Facultad de Educación

MÁSTER EN FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Uso de paradojas en la enseñanza del cálculo de probabilidades

Use of paradoxes in the teaching of probability calculus

Alumno: Pablo Eudaldo Bustamante Vega

Especialidad: Matemáticas

Director: Daniel Sadornil Renedo

Curso académico: 2021/2022

Fecha: septiembre de 2022

A Dani, por su inestimable ayuda,

y a Marc, por seguir ahí.

Resumen

En este trabajo se va a estudiar el papel de las paradojas en el aprendizaje de cálculo de probabilidades. Para ello se va a desarrollar un marco teórico sobre el que plantear una propuesta didáctica, tratando aspectos como la resolución de problemas, el pensamiento crítico y el lenguaje matemático. Esta propuesta se ha realizado en un aula de bachillerato. Se ha analizado el desarrollo de esta propuesta, así como se ha evaluado el impacto de las paradojas en el aprendizaje del alumnado. Finalmente, se han obtenido algunas conclusiones al respecto.

Palabras clave: probabilidad, paradojas, didáctica.

Abstract

In this paper we will study the role of paradoxes in the learning of probability calculus. In order to do so, a theoretical framework will be developed on which a didactic proposal will be based, dealing with aspects such as problem solving, critical thinking and mathematical language. This proposal has been carried out in a high school classroom. The development of this proposal has been analysed, and the impact of paradoxes on student learning has been evaluated. Finally, some conclusions have been drawn in this respect.

Key words: probability, paradoxes, didactic.

Índice

1. Introducción

Una realidad latente en nuestro sistema educativo es la desafección del alumnado hacia las distintas asignaturas. El mayor ejemplo de esto son, probablemente, las matemáticas. Frases como “a mi es que se me dan mal las matemáticas”, “mi profesor no explica nada”, “esto es para listos” y, la gran temida de cualquier docente, “esto, ¿para qué sirve?” son recurrentes en cualquier centro de secundaria. Esto contribuye a que se normalice el que las matemáticas, pese a tener un peso tan importante en el currículum, sigan siendo desconocidas, incomprendidas y hasta temidas.

Por otra parte, dentro del currículum de matemáticas de secundaria, el bloque al que se le suele dar menos importancia es el de probabilidad y estadística. Lo cual es contraproducente porque precisamente esas herramientas son usadas, habitualmente, de manera errónea y, desgraciadamente, con intención de engañar, tergiversar y confundir. Un ejemplo que ha surgido hace relativamente poco: sobre la efectividad de las vacunas contra la COVID. Algunos medios de comunicación publicaban, hasta hace no mucho tiempo, titulares del estilo de “la mitad de los infectados por COVID que acaban en la UCI están vacunados”. Alguien que no se pare a pensar un momento, que se deje llevar por su intuición, puede caer fácilmente en la trampa de pensar que esto implica que entonces da igual estar vacunado o no. Vamos a cambiar ligeramente el contexto para ejemplificar porqué esto es un razonamiento falaz.

Si, por ejemplo, fuera cierto que la mitad de los números premiados de la lotería terminasen en 2, entonces se infiere que es más probable que te toque un premio si escoges un número terminado en 2. ¿Por qué? Porque la cantidad de números que terminan en 2 es significativamente inferior a la mitad, por lo que si la mitad de estos son premiados eso significa que son números más probables. Con las vacunas pasa lo mismo, la cantidad de población sin vacunar es muy inferior a la mitad y entonces si aproximadamente la mitad de las personas que pasan por la UCI no están vacunadas eso significa que ese grupo tiene una probabilidad mayor de que su enfermedad sea grave. Se pueden poner mil y un ejemplos más en esta dirección, pero este puede ser bastante ilustrativo de porqué este tema es de importante actualidad.

Pero saber sobre cálculo de probabilidades no sirve únicamente para no ser engañado. Este ejemplo puede parecer una banalidad, pero si se está jugando a un juego de azar (por ejemplo el póker o el mus), puedes saber a priori cuál es la probabilidad de ganar con una cierta jugada y así maximizar tus ganancias a largo plazo.

Con todo esto, considero que deberíamos buscar una manera de generar interés en la probabilidad y la estadística. No creo que sirva decirles simplemente que les será útil cuando sean adultos. Aquí es donde creo que pueden jugar un papel importante las paradojas. Se plantea una situación aparentemente inocente, se les deja que piensen por su cuenta y, una vez que han caído en lo que podríamos denominar como trampa, se les enseña que el rigor matemático nos lleva por un camino distinto. Considero complicado que a alguien le resulte indiferente el que le demuestren que su intuición le engaña. Y es este impacto el que puede usarse para hacer que al alumnado le interese domar esa traicionera intuición, a través de las matemáticas.

Además, hacer dudar al alumnado de su propia intuición puede tener un efecto positivo en el desarrollo de su pensamiento crítico, tan necesario en la sociedad de la información, así como de la competencia “aprender a aprender”, ya que la humildad que viene de conocer las limitaciones de lo que uno puede hacer es siempre un buen punto de partida.

2. Objetivos

El objetivo principal de este Trabajo de Fin de Máster es analizar si el uso de paradojas puede servir para aumentar el interés en el alumnado por el rigor matemático, dentro del contexto del cálculo de probabilidades. Además de este objetivo, están:

- Buscar que el estudiante se dé cuenta de que las matemáticas surgen de forma natural.
- Fomentar el uso de un lenguaje claro y preciso en la resolución de problemas.
- Fomentar la autonomía del alumnado en la resolución de problemas.
- Fortalecer las bases del cálculo de probabilidades.

Con estas ideas en mente, se plantean las siguientes preguntas de investigación, a las que se volverá en el análisis de los resultados obtenidos:

1. ¿El alumnado demuestra un mayor interés por el lenguaje claro y preciso tras plantearle alguna paradoja probabilista?
2. ¿El alumnado muestra una mayor reticencia a dejarse llevar por sus propios sesgos e ideas preconcebidas tras plantearle alguna paradoja probabilista?
3. ¿Presentar una paradoja probabilista tiene algún efecto en el pensamiento crítico del alumnado? ¿Y en el interés o preocupación de este por desarrollarlo?

3. Marco Teórico

Para este capítulo, cuyo objetivo principal es consultar el trabajo previo respecto a los objetivos fijados anteriormente, vamos a empezar por lo que pudiera parecer un efecto secundario: el pensamiento crítico del alumnado (y su relación con el currículum de secundaria). Luego hablaremos de lo que se entiende por lenguaje matemático, de en qué consiste la resolución de problemas como herramienta didáctica, del estado de la enseñanza de probabilidad, de las posibles aplicaciones de paradojas de probabilidades en la enseñanza y de la utilidad didáctica de la historia de las matemáticas.

3.1 Pensamiento crítico

Lo primero es definir a qué nos referimos por pensamiento crítico. Para ello usaremos la definición dada por el filósofo Dewey (1989):

> *Se refiere al pensamiento crítico como pensamiento reflexivo, el cual supone un estado de duda, de vacilación, de perplejidad, de dificultad mental, en el cual se origina el pensamiento, y un acto de busca, de caza, de investigación para encontrar algún material que esclarezca la duda, que disipe la perplejidad.* (p. 28)

Esta definición se puede desarrollar y concretar en el contexto de la enseñanza de las ciencias con la propuesta de Blanco-López et al. (2017), desarrollado a partir del modelo propuesto por Solbes y Torres (2012), donde se establecen 8 dimensiones del pensamiento crítico con esa intención. Estas dimensiones son:

1. Visión de la ciencia. Ser consciente de que la ciencia no es un conjunto de disciplinas académicas aisladas, si no que tienen un amplio contexto social, ambiental y tecnológico.
2. Conocimientos. Conocer distintas perspectivas de un mismo tema, saliendo de las posturas más comunes.
3. Análisis crítico de la información. Tener en cuenta el posible conflicto de intereses que puedan tener ciertas fuentes de información sobre ciertos temas, estimando la veracidad de dichas fuentes.

4. Tratamiento de los problemas. No simplificar los problemas, obviando tanto su complejidad técnica como su contexto ético cultural, social, etc.
5. Argumentación. Dudar de la certeza de los argumentos, encontrando las posibles falacias empleadas y buscando crear un discurso sólido.
6. Autonomía personal. Confeccionar una visión propia, pudiendo así reflexionar y participar de manera efectiva en la sociedad.
7. Toma de decisiones. Ante un problema que plantee diversas opciones, no realizar un juicio infundado y escoger de forma racional.
8. Comunicación. Transmitir las elecciones mediante un lenguaje adecuado según los objetivos y el contexto.

A partir de estas dimensiones, se puede argumentar una estrecha relación entre el pensamiento crítico y las competencias clave descritas en la Orden EDC 65/2015. A continuación vamos a establecer estas relaciones, para cada una de las competencias.

1. Comunicación lingüística. Esta competencia establece como habilidades fundamentales, entre otras, la capacidad de resolver los problemas que surgen en la comunicación, en sus distintos formatos. Claramente esto está relacionado con la octava dimensión del pensamiento crítico.
2. Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología. Esta competencia se subdivide en la competencia matemática y las competencias básicas en ciencia y tecnología. Por un lado, un correcto desarrollo de la competencia matemática incluye trabajar la quinta dimensión del pensamiento crítico, por ser la lógica una herramienta básica en matemáticas. Además, el uso de paradojas puede servir precisamente para reforzar este punto, ya que pueden ser un ejemplo manejable por el alumnado de casos en los que es fácil caer en razonamientos erróneos. Por otro lado, al trabajar la competencia matemática también se profundiza en la octava dimensión del pensamiento crítico, ya que una de las características de las matemáticas es su lenguaje: claro, conciso e intercultural. Respecto a las competencias básicas en ciencia y tecnología, estas están

relacionadas con las dimensiones 1, 4, 5, 7 y 8; en todos estos casos se mencionan dichas destrezas de manera explícita en la citada ley.

3. Competencia digital. Se establece que una de las características de esta competencia es la de saber analizar e interpretar información, estimar la validez del contenido de los medios de comunicación y evaluar la veracidad y corrección de las distintas fuentes de información, tanto online como offline. Es claro que esto engloba a la tercera dimensión del pensamiento crítico. Además esto es algo de absoluta actualidad, ya que, en nuestro contexto, hay portales web que dan a conocer una información sesgada y sensacionalista, apelando a los sentimientos y las ideas preconcebidas, con objetivos comerciales, políticos o ideológicos (Cañadas, 2018).
4. Aprender a aprender. Uno de los rasgos de esta competencia es la capacidad de auto supervisar el aprendizaje que uno mismo realiza. Parece claro que esta tarea está relacionada con la quinta dimensión del pensamiento crítico. Además, la sexta dimensión del pensamiento crítico forma parte intrínseca del espíritu de esta competencia.
5. Competencias sociales y cívicas. Algo que forma parte de esta competencia es la capacidad de escuchar y comprender las opiniones de los demás, así como de aceptar las diferencias culturales y éticas. Esta habilidad es absolutamente necesaria para poder trabajar la segunda dimensión del pensamiento crítico.
6. Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor. En la descripción de esta competencia se cita explícitamente el pensamiento crítico como uno de los objetivos a perseguir. A parte de esto, también se menciona la toma de decisiones como una habilidad básica, por lo que también está relacionada con la séptima dimensión del pensamiento crítico.
7. Conciencia y expresiones culturales. Mediante el desarrollo de esta competencia se busca, entre otras cosas, de dar un contexto social y ambiental al conocimiento del alumnado, por lo que esta competencia está relacionada con la primera dimensión del pensamiento crítico.

A la hora de fomentar el pensamiento crítico en el alumnado es probable que surjan ciertos obstáculos. Algunos de ellos, expuestos y desarrollados por Blanco y Blanco (2010), pueden ser: la “desatención ciega”, el “prejuicio a posteriori” y el egocentrismo. Parece factible hacer frente a todos estos problemas mediante el uso de paradojas, como exponemos a continuación.

La desatención ciega consiste en la inercia que nos lleva a percibir aquello que ya estamos acostumbrados a percibir, encajándolo en los esquemas e ideas que ya solemos usar. Aquí creemos que el uso de las paradojas puede suponer un golpe de efecto, al hacer que el alumnado se dé cuenta de que está pasando por alto algún detalle relevante que hace que los argumentos habituales “no sirvan”.

El prejuicio a posteriori es el sesgo que surge de conocer de antemano la solución a un problema. Esto produce que no se indaguen otras posibles soluciones, encorsetando así el desarrollo de una actividad. En el caso de las paradojas el alumnado cree conocer la solución, pero esta es típicamente errónea. Creemos que esto puede ayudar a que no se dejen convencer por una solución hasta que no tengan definido un camino que lleve hasta dicha solución.

Para finalizar, uno de los rasgos del egocentrismo es la confianza extrema e inapropiada. Parece claro que es posible rebajar esta confianza con el uso de paradojas, por evidenciar al alumnado que no siempre aquello que piensa es correcto.

3.2 Lenguaje natural y lenguaje matemático

En los objetivos hemos establecido como algo deseable el que el alumnado alcance una cierta claridad a la hora de escribir sus razonamientos matemáticos. Y es que el lenguaje es una de las características y herramientas principales de las matemáticas. Tanto es así, que, según Arce et al. (2019), el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) en sus *Principios y estándares para la educación matemática* establece que cualquier sistema educativo debe buscar que los estudiantes puedan organizar y transmitir con claridad su conocimiento matemático, usando el lenguaje matemático con precisión.

Primero de todo, debemos delimitar lo que se entiende por lenguaje matemático, así como diferenciarlo del lenguaje natural. Según Serrano (2005), el término "lenguaje" no es preciso ya que se usa tanto para hacer referencia a la capacidad comunicativa entre personas como al conjunto de símbolos y reglas que, en un contexto concreto, se usan para llevar a cabo esa comunicación. En nuestro caso usamos el término "lenguaje" para la segunda de estas acepciones. De esta manera, el lenguaje natural sería aquel de uso cotidiano, con el que el alumnado ya está familiarizado. Este lenguaje tiene un papel fundamental en las aulas de matemáticas, ya que es el lenguaje que permite dar un significado a las matemáticas (Gómez-Granell, 1989). Dicho de otra manera, el lenguaje natural dota de una semántica al lenguaje matemático. El lenguaje matemático, por otra parte y según Arce et al. (2019), tiene tres componentes característicos: un vocabulario específico, un lenguaje gráfico y un lenguaje simbólico.

Por vocabulario específico se refieren a a la terminología que se usa para denotar objetos matemáticos (número complejo, derivada, ecuación o variedad) y palabras que se usan para jerarquizar el conocimiento matemático (axioma, definición, lema, proposición o teorema).

El lenguaje gráfico está formado por dibujos basados en puntos, segmentos y curvas que representan objetos matemáticos. Estos objetos matemáticos pueden ser grafos de una función, diagramas de árbol o un poliedro, entre otros.

Con lenguaje simbólico se refieren al conjunto de signos que son característicos de las matemáticas, por ejemplo, los números (0, 1, 2,…), símbolos que representan operaciones matemáticas (∂, $\sum$, $\surd$,…), cuantificadores ($\forall, \exists, \nexists, \ldots$), etc.

De la misma manera que saber el vocabulario de un idioma no es una condición suficiente, si no necesaria, para poder hablar en ese idioma; para poder usar el lenguaje matemático se requiere conocer esas tres partes, pero no basta con eso. Es necesario saber aplicar correctamente sus reglas sintácticas. Y es que esta parece ser la parte más problemática en el aprendizaje del lenguaje matemático.

Siguiendo lo expuesto por Gómez-Granell (1989), está en la propia naturaleza del lenguaje matemático el estar despojado de su significado y, por ello, regirse de estrictas reglas sintácticas. Esto es algo que viene dado por la propia evolución histórica de la disciplina, se puede ver por ejemplo el caso del lenguaje algebraico.

A grandes rasgos, se pueden distinguir tres fases en la evolución de este lenguaje. Primeramente era casi indistinguible del lenguaje natural, ya que no se usaban símbolos propios de las matemáticas. Para expresar lo que hoy en día escribiríamos como $a + b = b + a$, en su lugar escribirían “la suma es independiente del orden de los términos”.

La siguiente fase se suele denominar álgebra sincopada, donde se sigue usando un lenguaje similar al natural, pero se comienzan a abreviar algunas palabras. De esta manera, por ejemplo, para expresar “+” se usaba “p”, que es la abreviatura latina de “más”.

La tercera fase consiste del álgebra simbólica, que ya se parece más al lenguaje actual. En ese lenguaje ya no se usa a penas el lenguaje natural y en su lugar se usan símbolos, en algunos casos se usan símbolos similares para cosas distintas (como es el caso de asignar “x, y, z” a los valores desconocidos y “a, b, c” a los valores dados).

Con este ejemplo se puede ver que lo que en un principio gozaba de una cercana semántica, gracias al uso de lenguaje natural, pasó a ser algo puramente sintáctico, ganando así una mayor capacidad de identificar aquellos patrones que pueden surgir en situaciones aparentemente distintas.

Otro ejemplo de esto puede ser algo tan sencillo como el número 3. No existe un objeto físico que represente este objeto matemático, si queremos poner ejemplos del número 3 lo que hacemos es poner ejemplos de conjuntos cuyo rasgo común es que su cardinal es 3. Por ejemplo: 3 manzanas, 3 personas y 3 lápices. Aquí el número 3 no está presente de manera directa, si no que surge al buscar las similitudes entre estos conjuntos. Por tanto, el número 3 surge de eliminar gran parte de los rasgos característicos de un conjunto de 3 manzanas (su peso, olor, color, etc.) hasta quedarnos solamente con su cantidad.

También Gómez-Granell (1989) realiza un experimento en el que busca indagar la forma en la que en un grupo de estudiantes de 8 y 12 años se transmiten entre sí el resultado de un problema matemático (consistente en calcular el valor de una cantidad de caramelos y cuántos caramelos se pueden comprar con una cierta cantidad de dinero). Tras este experimento se establecen tres niveles de uso del lenguaje matemático.

El nivel más básico consiste en no usar nada de lenguaje matemático, si no limitarse a describir el contexto en el que se da el problema propuesto (por ejemplo, dibujando una tienda) y el resultado obtenido en ocasiones ni siquiera aparece.

El segundo nivel se diferencia del primero en que ahora sí se usan símbolos para representar la transacción (se usan cifras y representaciones gráficas) que se realiza en el problema pero no se expresa ninguna relación entre estos valores. Es decir, si por ejemplo un caramelo vale 5 céntimos y 6 caramelos valen 30, no se llega a expresar la relación entre esas cantidades.

En el tercer nivel desaparece el contexto en el que se realiza la transacción y finalmente los estudiantes consiguen relacionar las cifras del problema mediante las operaciones pertinentes: la multiplicación y la división.

Este experimento pone de manifiesto que en la adquisición del lenguaje matemático es necesario repetir, hasta cierto punto, ese proceso de abstracción de donde viene el lenguaje matemático.

Otras de las dificultades en el aprendizaje del lenguaje matemático, según Radillo et al. (2005), se basan en errores de traducción entre el lenguaje natural y el lenguaje matemático. Identifican tres motivos para estos errores de traducción: falta de comprensión del lenguaje natural que se usa en un texto de matemáticas, falta de comprensión de los conocimientos matemáticos que aparecen en el texto y confusión provocada por la diversidad presente en el lenguaje matemático, dado que típicamente un mismo objeto se puede describir usando el lenguaje propio de diversas ramas de las matemáticas (como la geometría, el álgebra y la aritmética).

Además, según Arce et al. (2019), puede ser que en estos errores surjan oportunidades en las que el docente puede indagar y reforzar el aprendizaje del alumnado. Un ejemplo que mencionan es el siguiente: en una clase sobre continuidad de funciones se está comparando una función cuya discontinuidad es un salto infinito con una función definida a trozos en la que se modifica el valor de un único punto. En esta clase una alumna dice que la segunda función no es tan discontinua como la otra, porque una se puede "arreglar" mientras que la otra es discontinua "fuerte". Es claro que esta terminología no es correcta, pero igualmente permite ver que esta alumna está intuyendo la diferencia entre ambos tipos de discontinuidad. Y es aquí donde un docente tiene la ocasión de usar esta intuición para fomentar una comprensión más profunda de este tema.

3.3 Resolución de problemas

En la sección dedicada a los objetivos de este trabajo se menciona la "autonomía del alumnado en la resolución de problemas". Es por esto que consideramos apropiado dedicar un momento a hablar sobre qué supone resolver un problema y por qué supone una herramienta útil para un correcto aprendizaje de las matemáticas. Para justificar esta segunda cuestión, resulta conveniente hablar someramente sobre teorías del aprendizaje, tanto generales como específicas de matemáticas, ya que, aunque no son un objetivo de estudio de este trabajo, nos dan un marco general sobre el que sustentarnos. Para esta sección seguimos lo expuesto por Arce et al. (2019).

A la hora de intentar comprender cuáles son los mecanismos que protagonizan los procesos de aprendizaje, hay dos corrientes principales: el constructivismo y el empirismo. Estos modelos generales mantienen posturas bastante diferenciadas respecto a diversos aspectos. Por ejemplo, el empirismo mantiene que el protagonista durante el aprendizaje es el docente, mientras que el constructivismo defiende que el papel protagonista lo tiene el alumnado, concretamente los procesos de aprendizaje específicos de cada estudiante. Otra diferencia notable es que para el constructivismo el que un alumno cometa un error durante su aprendizaje supone una oportunidad para que este se supere y se adapte, mientras que el empirismo considera que un error implica o que el docente ha hecho mal su labor o que el alumnado no ha recibido correctamente el conocimiento del docente. Mientras que para el empirismo el conocimiento hace un viaje unidireccional desde el profesor hasta el alumnado, el constructivismo pone el acento en las interacciones entre el profesor y el alumno y en las interacciones entre alumnos.

Hay muchas más diferencias entre ambas corrientes pero, sin entrar en mucha profundidad, vamos a terminar diciendo que el empirismo sostiene que el alumno aprende en base a las explicaciones del profesor mientras que el constructivismo mantiene que el alumno aprende mediante las acciones que realiza frente a las distintas situaciones que le plantea el profesor.

Es el trabajo de diversos autores (J. Piaget, L. Vygotsky y J. Bruner, entre otros) en el consigue establecer la dominancia del constructivismo durante la segunda mitad del siglo XX y hasta la actualidad. Vamos a comentar algunas ideas de estos autores para entender un poco cómo funciona el constructivismo que, aunque deja de lado las particularidades de las matemáticas por ser generalista, nos puede permitir intuir cómo la resolución de problemas es una herramienta útil para aprender matemáticas.

Una de las ideas de L. Vygotsky es la de “zona de desarrollo próximo”. Esta zona consiste en la diferencia entre los conocimientos actuales de un alumno (zona de desarrollo actual) y los conocimientos que puede desarrollar un alumno con ayuda del profesor y de otros alumnos (zona de desarrollo potencial). De esta forma, esta idea nos viene a decir que la forma de estimular el aprendizaje de un estudiante es poniéndole situaciones que estén dentro de esta zona de desarrollo próximo, ya que si se le proponen situaciones dentro de su zona de desarrollo actual entonces el alumno ya sabe resolverlo y si se usan situaciones fuera de la zona de desarrollo potencial entonces se está apuntando demasiado lejos (Álvarez y Del Río, 1990).

Esta idea se puede juntar con la teoría de aprendizaje por descubrimiento de J. Bruner. Esta teoría nos dice que los docentes deben presentar al alumnado distintos problemas que permitan a este implicarse en la resolución de los mismos. De esta manera, cada alumno afronta esta situación de una forma distinta, tanteando las herramientas de la disciplina que está estudiando, y con ello generando distintas estrategias metacognitivas.

A partir de estas ideas parece intuirse qué tipo de problemas deben usarse en el aula y de qué forma hay que proponer al alumnado que los resuelva. Sin embargo, estas ideas vienen de modelos que buscan comprenden el aprendizaje en todos los ámbitos, por lo que dejan de lado las particularidades de las matemáticas. Para resolver esto está la didáctica de las matemáticas, donde se desarrollan modelos para analizar el aprendizaje de las matemáticas. Uno de estos modelos es el de la fenomenología didáctica, cuyo precursor principal fue H. Freudenthal.

En la sección previa se ha expuesto que una de las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas está en su lenguaje, y que esta dificultad viene en parte dada por la aparente desligadura entre la sintaxis del lenguaje matemático y su semántica. En parte, la fenomenología didáctica viene a dar una solución a esta dificultad, ya que este modelo nace desde una crítica al enfoque que se le suele dar a las matemáticas, como una disciplina finalizada y desprovista de contexto. En este enfoque se suele comenzar enunciando definiciones, teoremas y propiedades, se realizan las demostraciones pertinentes y después se proponen ejercicios que requieran de dichos resultados para ser resueltos.

Freudenthal propone seguir un orden contrario: empezar con las situaciones que requieran de las matemáticas que se pretenden enseñar para poder resolverlas y, a partir de estas situaciones, ir construyendo las herramientas necesarias para resolverlas. Es decir, se propone que, a menor escala, se simule el proceso por el cual la comunidad matemática llegó a desarrollar ciertas ideas a lo largo de la historia. Esto también nos dice qué papel pueden y deben jugar los problemas propuestos al alumnado, ya que no deben limitarse a ser problemas que sirvan de “sumidero” de todos los contenidos matemáticos que se han impartido en clase, si no que también deben tener el papel de guiar el “redescubrimiento” del conocimiento matemático por parte del alumnado.

Ahora ya sí, habiendo comentado algunas ideas que nos ayudan a comprender cómo se aprenden matemáticas, pasamos a hablar de resolución de problemas. Es un hecho notorio que uno de los objetivos de las matemáticas es la resolución de problemas. De hecho, hay casos en los que se desarrollan ramas de las matemáticas con el único objetivo de resolver un problema concreto, como es el caso del último teorema de Fermat y la teoría algebraica de números. Es por esto que resulta natural que cuando un docente propone un problema al alumnado, este se convierte en un generador de oportunidades de aprendizaje. Pero es importante diferenciar entre los tipos de problemas que se pueden plantear al alumnado. Aquí Smith y Stein (1998) establecen 4 niveles de demanda cognitiva que puede requerir una tarea matemática.

El nivel 1 viene dado por tareas de memorización. Aquí se pide simplemente reproducir el conocimiento matemático, sin establecer relaciones ni entre los conceptos ni entre los conceptos y su significado.

El nivel 2 consiste de tareas en las cuales se usan algoritmos mecánicos para obtener un resultado concreto. Este procedimiento no requiere establecer conexiones entre los conceptos matemáticos.

Es en el nivel 3 donde aparecen las conexiones entre conceptos matemáticos, buscando desarrollar una mayor comprensión de los contenidos y de los procedimientos empleados.

Por último, el nivel 4 consiste de tareas que consisten en "hacer matemáticas". Para "hacer matemáticas" se requiere un razonamiento complejo donde se debe buscar un camino propio, no sugerido en el enunciado. Por tanto, este nivel requiere unas conexiones profundas entre los conceptos involucrados, así como una capacidad de diseñar una estrategia "nueva". Este tipo de tareas corren el riesgo de producir ansiedad, por ser tan demandantes y por ser "desconocidas", pero también fomentan la autorregulación del aprendizaje.

El nivel en el que encaja una paradoja en este modelo está indefinido, ya que depende de cómo se presente al alumnado. Si se usa un enunciado simplista, en el que el alumnado no detecte que hay algo que no cuadra, entonces estamos ante una tarea de nivel 2. Sin embargo, si se usa un enunciado adecuado, que permita al alumnado detectar la dificultad del ejercicio y modificar su estrategia para solucionarle, entonces estamos ante una actividad de nivel 3.

Todo lo discutido en esta sección apunta hacia la conveniencia y necesidad de usar los problemas matemáticos para plantear situaciones al alumnado que no puedan resolver sólamente con sus conocimientos previos, pero que, bien en grupo o individualmente, puedan atajar, generando así un conocimiento propio.

3.4 Estado de la enseñanza de probabilidad

El cálculo de probabilidades se presenta en el currículum desde la educación primaria hasta bachillerato desde hace varias décadas. En el caso del currículum LOMCE de la educación secundaria en Cantabria, establecido en el Decreto 38/2015, está presente en las matemáticas de 2º de ESO, en taller de matemáticas (2º y 3º de ESO), en las matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas(3º y 4º de ESO), en las matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas (sólo en 4º de ESO), en matemáticas II (2º de bachillerato) y en matemáticas aplicadas a las CCSS I y II (1º y 2º de bachillerato, respectivamente).

A nivel internacional, según Vásquez y Alsina (2013), el NCTM en 1989 fue la primera institución en incluir “Datos y Azar” en el currículum de matemáticas en *Currículum and Evaluation Standard for School Mathematics*.

Los recursos con los que se cuentan para enseñar este cálculo de probabilidades son, principalmente, los libros de texto, las calculadoras y los ordenadores (por su capacidad de realizar simulaciones). Según el informe Cockcroft, (Ministerio de Educación y Ciencia, 1985), los libros de texto son indispensables ya que ofrecen a los docentes un esqueleto sobre el que desarrollar los contenidos y actividades de la asignatura, así como otros puntos de vista que ayuden al docente a dar planteamientos distintos a la asignatura.

Sin embargo, ambas herramientas no terminan de encajar. Según Ortiz y Serrano (2008), donde se realiza un estudio de 9 libros de texto, se encuentra que sólamente aparecen propuestas de simulaciones en 5 de ellos, siendo además propuestas escasas.

Esto se debe a que en los libros de texto (y, por ende, en las aulas) se le suele hacer hincapié en el estudio repetitivo de sucesos aleatorios asociados a juegos y a técnicas de conteo, sobre el estudio y aplicación de la probabilidad en otros contextos y con otras técnicas. Es por ello que el CEMAT (2021) argumenta que debería evitarse la simplificación del cálculo de probabilidades a la mera resolución algorítmica de distintas situaciones planteadas a partir de juegos y al uso mecánico de herramientas propias de la combinatoria.

Uno de los efectos de esta mecanización y simplificación de la probabilidad y de la estadística se traduce en que muchos estudiantes finalizan sus estudios sin haber afianzado conceptos estadísticos básicos y sin saber realizar procedimientos estadísticos (Batanero et al., 2013).

Como respuesta a esta situación, en la que los libros de texto marcan un camino poco efectivo y existe una tendencia entre el profesorado a seguir ese camino, Pajares y Tomeo (2009) exponen un modelo a seguir para la enseñanza, que se resume en los siguientes cinco pasos: observar la realidad, describir someramente la realidad, construir un modelo, trabajar con ese modelo y, finalmente, interpretar los resultados obtenidos. Los pasos tercero y cuarto son los más sencillos de realizar para un docente de matemáticas, por ser los más desarrollados dentro de las matemáticas. El resto de pasos tienen sus propias complejidades, por ejemplo, en el segundo paso es fundamental dar a entender al alumnado que es necesaria una simplificación de la realidad para poder desarrollar un modelo matemático que la represente. También parece complejo el último paso, ya que es importante que el alumnado compare el modelo con la realidad para comprender que no existe un modelo matemático perfecto de la realidad.

En la misma dirección, en *Conclusiones del Seminario Federal La Estadística y la Probabilidad en la Educación Matemática* (2014), se establecen algunas estrategias que seguir en el aula a la hora de enseñar cálculo de probabilidades y estadística. A continuación se describen algunas de estas:

-Tener en cuenta los conocimientos, sesgos, ideas y experiencias previas del alumnado, apoyándonos en los contenidos dados en cursos anteriores. Ya que parte de los contenidos de probabilidad no son triviales, llegando incluso a ser aparentemente paradójicos, resulta necesario tener en cuenta la intuición del alumnado y preparar las explicaciones teniendo ya en cuenta algunos de los errores que va a cometer el alumnado. Además, se produce una cierta repetición de los contenidos iniciales de estadística y probabilidad a lo largo de todos los cursos, lo que perjudica el aprendizaje de conceptos más avanzados en cursos superiores.

-Usar sucesos realistas y que sean familiares para el alumnado. De esta manera, se le pueden dar al alumnado una serie de herramientas para que pueda interpretar su entorno y la información que recibe a través de medios de comunicación.

-Utilizar debidamente los medios tecnológicos para trabajar con ejemplos dinámicos. De la misma manera que se usan programas de geometría dinámica, en los que los estudiantes tienen la oportunidad de modificar los parámetros del problema para observar cómo evoluciona, se deberían usar programas que permitieran lo mismo pero para ejercicios de análisis de un conjunto de datos.

-Dar más importancia a la interpretación que al cálculo. Usando programas que permitan realizar actividades como las propuestas en el anterior apartado, se puede quitar relevancia al cálculo mecánico y poner el foco en la interpretación de los datos.

-Relacionar la estadística y la probabilidad con otras disciplinas y con otras ramas de las matemáticas. Por un lado, la estadística proporciona un lenguaje y unos métodos que son usados por distintas ciencias para verificar sus hipótesis. Por otro lado, se pueden establecer relaciones, por ejemplo, entre el cálculo de probabilidades y las fracciones.

Siguiendo lo desarrollado en el primer punto, Batanero (2001) habla, entre otros temas, de que los errores del alumnado vienen, en parte, por su conocimiento previo. Y es que en ocasiones un alumno se acostumbra a usar un conocimiento en un cierto contexto y, por inercia, intenta usar ese mismo conocimiento en otro contexto, produciendo así respuestas incorrectas. Se identifican tres tipos de obstáculos según su origen, que se aplican al aprendizaje de las matemáticas en general y no sólo de la estadística y el cálculo de probabilidades (Brousseau, 1983).

-Origen ontogénico: vienen de que el concepto que se pretende enseñar es demasiado prematuro para el desarrollo del niño. Por ejemplo, en el cálculo de probabilidades se requieren en ocasiones razonamientos de proporcionalidad, que a un niño muy joven le pueden resultar incomprensibles.

-Origen didáctico: surgen de un método incorrecto para enseñar un concepto. Por ejemplo, si para explicar que un suceso con probabilidad 0 puede ser un suceso posible utilizamos integrales, corremos el riesgo de que la exoticidad de la explicación impida que se comprenda la idea subyacente.

-Origen epistemológico: están relacionados con el objeto matemático a comprender, con su propia definición. Por ejemplo, si al definir la probabilidad de un suceso decimos que "la probabilidad mide como de probable es un suceso", puede suceder que esa definición auto referencial produzca dificultades.

Con todo lo hablado en esta sección, parece razonable pensar que las paradojas puedan ser una herramienta útil para dar respuesta a algunas de las dificultades que hay en el aprendizaje de estadística y cálculo de probabilidades, aunque esta idea la desarrollaremos en la siguiente sección.

3.5 Valor didáctico de las paradojas

Lo primero que debemos hacer es definir lo que vamos a entender por paradoja. Según Rodríguez (2020):

> *Se entiende por paradoja a todo aquel resultado que, a priori, es contrario a la experiencia y que lleva implícito una contradicción lógica imperceptible a primera vista.* (p. 1299).

Está, por tanto, en la propia naturaleza de las paradojas el parecer “tramposas”, ya que casi están hechas para “engañar”. Es por esto que autores como Falk y Konold (1992) consideran que resulta atractivo usar algunos problemas cuyas dificultades no sean obvias para mostrarle al alumnado sus sesgos y sus malas costumbres, con la intención de que esto les ayude a mejorar, pero abusar de esta práctica entraña el riesgo de que acabe fomentando el que el alumnado se auto convenza de su incapacidad para evitar esos errores, minando su capacidad para aprender de ahí en adelante.

Un punto de vista opuesto es el aportado por Gordon (1991), donde defiende que los problemas anti intuitivos no se limitan a ser más exóticos y, por ello, a llamar la atención del alumnado, sino que además contribuyen a que el alumnado mejore la complejidad y solidez de sus razonamientos.

Es por esto que resulta razonable buscar un punto intermedio entre ambas posturas, buscando los beneficios que puedan aportar las paradojas pero sin minar la confianza del alumnado. Según Lesser (1998), existe un punto medio en el cual el uso correcto de los ejemplos anti intuitivos que surgen de manera natural en el campo de la estadística apoya la pedagogía constructivista, reconociendo las creencias a priori del alumnado y usando estas creencias para obtener una comprensión más profunda de la materia. Además, también dice que un ejemplo que no se pueda pasar por alto sin más, si no que deje una impronta en el conocimiento del alumnado, es un método óptimo para reforzar la construcción activa del conocimiento. Por tanto, según este autor, dentro de una metodología constructivista resultaría muy útil el uso de paradojas.

Merece la pena comentar la vivencia personal, que, como tal, no tiene gran validez argumentativa per se, pero sigue siendo útil para ejemplificar estas ideas de las que hablamos, Uclés (2004). Aquí describe una situación que probablemente sea común. Durante su formación en secundaria, escuchó comentarios de algunos profesores afirmando que “las matemáticas no necesitan experimentos” y que “sólo se basan en razonamientos lógicos”. A estas edades suele asociarse la desconocida lógica con el sentido común, por lo que las matemáticas pasan a convertirse en una disciplina exacta que “formaliza” este sentido común. Entonces, cuando se da una situación en la que nuestro sentido común, nuestra intuición, nos dice una cosa pero las matemáticas dicen la contraria, podemos llegar a dudar tanto de nosotros mismos como de las matemáticas. Cuando se dio una situación de ese estilo en el aula, el profesor les explicó que las matemáticas nunca se equivocan, aún si ello implica contradecirnos. En el mismo artículo el autor hace una serie de propuestas de actividades basadas en paradojas, invitando al profesorado a recrear esa situación que vivió.

La importancia de las paradojas en la enseñanza de matemáticas no viene tan sólo del constructivismo y de experiencias personales. Por ejemplo, Rapoport (1967) argumenta que el desarrollo de las matemáticas, desde un punto de vista histórico, viene de la resolución de paradojas. De esta manera, se van consiguiendo marcos teóricos cada vez más amplios que permiten dar solución a las paradojas.

Por lo tanto, si buscamos que el alumnado desarrolle su conocimiento, parece razonable pretender que sigan un camino similar al que se siguió a lo largo de la historia.

Otro enfoque bajo el cual las paradojas ganan relevancia es desde el punto de vista de la motivación. Pese a las advertencias previamente citadas, Rodríguez (2020) destaca el potencial motivador que tienen las paradojas, facilitando a los estudiantes aproximar las matemáticas con mayor precisión mientras éstos formulan y validan sus propias conjeturas.

Pero la utilidad de las paradojas no se limita a enseñar matemáticas a los estudiantes, si no también a futuros profesores. Es por esto que Batanero et al. (2011) elaboran una propuesta de actividad didáctica dirigida a profesores de matemáticas donde se busca usar una paradoja, conocida como la ‘Caja de Bertrand’, para motivar la reflexión didáctica de los profesores. Algo similar ya hizo Flores (1999), donde incide que el objetivo es sacar al profesorado de razonamientos automatizados, obligando a éste a profundizar en los conceptos matemáticos detrás de la resolución de las paradojas.

Para terminar esta sección, merece la pena comentar que es considerable la cantidad de autores que han realizado propuestas de actividades didácticas basadas en paradojas para la enseñanza de cálculo de probabilidades. A continuación se describen algunas de estas propuestas, sin intención de hacer una lista exhaustiva. Las paradojas a las que se hará referencia aparecen explicadas en la sección 4.5 y en el Anexo D.

Batanero et al. (2009) proponen usar la paradoja de Monty-Hall como problema a plantear en el aula, Contreras et al. (2013) optan por la paradoja del Sr. Smith, Batanero et al. (2012) prefieren la paradoja de los prisioneros, Gea et al. (2017) optan por la paradoja de la caja de Bertrand y la de Monty-Hall y Contreras el al. (2011) proponen usar todas las mencionadas hasta ahora. El caso quizá más distinto es el de Rodríguez (2020), donde propone usar una simulación por ordenador de la paradoja de Monty-Hall.

3.6 Valor didáctico de la historia de las matemáticas

A lo largo de este capítulo se han hecho ya menciones a la historia de las matemáticas y a su relevancia e influencia en la didáctica de las matemáticas, pero ya que uno de los objetivos de este trabajo es "buscar que el estudiante se dé cuenta de que las matemáticas surgen de forma natural" vamos a dedicar un momento a hablar sólamente de historia.

Parece razonable pensar que una de las maneras de conseguir este objetivo sea introducir algunas de las ideas siguiendo su desarrollo histórico. De hecho, según Contreras et al. (2012), en la historia del cálculo de probabilidades se encuentran sucesos curiosos que fomentan un ejercicio de reflexión a cerca del papel del azar en la vida diaria, además de motivar al alumnado en su estudio de la disciplina.

Siguiendo lo expuesto por González (2004), en las matemáticas históricamente se ha seguido un proceso de "simplificación y generalización", mediante el cual los marcos teóricos previos se refunden para dar lugar a herramientas nuevas, más potentes, que permiten justificar los resultados previos como casos particulares. En este proceso se "oculta" el desarrollo de las matemáticas y se presenta el conocimiento matemático al alumnado como algo ya terminado, cerrado y casi dogmático.

También González (2004) argumenta que la manera óptima de conseguir una comprensión profunda sobre un concepto es recreando la construcción original de ese concepto, la que llevó por primera vez a alguien a concebir esa idea. Este método se basa en la idea de que, para alcanzar un nivel de conocimiento equivalente al de varias generaciones pasadas, es necesario pasar por las experiencias de esas generaciones pasadas.

Para terminar, según González (2004), para un profesor de matemáticas la historia de las matemáticas supone un medio para la reflexión sobre las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, así como una herramienta que facilite el aprendizaje por redescubrimiento.

4. Propuesta de actividad didáctica

Esta actividad va a consistir de un taller enmarcado dentro de la asignatura de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II, desarrollada en el periodo de prácticas del máster en un instituto de Cantabria.

Para esta actividad didáctica se van a emplear tres sesiones de clase, en las cuales se van a tratar la historia de la probabilidad, los conceptos básicos sobre cálculo de probabilidades y diversas paradojas probabilistas.

En este capítulo primero vamos a exponer el contexto (curricular y de aula) en el que se desarrolla esta actividad. A continuación veremos cómo se enmarca esta actividad dentro de las competencias establecidas en la Orden EDC 65/2015, junto con los objetivos de la misma. Después expondremos una temporalización de las sesiones. Luego desarrollaremos los contenidos de todo este taller, a los que hace referencia la temporalización. Para terminar esta sección, expondremos los resultados obtenidos en el aula con esta experiencia.

4.1 Contextualización

Este taller va a llevarse a la práctica en un grupo de 2º de Bachillerato del centro de prácticas. Hay 21 estudiantes en este grupo, el cual es de nivel moderadamente homogéneo, ya que la totalidad del alumnado pretende acceder a estudios universitarios. Aunque es cierto que algunos estudiantes tienen más dificultades que otros, absolutamente todos acuden a clases particulares, lo cual permite que todo el grupo avance a un ritmo razonable. Ningún estudiante presenta una evaluación psico-pedagógica. En general, son un grupo de estudiantes participativos y trabajadores, aunque buscan cualquier excusa para distraerse. Además, están acostumbrados a trabajar en grupos pequeños para resolver problemas, ya que en el centro se fomenta el aprendizaje cooperativo.

En el momento de realizar este taller, se ha finalizado con las unidades didácticas correspondientes al bloque de análisis y este taller va a suponer el inicio del bloque de estadística y probabilidad. Como en este centro no se llega a dar nunca en Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I el bloque de estadística y probabilidad, sumado a que estos estudiantes cursaron parte de 4º de ESO durante el confinamiento por la declaración de estado de alarma del 14 de marzo de 2020, hay que empezar desde 0 en el cálculo de probabilidades con este grupo. Esto supone que hay que dar contenidos que son previos a esta asignatura, como el concepto de diagrama de árbol. Es por esto que, pese a que los contenidos de este taller no formarán parte de la evaluación de la asignatura, el alumnado requerirá de los mismos para el resto del bloque de estadística y probabilidad.

Respecto al contexto curricular, los contenidos de este taller se corresponden con dos de los bloques del currículum, establecido en Decreto 38/2015, de la asignatura: el bloque 1 (Procesos, métodos y actitudes en matemáticas) y el bloque 4 (Estadística y Probabilidad). Los contenidos trabajados correspondientes al bloque 1 son:

- Planificación del proceso de resolución de problemas.
- Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico.

Los contenidos trabajados correspondientes al bloque 4 son:

- Profundización en la Teoría de la Probabilidad. Axiomática de Kolmogorov. Asignación de probabilidades a sucesos mediante la regla de Laplace y a partir de su frecuencia relativa.
- Experimentos simples y compuestos. Probabilidad condicionada. Dependencia e independencia de sucesos.

4.2 Desarrollo competencial

Las competencias que se van a trabajar en este taller son las siguientes: “comunicación lingüística”, “competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología”, “aprender a aprender” y “sentido de iniciativa y espíritu emprendedor”.

La primera de ellas, la comunicación lingüística, se va a trabajar desde el momento en el que se emplee en el aula el aprendizaje cooperativo, concretamente cuando en la última sesión se les pida que se pongan en grupos para resolver ejercicios. Como además en estos ejercicios se les pedirá que den sus impresiones a priori y que razonen en grupo, va a ser necesario que compartan y contrasten sus ideas.

Quizá sea una obviedad decir que en un taller de matemáticas, enmarcado en una asignatura de matemáticas, se va a trabajar la competencia matemática, pero aún así vamos a argumentarlo. Dado que en este taller se busca que el alumnado desarrolle estrategias para usar las matemáticas, concretamente el cálculo de probabilidades, en distintos contextos, entonces estamos cultivando esta competencia.

Respecto a la competencia de aprender a aprender, el motivo de que aparezca aquí deriva directamente de dos hechos: se pretende que el alumnado tenga un papel activo durante las clases (incluso en las partes más expositivas) y el alumnado va a tener que enfrentarse por sí mismo a problemas desconocidos (en cuanto a la novedad del contexto pero no de las herramientas necesarias para la resolución).

Además, como se va a fomentar el pensamiento crítico en el alumnado, eso repercute en las competencias matemática, de aprender a aprender y de sentido de iniciativa y espíritu emprendedor; como se argumentó en la sección del marco teórico.

4.3 Objetivos de aprendizaje y metodología

Esta propuesta didáctica busca que el alumnado alcance los siguientes estándares de aprendizaje evaluables, regulados en el Decreto 38/2015, recogidos en los bloques 1 (procesos, métodos y actitudes en matemáticas) y 4 (estadística y probabilidad):

- Expresa, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuados.
- Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas, reflexionando sobre el proceso seguido.
- Usa el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados al contexto y a la situación.
- Utiliza argumentos, justificaciones, explicaciones y razonamientos explícitos y coherentes.
- Busca conexiones entre contextos de la realidad y del mundo de las matemáticas (la historia de la humanidad y la historia de las matemáticas; arte y matemáticas; ciencias sociales y matemáticas, etc.)
- Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace, las fórmulas derivadas de la axiomática de Kolmogorov y diferentes técnicas de recuento.

Las metodologías que se usarán para este fin serán aquellas con las que trabajan habitualmente estos alumnos en esta asignatura: la exposición magistral y el aprendizaje cooperativo. Con la primera el profesor transmite los contenidos, el conocimiento y los procedimientos al alumnado, para que este desarrolle sus propias estrategias mentales. Se buscará la participación del alumnado durante estas exposiciones, intentado que su papel en el aula no sea la de un receptor pasivo si no activo. Con la segunda los estudiantes colaboran entre sí, reforzando de manera efectiva las explicaciones dadas por el profesor. Además, el que puedan formularse preguntas entre sí y responderlas correctamente libera de una parte de trabajo al profesor, lo que le permite resolver las dudas concretas que requieran de más atención.

4.4 Temporalización

En esta sección se muestra cómo se va a realizar cada sesión, haciendo alusión a los contenidos que se desarrollarán en la siguiente sección.

Sesión	Contenidos	Descripción
Primera sesión (50 minutos)	Interés histórico. Juegos de azar, repartos. Definiciones de probabilidad: clásica, frecuentista, subjetiva y axiomática. Primera paradoja: número de dos cifras	La primera parte de la sesión será una exposición de los contenidos, usando diapositivas (Anexo A). Hacia el final de la sesión, se le planteará al alumnado la paradoja escogida y se le invitará a que exprese su intuición a priori, para luego experimentar con la paradoja en el aula y contarle la resolución.
Segunda sesión (50 minutos)	Diagramas de árbol. Probabilidad condicional. Paradoja de la caja de Bertrand.	La primera parte de la sesión será igual que la anterior. Luego se trabajará la paradoja de la caja de Bertrand: primero con una resolución errónea (basada en la intuición del alumnado), luego se experimentará (con el material que aparece en el Anexo B) y se terminará con una resolución correcta.
Tercera sesión (50 minutos)	Paradoja del niño y de la niña. paradoja de Monty-Hall. Paradoja del prisionero.	El alumnado se agrupará (bajo su propio criterio, como acostumbran hacer), en grupos de 2 a 3 personas. Cada grupo tendrá que resolver una ficha con una paradoja (véase el Anexo C). Al final de la clase, se les pedirá que comenten en voz alta sus resultados.

4.5 Descripción del contenido

En esta sección se van a desarrollar los contenidos que se van a trabajar en el taller. Estos contenidos se han sacado de Fernández (2021), salvo que se indique lo contrario.

El concepto de aleatoriedad ha sido conocido, por lo menos de manera informal, desde hace milenios. Existen pruebas de que los sumerios, los asirios y los egipcios ya usaban huesos (astrágalos, concretamente) como dados “primigenios”, aparentemente con la intención de predecir resultados. Estos dados al principio se tallaban para caer en 4 posiciones distintas y posteriormente fueron suavizados para caer en 6 posiciones distintas, como los actuales. Parece ser que en la antigua Grecia ya usaban dados de 6 caras para juegos de azar que, como otras partes de su cultura, se extendieron a Roma. Así es como llegaron a nosotros este tipo de juegos, mientras que por ejemplo en China tuvieron este desarrollo de manera independiente hace 3000 años.

Lo que suele considerar el comienzo del estudio del cálculo de probabilidades fue la correspondencia entre Pascal y Fermat, en el que discutían cuál sería una forma justa de hacer un reparto si se interrumpe un juego de azar (León, 2009).

Vamos a poner un caso sencillo para entender cuál era la preocupación. Supongamos que tenemos dos jugadores, A y B, que han apostado 8€ cada uno. Van a jugar a hacer lanzamientos de una moneda hasta que uno de los dos acierte 3 veces el lado sobre la que cae la moneda. Parece obvio que si cada jugador lleva 2 aciertos y se ven obligados a detener el juego, entonces cada uno debería llevarse 8€, lo que apostó, pero si al jugador A lleva 2 aciertos y el jugador B no ha acertado ni una vez, parece razonable que el jugador A se lleve algo de la apuesta de B. El problema está en determinar cuánto exactamente le corresponde.

La solución a la que se llega es que se debe calcular las opciones de que el jugador A gane y esa debe ser la proporción del bote que deberá llevarse. Si hacemos las cuentas con cuidado, se puede ver que la cantidad de casos en los que A gana en esta situación representan 7/8 del total, por lo que A deberá llevarse 14€ y B tan sólo 2€.

Mediante el estudio de este tipo de problemas llegamos a la primera definición de probabilidad de la que hablaremos, la fórmula de Laplace. Esta fórmula nos dice que la probabilidad de que pase un suceso es el cociente entre la cantidad de casos favorables entre la cantidad de casos posibles. Por ejemplo, la probabilidad de sacar un número par con un dado convencional se calcularía de la siguiente manera: contamos la cantidad de casos en las que obtenemos un número par (que sería sacando un 2, un 4 o un 6, por lo que tenemos 3 casos) y dividimos esta cantidad entre la cantidad de casos totales (en este caso serían 6, una por cada cara del dado). Por tanto la probabilidad de sacar un número par es igual a 3 entre 6, es decir, ½. Esta forma de trabajar es muy útil siempre que tengamos una cantidad finita de resultados posibles, como sucede en los juegos de azar tradicionales, pero hoy en día podemos darnos cuenta de que esto ya no funciona si tenemos infinitos resultados posibles.

Por ejemplo, ¿cuál es la probabilidad de que un ser humano adulto mida exactamente 1,50m? Con exactamente nos referimos a que sea así con infinitos decimales de precisión, es decir, no valdría por ejemplo que midiera 1,5001m si no que tiene que medir 1,50m. Parece intuitivo que a medida que exigimos más y más precisión en la medida, la probabilidad de encontrar un ejemplar que lo cumpla es cada vez menor, por lo que si exigimos una precisión infinita, entonces tenemos que esta probabilidad se vuelve, necesariamente, igual a 0. Sin embargo, hay muchas personas que miden más de 1,50m y todas durante sus primeros años de vida midieron menos de 1,50m. Es por esto que resulta razonable pensar que todas las personas que miden más de 1,50m en algún momento de su vida, por momentáneo que fuera, midieron exactamente 1,50m. Nos encontramos entonces que un suceso aleatorio (escoger la altura de una persona al azar) tiene un suceso que es posible (que la altura de esa persona sea 1,50m) pero cuya probabilidad debe ser exactamente igual a 0. ¿Cómo es esto posible?

Lo que está sucediendo en este caso es que al escoger la altura de una persona al azar, suponiendo que podemos medir esa altura con precisión infinita, estamos escogiendo un número al azar entre 0 y 2,72m, siendo este el récord histórico según los Guiness World Records (2022), con tal suerte de que la cantidad de números entre 0 y 2,72m son infinitos. Entonces nos encontramos que la fórmula de Laplace no sirve en este caso, ya que no podemos dividir entre infinito.

Una manera de "solucionar" este problema viene con la noción de límite. La idea es la siguiente: repetir un suceso muchas veces y contar en cuántos casos ocurre el suceso que queremos estudiar. El problema que tiene esta definición es que en muchos casos no es manipulable, no es algo con lo que se puedan hacer cuentas como con la fórmula de Laplace. Además de que nos viene la pregunta, ¿cuántas veces tenemos que repetir el suceso? ¿Diez veces? ¿Cien? ¿Un millón? No hay respuesta general, lo que sabemos es que dependiendo del suceso es posible obtener resultados decentes a partir de unos cientos de repeticiones, pero en otros necesitamos muchas más.

No sería hasta 1933 cuando Andréi Kolmogórov nos dio una solución definitiva a este problema con una definición axiomática, que permite definir con precisión el concepto de probabilidad en cualquier ámbito. Como el nivel de formalismo de esta definición es considerablemente más elevado de lo que se pretende para esta actividad, no se va a trabajar.

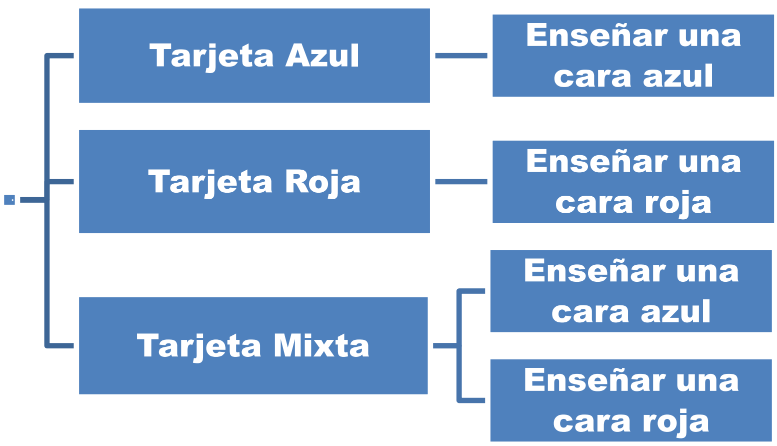
A parte de estas distintas definiciones, merece la pena mencionar la que está más extendida en nuestra sociedad: una noción subjetiva. Por ejemplo, es común que un periodista deportivo diga "este partido es muy probable que lo gane el equipo visitante". Aquí, ¿qué definición de probabilidad está usando este periodista? La respuesta es que ninguna de las previas, ya que lo que quiere decir es "según los conocimientos previos que tengo, me resulta más razonable pensar que este partido le va a ganar el equipo visitante". Creo que es relevante señalar esta forma de entender la probabilidad porque si estamos hablando de llevar el cálculo de probabilidades a un aula entonces debemos ser conscientes de que una buena parte del alumnado va a tener esta idea en la cabeza, de manera inconsciente.

Ahora, que ya hemos cubierto los contenidos referentes a la historia de la probabilidad y a las definiciones de la misma, vamos a hablar del objeto principal de este taller, las paradojas probabilistas. Vamos a empezar por la más sencilla de entender, la primera que se le explicará con detalle al alumnado: la paradoja de la caja de Bertrand. Como esta actividad se va a desarrollar con alumnado de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II (2º de bachillerato), se hará un breve repaso de la noción de diagrama de árbol y de probabilidad condicionada, aquí vamos a hablar directamente de estos conceptos para explicar la paradoja.

Se presenta la siguiente situación: hay una caja con tres tarjeras dentro, una con las dos caras azules, una con las dos caras rojas y otra que tiene una cara azul y la otra roja. Se agita la caja, se saca una tarjeta al azar y se enseña una de las caras de la tarjeta. El espectador debe adivinar cuál es el color de la cara oculta. Hay tres respuestas posibles: decir que la cara oculta es del mismo color que la visible, decir que es del color contrario o da igual el color que digas porque ambos son igual de probables.

Vamos a hacer un razonamiento sin hacer ningún cálculo. Pongamos que ha salido que la cara visible es de color azul, entonces sólo hay dos tarjetas posibles: la que es azul por ambas caras y la que tiene los colores distintos. Como ambas tarjetas tienen la misma probabilidad inicial de ser escogida, entonces da igual el color que digas.

Este razonamiento es un claro ejemplo de un mal uso de lo que se denomina probabilidad condicionada, un buen uso de este concepto permite obtener información de un suceso a partir de cierto conocimiento previo (como veremos más



adelante). Si hacemos un diagrama de árbol vemos que la probabilidad de sacar una tarjeta con los dos colores iguales es de 2/3 frente a la probabilidad de 1/3 de sacar la tarjeta mixta.

Vamos a hacer los cálculos pertinentes usando el concepto de probabilidad condicionada. El suceso “A” va a ser “sale la tarjeta mixta”, el suceso “B” va a ser “la cara que se enseña es azul”. La probabilidad de que suceda A es 1/3, por lo expuesto previamente. La probabilidad de que suceda B es 1/2, para verlo tan sólo hace falta mirar el diagrama en árbol previo. Aplicando la fórmula de la probabilidad condicionada, tal como aparece en cualquier libro de texto:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/6}{1/2} = 1/3$$

Por lo tanto, si sale una cara azul entonces la probabilidad de que sea la tarjeta mixta es 1/3. Ahora seguramente parezca obvio que la estrategia óptima en este ejercicio es predecir siempre el mismo color que el observado, pero a priori no es así. Además para llegar a este resultado han sido necesarias muy pocas cuentas y tan sólo ha hecho falta ordenar un mínimo nuestro razonamiento, por lo que consideramos que es ideal para empezar a motivar al alumnado a que piense un poco y que puede ser un comienzo para trabajar el pensamiento crítico del alumnado.

Sin embargo, consideramos que es mejor empezar con una paradoja que pueda afectar más al alumnado, antes siquiera de decirle que este trabajo va de paradojas.

La paradoja que va a cumplir esta labor es una variante de la paradoja del cumpleaños. La paradoja del cumpleaños viene de plantear la siguiente situación: ¿cuál es la probabilidad de que haya dos personas en un grupo que cumplan años en el mismo día? Como hay 365 posibilidades (simplificando el problema, pero con 366 casos los resultados son muy similares), la intuición nos dice que hará falta una gran cantidad de personas para poder garantizar que esto sucede. Sin embargo, si hacemos las cuentas pertinentes, se puede ver que con 23 personas ya hay un 0.5073 de probabilidad de que esto ocurra.

Es decir, en aproximadamente la mitad de las aulas de secundaria se debería dar esta situación. Si aumentamos a 75 personas (lo que podría ser un curso entero en un centro con varias líneas), entonces la probabilidad de que haya al menos dos que cumplan años el mismo día aumenta a un 0.9997.

Como en el aula en la que se va a hacer esta actividad hay 21 personas, preferimos no arriesgarnos a que no se cumpla, ya que la probabilidad de que suceda es menor a la de acertar un lanzamiento de moneda. Por esto vamos a modificar ligeramente esta paradoja en nuestro favor: vamos a bajar la cantidad de casos totales a 100. Lo que vamos a hacer es pedir al alumnado que escriba en un papel un número entero del 1 al 100, el que quiera, y guarde el papel. Luego iremos preguntando por los números del alumnado hasta encontrar dos coincidencias. La probabilidad de tener éxito con esta modificación es del 0.8696. Si los dos profesores que estaremos en el aula también escribimos un número cada uno, entonces la probabilidad aumenta a un 0.9175.

Y esto es suponiendo que el alumnado está eligiendo los números realmente al azar, sin seguir ningún patrón. Según Towse (2014) esto no es así, ya que cuando se nos pide a un grupo de personas cualesquiera que digamos un número al azar en realidad tenemos sesgos y preferencias, por ejemplo: al decir números del 1 al 10 es más probable que digamos un número del 1 al 5 que del 6 al 10. Es por este efecto que la probabilidad de que esta paradoja funcione en el aula es en realidad significativamente superior al 86.96% o al 91.75%, en cualquier caso.

Estas dos paradojas, la de la caja de Bertrand y la del cumpleaños, son paradojas que expondrá el docente. El resto de paradojas las trabajará el alumnado de forma autónoma. Estas paradojas son: la del niño o la niña, la de Monty-Hall y la del prisionero. Todas estas paradojas admiten una resolución similar a la de la caja de Bertrand, aunque no se puedan representar en el aula fácilmente como la de la caja de Bertrand. La resolución de estas paradojas puede encontrarse en el Anexo D.

4.6 Resultados

Vamos a ir comentando los resultados obtenidos en cada sesión.

Primera sesión. La primera reacción de los alumnos cuando se les dice que no van a recibir una clase “normal” ya es, desde el primer momento, positiva. Aunque se les dice que una parte de los contenidos que se les va a dar en estas sesiones la necesitarán para lo que queda de asignatura, se les ve mucho más relajados que de costumbre.

Su reacción cambia cuando descubren que se les va a hablar de historia de matemáticas, esta en un principio es muy negativa. Comentan que para ellos supone juntar dos de las asignaturas más temidas, historia y matemáticas. Sin embargo este prejuicio se diluyó rápidamente cuando comienza la explicación. Participaron activamente durante la sesión, haciendo preguntas y comentarios con los que demostraron interés.

Al proponerles el problema de la apuesta interrumpida, rápidamente propusieron algunas soluciones. Se les puso la siguiente situación: dos jugadores (A y B) apuestan 8€ (cada uno) al mejor de 5 lanzamientos de moneda y el juego se interrumpe cuando A lleva 2 aciertos y B ninguno (este ejemplo es el mismo que el que se ha usado en la 4.5 Descripción del contenido). Al pedirles una solución, varios dijeron que toda la apuesta se la debería llevar A, ya que iba ganando. Otros dijeron que como el trato al que habían llegado A y B era de jugar al mejor de 5 lanzamientos, si se interrumpía el juego antes de completarlo entonces cada uno debería recuperar su apuesta inicial. Fueron unos pocos los que propusieron un término medio, aunque no supieron concretar una propuesta concreta, ni mucho menos establecer un criterio para establecer un reparto justo en cada situación. Al explicarles que la solución correcta pasa por calcular la probabilidad de victoria de cada jugador, no fueron pocos los alumnos que asintieron o pronunciaron un “ah”, mostrando comprensión.

La definición de probabilidad “clásica” la pudieron entender sin grandes dificultades, ya que es con la que están más familiarizados. Cuando se les explicó la necesidad de una definición más general, ya que hay ocasiones en las que ocurre un suceso de probabilidad 0 (usando la misma explicación que en la 4.5 Descripción del contenido), hubo un gran consenso de que la definición de probabilidad "frecuentista" no es idónea. Algunos hicieron preguntas a cerca de cuántas veces habría que repetir un experimento para saber la probabilidad de cada suceso, dando a entender que comprendieron perfectamente los inconvenientes de esta definición. Su reacción al decirles que la solución está en la definición axiomática de Kolmogorov fue de decepción y de alivio, a partes iguales. Decepción por parte de aquellos alumnos que les estaba interesando y que no les gustó que la solución al problema estuviera lejos de su alcance y alivio por parte de aquellos a los que sólamente el nombre de esta definición de probabilidad ya les da miedo.

Al presentarle al alumnado la paradoja de los números de dos cifras, su intuición es bastante diversa. Algunas de las propuestas, aportadas por el alumnado, de la probabilidad de que se cumpla la paradoja (que haya dos personas que escojan el mismo número) son las siguientes: 0.01, 0.05, 0.1, 0.13, 0.21, 0.5 y 0.75. En general existe el consenso de que la probabilidad de que ocurra es muy baja, con alguna excepción que opina que es alta. Me parece especialmente llamativa la propuesta de 0.21, ya que sigue el razonamiento erróneo "hay 100 opciones y se van a escoger 21, así que la probabilidad es 0.21".

Para mi desgracia y sorpresa, la paradoja no se cumplió la primera vez que se intentó, pero sí la segunda y la tercera. De hecho, en estas dos ocasiones hubo dos coincidencias en cada una. Los estudiantes se muestran sorprendidos y confusos por la diferencia entre sus intuiciones y la experiencia en el aula. Al explicarles cuál es la probabilidad de que se cumpla, y contarles sin mucho detalle de dónde viene, se oyen varios sonoros "ah" que son un signo de que se han dado cuenta de su error. Está claro que cuando se hace un experimento en el aula en el que interviene el azar, nos arriesgamos a que salga mal, por muy alta que sea la probabilidad de que funcione.

Se terminó la sesión diciéndoles que en las matemáticas es muy importante hacer los cálculos con cautela y no dejarse llevar por la intuición, con lo que el alumnado se mostró muy de acuerdo tras la última paradoja.

Segunda sesión. Al explicarles las nociones básicas del cálculo de probabilidades se hizo notar que cada alumno tiene un ritmo de aprendizaje distinto. Se puede agrupar bajo este criterio a los estudiantes en distintos grupos. Por un lado están los que desde el principio lo entendieron todo, de entre los cuales detecté que a algunos ya les habían explicado estas ideas en sus clases particulares. Por otro lado a algunos les costó entender cómo ordenar y escribir correctamente su razonamiento, pero tenían una cierta intuición de cuáles eran las respuestas correctas. Por ejemplo, al plantearles la pregunta "si tengo un dado de 6 caras, le tiro y os digo que ha salido un número par, ¿cuál es la probabilidad de que salga un 2?" fueron varios los que no dudaban en que la respuesta era 1/3, pese que al pedirles que lo razonasen no eran capaces de hacerlo. Por otra parte, otros ante la misma pregunta dijeron que la probabilidad era 1/6, ya que no entendían cómo el saber información extra de un suceso modifica la probabilidad del mismo.

Tras unos cuantos ejemplos, la mayoría del alumnado comprendió cómo se usa la regla de Laplace (lo que en este trabajo hemos llamado definición "clásica") y la probabilidad condicionada.

Habiendo establecido una base de cálculo de probabilidades, pasamos a la paradoja de esta sesión: la caja de Bertrand. Se les muestra tanto la caja como su contenido (mírese el Anexo B). Se les plantea la siguiente elección: el profesor saca una tarjeta al azar y les enseña una de las caras de la tarjeta, ¿cuál es el color de la otra cara? Aquí las respuestas del alumnado están divididas, algunos pocos dicen que el color de la cara oculta es el mismo que es de la cara mostrada, otros pocos dicen el color contrario y la mayoría dicen que es indiferente el color que se escoja (porque intuyen que ambos colores tienen la misma probabilidad).

Tras esto se experimenta varias veces con esta paradoja, un total de 9 veces. De esas 9 veces, 3 veces el color de la cara oculta era el contrario del de la cara mostrada (el que coincidiera el experimento con la predicción teórica de la resolución correcta de la paradoja fue pura casualidad, aquí el azar nos benefició, al contrario de en la anterior sesión). Al ver estos resultados hubo una alumna que se dio cuenta de lo que sucedía. Dijo que como una de las tarjetas tenía los colores cambiados y las otras dos tenían los mismos colores en ambas caras, entonces la probabilidad de que la cara mostrada tenga el color contrario al de la cara oculta es de 1/3. Tras esto se procedió a explicar formalmente la resolución de la paradoja.

Al igual que en la sesión anterior, el alumnado manifestó con generalizado “ah”. De hecho, se oyó algún comentario dando a entender que no era algo difícil, sino que simplemente requería prestar atención y tener cuidado al escribir.

Tercera sesión. Para comentar los resultados de esta sesión, vamos a ir paradoja por paradoja, se va a hacer una pequeña introducción a cada paradoja, cuya resolución se puede consultar en el Anexo D. Resulta conveniente indicar que en la realización de esta actividad se pudo observar cómo incluso los alumnos que suelen prestar menos atención en clase estuvieron visiblemente motivados.

Paradoja de Monty-Hall. Se da a elegir una puerta de entre 3, sabiendo que una esconde un coche y las otras dos cabras. Después de esta elección, se abre una de las puertas no escogída, revelando una cabra, y se ofrece la posibilidad de cambiar de elección. La elección consiste, por tanto, en decidir si cambiar o no la elección inicial.

Los grupos a los que se les asignó esta paradoja coinciden en la intuición inicial: no cambiar de puerta. Coinciden también en la justificación, dicen que una vez que se abre una de las puertas entonces la probabilidad de acertar (si nos quedamos con la puerta inicial) es de 1/2, ya que hay dos puertas y ambas tienen la misma probabilidad. Uno de los grupos argumenta que no cambiaría de puerta porque, cito textualmente, “tienen confianza en su elección inicial”.

Uno de los grupos dedicó un rato a experimentar con la paradoja, con tal suerte que, siguiendo la estrategia de “no cambiar de puerta”, acertaron 4 de las 7 veces.

Otro de los grupos consiguió encontrar una solución correcta a la paradoja, haciendo uso de la pista que se les dio en el enunciado, de un diagrama en árbol y usando un argumento del tipo de “como la probabilidad de error en la elección inicial es de 2/3, entonces la probabilidad de acierto al rechazar la elección inicial es de 2/3”.

Paradoja del prisionero. Esta paradoja plantea la siguiente situación: hay 3 prisioneros (A, B y C), de los cuales 1 va a ser ejecutado. Al prisionero A se le dice que C no va a morir. Se le propone cambiar su suerte por la del prisionero B. Hay que elegir si aceptar el cambio o no.

Aunque esta paradoja es prácticamente la misma que la anterior, los razonamientos dados por el alumnado muestran una mayor confusión. Todos los grupos tienen la intuición inicial de que la probabilidad de que mueran A o B es de 1/2. Algunos grupos se lían intentando hacer un diagrama de árbol para ver si es cierto esto o no. Dos de los grupos dieron una solución correcta, aunque sólo uno de ellos supo argumentarlo correctamente.

Paradoja del Sr. Smith. Esta paradoja plantea dos situaciones distintas, que parten de que el Sr. Smith tiene dos hijos. Estas situaciones son: el hijo mayor es niña y al menos uno de los dos es niño. Se pide calcular la probabilidad de que en el primer caso ambos hijos sean niñas y de que en el segundo caso ambos hijos sean niños.

La intuición inicial de todos los grupos respecto a ambas preguntas es la misma: que las respuestas son 1/2. A la hora de razonar debidamente las respuestas a ambas preguntas, con esta paradoja el alumnado es mucho más sistemático que con las otras dos. Aquí hacen los correspondientes diagramas de árbol sin dificultades y dan respuestas correctas sin grandes dificultades, con la salvedad de algún despiste al contar.

5. Conclusiones

En este trabajo se ha pretendido realizar una propuesta didáctica que permita alcanzar los objetivos descritos en el 2. Objetivos, así como dar respuesta a las preguntas de investigación enunciadas en el mismo capítulo. Para ello se ha realizado un marco teórico sobre el que basar la propuesta didáctica y a continuación vamos a relacionar la experiencia en el aula con este marco teórico, así como valorar el grado de consecución de los objetivos planteados.

Se ha podido comprobar en el aula que tanto la desatención ciega, entendida como al tendencia a interpretar nuestra percepción como aquello a lo que ya estamos acostumbrados, como el egocentrismo han sido factores influyentes en los errores del alumnado al enfrentarse a las paradojas. Aunque el efecto de estas actividades sobre el pensamiento crítico del alumnado quizá no haya sido muy intenso, sí consideramos que se han trabajado las dimensiones 5, 6, 7 y 8 del pensamiento crítico. Como no se incorporó a la propuesta ningún instrumento para medir, de alguna forma, el estado del pensamiento crítico antes y después del taller, resulta complicado valorar el efecto del taller en este.

Respecto al lenguaje natural y matemático, se ha podido comprobar que una de las dificultades que tiene el alumnado con el lenguaje matemático consiste en que este construye sus argumentos desde el lenguaje natural y luego le cuesta traducirlo a lenguaje matemático. Parece poco realista pensar que esta dificultad se va a solventar en 3 sesiones de 50 minutos, pero lo que sí parece haberse conseguido es transmitir al alumnado la importancia de escribir bien las cosas.

De acuerdo con lo desarrollado sobre resolución de problemas, se ha visto en el aula que los ejercicios planteados en el Anexo C entrarían dentro del nivel 3 de demanda cognitiva, así como también estarían en la zona de desarrollo próximo del alumnado. Además, viendo cómo el alumnado pudo realizar las actividades propuestas, se corrobora que las paradojas tienen cabida dentro de una metodología de carácter constructivista, que tenga como objetivo la autonomía del alumnado en la resolución de problemas.

Los resultados obtenidos corroboran que la historia de las matemáticas tiene un papel como elemento motivador, pese a que pueda causar un rechazo inicial. También se ha podido valorar la capacidad que tiene la historia de las matemáticas a la hora de comprender que las matemáticas no “surgen de la nada”, si no que son una disciplina que ha surgido de forma natural a lo largo de la historia de la humanidad. Su papel como elemento didáctico no se ha explorado tanto ya que sólamente se usó como introducción en la primera sesión, para poder valorar este aspecto habría que replantear la propuesta.

A lo largo de las actividades desarrolladas se ha podido comprobar que las paradojas tienen una gran utilidad en el aprendizaje del cálculo de probabilidades, así como amplia capacidad para captar y mantener la atención del alumnado.

Como valoración final del trabajo realizado cabe señalar que los objetivos marcados al inicio se han alcanzado, en mayor o menor medida, y que, a partir de la experiencia en el aula, parece intuirse que las respuestas a las preguntas de investigación planteadas son afirmativas. Sin embargo, para poder responder fehacientemente, sería necesario desarrollar algunos instrumentos para medir con precisión los efectos de la propuesta didáctica, en lugar de quedarnos con las impresiones expresadas por el alumnado durante el desarrollo de la misma.

6. Referencias bibliográficas

Álvarez, A. y Del Río, P. (1990). *Aprendizaje y desarrollo: la teoría de la actividad y la Zona de Desarrollo Próximo.* En C. Coll, J. Palacios & A. Marchesi (Eds.). Desarrollo psicológico y educación. II. Psicología de la Educación (pp 93-119). Alianza Editorial.

Arce, M., Conejo, L. Muñoz, J.M. (2019). *Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas*. Editorial Síntesis.

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística*. Grupo de Investigación Estadística, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Batanero, C. Contreras, J.M., Cañadas, G.R., Gea, M.M. (2012). Valor de las paradojas en la enseñanza de las matemáticas. Un ejemplo de probabilidad. *Novedades educativas, 261,* 78-84.

Batanero, C., Conteras, J.M. y Díaz, C. (2011). Experiencias y sugerencias para la formación probabilística de los profesores. *Revista Paradigma, 23*(2), 53-68.

Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J.M. y Roa, R. (2013). El sentido estocástico y su desarrollo. *Números: Revista didáctica de las matemáticas*, *83,* 7-18.

Batanero, C. Fernandes, J.A. y Contreras, J.M. (2009). *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 62,* 11-18.

Blanco, P. y Blanco, M.L. (2010). *El pensamiento crítico*. Hispania.

Blanco-López, A., España-Ramos, E. y Franco-Mariscal A.J. (2017). Estrategias didácticas para el desarrollo del pensamiento crítico en el aula de ciencias. *Revista de Educación Científica, 1(*1*)*, 107-115. https://doi.org/10.17979/arec.2017.1.1.2004

Brousseau, G. (1983). Les obstacles epistémologiques et les problémes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, *4*(2), 164-198.

Comité Español de Matemáticas (CEMAT) (2021). *Bases para la elaboración de un currículo de Matemáticas en educación no Universitaria.*

Cañadas, E. (2018). Fake News. *Revista de la Sociedad Española de Documentación e Información Científica* (SEDIC), Clip nº 78. https://clip.sedic.es/article/fake-news/

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) (2014). *Conclusiones del Seminario Federal La Estadística y la Probabilidad en la Educación Matemática.* (2014). https://revistasuma.fespm.es/sites/revistasuma.fespm.es/IMG/pdf/s82-conclusiones_seminario_estadi_stica.pdf

Contreras, J.M., Batanero, C., Arteaga, P. y Cañadas, G. (2011). La paradoja de la caja de Bertrand: algunas formulaciones y cuestiones didácticas. *Revista de Educación Matemática*, *28*(2), nº 78.

Contreras, J.M., Batanero, C., Cañadas, G. y Arteaga, P. (2013). La paradoja del niño o niña: aplicaciones para la clase de probabilidad. *Matemática, Educación e Internet, 14*(1), 1-12.

Contreras, J.M., Batanero, C., Cañadas, G. y Gea, M.M. (2012). La paradoja de Simpson. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, *71*, 19-26.

Dewey, J. (1989). *How we think* (M. A. Galmarini, Trad.). Paidós Ibérica. (Trabajo original publicado en 1928).

Decreto 38/2015. (2015, 5 de junio). Consejo de Gobierno. Boletín Oficial de Cantabria extraordinario, Núm. 39.

Falk, R. y Konold, C. (1992). The psycology of Learning Probability. *Statistics dfot the twenty-fisrt century,* 151-164.

Fernández, S. (2021). *Azar y probabilidad en matemáticas.* La Catarata.

Flores, P. (1999). *Paradojas* matemáticas para la formación de profesores. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 31*, 27-35.

Gea, M.M., Batanero, C., Contreras, J.M. y Arteaga, P. (2017). Paradojas como recurso didáctico en la enseñanza de la probabilidad. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 385-393.

González, P.M. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, *45*, 17-28.

Gómez-Granell, C. (1989). La adquisición del lenguaje matemático: un difícil equilibrio entre el rigor y el significado. *Comunicación, Lenguaje y Educación*, *3*(4), 5-16.

Gordon, M. (1991). Counterintuitive Instances Encourage Mathematical Thinking. *Mathematics Teacher, 84*(7), 511-515.

Guiness World Records. (Consultado el 1 de septiembre de 2022). https://www.guinnessworldrecords.es/records/hall-of-fame/robert-wadlow-tallest-man-ever

León, N. (2009). La historia como elemento motivador hacia el estudio de la probabilidad: el problema de la apuesta interrumpida. *Sapiens: Revista universitaria de investigación*, *10*(1),69-88.

Lesser, L.M. (1998). Counting indifference using counterintuitive examples. *Teaching Statistics*, 20(1), 10-12.

Ministerio de Educación y Ciencia. (1985). *Las matemáticas sí cuentan: informe Cockroft*. https://sede.educacion.gob.es/publiventa/las-matematicas-si-cuentan-informe-cockcroft/pedagogia/1129

Orden EDC 65/2015. (2015, 29 de enero). Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. Boletín Oficial del Estado, Núm. 25.

Ortiz, J.J. y Serrano, L. (2008). La simulación de la estadística y la probabilidad en los libros de texto de educación secundaria. *Publicaciones: Facultad de Educación y Humanidad del Campus de Melilla*, *38*, 49-61.

Pajares, A. y Tomeo, V. (2009). Didáctica de l Estadística y la Probabilidad en Secundaria: Experimentos motivadores. *Cuadernos de Trabajo de la Escuela Universitaria de Estadística de la Universidad Complutense de Madrid*. https://eprints.ucm.es/id/eprint/10450/1/CT03_2009.pdf

Radillo, M., Nesterova E., Ulloa, R. y Pantoja, R. (2005). Obstáculos en el aprendizaje de las matemáticas relacionados con deficiencias en la traducción del lenguaje cotidiano al lenguaje matemático y viceversa. *V Congreso Internacional Virtual de Educación*, Guadalajara, México. http://sedici.unlp.edu.ar/bitstream/handle/10915/24761/Documento_completo.pdf%3Fsequence%3D1

Rapoport, A. (1967). Escape from paradox. *Scientific American*, *217*, 50-56.

Rodríguez, A.J. (2020). *Paradojas y simuladores: un tándem para la enseñanza de probabilidad*. Edunovatic 2020: 5th Virtual International Conference on Education, Innovation an ICT, 1299-1304.

Serrano, W. (2005). ¿Qué constituye a los lenguajes natural y matemático? *Sapiens*, *6*(1).

Smith, M. y Stein, M. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: From reaserch to practice. *Mathematics teaching in the middle school*, *3*, p 344-350.

Solbes, J y Torres, N. (2012). Análisis de las competencias de pensamiento crítico desde el aborde de las cuestiones sociocientíficas: un estudio en el ámbito universitario*. Didáctica de las ciencias experimentales y sociales*, *26*. https://doi.org/10.7203/dces.26.1928

Towse, J.N., Loetscher, T. y Brugger, P. (2014). Not all numbers are equal: preferences and biases among children and adults when generating random sequences. *Frontiers in psychology, 5*(19). https://doi.org/10.3389/fpsyg.2014.00019

Uclés, R. R. (2004). Increíble, pero matemáticamente cierto. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática" Thales"*, *60*, 493-502.

Vásquez, C. y Alsina, A. (2013). Conocimiento matemático y didáctico en profesores de primaria para la enseñanza de las probabilidades. *Probabilidad Condicionada: Revista didáctica de la Estadística*, *2*, 165-172.

Anexo A

Diapositivas usadas durante el desarrollo de las actividades.

Taller de Probabilidades

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Probabilidad clásica

$$P[\text{suceso A}] = \frac{\text{Cantidad de casos favorables a A}}{\text{Cantidad de casos totales}}$$

Probabilidad frecuentista

$$P[\text{suceso A}] = \lim_{N\to\infty} \frac{\text{Veces que sucede A}}{N}$$

Probabilidad axiomática

Pequeño experimento:
números del 1 al 100

Diagrama de árbol

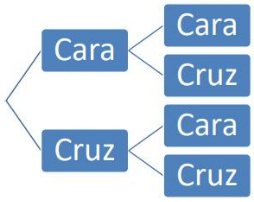
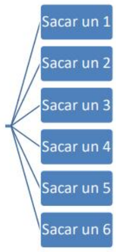


Diagrama de árbol

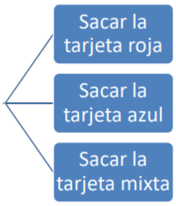


Probabilidad condicionada

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Caja de Bertrand

Caja de Bertrand



Caja de Bertrand

Anexo B

Material utilizado para experimentar con la paradoja de la caja de Bertrand en el aula (una caja y 3 tarjetas, 1 azul por ambos lados, 1 roja por ambos lados y 1 roja por un lado y azul por el otro).

Anexo C

Aquí se presentan las actividades que se entregaron a los alumnos en la tercera sesión, para que las hicieran en grupo.

Paradoja del Sr. Smith.

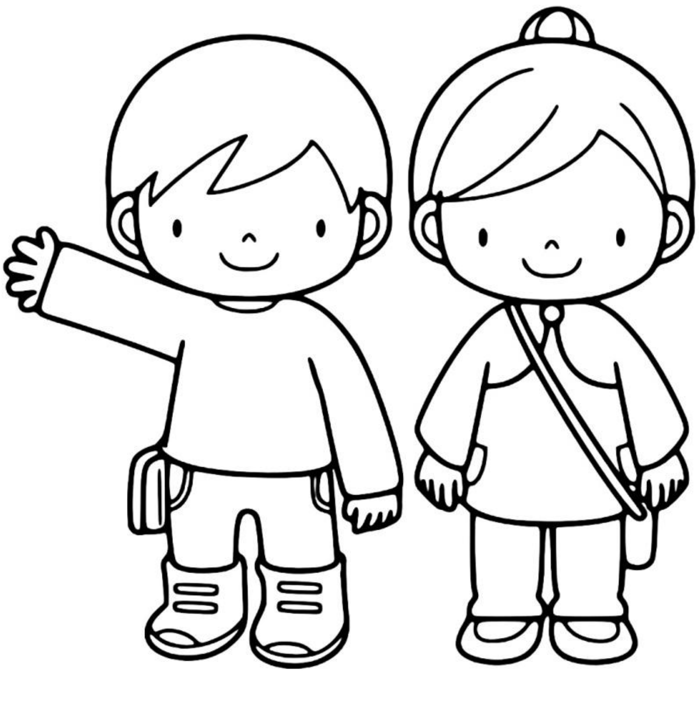
Para esta actividad se presupone que la probabilidad de que nazca un niño o una niña es la misma, ½ en cada caso.

Ahora vais a leer dos preguntas, primero debéis discutid sobre cuál creéis que es la solución correcta a cada pregunta. Escribid la conclusión a la que lleguéis.

Después de esto, haced un diagrama de árbol que describa la situación que se os plantea, repensad la respuesta a las preguntas y escribid la respuesta (razonada) a la que llegáis tras hacer el diagrama de árbol. **No tachéis ni corrijáis** las respuestas que pusisteis antes de hacer el diagrama, simplemente indicad dónde escribís las respuestas previas al diagrama y dónde van las posteriores.

Primera pregunta. El señor Smith tiene dos hijos, siendo el mayor una hija. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos hijos sean niñas?

Segunda pregunta. El señor Smith tiene dos hijos, siendo al menos uno de los dos un niño. ¿Cuál es probabilidad de que ambos sean niños?



Paradoja de Monty-Hall.

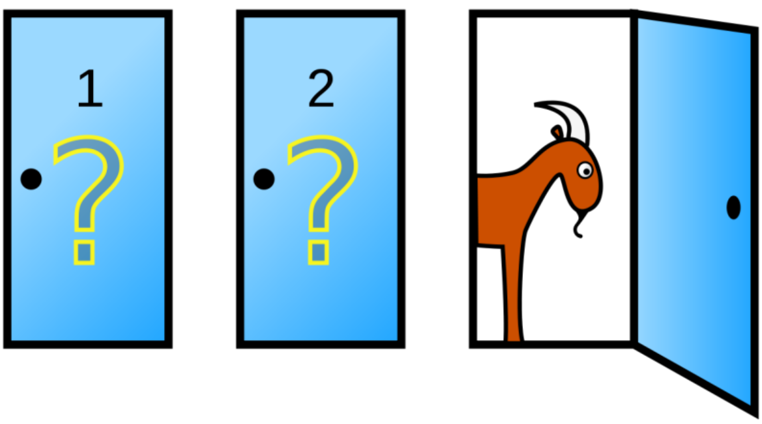
Imaginad que estáis en un concurso de televisión. Hay 3 puertas y el presentador os dice que detrás de una de ellas hay un coche y detrás de las 2 restantes hay cabras. Os pide que elijáis una puerta, con la promesa de que os llevaréis lo que haya tras esa puerta. Después de que elijáis, el presentador abre una de las puertas que no habéis elegido, detrás de la cual hay una cabra. Ahora el presentador os pregunta si queréis cambiar vuestra elección y elegir la otra puerta que queda cerrada.

Sin pensarlo demasiado, ¿cambiaríais vuestra elección? ¿Por qué?

Os animo a que intentéis simular esta situación, que alguien haga de presentador, elija una de las puertas como correcta (izquierda, centro o derecha) y que el resto hagan de concursantes. Si lo hacéis, anotad vuestros resultados.

Seguramente hayáis pensado en usar la probabilidad condicionada para resolver este ejercicio. Sin embargo, pensad en lo siguiente: ¿cuál es la probabilidad de que nos equivoquemos al elegir una puerta por primera vez? Si nos dicen que una de las puertas que no hemos escogido no es la correcta, ¿realmente cambia la probabilidad de que nos hayamos equivocado en un principio?

Después de esto, haced un diagrama de árbol que describa la situación que se os plantea, repensad la respuesta a las preguntas y escribid la respuesta (razonada) a la que llegáis tras hacer el diagrama de árbol. **No tachéis ni corrijáis** las respuestas que pusisteis antes de hacer el diagrama, simplemente indicad dónde escribís las respuestas previas al diagrama y dónde van las posteriores.



Paradoja del prisionero.

La situación es la siguiente: hay 3 prisioneros (A,B y C) de os cuales 1 va a morir. El juez que toma esta decisión no comunica a los prisioneros quién va a morir, tan sólo le dice a A que C no va a morir. El juez le ofrece a A cambiar su suerte por la de B, de manera que si B estaba condenado a morir entonces muera A y viceversa.

Sin darle muchas vueltas, ¿debería A cambiar su suerte por la de B? ¿Por qué? Discutidlo entre vosotros y escribid las conclusiones a las que lleguéis.

Después de esto, haced un diagrama de árbol que describa la situación que se os plantea, repensad la respuesta a las preguntas y escribid la respuesta (razonada) a la que llegáis tras hacer el diagrama de árbol. **No tachéis ni corrijáis** las respuestas que pusisteis antes de hacer el diagrama, simplemente indicad dónde escribís las respuestas previas al diagrama y dónde van las posteriores.

Pista: ¿cuál es la probabilidad de que le toque morir a A? ¿Esa probabilidad cambia después de saber que C no va a morir?

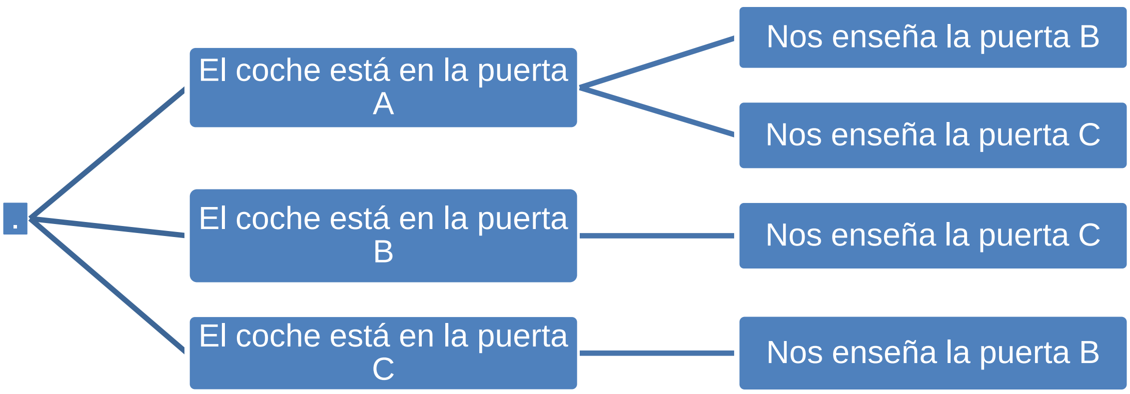
Anexo D

En este anexo se van a resolver la paradoja de Monty-Hall, la paradoja del prisionero y la paradoja del niño o la niña.

La paradoja de Monty-Hall plantea la siguiente situación: en un concurso debemos escoger una puerta de entre tres opciones (denotémoslas A, B y C). Detrás de una puerta hay un coche y detrás de las otras dos hay una cabra. El presentador del concurso nos da a escoger una puerta para ganar lo que tenga detrás como premio. Después de que escojamos una puerta, el presentador abre una de las puertas que no hemos escogido y enseña que detrás de esa puerta había una cabra. Ahora nos ofrece cambiar nuestra elección inicial.

La respuesta intuitiva es decir que da igual cambiar de elección, ya que ambas puertas tienen la misma probabilidad de tener el premio. Veamos que no es así.

Para resolver esto, vamos a hacer uso de un diagrama en árbol. Vamos a suponer que escogemos la puerta A y que el presentador nos enseña la puerta B (el resto de casos son análogos).



Ahora podemos aplicar la fórmula de la probabilidad condicionada.

$$P[el\ coche\ está\ en\ \ A|nos\ enseña\ \ B] = \frac{P[el\ coche\ está\ en\ A\ y\ nos\ enseña\ \ B]}{P[nos\ enseña\ \ B]}$$

Calculamos cada probabilidad:

$$P[el\ coche\ está\ en\ A\ y\ nos\ enseña\ \ B] = \frac{1}{3} * \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$P[nos\ enseña\ \ B] = \frac{1}{3} * \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

Y ahora sí calculamos lo que queríamos:

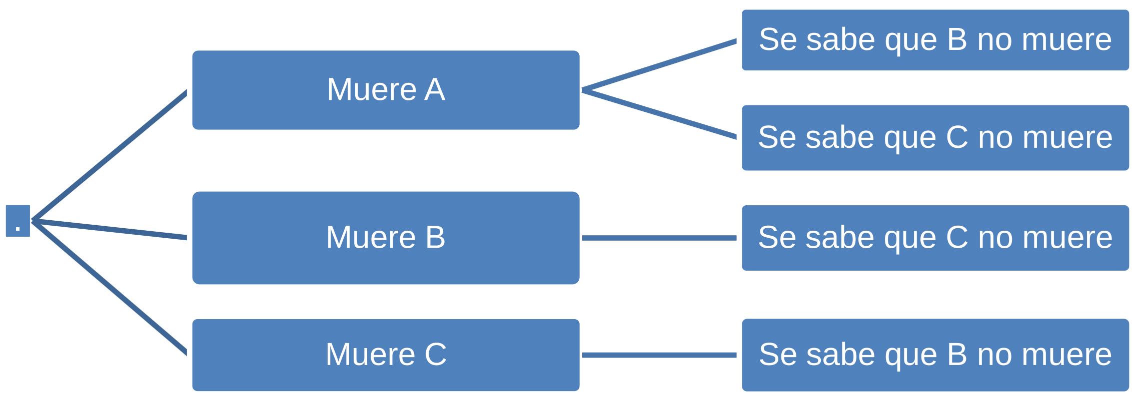
$$P[el\ coche\ está\ en\ \ A|nos\ enseña\ \ B] = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$$

Por lo tanto, la probabilidad de que ganemos el coche si mantenemos nuestra elección inicial es 1/3. Esto nos dice que la elección correcta es cambiar nuestra elección inicial.

La resolución de la paradoja del prisionero es análoga a la de Monty-Hall. Esta paradoja plantea la siguiente situación: hay tres prisioneros (A, B y C) de entre los cuales uno va a ser condenado a muerte. Después de que se tome la decisión, se le comunica al prisionero A que el prisionero C (o B, es indiferente) va a sobrevivir. Se le ofrece la posibilidad de cambiar su suerte con la del prisionero B. ¿Debería aceptar?

La respuesta intuitiva es pensar que da igual si acepta o no ya que ambos tienen la misma probabilidad de morir.

Vamos a empezar con un diagrama en árbol que represente esta situación.



Si repetimos las mismas cuentas que en la paradoja anterior, llegamos a

$$P[muere\ \ A|se\ sabe\ que\ no\ muere\ B] = \frac{{}^{1}/_{6}}{{}^{1}/_{2}} = \frac{1}{3}$$

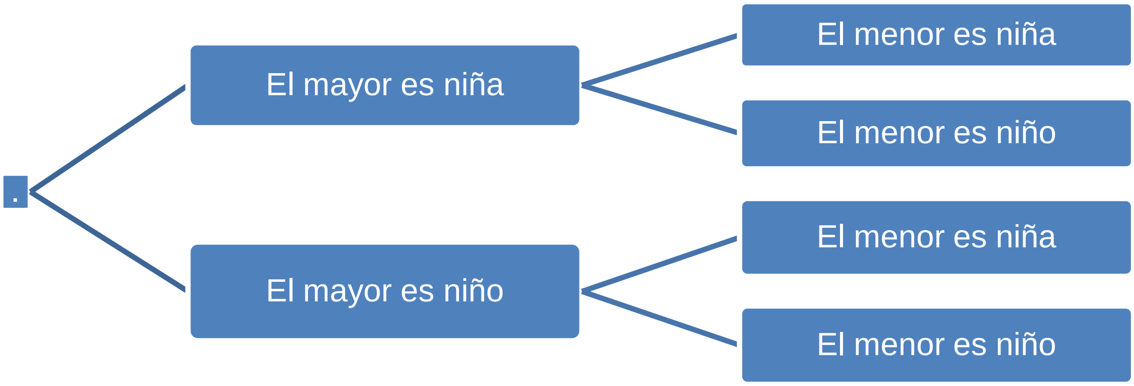
Por lo tanto, el prisionero A no debería cambiar su destino por el de B si quiere sobrevivir.

La paradoja del niño o la niña fue enunciada por primera vez en 1959 Por Gardner, quien lo tituló “el problema del señor Smith”. El enunciado es el siguiente:

- El Sr. Smith tiene dos hijos. El hijo mayor es una niña. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos sean niñas?
- El Sr. Smith tiene dos hijos. Al menos uno de ellos es un niño. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos hijos sean niños?

Si hacemos esas preguntas a alguien que no se pare a pensar, dirá que la respuesta a la primera pregunta es de ½ y que la respuesta a la segunda pregunta es también ½, por similitud. Sin embargo veremos que ambas preguntas no admiten la misma respuesta, porque es correcto que la respuesta a la primera pregunta es ½ pero la respuesta a la segunda es 1/3.

Vamos a hacer un diagrama de árbol para resolver ambas preguntas.



Resolvamos la primera pregunta. Si sabemos que el mayor es niña entonces estamos en la primera rama y por tanto sólo hay dos casos: o el menor es niña o el menor es niño. Como estamos suponiendo que ambos casos son equiprobables, entonces la probabilidad de que ambos hijos sean niñas es de ½.

Es en la segunda pregunta donde viene el giro. Si sabemos que al menos uno de los dos hijos son niños, entonces nos valen tanto las dos ramas de abajo (en las que el mayor es niño y el menor es niño o niña) como la segunda rama de arriba (en la que el mayor es niña y el menor es niño). Es decir, tenemos 3 casos posibles que son equiprobables y sólamente se cumple que ambos hijos son niños en un caso, por lo que la probabilidad de este suceso es de 1/3.