propiedades a partir de ellas” (Decreto 73/2022, p.252).

Por último, de manera más específica en la materia de Matemática A, en los saberes destinados al sentido numérico se detalla en un apartado dedicado a la educación financiera, la comprensión de “Métodos de resolución de problemas relacionados con aumentos o disminuciones porcentuales, intereses y tasas en contextos financieros, interpretando la solución obtenida en el contexto del problema” (Decreto 73/2022, p.251).

Por lo tanto, vemos como durante la educación secundaria se va gestando la capacidad del estudiante de modelizar problemas de la vida cotidiana, dando importancia a las relaciones cuantitativas en contextos cotidianos y a las clases de funciones que las modelizan.

2.3.2. Currículo de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales

Dentro de la propia introducción al currículo de las Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales vemos la importancia que se le da a las matemáticas para la modelización de los grandes retos globales de hoy, en concreto, se señala que “resulta imprescindible para la ciudadanía del s.XXI la utilización de conocimientos y destrezas matemáticas como el razonamiento, la modelización,

el pensamiento computacional o la resolución de problemas” (Decreto 73/2022, p.783). Considerando el desarrollo de esta capacidad, no solo como un objetivo de la competencia matemática y competencia en ciencia, tecnología e ingeniería, sino también como una competencia ciudadana, como se detalla: “Las conexiones establecidas entre las matemáticas y otras áreas de conocimiento y de resolución de problemas en contextos sociales están relacionados con la competencia ciudadana” (Decreto 73/2022, p.284).

Asimismo, dentro de las competencias específicas se señala la importancia de “Modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y de las ciencias sociales aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento para obtener posibles soluciones”, de manera que “la modelización y resolución de problemas constituyen un eje fundamental en el aprendizaje de las matemáticas, ya que son procesos centrales en la construcción del conocimiento matemático” (Decreto 73/2022, p.786).

Es decir, se alude desde el principio, no solo a lo aconsejable de aprender unas matemáticas en transversalidad e interdisciplinariedad con otras materias como puede ser la economía, sino que, se considera fundamental e imprescindible para el conocimiento matemático.

A continuación, se señalan las competencias específicas y sus correspondientes criterios de evaluación de las Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales asociados con los procesos de modelización económica, y de contextualización de las herramientas matemáticas, así como el concepto de función exponencial. Prácticamente todas ellas se podían señalar, de una manera u otra, importantes para desarrollar esta capacidad de modelización, ya que una competencia lleva a la otra y no se pueden dar de manera aislada. Sin embargo, aquí hemos hecho una selección de las competencias específicas en donde se señala con mayor preponderancia este hecho.

Hay que señalar que tanto las Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I de 1º de Bachillerato, como las Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II de 2º de Bachillerato, comparten tanto las competencias específicas como los criterios de evaluación.

Tabla 2

Competencias específicas y criterios de evaluación relativos a los procesos de modelización económica, y contextualización de las herramientas matemáticas, así como el concepto de función exponencial, en la materia Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I y II

Competencias específicas	Criterios de evaluación
1. Modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y de las ciencias sociales aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento para obtener posibles soluciones. La modelización y resolución de problemas constituyen un eje fundamental en el aprendizaje de las matemáticas, ya que son procesos centrales en la construcción de conocimiento matemático. Estos procesos aplicados en contextos diversos pueden motivar el aprendizaje y establecer unos cimientos cognitivos sólidos que permitan construir conceptos y experimentar las matemáticas como una herramienta para describir, analizar y ampliar la comprensión de situaciones de la vida cotidiana o de las ciencias sociales. El desarrollo de esta competencia conlleva los procesos de formulación del problema; la sistematización en la búsqueda de datos u objetos relevantes y sus relaciones; su codificación al lenguaje matemático o a un lenguaje fácil de interpretar por un sistema informático; la creación de modelos abstractos de situaciones reales y el uso de estrategias heurísticas de resolución, como la analogía con otros problemas, estimación, ensayo y error, resolverlo de manera inversa (ir hacia atrás) o la descomposición en problemas más sencillos, entre otras.	1.2 Emplear algunas estrategias y herramientas, incluidas las digitales, en la resolución de problemas de la vida cotidiana y de las ciencias sociales, valorando su eficiencia en cada caso. 1.2 Obtener todas las posibles soluciones matemáticas de problemas de la vida cotidiana y de las ciencias sociales, describiendo el procedimiento realizado

6. Descubrir los vínculos de las matemáticas con otras áreas de conocimiento y profundizar sus conexiones, interrelacionando conceptos y procedimientos, para modelizar, resolver problemas y desarrollar la capacidad crítica, creativa e innovadora en situaciones diversas. Observar relaciones y establecer conexiones matemáticas es un aspecto clave del quehacer matemático. La profundización en los conocimientos matemáticos y en la destreza para utilizar un amplio conjunto de representaciones, así como el establecimiento de conexiones entre las matemáticas y otras áreas de conocimiento, especialmente con las ciencias sociales, confieren al alumnado un gran potencial para resolver problemas en situaciones diversas. Estas conexiones también deberían ampliarse a las actitudes propias del quehacer matemático de forma que estas pueden ser transferidas a otras materias y contextos. En esta competencia juega un papel relevante la aplicación de las herramientas tecnológicas y su aplicación en la resolución de problemas en situaciones diversas, valorando la contribución de las matemáticas a la resolución de los grandes retos y objetivos eco sociales, tanto a lo largo de la historia como en la actualidad.	6.1 otras áreas de conocimiento y las matemáticas. 6.2 Analizar la aportación de las matemáticas al progreso de la humanidad reflexionando sobre su contribución en la propuesta de soluciones a situaciones complejas y a los retos en las ciencias sociales que se planteen.
---	--

En paralelo, ya que proponemos el uso de GeoGebra para la propuesta de aprendizaje vemos importante señalar la competencia específica que se señala en la tabla 3

Tabla 3

Competencias específicas y criterios de evaluación relativos al uso de tecnologías en la materia Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I y II

Competencias específicas	Criterios de evaluación
4. Utilizar el pensamiento computacional de forma eficaz, modificando, creando y generalizando algoritmos que resuelvan problemas mediante el uso de las matemáticas, para modelizar y resolver situaciones de la vida cotidiana y del ámbito de las ciencias sociales. El pensamiento computacional entronca directamente con la resolución de problemas y el planteamiento de procedimientos algorítmicos. Con el objetivo de llegar a una solución del problema que pueda ser ejecutada por un sistema informático, será necesario utilizar la abstracción para identificar los aspectos más relevantes y descomponer el problema en tareas más simples que se puedan codificar en un lenguaje apropiado. Llevar el pensamiento computacional a la vida diaria y al ámbito de las ciencias sociales supone relacionar las necesidades de modelado y simulación con las posibilidades de su tratamiento informatizado. El desarrollo de esta competencia conlleva la creación de modelos abstractos de situaciones cotidianas y del ámbito de las ciencias sociales, su automatización y la codificación en un lenguaje fácil de interpretar de forma automática	4.1 Interpretar, modelizar y resolver situaciones problematizadas de la vida cotidiana y de las ciencias sociales, utilizando el pensamiento computacional, modificando y creando algoritmos.

A continuación, se señalan los saberes básicos de la materia de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I asociados con los procesos de modelización económica, y de contextualización de las herramientas matemáticas, así como el concepto de función exponencial.

- *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I, 1º de Bachillerato*

Resaltamos de estos saberes básicos la presencia de la educación Financiera dentro del propio currículo de las Matemáticas haciendo explícita la potencia transversalidad de ambas materias. De igual modo, destacamos en el apartado Sentido algebraico, las distintas clases de funciones a saber, entre ellas la función exponencial y la logarítmica.

A. Sentido numérico, presentando en el punto 4 del mismo:

4. La Educación financiera.

- Resolución de problemas relacionados con la educación financiera (cuotas, tasas, intereses, préstamos...) con herramientas tecnológicas.
- Relaciones entre razones, proporciones, porcentajes, tasas (tanto por uno tanto por ciento, tanto por mil...), impuestos e incrementos absolutos y relativos, para la representación de relaciones cuantitativas en contextos reales.
- Aplicación del razonamiento proporcional a la resolución de problemas financieros: medios de pago con cobro de comisiones, cambios de divisas, etc., utilizando herramientas digitales cuando sea necesario.

C. Sentido algebraico

2. Modelo matemático.

- Relaciones cuantitativas esenciales en situaciones sencillas: estrategias de identificación y determinación de la clase o clases de funciones que pueden modelizarlas.

4. Relaciones y funciones.

- Representación gráfica de funciones utilizando la expresión más adecuada.

- Propiedades de las distintas clases de funciones, incluyendo, polinómica, exponencial, racional sencilla, irracional, logarítmica, y a trozos: comprensión y comparación.
- Álgebra simbólica en la representación y explicación de relaciones matemáticas sociales.

Continuamos analizando los saberes básicos de la materia de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

▪ *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II, 2º de Bachillerato.*

A. Sentido numérico:

3. La Educación financiera.

- Resolución de problemas de las ciencias sociales y de la economía.

B. Sentido numérico:

2. Modelo matemático

- Relaciones cuantitativas en situaciones diversas: estrategias de identificación y determinación de la clase o clases de funciones que pueden modelizarlas utilizando herramientas tecnológicas.

4. Relaciones y funciones.

- Representación análisis e interpretación de funciones con herramientas digitales.
- Propiedades de las distintas clases de funciones: comprensión y comparación.

2.3.3. Currículo de Economía Financiera.

A continuación, se detallarán las competencias específicas, criterios de evaluación y saberes básicos de la asignatura optativa de Economía Financiera que se relaciona con el uso directo de las funciones matemáticas en el contexto financiero de capitalización.

Tabla 4

Competencias específicas y criterios de evaluación relativos al uso directos de las funciones matemáticas en el contexto financiero de capitalización de la materia optativa Economía financiera de 1 de Bachillerato.

Competencias específicas	Criterios de evaluación
2. Analizar las soluciones de un problema usando diferentes técnicas y herramientas, evaluando las respuestas obtenidas. El desarrollo de esta competencia conlleva procesos reflexivos, estrategias sencillas de aprendizaje, uso eficaz de herramientas digitales como calculadoras u hojas de cálculo y la explicación del proceso. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del Perfil de salida: STEM1, STEM4, CD2, CPSA4,CC3,CE3	2.1 Comprobar la corrección matemática de las soluciones obtenidas de un problema financiero. 2.2 Comprobar la validez de las soluciones de un problema y su coherencia en el contexto planteado. 2.1 Reconocer la idoneidad de las distintas soluciones obtenidas en función de los posibles escenarios económicos presentados.
3. Utilizar los principios del pensamiento computacional para modelizar situaciones y resolver problemas de forma eficiente. El pensamiento computacional entronca directamente con la resolución de problemas y el planteamiento de procedimientos. Lleva el pensamiento computacional a la vida diaria supone relacionar los aspectos fundamentales de la informática con las necesidades del alumnado. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del Perfil de salida: STEM3, CD3, CD5, CE3.	3.1 Reconocer patrones, organizar datos y descomponer un problema en partes más simples facilitando su interpretación computacional. 3.2 Modelizar situaciones y resolver problemas financieros de forma eficiente interpretando y modificando algoritmos.
4. Representar, de forma individual y colectiva, conceptos, procedimientos, información y resultados financieros. El desarrollo de esta competencia conlleva la adquisición de un conjunto de representaciones matemáticas que amplían significativamente la capacidad para interpretar y resolver problemas de la vida real.	4.1 Representar conceptos, procedimientos, información y resultados financieros de modos distintos y con diferentes herramientas, incluidas las digitales, visualizando ideas y valorando su utilidad para compartir información.

Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del Perfil de salida: STEM3, STEM4, CD2, CD3, CE3, CCEC4.	4.2 Elaborar representaciones que ayuden en la búsqueda de estrategias de resolución de una situación problematizada.
5. Comunicar de forma individual y colectiva conceptos, procedimientos y argumentos financieros, usando lenguaje oral, escrito o gráfico, utilizando la terminología financiera apropiada para dar significado y coherencia a las ideas financieras. A través de la comunicación las ideas se convierten en objetos de reflexión, perfeccionamiento, discusión y rectificación Esta competencia específica se conecta con las siguientes descriptores del Perfil de Salida: CCL3, STEM4, CD3, CE3, CCEC3, CCEC4.	5.1 Comunicar información utilizando el lenguaje financiero apropiado, utilizando diferentes medios, incluidos los digitales. Oralmente y por escrito, al describir, explicar y justificar razonamientos, procedimientos y conclusiones. 5.2 Reconocer y emplear el lenguaje económico financiero presente en la vida cotidiana.

En cuanto a los saberes básicos, destacamos:

A. Introducción a la operación financiera

- Capitalización simple
- Descuento simple
- Tantos equivalentes
- Equivalencia financiera de capitales.

B. Capitalización compuesta

- Descuento compuesto.
- Tantos equivalentes: Equivalencia financiera de capitales en compuesta.

2.3.4. Revisión de los libros de texto de Bachillerato

A continuación, se hace una revisión de diferentes libros de texto de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I, que actúan como manuales para los profesores de la materia, con el objetivo de esclarecer como se aborda las diferentes funciones en el aula, en concreto la función exponencial, así como el

contexto en el que se trabajan, y su concordancia con el currículo descrito en la normativa vigente.

Comenzamos con el libro recomendado en el IES Santa Clara de Santander en el curso escolar 2023-2024 para la materia de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I, de la editorial Editex.

Lo primero que llama la atención es la definición muy simplificada de la función exponencial: $y = b^x$. Esta expresión puede acotar mucho el entendimiento de la función. Pero lo que más llama la atención es una tabla a modo de lista con “*atributos*”, que se presenta para todas las diferentes funciones. Las diferencias de estos “atributos” parecen ser lo único que diferencia una función de la otra.

Para realizar la representación gráfica de la función se utiliza una tabla de datos, sin la cual el estudiante se ve impedido de realizar la representación gráfica. En general, se reflexiona sobre las gráficas de las funciones como un elemento complementario de la noción presentada, sin ser un argumento de discusión, y en la mayoría de los casos como interpretaciones geométricas de los conceptos. El propio formato y contenido de los libros tiene la apariencia de considerar las matemáticas como un conjunto fijo de conceptos y procedimientos que pueden ser organizados sistemáticamente en tópicos que deben ser recordados por los estudiantes. Entre los ejercicios aplicados a realizar encontramos algunos que hacen referencia a fenómenos físicos, como el primero, sobre una bola de nieve rondando por una montaña, incrementando su peso exponencialmente. Otros hacen referencia a controles de calidad de una cadena de montaje y otro al crecimiento anual de la población. Sin embargo 10 de los 17 problemas propuestos, presentan una expresión algebraica y piden una tabla de datos y su correspondiente representación gráfica, sin relacionar los crecimientos exponenciales con fenómenos sociales. En concreto, a excepción del fenómeno demográfico, no encontramos ningún comportamiento económico entre los ejercicios propuestos.

Comparamos con otro libro de texto de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I, de una editorial, Santillana, que encontramos habitualmente en el aula. Este libro de texto separa en diferentes unidades las matemáticas financieras y la unidad dedicada a las funciones, en concreto la función exponencial, sin establecer conexión entre las dos unidades.

Por un lado, se explica el interés compuesto con una fórmula matemática con diferentes parámetros a despejar en función de los datos que nos proporcione el problema, y, por otro lado, en otra unidad didáctica distinta, define la función exponencial con un listado de propiedades o características, y después representa la gráfica prototípica sin contextualizar. Entre los problemas a realizar encontramos 28 ejercicios sin aplicabilidad, y solo 12 asociados a fenómenos cotidianos. Entre ellos encontramos uno dedicado al desarrollo de la población de peces, otro a la ley de enfriamiento de Newton y otro que asocia el tiempo con la altura que alcanza un globo aerostático. Todos ellos fenómenos que suceden en el mundo real, pero al igual que sucedía en el libro de Editex, ninguno hace referencia a comportamientos económicos, ni siquiera sociales. Nos sorprende bastante siendo un libro de apoyo para la materia de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales, en donde se intuye que se debería resaltar la aplicabilidad de las matemáticas y en concreto en contextos sociales.

3. PROPUESTA DIDÁCTICA INTERDISCIPLINAR

En mi experiencia como profesora asociada de la Universidad de Cantabria en el curso 2022-2023 de la asignatura optativa de Matemáticas Financieras del Grado de Economía, pude comprobar la dificultad de los estudiantes de cursos avanzados para identificar patrones de cambio de la función exponencial en operaciones financieras como la capitalización compuesta. El aprendizaje tradicional de la función exponencial como una multiplicación repetida limita su contextualización en el contexto financiero y dificulta la identificación de bases no enteras. Junto con estas limitaciones observadas en alumnos del Grado de Economía, y con el surgimiento de una nueva materia optativa que se implanta en la LOMLOE Ley orgánica 3/2020, (2020, 29 diciembre), Economía Financiera, cuyos contenidos abren un campo de transversalidad con la materia de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I, surge la propuesta presentada a continuación. Como hemos visto, en ambos currículos, se pone especial énfasis en el objetivo de que el alumnado sea capaz de modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana. Y es desde este objetivo desde donde se construye la propuesta que presento en este trabajo.

Como he estado desarrollando a lo largo del trabajo, el concepto de función entendido en términos de covariación es clave para explicar y modelizar muchos fenómenos que acontecen a nuestro alrededor. En economía y en ciencias, cuando pensamos en magnitudes variables concebimos más bien las funciones como relaciones entre magnitudes que varían: diríamos, por ejemplo, que el espacio recorrido es una función del tiempo y la velocidad, o también, que el precio es una función de la cantidad de mercancías en el mercado (Sierpinski, 1992). En el caso concreto de la economía financiera se estudia el valor del dinero a través del tiempo. Uno de los conceptos claves para entender las matemáticas financieras son estos cambios que se producen en el valor del dinero a lo largo del tiempo, es frecuente señalar que el dinero no tiene el mismo valor hoy que, por ejemplo, dentro de un año.

Este comportamiento que se da en los mercados financieros nos permite contextualizar la relación de las variables que se da en la función exponencial y la función lineal como formas de recoger patrones de covariación distintos.

Para acercar al estudiante a un aprendizaje significativo del concepto de función se ha elaborado diferentes construcciones dinámicas con el software GeoGebra. La dinámica o estructura de estas actividades pasa por, el planteamiento de un problema que tendrán que resolver con la manipulación y el manejo de construcciones dinámicas, elaboradas de tal forma que el estudiante a través de la manipulación de diferentes objetos como, deslizadores, casillas de entradas, casillas de control, deje de ver la función como una expresión que produce un resultado a través del cálculo, y comience a ser capaz de coordinar el cambio en la variable tiempo con los cambios que se producen en el capital, comenzando de esta forma a ver la función en términos de proceso. Además, la construcción dinámica abre un campo infinito de posibilidades donde el estudiante puede hacerse preguntas fuera de las que le plantea el profesor, autoevaluándose y reflexionando acerca del ejercicio, y generando otras preguntas que amplían y suman a crear un concepto de función en términos de covariación.

La clave está, en trabajar las situaciones cotidianas desde un nuevo enfoque, apoyadas en las herramientas tecnológicas disponibles, con el objetivo de que el alumno analice, critique y extraiga conclusiones a partir de la información que se le pueda suministrar; así mismo, el uso de herramientas tecnológicas se transforma en un medio ideal para que el alumno optimice sus esquemas a

través de sistemas de representación de contenidos (Ronny Gamboa Araya, 2007).

La secuenciación de estas actividades se apoya en el esquema de acciones mentales elaborado por Carlson et al. (1994), principalmente en las tres primeras, en donde:

- La primera acción mental es coordinar la relación de dependencia de una variable con respecto a la otra. En el contexto de la capitalización he desarrollado actividades que ayuden a entender que el valor de capital depende del tiempo, así como actividades que inviten a reflexionar que parámetros pueden contribuir al crecimiento del capital.
- La segunda acción mental es la coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra. A través de la manipulación de los objetos presentes en las construcciones dinámicas el estudiante puede observar que ocurre en las variables cuando aumenta o disminuye el tiempo, estudiando contextos de capitalización y depreciación, y reflexionando sobre ellos.
- La tercera acción mental es la coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable de entrada. Los estudiantes a través de las actividades propuestas deben desarrollar la comprensión de que el crecimiento en el capital, en el caso de la función exponencial, a diferencia de la función línea podría determinarse hallando el ratio o factor de crecimiento.

Todas estas etapas, como hemos indicado con anterioridad, tienen un carácter evolutivo y secuencial, es decir, suceden de una manera ordenada en la cual no puedes llegar a una etapa sin haber alcanzado el entendimiento de las anteriores.

Justificación del uso del software GeoGebra

El uso de tecnologías de la información y la comunicación en el ámbito educativo es cada vez más habitual, como se constata diariamente el uso de las TIC en el ámbito educativo es un hecho consolidado, estas tecnologías, como se dice coloquialmente, han llegado a la escuela para quedarse. Sin embargo, aunque el uso de las nuevas tecnologías en el aula puede favorecer a las disciplinas

educativas hay que señalar que no por sí mismas, sino como parte de un proyecto pedagógico que las utilice intencionadamente para ello.

Entre las cualidades o beneficios que podemos encontrar en estas tecnologías vemos importante destacar su dinamismo, y la posibilidad de manipular objetos y visualizar los cambios en múltiples representaciones en un mismo momento.

Para la propuesta didáctica que se presenta este trabajo he elegido el software de GeoGebra en preferencia a otras tecnologías, sobre todo, por:

- La posibilidad de visualizar las diferentes representaciones de la función: algebraica, tabular, gráfica y verbal. Cada una de estas representaciones tiene una ventaja que contribuye a la mejor asimilación del concepto de función. La visión tabular nos permite la asociación de dos conjuntos de datos coordinados cambiando cuantitativamente, esta expresión nos permite comprender mejor la propuesta de Confrey y Smith para el aprendizaje de la covariación. Pero, además, a diferencia del método clásico de papel y lápiz, el software nos permite conectar la representación tabular con la representación gráfica y algebraica, siendo capaces de traducir la información de un tipo de representación a otra al instante; combinando la expresiones cualitativas y cuantitativas de la dependencia de las variables.
- Dinamismo: el software nos permite a través de los deslizadores que se asocian a las variables o parámetros, *ir recorriendo* los valores y construyendo la imagen de la función a medida que vamos recorriendo el dominio, viendo como cuando cambia una de las variables inmediatamente cambia la otra; una característica esencial para asimilar el razonamiento covariacional.

Por último, señalar, que la posibilidad de manipulación de los parámetros y la visualización inmediata de los cambios abre un espacio único para la reflexión en el alumnado: preguntándose, descubriendo y creando imágenes a medida que interactúa con las funciones a través de software.

3.1. Variaciones absolutas y variaciones relativas

Como hemos visto, en los libros de texto de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I se estudia, por un lado, la función exponencial y la función lineal, estudiando sus características y la forma de su gráfico; y por otro la aritmética mercantil, con el estudio de los porcentajes y las tasas de variación en contexto cotidianos, sin relacionar ambos contenidos. De esta forma, las funciones se aprenden de una manera teórica que cuesta ver representada en la realidad. Sin embargo, en muchas de nuestras actividades cotidianas encontramos patrones estudiados teóricamente en Matemáticas. Con esta primera actividad propuesta, queremos que el alumno descubra este hecho y lo explore. Esta actividad está diseñada para que la desarrolle el profesor de Economía Financiera. Después de esta primera actividad vamos a introducir al alumno en conceptos claves a la hora de comprender la función en términos de covariación. Estos conceptos son los cambios relativos y los cambios absolutos

Introducción a la matematización de situaciones reales

Actividad 1: Conteste a las siguientes cuestiones

- *Le he pedido a mi jefe un aumento anual de mi salario del 10%. Se ha negado, pero me aumentara 3000 € todos los años, es decir, un 10% de mi sueldo actual. ¿Cuál será mi salario al cabo de 3 años? Y, ¿cuál hubiese sido en el caso de que hubiese aceptado mi propuesta?*
- *Hoy por la tarde me compré un coche nuevo. En el concesionario me dijeron que se devaluará su valor un 8% cada año. Si me costó 32.000€, ¿cuándo su valor será la mitad de lo que me costó?*
- *Voy a comenzar a ahorrar para comprarme una bicicleta eléctrica que he visto de 1500€. Si todos los meses ahorro 100€, ¿en cuánto tiempo obtendré los 1500€ que quiero?*

Cambios relativos y absolutos

En concreto en el currículo de la materia de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I de primero de bachillerato se describe el aprendizaje de “Relaciones entre razones, proporciones, porcentajes, tasas (tanto por uno tanto por ciento, tanto por mil...), impuestos e incrementos absolutos y relativos, para la representación de relaciones cuantitativas en contextos reales.” (Decreto 73/2022, p.793). Es por ello por lo que esta actividad está recomendada para el profesor de Matemáticas Aplicadas a las ciencias sociales I.

Se propone contextualizar los contenidos con ejemplos reales de economía financiera, en lugar de recurrir a ejemplos del campo de la Física o la Biología como se ha visto que se proponen en los libros de texto, que, aunque reales, están más alejados de la realidad cotidiana del estudiante. De esta forma cuando el profesor de Económica Financiera explique conceptos como el tipo de interés, el interés o el montante, los alumnos tendrán menos dificultades en identificar estos conceptos, asociándolos con cambios relativos, ratios o cambios absolutos estudiados en la materia de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I.

Para comenzar definimos la variable dependiente (y), que en este caso hemos determinado que es el valor del dinero, y la variable (x), que hemos determinado que es el tiempo, y vemos los cambios que sufren ambas variables reflexionando sobre ellos.

Seguidamente se explica la distinción entre los cambios absolutos y los cambios relativos.

- Cambios absolutos: La variación absoluta de una serie temporal (también llamado *incremento*) es la diferencia entre dos valores de la serie. Por ejemplo, la variación absoluta de la magnitud con respecto al periodo anterior es:

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$$

- Cambios relativos: Para muchos efectos las cantidades absolutas son menos expresivas que sus relaciones con alguna otra magnitud de referencia. La forma más simple de relativizar es la construcción de una *razón o ratio* que es la relación por cociente entre dos cantidades. De esta

forma si el valor del dinero en el año t es y_t y en el año $t-1$ es y_{t-1} , la razón o relación por cociente entre será $\frac{y_t}{y_{t-1}}$.

El objetivo en este punto es que comiencen a ver las funciones en términos de cambio, para ello nos apoyamos en el enfoque de covariación de (Confrey y Smith, 1994) que implica ser capaz de moverse operativamente de y_t a y_{t+1} con el movimiento de x_t a x_{t+1} , formando vínculos entre los valores de una función y los de su recorrido.

La actividad 2 y 3 presenta dos conjuntos de datos representados en una tabla cuyos valores sufren cambios a medida que nos movemos verticalmente por ambas columnas. El estudiante tendrá que identificar el patrón de cambio hallando los cambios relativos y absolutos que sufre la variable capital. Una vez hallada esta relación o ratio, deberá introducirla en la casilla correspondiente de la construcción dinámica, esto permitirá que el alumno observe la representación gráfica de estos cambios. A su vez, la construcción dinámica está diseñada para que pueda cambiar el valor de esta ratio y reflexionar sobre sus implicaciones en ambas representaciones. Por último, se realizará un cuestionario en donde los alumnos podrá autoevaluarse.

Actividad 2: Calcule los cambios relativos y los cambios absolutos que sufre la variable capital.

Tabla 5

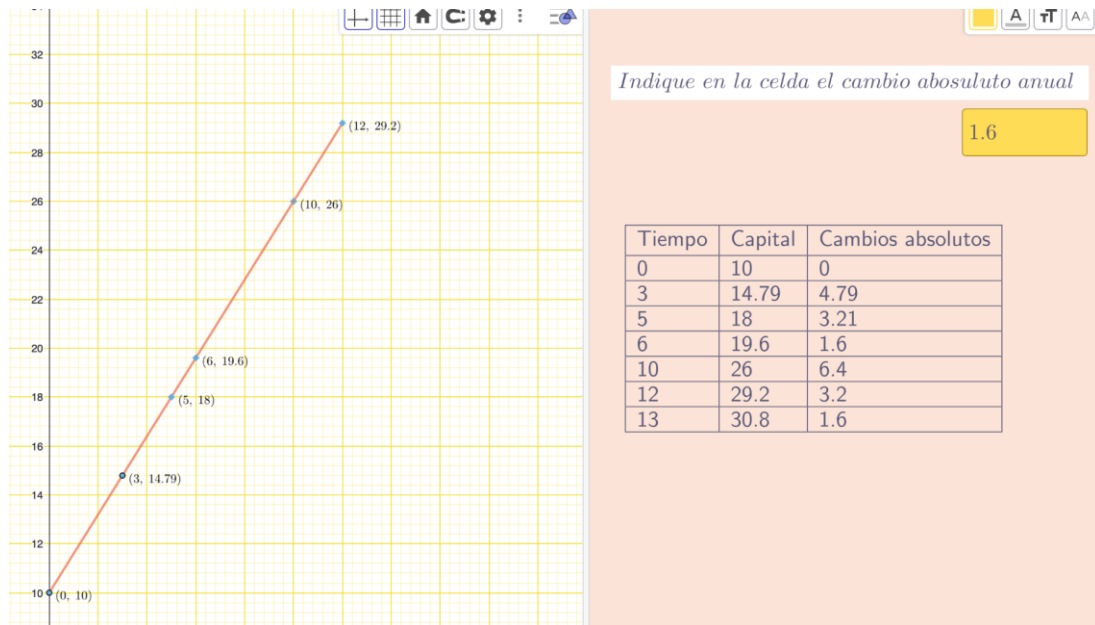
Actividad 2

Tiempo	Capital	Cambios absolutos	Cambios relativos
0	10		
3	14,8	4,8	1,48
5	18	3,2	1,21
6	19,6	1,6	1,08
10	26	6,4	1,32
12	29,2	3,2	1,12
13	30,8	1,6	1,05

El enlace GeoGebra de la construcción dinámica:
<https://www.geogebra.org/classic/jvavzudj>

Figura 2

Actividad 2



Después de haber visualizado la representación gráfica de los dos conjuntos de datos contestarán a las siguientes cuestiones:

Cuestionario de Actividad 2: <https://www.geogebra.org/m/gwfyr3qu>

Cuestionario Actividad 2

Autor: María

Tema: Matemática

¿Sabrías decirme como cambia la variable capital en términos absolutos cuando aumenta en una unidad la variable tiempo?
Contesta a la pregunta en el siguiente enlace
<https://www.geogebra.org/classic/jvavzudj>

A la vista de las representación de los datos que nos muestra GeoGebra, ¿Podrías decirme si existe una relación funcional entre los dos conjuntos de datos?

Marca todas las que correspondan

- A ☒ sí, existe
- B ☐ no, existe

REVISAR TU RESPUESTA (3)

Si existe, ¿Sabrías decirme cual es?

Marca todas las que correspondan

- A ☒ lineal
- B ☐ polinómica
- C ☐ exponencial

REVISAR TU RESPUESTA (3)

Actividad 3: Calcule los cambios relativos y los cambios absolutos que sufre la variable capital.

Tabla 6:

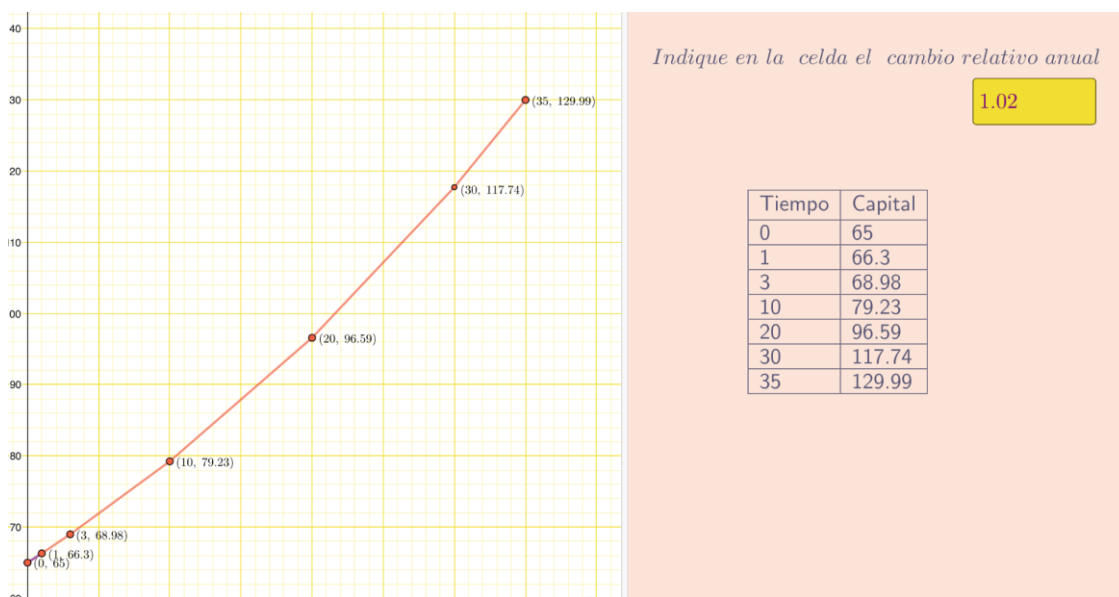
Actividad 3

Tiempo	Capital	Cambios absolutos	Cambios relativos
0	65	0	
1	66,3	1,3	1,02
3	68,97	2,67	1,0404
4	40,35	1,379	1,02
6	73,20	2,842	1,0404
7	97,73	1,4640	1,02
10	79,23	4,57	1,0612

El enlace GeoGebra que nos lleva a la construcción dinámica correspondiente de la actividad: <https://www.geogebra.org/classic/hfnywx8q>

Figura 3:

Actividad 3



Después de haber visualizado la representación gráfica de los dos conjuntos de datos contestarán a las siguientes cuestiones:

Cuestionario de Actividad 3: <https://www.geogebra.org/m/qdf7w6g7>

Cuestionario Actividad 3

Autor: María

Tema: Matemática

¿Sabrías decirme como cambia la variable capital cuando aumenta en una unidad la variable tiempo?

Indica la expresión en el siguiente link:

<https://www.geogebra.org/classic/hfnywx8q>

A la vista de la representación de los datos que nos muestra Geogebra, ¿Podrías decirme si existe una relación funcional entre los dos conjuntos de datos?

Marca todas las que correspondan

A ☒ si, existe ✓ CORRECTO

B ☐ no, existe

✓ ¡Bien hecho! Tu respuesta es correcta.

Si existe, ¿Sabrías decirme cual es?

Marca todas las que correspondan

A ☐ lineal

B ☐ polinómica

C ☒ exponencial ✓ CORRECTO

✓ ¡Bien hecho! Tu respuesta es correcta.

3.2. Funciones y covariación: la función lineal como patrón de referencia

Como hemos desarrollado en apartados previos, la idea de covariación tiene una mayor facilidad de entendimiento cuando encontramos patrones lineales o de proporcionalidad, de tal forma que en muchas ocasiones se extrapola patrones lineales a aquellos de no linealidad. Después de realizar las Actividades 2 y 3 que nos ayudan a distinguir cambios relativos o cambios absolutos, en la siguiente actividad se introduce la relación entre los cambios que sufre la variable independiente en relación con los cambios que sufre la variable dependiente. Distinguiendo los patrones de linealidad en donde cambios aditivos de la variable independiente llevan a cambios aditivos en la dependiente, frente a patrones exponenciales en donde los cambios aditivos de la variable independiente están relacionados con cambios multiplicativos en la variable dependiente.

Se comenzará explicando cómo funciona la capitalización simple con un ejemplo del 1,6% del tipo de interés simple capitalizable anualmente en un depósito de 100€ a 3 años. Al finalizar el primer año el capital inicial se transforma de 100€ a $100 + 0,016 \cdot 100$, al cabo de dos años $100 + 0,016 \cdot 100 \cdot 2$ y al final del periodo de

los 3 años $100+0,016*100*3$. Reflexionaremos con el estudiante que tipo de cambios a sufrido el capital, si absolutos o relativos, y que tiempo de cambios a sufrido el tiempo. Así mismo, se explicaría la capitalización compuesta, como al final de primer año el capital inicial se ha convertido en $100*(1,016)$, el segundo año $100*(1,016)*(1,016)$ y en último año $100*(1,016)*(1,016)*(1,016)$

A continuación, como todas las actividades de la propuesta, se plantea una actividad con una construcción dinámica elaborada en GeoGebra en donde el aprendizaje se logre a través de la manipulación de objetos. En este caso el profesor de Economía Financiera cuando explique la capitalización simple y compuesta, y el efecto que tiene el paso del tiempo en el capital financiero hará uso del deslizador del tiempo, a su vez podrá manipular el valor de la tasa de interés y extrapolar fácilmente la actividad a situaciones de depreciación en donde la tasa sea negativa y el factor de crecimiento $(1+i)$ sea menor que 1.

Estas actividades están diseñadas para ser utilizadas por el profesor de Economía Financiera, aunque también puede ser utilizada por el profesor de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I cuando explique las funciones lineales y exponenciales.

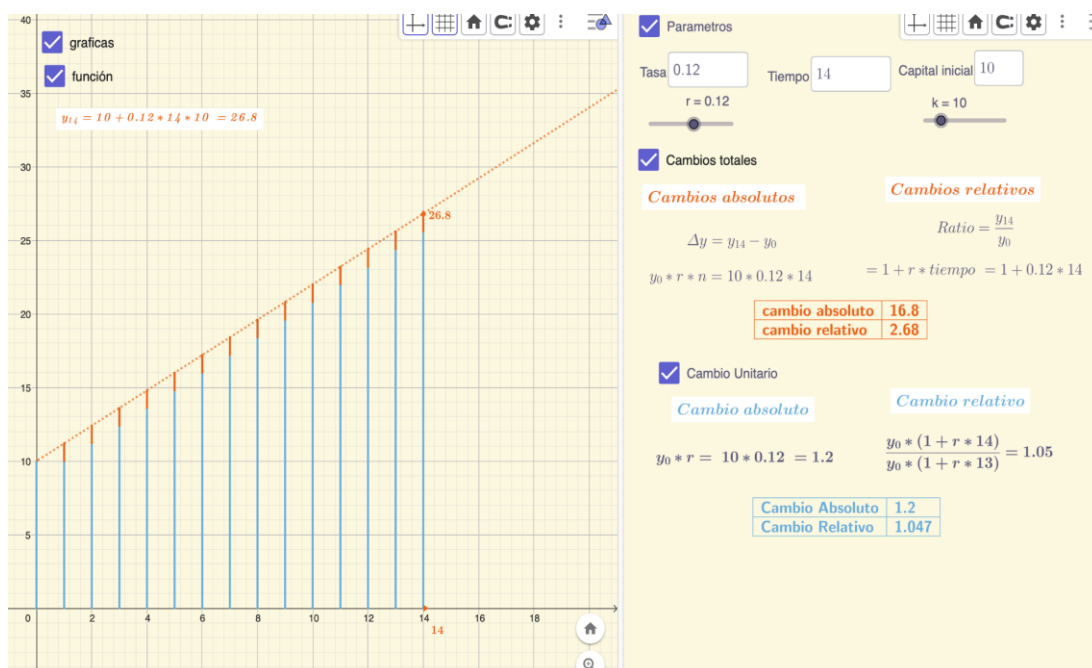
Actividad 4: *Desplace el cursor del tiempo a lo largo de los años para observar cómo varía el capital cuando aumenta o disminuye el tiempo.*

<https://www.geogebra.org/classic/kznbdszy>

- Si depositas en el banco un capital de 10€ al interés del 12% anual simple durante 10 años, ¿cuánto aumentará mi capital en términos absolutos al cabo de 10 años?
- ¿En qué año se producirá un mayor aumento de tu dinero en términos absolutos? Y, ¿en términos relativos?
- ¿De qué variables depende el aumento o la disminución del cambio absoluto que se produce anualmente en el capital? *Para responder a esta pregunta utilice el deslizador del tiempo y la casilla de control “Gráfico”.*
- Indique la pendiente del gráfico. Si el interés ofertado por el banco hubiese sido del 8%, ¿cambiaría la pendiente del gráfico?, ¿cómo?

Figura 4

Gráfico de los cambios relativos y absolutos en capitalización simple.



3.3. De la función lineal a la exponencial: dominio discreto

La siguiente actividad presenta el comportamiento de covariación que se da en la función exponencial contextualizado en la capitalización compuesta. Tanto el profesor de Economía Financiera para explicar la capitalización compuesta como el de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I para contextualizar el comportamiento exponencial pueden utilizar la siguiente construcción dinámica, en la cual, a través de la manipulación de los deslizadores podemos observar los cambios que se producen con el paso de tiempo en el capital, representados gráficamente y algebraicamente.

En el último apartado de la Actividad 5 está asociado con una construcción dinámica diferente. En este apartado quería que los estudiantes entendieran que el ratio de $f(x_2)$ a $f(x_1)$ será siempre la misma para cualquier mismo valor $\Delta x = x_2 - x_1$ y que el valor $\frac{f(x+\Delta x)}{f(x)}$ es dependiente de Δx . A través de la construcción dinámica podrán establecer Δx , observando y reflexionando los cambios que se producen tanto en la representación gráfica como algebraica.

Actividad 5: Desplace el cursor del tiempo a lo largo de los años para observar cómo varía el capital cuando aumenta o disminuye el tiempo.

<https://www.geogebra.org/classic/ukybhxf4>

- Con los mismos datos del ejercicio anterior, ¿cuánto aumentará mi capital al cabo de los 10 años si el interés es compuesto?, ¿en qué año se produciría un aumento mayor en términos relativos?, ¿de qué valor sería el cambio?
- Si el capital depositado fuese de 15€ en vez de 10€, ¿cuál sería el cambio relativo que sufriría el capital cada año?
- Indica la función que expresa el capital en función del número de años. Cuando lo tengas presione la casilla de control “Expresión”.
- Representa la función. Cuando lo tengas presione la casilla de control “Gráfico”
- ¿Sabrías decirme si se produce un mayor aumento del capital en términos relativos del año 3 al año 6, o del año 6 al año 9 ?, ¿En el primer año, o en el último? ¿Ocurre lo mismo en términos absolutos? Para ello utilice la siguiente construcción dinámica.

<https://www.geogebra.org/classic/amhs3kb2>

Figura 5

Gráfico los cambios relativos y absolutos de capitalización compuesta

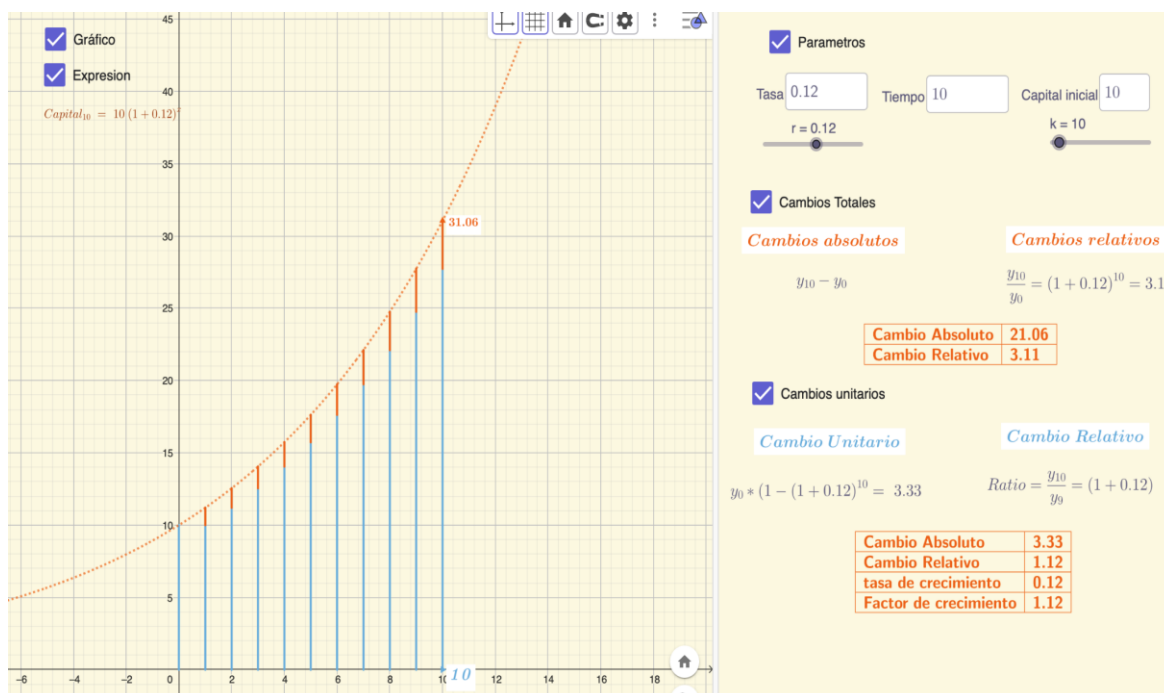
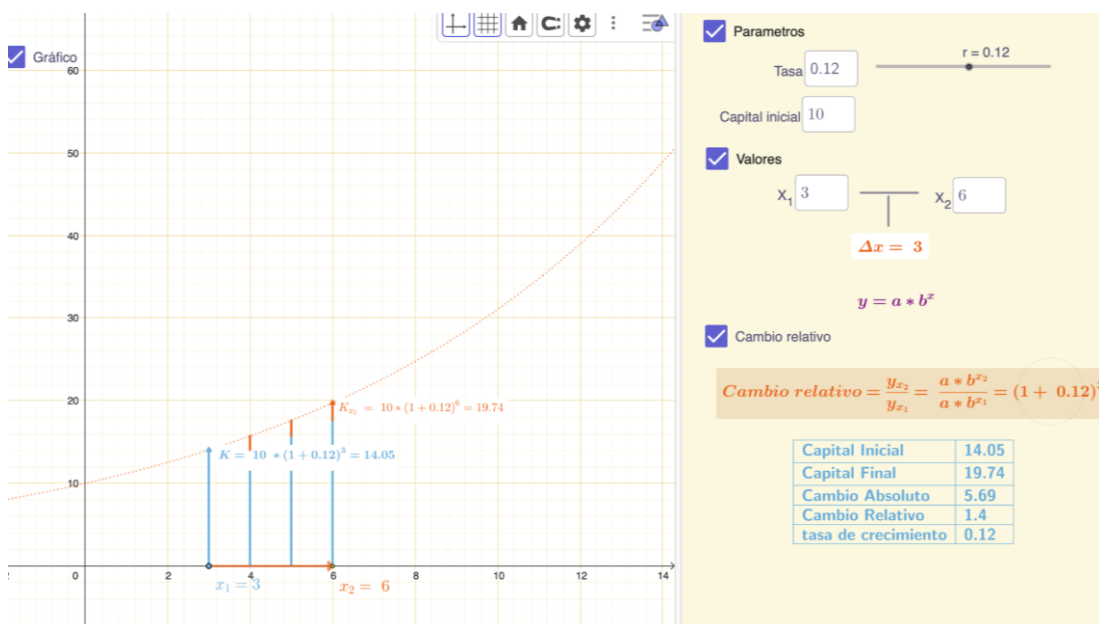


Figura 6

Cambios uniformes en tiempo en un contexto de capitalización compuesta



La Actividad 6, con su correspondiente construcción dinámica, plantea un caso de depreciación del capital. Los diferentes contextos para la capitalización son fácilmente extrapolables a un contexto de depreciación en donde se pretende que el estudiante reflexione sobre el sentido de un exponente negativo.

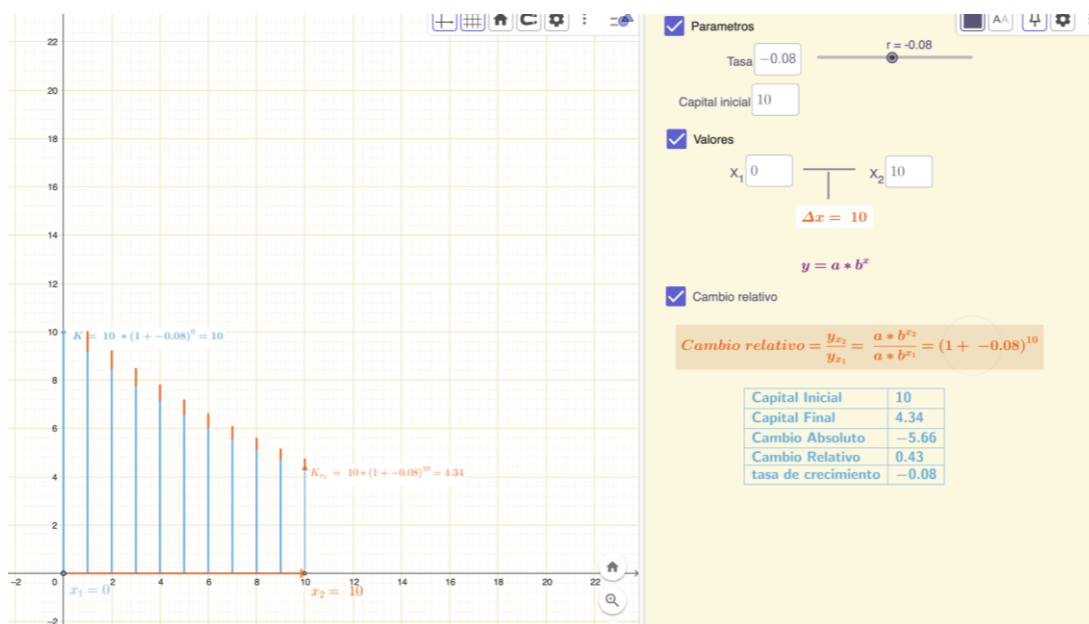
Actividad 6

Para la siguiente actividad utilice el constructo dinámico que se indica a continuación: <https://www.geogebra.org/classic/amhs3kb2>

- Mi coche se deprecia cada año un 8%, si me costó 10000€, ¿qué valor tendrá al cabo de 10 años?
- ¿En cuanto se depreciaría mi coche en términos relativos del año 4 al 6?, ¿y del 6 al 8?

Figura 7

Depreciación del capital en un contexto de capitalización compuesta.



Relacionando conceptos: función lineal y función exponencial.

Una vez comprendidos los cambios absolutos y los cambios relativos, vamos a trasladar ese conocimiento al aprendizaje de las funciones; en concreto de la función línea del tipo $y = a + bx$ (también suelen expresarse como $y = mx + n$) y la función exponencial del tipo $y = a * b^x$.

Esta actividad está pensada para que la realice el profesor de Matemáticas Aplicadas a las ciencias Sociales I. Con esta Actividad se busca que el alumnado sea capaz de conectar la representación algebraica, a través de la lectura de coeficientes, con la representación gráfica.

Actividad 7: Utilice los deslizadores del tiempo(tiempo), la tasa(r) y el capital inicial(k) para responder a las siguientes preguntas.

<https://www.geogebra.org/classic/ra3x5pkv>

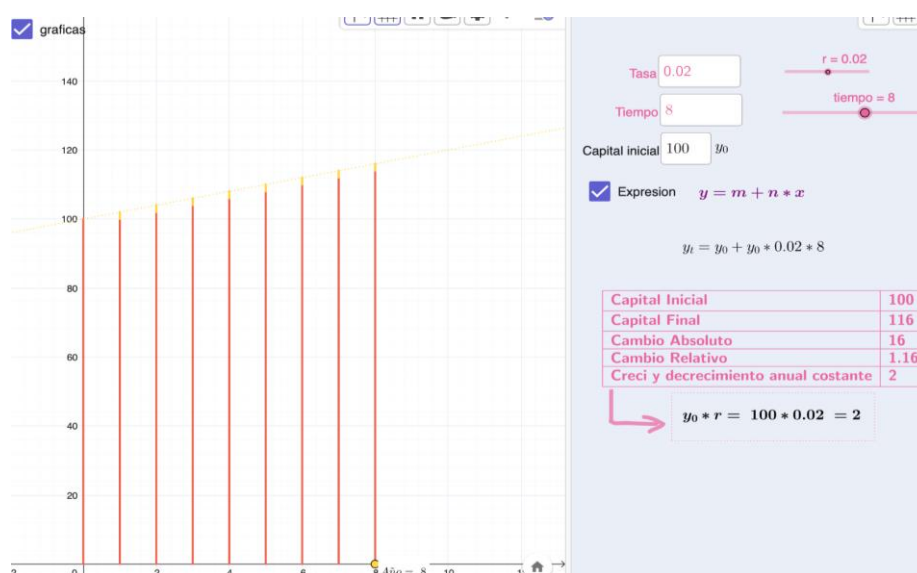
Ha depositado en el banco un capital de 100 € a un interés simple capitalizable anualmente del 2%, durante 8 años.

- ¿Cuánto es el capital final pasados los 8 años?, ¿Qué tipo de cambios se produce en el capital cada año?

- Presiona la tecla “Expresión” ¿Donde aparece representado ese cambio en la expresión que aparece?
- Si la tasa fuese 0, ¿Cuál sería el cambio que se produciría anualmente en el capital?, ¿Cómo se vería representado gráficamente? Y ¿algebraicamente? *Cuando lo sepas presiona la tecla Gráfico y utiliza el deslizador tasa*
- ¿Influye el paso del tiempo en los cambios que se producen en el capital?
- Podrías indicarme la pendiente del gráfico

Figura 8

La función lineal en un contexto de capitalización simple



Actividad 8:

Recuerda: Utilice los deslizadores del tiempo(tiempo), la tasa(r) y el capital inicial(k) para responder a las siguientes preguntas

<https://www.geogebra.org/classic/jq9baxkz>

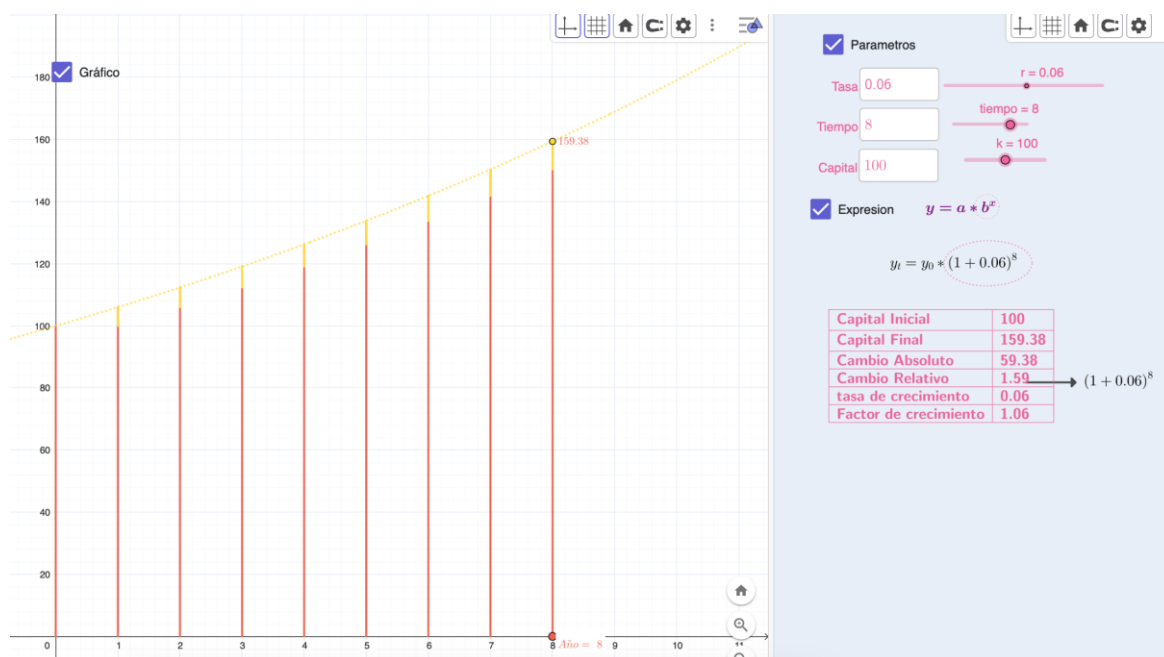
Con los mismos datos del ejercicio anterior, pero a un interés compuesto capitalizable anualmente, contesta a las siguientes cuestiones:

- ¿Cuánto es el capital final pasados los 8 años?, ¿Qué cambios se producen en el capital anualmente, ¿relativos, absolutos?
- Presiona la tecla “Expresión” ¿Donde aparece representado ese cambio en la expresión que aparece?

- ¿Se produce el mismo cambio relativo en el capital del año 2 al 1, que del 4 al 3?, sino es así, ¿En qué año es mayor?, ¿Cuál es el valor de este cambio?

Figura 9

Función exponencial en un contexto de capitalización compuesta



3.4. Hacia la comprensión de la covariación exponencial en un dominio continuo

La siguiente actividad y su correspondiente construcción dinámica está pensada como un espacio de reflexión para los alumnos de la asignatura de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I. Con ella intentemos que el estudiante observe y coordine el cociente $\frac{f(x_2)}{f(x_1)}$ y el cambio en el tiempo $(x_2 - x_1)$ para valores de Δx menores que 1, pudiendo imaginar una coordinación para incrementos pequeños en X que se vaya acercando a un dominio continuo.

Actividad 9

He decidido depositar mis ahorros de 1000€ en una cuenta al 12% de interés compuesto anual durante 3 años, hasta que inicie la universidad. Como mi intención es utilizar el dinero cuando lo necesite, quiero depositarla en una cuenta donde los intereses se capitalicen antes del año.

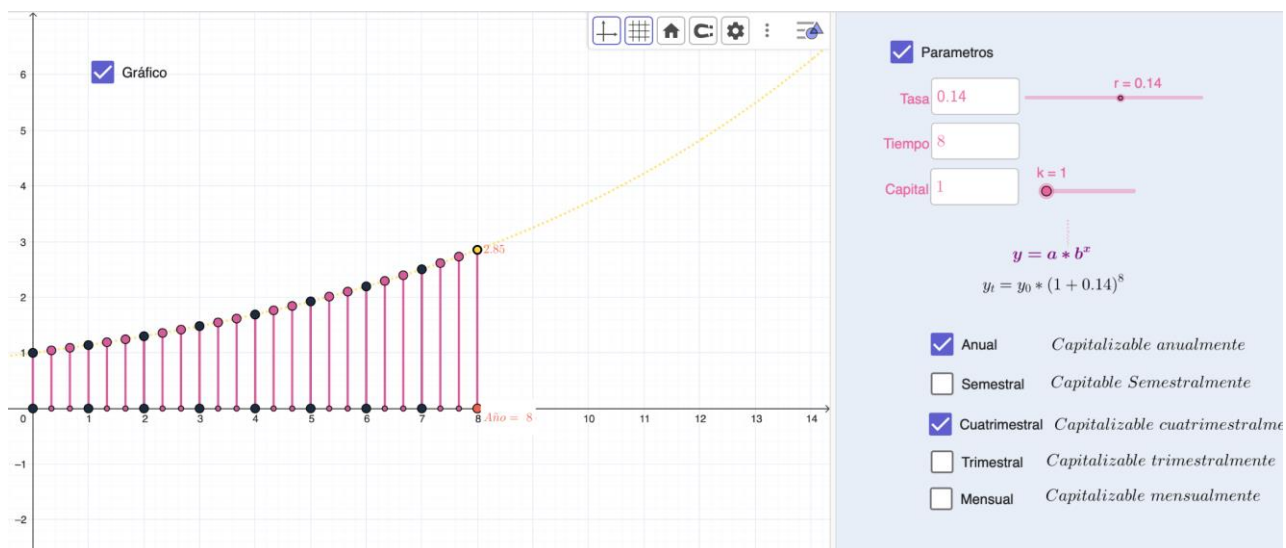
La cuenta del banco “verde”, me ofrece las siguientes posibilidades:
<https://www.geogebra.org/classic/ex2djnpu>

Contesta a las siguientes cuestiones utilizando las casillas de control.

- Si deposito mi dinero en una cuenta capitalizable trimestralmente, ¿Cuál será mi capital en el trimestre 7? *Podrías indicar con una expresión algebraica el resultado.*
- Reflexiona a través de la construcción dinámica que sucede entre periodos.

Figura 10

Cambios en el tiempo menores que 1 ($\Delta x < 1$)



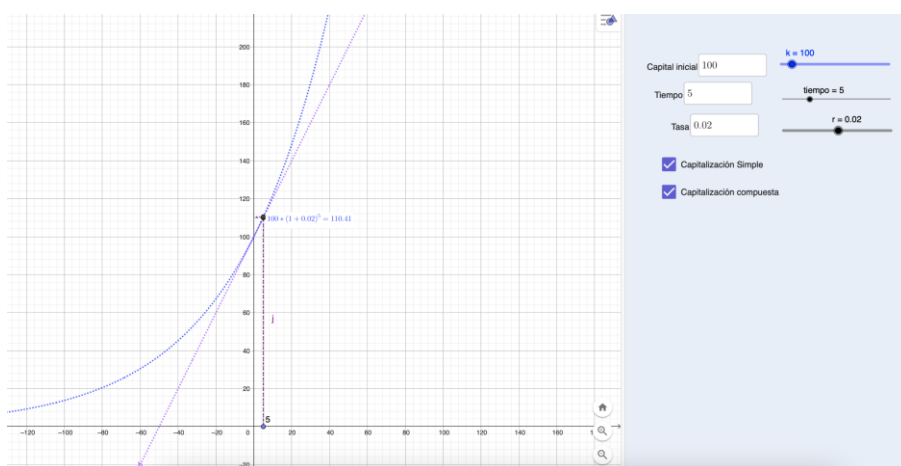
Capitalización simple y capitalización compuesta

Por último, para finalizar, se propone una actividad de autoevaluación que aúne todos los contenidos estudiados.

Actividad 10: Hoja dinámica (<https://www.geogebra.org/m/whmh2gbz>)
“Distinguiendo el crecimiento lineal y exponencial en el contexto financiero”
<https://www.geogebra.org/classic/paz4wtkj>

Figura 11

Capitalización compuesta y capitalización simple



Autor: María

Con la siguiente construcción dinámica conteste a las siguientes cuestiones:
<https://www.geogebra.org/classic/paz4wtkj>

Pregunta 1

Tengo unos ahorros de 200€ que quiero darles rentabilidad. Como no me decido en donde depositarlos, decido depositar la mitad de mi capital a una cuenta con un 2% de interés compuesto durante 5 años, y el resto a una con interés simple durante 10 años.

¿Cual me dará mayor rentabilidad el primer año?

Marca todas las que correspondan

- A ☐ interes simple
B ☐ Interes compuesto
C ☐ Ambas el mismo

REVISAR TU RESPUESTA (3)

¿Que cambios se producen en el capital cada año en el caso de la capitalización compuesta?

Marca todas las que correspondan

- A ☐ Aditivos
B ☐ multiplicativos
C ☐ dependiendo del año

REVISAR TU RESPUESTA (3)

Determina el valor del ratio que expresa el cambio en el capital de un año al siguiente en la capitalización compuesta.

Marca todas las que correspondan

- A ☐ $(1+0,02)$
B ☐ $1*0,02$
C ☐ $0,02$

REVISA TU RESPUESTA (3)

Pregunta 2

Si el valor de mi ordenador se deprecia cada año un 8%, y este año vale 900€ ¿ Cuanto será su valor en 3 años?

Marca todas las que correspondan

- A ☐ 700,82
B ☐ 684
C ☐ 1133,74

REVISA TU RESPUESTA (3)

Con los datos del apartado anterior podrías indicar el ratio de depreciación anual

Marca todas las que correspondan

- A ☐ 0,08
B ☐ 0,92
C ☐ 1,08

REVISA TU RESPUESTA (3)

Cual sería la función que exprese la depreciación del valor de mi ordenador

As π

Ingresa aquí tu respuesta...

REVISA TU RESPUESTA

La propuesta de la hoja dinámica permite al alumno cierta autonomía en el aprendizaje, a través del uso y la exploración de las construcciones dinámicas. Por otro lado, permite autoevaluarse, identificando aquello que no ha llegado a entender y explorando con ello en ese mismo momento. A través de la construcción dinámica se abre una ventana a una infinitud de imágenes que hace más rico el aprendizaje.

4. CONCLUSIONES

El presente trabajo se centra en la idea de alcanzar un aprendizaje significativo del concepto de función, en concreto de la función exponencial. Con el objetivo de ampliar la mirada y comprensión de la función permitiendo que esta sirva como herramienta para el razonamiento, modelización y la resolución de problemas, y como herramienta para detectar fácilmente patrones de cambio en contextos de modelización financiera.

En la primera parte se revisa la literatura entorno al concepto de función, diferenciando una noción basada en la correspondencia, más tradicional, frente a una visión centrada en la coordinación. En torno a la idea de coordinación se exponen diferentes estudios (Castillo-Garsow, 2013; Confrey y Smith, 1995; Ellis et al., 2015; P. Thompson, 1994) que evidencian la potencialidad del aprendizaje del concepto de función desde una perspectiva covariacional. En esta revisión queda patente los enfoques alternativos de (Confrey y Smith, 1995; Saldanha y Thompson, 1998) para el caso concreto de la función exponencial, destacando la necesidad de comprender la tasa de cambio multiplicativa para el contexto de crecimiento y decrecimiento exponencial.

A continuación, se lleva a cabo una revisión de los currículos de las materias de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I y de Economía Financiera, en donde aparecen los contenidos anteriormente expuestos, y se realiza un análisis de los saberes, competencias específicas y criterios de evaluación específicos. Destacando de los mismos la importancia de un aprendizaje significativo de las matemáticas que permita el razonamiento y la modelización en diferentes situaciones reales, resaltando de ese modo, el carácter transversal de las matemáticas y su aplicabilidad.

Con estas directrices, se investiga de qué manera se aborda la función exponencial en los manuales de textos en los que se apoyan los profesores, descubriendo una disparidad entre los objetivos detallados en el currículo y la manera de abordarlos. En estos manuales prevalece la importancia del cálculo, con un peso importante de ejercicios destinados a representar gráficamente las funciones a través de un conjunto de datos representados en tablas o dando valores a una expresión algebraica, y escasos ejercicios aplicados a contextos

reales. Ignorando de este modo la transversalidad de los contenidos de las funciones exponenciales, con los contenidos que posteriormente abordan en la unidad didáctica dedicada a la matemática mercantil.

Ante estas carencias y la clara divergencia entre la intención de los currículos y lo que realmente sucede en las aulas, nace la propuesta didáctica interdisciplinar de este trabajo, que pretende servir como guía para los profesores de las materias de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I, y la optativa de Economía Financiera.

La propuesta está constituida por una serie de actividades que siguen un orden basado libremente en el marco de covariación de Carlson et al. (1994) que describe las cinco acciones mentales del razonamiento covariacional. Cada una de las actividades lleva asociada una construcción dinámica que permite al estudiante conseguir un aprendizaje significativo por manipulación, destacando la potencialidad del software GeoGebra utilizado para su elaboración. GeoGebra abre un espacio para la creación de una gran diversidad de imágenes, entre otras cosas, gracias a la posibilidad de visualizar las diferentes representaciones de la función: algebraica, tabular y gráfica.

Por último, hay que destacar que dichas actividades están pensadas para que se lleven a cabo de manera coordinada por el profesor de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I y Económica Financiera, ya que ambos saberes se apoyan y se refuerzan los unos en los otros.

5. BIBLIOGRAFÍA

- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., y Hsu, E. (1994). Applying Covariational Reasoning While Modeling Dynamic Events: A Framework and a Study the authors of the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) Standards documents called for students to be able to analyze patterns of change in various. In *Journal for Research in Mathematics Education* (Vol. 33, Issue 5). Vinner y Dreyfus. www.nctm.org.
- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., y Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: un marco conceptual y un estudio. *Revista EMA*, 8, 121–156.
- Castillo-Garsow, C. (2013). The role of multiple modeling perspectives in students' learning of exponential growth. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 10(5–6), 1437–1453. <https://doi.org/10.3934/mbe.2013.10.1437>
- Confrey, J., y Smith, E. (1994). Exponential Functions, Rates of Change, and the Multiplicative Unit. In *Mathematics* (Vol. 26, Issue 2). <https://about.jstor.org/terms>
- Confrey, J., y Smith, E. (1995). Splitting, Covariation, and Their Role in the Development of Exponential Functions. In *Source: Journal for Research in Mathematics Education* (Vol. 26, Issue 1).
- Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática*, Vol8 (No3), 25–41.
- Ellis, A. B., Özgür, Z., Kulow, T., Williams, C. C., y Amidon, J. (2015). Quantifying exponential growth: Three conceptual shifts in coordinating multiplicative and additive growth. *Journal of Mathematical Behavior*, 39, 135–155. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.06.004>
- Ferrari, M., y Farfán, R. M. (2008). Un estudio socioepistemológico de lo logarítmico: la construcción de una red de modelos. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, 11, 309–354.
- Ferrari, M., María, R., y Márquez, F. (2010). Una socioepistemología de lo logarítmico. In *Recepción: Mayo* (Vol. 13, Issue I).
- Foti, S. B. (2021). Las funciones exponenciales: Un análisis de la distancia epistemológica.

- Kuper, E., y Carlson, M. (2020). Foundational ways of thinking for understanding the idea of logarithm. *Journal of Mathematical Behavior*, 57. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.100740>
- Ronny Gamboa Araya. (2007). Uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación En Educación Matemática.*, 3, 11–44.
- Saldanha, L. A., y Thompson, P. W. (1998). Re-thinking co-variation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation.
- Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. *Mathematical Association of America*, 25.
- Tall, D., y Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. In *Mathematics* (Vol. 12, Issue 2). <https://about.jstor.org/terms>
- Thompson, P. (1994). Students, functions, and the undergraduate curriculum (pp. 21–44). <https://doi.org/10.1090/cbmath/004/02>
- Thompson, P. W. (1994a). Images of Rate and Operational Understanding of the Fundamental Theorem of Calculus. In *Mathematics* (Vol. 26, Issue 2). <https://about.jstor.org/terms>
- Thompson, P. W. (1994b). Students, Functions, and the Undergraduate Curriculum (Vol. 4).
- Thompson, P. W. (1998). Re-thinking co-variation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. <https://www.researchgate.net/publication/264119300>

Legislación

Decreto 73/2022, de 27 de julio, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Cantabria.

Orden EDU/42/2022, 8 de agosto, porque se dictan instrucciones para la implantación del Bachillerato en la Comunidad de Cantabria