



*Facultad  
de  
Ciencias*

**REDUCCIÓN DE SINGULARIDADES Y  
EXISTENCIA DE SEPARATRICES PARA  
FOLIACIONES EN  $(\mathbb{C}^2, \underline{0})$**

(Reduction of singularities and existence of separatrices  
for foliations in  $(\mathbb{C}^2, \underline{0})$ )

Trabajo de Fin de Máster  
para acceder al  
**MÁSTER EN MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN**

Autor: Francisco Matanza Sota

Directora: Nuria Corral Pérez

Septiembre - 2024



*Para Adolfo*



## Agradecimientos

En primer lugar, me gustaría agradecer su apoyo a la directora de este trabajo, Nuria. Muchas gracias por no desistir en ningún momento, por tu paciencia y por tu ayuda a lo largo de todo este tiempo. Gracias por soportar mi ritmo de trabajo, por las innumerables correcciones y por todos los consejos que me has dado. Espero haber podido aprender a trabajar, aunque sólo sea un poco, como tú. También aprovecho para pedirte perdón por todos los quebraderos de cabeza, por mi manera de trabajar y por las horas de sueño que te he hecho perder. No creo que sea necesario decirlo, pero este trabajo no habría sido posible sin ti.

Como no podía ser de otra manera, también quiero agradecer a mi familia su inagotable apoyo, particularmente a mis padres y mis hermanos, y de forma muy especial a mi abuelo, que aunque no comprendía qué hacía exactamente, siempre me quiso y me apoyó. Indudablemente, sin ellos no habría llegado hasta aquí.

Por último, no puedo dejar de mencionar a todas los amigos que han estado estos años preguntándome por el TFM a los que me han aguantado durante estos últimos meses y han tenido que intentar entender las demostraciones que estaba haciendo cuando aún estaban incompletas. Muy especialmente, muchas gracias a David, sin cuyo apoyo esta memoria sería un poco menos colorida. Gracias a todos por estar ahí.



# Resumen

El objetivo principal de este trabajo es probar el resultado de existencia de una reducción de singularidades de foliaciones en  $(\mathbb{C}^2, 0)$ , que se obtiene como composición de un número finito de explosiones de puntos. Para ello, estudiaremos antes la reducción de singularidades de curvas en  $(\mathbb{C}^2, 0)$ , prestando especial atención a las cúspides definidas por  $y^p - x^q = 0$ .

Posteriormente, pasaremos a estudiar el comportamiento de una foliación con una singularidad en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  tras una explosión con centro el origen, presentaremos el concepto de singularidad simple, y probaremos el resultado de existencia de una reducción de singularidades de una foliación en  $(\mathbb{C}^2, \underline{0})$ .

Para finalizar el trabajo, se dará una prueba del teorema de existencia de separatriz para una foliación en  $(\mathbb{C}^2, \underline{0})$ , cuya demostración se apoya en el resultado de reducción de singularidades de foliaciones y en las propiedades del índice de Camacho-Sad. Además, como ejemplo, se describirá la reducción de singularidades de un tipo particular de foliaciones cuspidales.

**Palabras clave:** foliación, curva plana, reducción de singularidades, separatriz, teorema de Camacho-Sad

## Abstract

The main goal of this work is to prove the result of the existence of the reduction of singularities of foliations in  $(\mathbb{C}^2, \underline{0})$ , which is obtained as a composition of a finite number of point blow-ups. To this end, we will first study the reduction of singularities of curves in  $(\mathbb{C}^2, \underline{0})$ , paying special attention to cusps defined by  $y^p - x^q = 0$ .

Afterwards, we will study the behavior of a foliation with a singularity in  $(\mathbb{C}^2, \underline{0})$  after a blow-up centered at the origin, introduce the concept of simple singularity, and prove the result of the existence of a reduction of singularities of a foliation in  $(\mathbb{C}^2, \underline{0})$ .

To conclude, we will present a proof of the separatrix existence theorem for a foliation in  $(\mathbb{C}^2, \underline{0})$ , whose demonstration relies on the result of the reduction of singularities of foliations and the properties of the Camacho-Sad index. Additionally, as an example, we will describe the reduction of singularities of a particular type of cuspidal foliations.

**Key words:** foliation, plane curve, reduction of singularities, separatrix, Camacho-Sad theorem



# Índice general

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>3</b>
1.1 Variedades . . . . .	3
1.2 Foliaciones holomorfas . . . . .	8
1.2.1 Foliaciones no singulares . . . . .	9
1.2.2 El teorema de Frobenius . . . . .	13
1.2.3 Foliaciones con singularidades . . . . .	14
1.3 Gérmenes de curvas y 1-formas . . . . .	15
<b>2 Reducción de singularidades de curvas</b>	<b>17</b>
2.1 Explosión de un punto de una superficie . . . . .	17
2.2 Reducción de singularidades de curvas . . . . .	21
2.2.1 Cruzamientos normales . . . . .	23
<b>3 Reducción de singularidades de foliaciones</b>	<b>29</b>
3.1 Singularidades simples . . . . .	31
3.2 Reducción de singularidades de foliaciones . . . . .	35
3.2.1 El teorema de reducción de singularidades . . . . .	41
3.3 Teorema de Camacho-Sad . . . . .	43
3.3.1 El índice de Camacho-Sad . . . . .	44
3.3.2 Demostración del teorema . . . . .	45
3.4 Foliaciones cuspidales . . . . .	48
<b>Bibliografía</b>	<b>51</b>
<b>Apéndice A Fracciones continuas</b>	<b>53</b>
A.1 Fracciones continuas y exponentes de las explosiones . . . . .	54
<b>Apéndice B Algunas propiedades locales de curvas planas</b>	<b>57</b>
B.1 Multiplicidad de intersección . . . . .	58



# Introduction

El estudio de foliaciones holomorfas aúna diversos campos de las matemáticas, como la topología, la geometría o los sistemas dinámicos [19]. Una de las herramientas más comunes a la hora de estudiar el comportamiento de una foliación cerca de un punto singular son las explosiones que, a grandes rasgos, consisten en utilizar “pequeños lentes de aumento infinitesimales” (ver [4], sección 1.5), de forma que una situación más complicada cerca de la singularidad se transforme en una más simple, en la cual el estudio de las propiedades de la foliación sea más sencillo. Las explosiones juegan un papel clave en el proceso de reducción de singularidades de una foliación. Para el caso de una foliación con una singularidad en el origen en  $\mathbb{C}^2$ , en 1968 Seidenberg demostró en [21] que la reducción de la singularidad viene dada por una sucesión finita de explosiones.

Otro problema importante es la existencia de separatrices de foliaciones con singularidades. En 1962 de René Thom se pregunta en una carta (como se indica en [8]) por la existencia de separatrices de foliaciones en una variedad general diferenciable u holomorfa, aunque ya en 1856 Briot y Bouquet habían considerado el caso de foliaciones en  $\mathbb{C}^2$  [1]. En dimensión arbitraria se trata de un problema abierto, con algunas pruebas para casos particulares (por ejemplo, para foliaciones holomorfas de codimensión 1 no dicríticas el caso de dimensión 3 fue resuelto por F. Cano y D. Cerveau [5] y el caso en dimensión arbitraria fue dado por F. Cano y J-F. Mattei [7]), aunque, en general, la pregunta de Thom tiene respuesta negativa: por ejemplo, Jouanolou en [12] presenta una familia de foliaciones en  $(\mathbb{C}^3, 0)$  definidas por una 1-forma

$$\omega = (y^m x - z^{m+1}) dy + (z^m y - x^{m+1}) dz + (x^m z - y^{m+1}) dx \text{ con } m \in \mathbb{N}$$

que no admite ninguna hipersuperficie integrable. Aunque varios matemáticos estudiaron este problema (por ejemplo, Poincaré y Dulac durante finales del siglo XIX y principios del XX), no será hasta 1982 cuando Camacho y Sad demuestran la existencia de al menos una separatriz para cualquier foliación en  $\mathbb{C}^2$  con una singularidad aislada en el origen en [3]. Posteriormente surgirán otras pruebas, como la dada por J. Cano [9] o la reciente de L. Ortiz, E. Rosales y S. M. Voronin [18], que prueban un resultado más fuerte. Lejos de ser un problema cerrado, trabajos recientes como [8] [10] abordan diferentes situaciones relacionadas.

Esta memoria está estructurada en tres capítulos. En el primero se presentan algunos conceptos sobre variedades holomorfas, principalmente para fijar la notación y las definiciones con las que trabajaremos. Posteriormente se introduce el concepto de foliación holomorfa, tanto en el caso no singular como en el singular, prestando especial atención a las generadas por campos vectoriales y 1-formas en dimensión dos, que son las que estudiaremos posteriormente. Finalmente, cerramos el capítulo presentando brevemente la

noción de germen.

Comenzamos el segundo capítulo presentando nuestra herramienta principal de trabajo, las explosiones con centro un punto en una variedad holomorfa de dimensión dos. El resto del capítulo está dedicado a explicar la reducción de singularidades de curvas.

En el capítulo tres pasamos a estudiar cómo se comportan las foliaciones con una singularidad en el origen de  $\mathbb{C}^2$ . Después de introducir las primeras definiciones y resultados básicos (cono tangente, separatriz, ...), presentamos el concepto de singularidad simple y de número de Milnor de una foliación, y damos una demostración de la reducción de singularidades de foliaciones, que sigue la dada por Mattei y Moussu en [17]. Después nos fijamos en las curvas integrales de la foliación que pasan por la singularidad, introducimos el índice de Camacho-Sad y presentamos una demostración del teorema de existencia de separatriz, basado en la prueba de J. Cano [9]. Finalmente, damos un ejemplo de foliación cuspidal tomado del artículo [15] de F. Loray, y como su reducción de singularidades está relacionada con la reducción de singularidades de la cúspide que es separatriz de la foliación.

Por último, hay dos apéndices. En el primero se introduce el concepto de fracciones continuas, y se explica brevemente su relación con las coordenadas en las cartas tras una explosión; por otro lado, en el segundo apéndice se presentan algunos conceptos relacionados con el estudio de curvas planas, como el teorema de Puiseux, los exponentes característicos y los pares de Puiseux y la multiplicidad de intersección de curvas.

# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1. Variedades

En esta sección se van a introducir varios conceptos y resultados sobre variedades. Aunque una variedad se puede definir de forma más general, nos centraremos en el caso de variedades sobre  $\mathbb{C}$ . Aún así, la mayoría de los enunciados pueden traducirse a variedades sobre  $\mathbb{R}$  haciendo los cambios oportunos, por ejemplo, pidiendo que las funciones sean diferenciables en vez de holomorfas, o que las aplicaciones sean difeomorfismos en vez de biholomorfismos. La referencia principal en esta sección es el libro de Lee sobre variedades [14], aunque también se han utilizado el capítulo 1 de [2], y los capítulos 1 y 2 de [23].

**Definición 1.1** (Atlas). Sean  $M$  un conjunto,  $U \subseteq M$  un subconjunto y  $n \in \mathbb{N}$ . El par  $(U, \varphi)$  se denomina carta si  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}^n$  es una aplicación inyectiva y se tiene que  $\varphi(U)$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{C}^n$ .

Una familia  $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$  de cartas sobre  $\mathbb{C}^n$  tales que  $M = \cup_{i \in I} U_i$  se denomina atlas. Para todo par  $U_i, U_j$  tales que  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , la composición

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \subseteq \mathbb{C}^n \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j) \subseteq \mathbb{C}^n$$

se denomina cambio de carta o cambio de coordenadas.

Dada una carta  $(U, \varphi)$  de  $M$ , en ocasiones denotaremos  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}^n$  o bien simplemente  $\varphi$  para referirnos a dicha carta. Por otro lado, dado un punto  $p \in U$ , diremos que  $(\pi_j \circ \varphi)(p)$  es la  $j$ -ésima coordenada de  $p$  (respecto de la carta  $\varphi$ ), donde  $\pi_j : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  es la proyección de la  $j$ -ésima coordenada de  $\mathbb{C}^n$ . Salvo que se indique lo contrario, denotaremos la  $j$ -ésima coordenada como  $x^j(p)$ , de forma que podemos escribir

$$\varphi(p) = (x^1(p), x^2(p), \dots, x^n(p))$$

Se dice que  $\mathcal{A}$  es un atlas holomorfo si para todo par de cartas  $\varphi_i, \varphi_j \in \mathcal{A}$  tales que  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  se cumple que  $\varphi_i(U_i \cap U_j)$  y  $\varphi_j(U_i \cap U_j)$  son abiertos de  $\mathbb{C}^n$  y el cambio de coordenadas es un biholomorfismo (es decir, es una función biyectiva, holomorfa y con inversa holomorfa).

Por otro lado, se dice que un atlas es un *atlas maximal* si no está contenido en ningún otro. Esto quiere decir que en un atlas maximal  $\mathcal{A}$ , cualquier carta que cumpla las condiciones de compatibilidad con las cartas de  $\mathcal{A}$  está contenida en  $\mathcal{A}$ . Además, se puede asegurar que cualquier atlas está contenido en un único atlas maximal (consultar la proposición 1.17 de [14], por ejemplo).

**Definición 1.2** (Variedad). *Un conjunto  $M$  se dice que es una variedad compleja de dimensión  $n$  si  $M$  está dotado de un atlas  $\mathcal{A}$  cuyas cartas toman valores en  $\mathbb{C}^n$ . Cuando  $\mathcal{A}$  sea holomorfo, diremos que  $M$  es una variedad holomorfa.*

A partir de ahora todas las variedades que se consideren van a ser variedades holomorfas, salvo que se indique lo contrario.

**Ejemplo 1.3** (La recta proyectiva compleja). En el conjunto  $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  se puede definir una relación de equivalencia de forma que dos puntos  $(x, y)$  y  $(x', y')$  están en la misma clase si  $(x, y) = \lambda(x', y')$  para algún  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ . Al conjunto

$$\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 := (\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}) / \sim$$

se le llama *recta proyectiva compleja*, y se puede interpretar también como el conjunto de rectas en  $\mathbb{C}^2$  que pasan por el origen. Al representante de la clase del punto  $(x, y)$  se le denota  $[x : y]$ , y es claro que las dos coordenadas del representante no pueden ser 0 al mismo tiempo.

Se tiene que  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  es una variedad compleja de dimensión 1, ya que  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 = U_1 \cup U_2$ , donde

$$U_1 = \{[\xi : \nu] : \xi \neq 0\} = \{[1 : v] : v \in \mathbb{C}\}$$

$$U_2 = \{[\xi : \nu] : \nu \neq 0\} = \{[u : 1] : u \in \mathbb{C}\}$$

Entonces se puede definir un atlas formado por dos cartas  $(U_1, \varphi_1)$  y  $(U_2, \varphi_2)$ . La imagen de un punto  $p = [\xi : \nu] \in U_1$  es  $\varphi_1(p) = \frac{\nu}{\xi}$ ; mientras que si  $p \in U_2$ , entonces  $\varphi_2(p) = \frac{\xi}{\nu}$ .

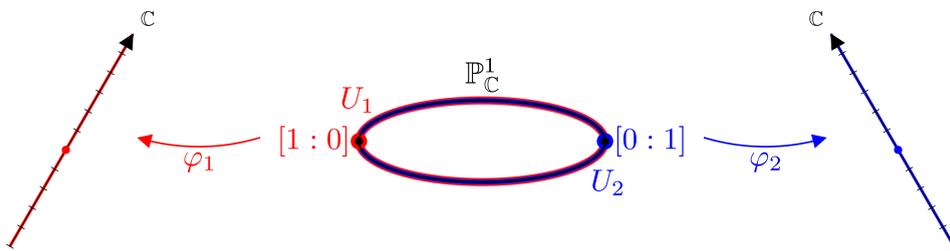


Figura 1.1: Recta proyectiva  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ .

Dado un punto  $p = [\xi : \nu] \in U_1 \cap U_2$ , su coordenada en la primera carta es  $x_p = \frac{\nu}{\xi} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , mientras que su coordenada en la segunda carta es  $\frac{\xi}{\nu} = x_p^{-1}$ . Así, el cambio de coordenadas es

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$$x \mapsto x^{-1}$$

La estructura de variedad induce en  $M$  una topología, cuya base de abiertos viene dada por los dominios de las cartas del atlas maximal que contiene al atlas que define la variedad. Así, resulta que las cartas son homeomorfismos entre abiertos de  $M$  y abiertos de  $\mathbb{C}^n$ .

**Definición 1.4** (Función holomorfa). *Sea  $M$  una variedad holomorfa de dimensión  $n$ . Una función  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  se dice que es una función holomorfa en  $p \in M$  si para toda carta  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}^n$  con  $p \in U$  se tiene que la función  $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subseteq \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa en  $\varphi(p) \in \varphi(U)$ .*

*Una función se dice que es holomorfa en  $U \subseteq M$  o en toda la variedad  $M$  si es holomorfa en cada punto de dichos conjuntos.*

Denotaremos por  $\mathfrak{F}(U)$  al conjunto de funciones holomorfas  $f : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{C}$ . Se puede comprobar que  $\mathfrak{F}(U)$  es un anillo con las operaciones de suma y producto de funciones.

**Definición 1.5** (Aplicación holomorfa). *Sean  $M$  y  $N$  dos variedades holomorfas de dimensiones  $m$  y  $n$ . Una aplicación  $f : M \rightarrow N$  se dice que es una aplicación holomorfa en  $p \in M$  si para toda carta  $\varphi : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{C}^m$  con  $p \in U$  y toda carta  $\phi : V \subseteq N \rightarrow \mathbb{C}^n$  con  $f(p) \in V$ , la aplicación*

$$\phi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subseteq \mathbb{C}^m \rightarrow \phi(V) \subseteq \mathbb{C}^n$$

*es holomorfa en  $\varphi(p)$ . Si  $f$  es holomorfa en cada punto de  $U \subseteq M$ , o en toda la variedad  $M$ , entonces se dice que  $f$  es holomorfa en  $U$  o en  $M$ , respectivamente.*

**Definición 1.6** (Biholomorfismo). *Sean  $M$  y  $N$  dos variedades holomorfas de dimensiones  $m$  y  $n$ . Una aplicación  $f : M \rightarrow N$  se dice que es un biholomorfismo si es una aplicación biyectiva, holomorfa, y su inversa también es holomorfa.*

Es inmediato comprobar que la composición de aplicaciones holomorfas o de biholomorfismos es también una aplicación holomorfa o un biholomorfismo, respectivamente. Por otro lado, dados un conjunto  $M$  y dos atlas  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{A}'$  que doten a  $M$  de la estructura de variedad, se dice que ambos son equivalentes si existe un biholomorfismo entre las dos variedades.

A continuación vamos a intentar explicar qué es el espacio tangente a una variedad. Para ello, comenzamos introduciendo el concepto de derivada parcial:

**Definición 1.7** (Derivadas parciales). *Sea  $M$  una variedad holomorfa y  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}^n$  una carta de  $M$ . Sean  $x^i = \pi_i \circ \varphi$  las funciones coordenadas de  $\varphi$ , es decir,  $\varphi(p) = (x^1(p), x^2(p), \dots, x^n(p))$  para todo  $p \in U$ . Entonces se llama derivada parcial  $i$ -ésima al operador*

$$\frac{\partial}{\partial x^i} : \mathfrak{F}(U) \rightarrow \mathfrak{F}(U)$$

*definido para toda  $f \in \mathfrak{F}(U)$  y  $p \in U$  como  $\frac{\partial}{\partial x^i}(f)(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)(p) = \left(\frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial z_i}\right)(\varphi(p))$ , donde  $(z_1, \dots, z_n)$  son coordenadas en  $\mathbb{C}^n$ .*

Las propias funciones coordenadas se pueden derivar de la siguiente manera: sean  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(x^j)(p) = \left(\frac{\partial(x^j \circ \varphi^{-1})}{\partial z_i}\right)(\varphi(p)) = \left(\frac{\partial(\pi^j \circ \varphi \circ \varphi^{-1})}{\partial z_i}\right)(\varphi(p)) = \delta_i^j,$$

donde  $\delta_i^j$  es la Delta de Kronecker, y toma valor 1 si  $i = j$  y 0 en otro caso.

**Definición 1.8** (Espacio tangente). Sean  $M$  una variedad holomorfa,  $p \in M$  un punto en la variedad y  $U \subseteq M$  un entorno de  $p$ . Una derivación en  $p$  es una función  $F : \mathfrak{F}(U) \rightarrow \mathbb{C}$  tal que para todo  $g, h \in \mathfrak{F}(U)$ :

- es  $\mathbb{C}$ -lineal, es decir, se tiene que  $F(g + \lambda h) = F(g) + \lambda F(h)$  para todo  $\lambda \in \mathbb{C}$
- verifica la regla de Leibniz

$$F(gh) = g(p)F(h) + h(p)F(g).$$

Al conjunto de todas las derivaciones en un punto  $p$  se le conoce como el espacio tangente  $T_p M$  en  $p$ . Podemos definir la suma  $(F + G)(h) = F(h) + G(h)$  y el producto por escalares  $(\lambda F)(h) = \lambda(F(h))$ , para todo  $F, G \in T_p M$ ,  $h \in \mathfrak{F}(U)$  y  $\lambda \in \mathbb{C}$ . De esta manera,  $T_p M$  tiene estructura de  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial.

Se puede comprobar que las derivadas parciales en un punto  $p \in M$  son elementos de  $T_p M$  y, de hecho, forman una base del espacio vectorial. En consecuencia, la dimensión de  $T_p M$  es la misma que la de  $M$ . A la unión disjunta del espacio tangente en cada punto se le llama *fibrado tangente*  $TM$

$$TM := \bigcup_{p \in M} (\{p\} \times T_p M).$$

Se puede construir una aplicación  $\pi_T : TM \rightarrow M$ , que asocia cada vector tangente en  $p$  del fibrado con el propio  $p$ . Se dice que una aplicación  $\sigma : M \rightarrow TM$  es una *sección del fibrado tangente* cuando cumple que  $\pi_T \circ \sigma = Id_M$ , es decir, cuando a cada punto  $p \in M$  le asigna un vector  $\sigma(p) \in T_p M$ . Las secciones del fibrado tangente también se llaman *campos vectoriales*.

**Definición 1.9** (Expresión local de un campo vectorial). Dada una variedad holomorfa  $M$  y una carta  $(U, \varphi)$  de  $M$ , se tiene que las derivadas parciales  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  están bien definidas en cada punto  $p \in U$ . Entonces, un campo vectorial  $X$  se puede expresar en  $U$  como una combinación de las derivadas parciales,

$$X|_U = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

con  $X^i \in \mathfrak{F}(U)$ .

Aplicar un campo vectorial  $X$  a una función  $f \in \mathfrak{F}(U)$  consiste entonces en aplicar las derivadas parciales y multiplicar por las funciones  $X^i$  correspondientes, es decir,  $X(f) = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$ . Al conjunto de campos vectoriales sobre  $M$  se le denota como  $\mathfrak{X}(M)$ . Se puede ver que un campo vectorial  $X : \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$  es una aplicación  $\mathbb{C}$ -lineal y que verifica la regla de Leibniz.

**Definición 1.10** (Aplicación tangente). Sean  $M$  y  $N$  dos variedades holomorfas y  $f : M \rightarrow N$  una aplicación holomorfa entre ellas. Se llama *aplicación tangente a la aplicación*  $f_{*p} : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  tal que  $f_{*p}(v)(g) = v(g \circ f)$  para todo  $g \in \mathfrak{F}(N)$  y todo  $v \in T_p M$ .

Sean  $M$  y  $N$  dos variedades de dimensiones  $m$  y  $n$  respectivamente,  $f : M \rightarrow N$  una aplicación holomorfa entre ellas,  $(U, \varphi)$  una carta de  $M$  con  $p \in U$  y  $(V, \phi)$  una carta de  $N$  con  $f(U) \subseteq V$ , donde  $\varphi = (x^1, \dots, x^m)$  y  $\phi = (y^1, \dots, y^n)$ . Entonces, la aplicación  $f_{*p} : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  transforma los elementos de la base de  $T_p M$  de la siguiente manera:

$$f_{*p} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial (y^j \circ f)}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j}.$$

El espacio vectorial dual de  $T_p M$  se le llama *espacio cotangente* de la variedad en el punto, y se denota por  $T_p^* M$ . Los elementos de la base del espacio cotangente se llaman codiferenciales, y se definen de la siguiente manera:

**Definición 1.11** (codiferenciales). *Sea  $M$  una variedad holomorfa de dimensión  $n$ , un punto  $p \in M$  y una carta  $(U, \varphi)$  con  $p \in U$ . Para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , se llama codiferencial, y se denota como  $dx^i$  al operador dual de  $\frac{\partial}{\partial x^i}$ , es decir, es una aplicación lineal  $dx^i : T_p M \rightarrow \mathbb{C}$  que cumple*

$$dx^i \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \delta_i^j.$$

De forma análoga a los espacios tangentes, se llama *fibrado cotangente* a la unión disjunta del espacio cotangente en cada punto,

$$T^* M := \bigcup_{p \in M} (\{p\} \times T_p^* M).$$

Este conjunto también tiene estructura de variedad, de dimensión el doble de la de la variedad ambiente. Además, de forma natural se tiene la aplicación  $\pi_{T^*} : T^* M \rightarrow M$ , que asocia cada vector cotangente en  $p$  del fibrado con el propio  $p$ . Una aplicación  $\omega : M \rightarrow T^* M$  se llama *una sección del fibrado cotangente* cuando cumple que  $\pi_{T^*} \circ \omega = Id_M$ , es decir, cuando a cada punto  $p \in M$  le asigna un sólo vector cotangente  $\omega(p) \in T_p^* M$ .

**Definición 1.12** (1-formas). *Sea  $M$  una variedad holomorfa, una 1-forma o forma de Pfaff  $\omega$  sobre  $M$  es una aplicación  $\mathfrak{F}(M)$ -lineal*

$$\omega : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M).$$

*Al conjunto de 1-formas se le denota por  $\Omega^1(M)$ .*

**Proposición 1.13** (Expresión local de una 1-forma). *Dada una variedad holomorfa  $M$  y una carta  $(U, \varphi)$  de  $M$ , se tiene que los codiferenciales  $dx^i$  están bien definidos en cada punto  $p \in U$ . Entonces, una 1-forma  $\omega$  se puede expresar en  $U$  como*

$$\omega|_U = \sum_{i=1}^n \omega_i dx^i$$

*con  $\omega_i \in \mathfrak{F}(U)$ .*

Al igual que ocurría con la aplicación tangente, una aplicación holomorfa entre variedades induce una aplicación entre los respectivos espacios cotangentes:

**Definición 1.14** (aplicación cotangente). Sean  $M$  y  $N$  dos variedades holomorfas y  $f : M \rightarrow N$  una aplicación holomorfa. Se llama aplicación cotangente de  $f$  en  $p \in M$  a  $f_p^* : T_{f(p)}^*N \rightarrow T_p^*M$ , de forma que  $f_p^*(\omega_{f(p)})(X_p) = \omega_{f(p)}(f_{*p}(X_p))$  para cada  $X_p \in T_pM$  y cada  $\omega_{f(p)} \in T_{f(p)}^*N$ .

A continuación vamos a introducir unos resultados y definiciones que serán de utilidad en la siguiente sección de la memoria.

**Proposición 1.15** (Teorema de la función inversa). Sean  $M$  y  $N$  dos variedades holomorfas y  $f : M \rightarrow N$  una aplicación holomorfa. Entonces, para todo  $p \in M$  tal que  $f_{*p}$  es un isomorfismo, existen cartas  $(U, \varphi)$ , con  $p \in U$ , y  $(V, \phi)$ , con  $f(U) \subseteq V$ , tales que  $f|_U : U \rightarrow f(U) \subseteq V$  es un biholomorfismo.

**Definición 1.16** (Sumersión). Sean  $M$  y  $N$  dos variedades y  $f : M \rightarrow N$  una aplicación holomorfa entre ellas. Se dice que  $f$  es una sumersión si, para todo  $p \in M$ , la aplicación tangente  $f_{*p} : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$  es sobreyectiva.

**Proposición 1.17** (Forma local de las sumersiones). Sean  $M$  y  $N$  dos variedades de dimensiones  $m$  y  $n$ , con  $m > n$ , y  $f : M \rightarrow N$  una aplicación holomorfa sobreyectiva. Entonces, existen cartas  $(U, \varphi)$  de  $M$  y  $(V, \phi)$  de  $N$  tales que  $f(U) \subseteq V$  y

$$\phi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subseteq \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{m-n} \rightarrow \mathbb{C}^n$$

es una proyección, es decir, si  $(x, y) \in \varphi(U) \subseteq \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{m-n}$ , entonces

$$\phi \circ f \circ \varphi^{-1}(x, y) = x.$$

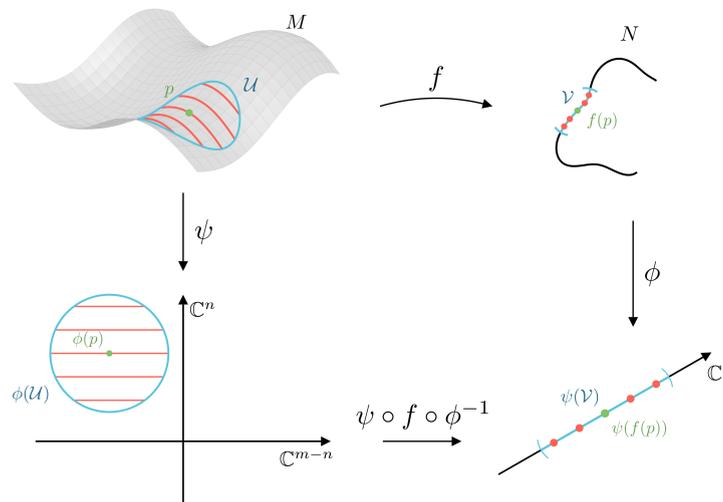


Figura 1.2: Forma local de las sumersiones.

## 1.2. Foliaciones holomorfas

En esta sección vamos a introducir el objeto principal del trabajo, las foliaciones. Aunque éstas se pueden definir en una variedad diferenciable cualquiera, en la memoria nos centraremos en el caso de foliaciones holomorfas sobre variedades holomorfas, que es el que nos interesa. Comenzaremos presentando el caso de foliaciones regulares, para pasar después a las foliaciones con singularidades. Las referencias utilizadas en esta sección son [2], [19] y [20].

### 1.2.1. Foliaciones no singulares

Comencemos con el caso de foliaciones regulares, es decir, sin singularidades. En ese caso, una foliación de dimensión  $n$  en una variedad  $M$  de dimensión  $m > n$  es una descomposición de  $M$  en subvariedades conexas de dimensión  $n$ , que llamaremos hojas, de forma que localmente la descomposición se parece a la dada en  $\mathbb{C}^m$  por los subconjuntos de  $\mathbb{C}^m = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{m-n}$  con la segunda coordenada constante. Siendo más precisos, se puede definir una foliación como:

**Definición 1.18** (Foliación). *Sea  $M$  una variedad holomorfa de dimensión  $m$ . Una foliación de  $M$  de dimensión  $0 < n < m$  (o de codimensión  $m-n$ ) es un atlas  $\mathcal{F} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$  que cumple:*

1.  $\varphi_i(U_i) = D^n \times D^{m-n}$ , donde  $D^k$  es el disco de centro 0 y radio 1 de dimensión  $k$ .
2. Si  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  entonces el cambio de cartas

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}|_{\varphi_i(U_i \cap U_j)}: \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j),$$

preserva la fibración horizontal, es decir, dadas las coordenadas  $(x, y) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{m-n}$ , se tiene que

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(x, y) = (f_{ij}(x, y)g_{ij}(y)) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{m-n}$$

donde  $f_{i,j} : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$ , y  $g_{i,j} : \mathbb{C}^{m-n} \rightarrow \mathbb{C}^{m-n}$  son funciones holomorfas.

Esta definición se corresponde con la dada por Camacho y Lins Neto en [2] y Scardua en [19]. Otros autores, como Scardua y Morales en [20], omiten en la definición la primera condición sobre cómo es la imagen  $\varphi_i(U_i)$ . Pese a esto, ambas definiciones son equivalentes, puesto que, dada una carta  $(U_i, \varphi_i)$  que no cumpla la primera propiedad, existe una aplicación  $\phi : \varphi_i(U_i) \rightarrow D^n \times D^{m-n}$ , y basta con componer las dos aplicaciones para obtener un atlas cuyas cartas cumplan ambas propiedades.

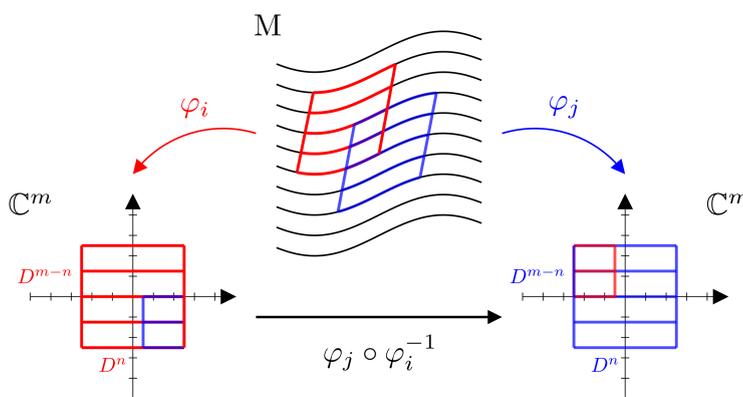


Figura 1.3: Cambio de cartas en una foliación.

**Definición 1.19** (Hojas). *Sean  $M$  una variedad de dimensión  $m$ , y  $\mathcal{F} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$  una foliación de  $M$  de dimensión  $n < m$ . Dada una carta  $(U_i, \varphi_i)$  de forma que  $\varphi_i(U_i) = D_1^i \times D_2^i \subseteq \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{m-n}$ , los conjuntos de la forma*

$$\alpha = \varphi_i^{-1}(D_1^i \times \{c\})$$

con  $c \in D_2^i$  se llaman placas de  $U_i$  o placas de  $\mathcal{F}$ .

Se llama camino de placas de  $\mathcal{F}$  a una sucesión  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  de placas tales que  $\alpha_j \cap \alpha_{j+1} \neq \emptyset$  para todo  $j \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ . Como  $M$  está recubierta por placas de  $\mathcal{F}$ , esto permite definir la siguiente relación de equivalencia entre los puntos de  $M$ :

$$p \sim_{\mathcal{F}} q \iff \exists \text{ un camino de placas } \alpha_1, \dots, \alpha_k \text{ tal que } p \in \alpha_1 \text{ y } q \in \alpha_k$$

A las clases de equivalencia de la relación  $\sim_{\mathcal{F}}$  se las llama hojas de  $\mathcal{F}$ .

El siguiente enunciado permite reconocer cuando dos foliaciones son equivalentes:

**Proposición 1.20** (foliaciones equivalentes). *Dos foliaciones  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{F}^*$  sobre dos variedades  $M$  y  $M^*$ , respectivamente, se dice que son equivalentes si existe un biholomorfismo  $h : M \rightarrow M^*$  que manda hojas de  $\mathcal{F}$  en hojas de  $\mathcal{F}^*$ , es decir, dado un punto  $x \in M$  contenido en una hoja  $L_x$ , se tiene que*

$$h(L_x) = L_{h(x)}^*$$

donde  $L_{h(x)}^*$  es la hoja de la foliación  $\mathcal{F}^*$  que contiene a  $h(x)$ .

Existen otras maneras de definir una foliación. A continuación presentamos dos equivalentes a la que hemos dado antes:

**Definición 1.21** (Otra definición de foliación). *Sea  $M$  una variedad holomorfa de dimensión  $m$ . Una foliación holomorfa  $\mathcal{F}$  de  $M$  de dimensión  $n$  viene dada por una partición  $\{L_i\}_{i \in I}$  de  $M$  en subvariedades inmersas y disjuntas de dimensión  $n$  (llamadas hojas de la foliación), de forma que se cumplen las propiedades siguientes:*

1. para todo  $p \in M$  existe una única hoja  $L_p$  tal que  $p \in L_p$ .
2. para todo  $p \in M$  existe una carta  $(U, \varphi)$  de  $M$  (llamada carta distinguida de  $\mathcal{F}$ ), tal que  $p \in U$  y  $\varphi(U) = D^n \times D^{m-n}$ , con  $D^n$  un disco de centro 0 y radio 1 de dimensión  $n$ .
3. Si  $L$  es una hoja de  $\mathcal{F}$  tal que  $L \cap U \neq \emptyset$ , entonces

$$L \cap U = \bigcup_{q \in Q_{L,U}} \varphi^{-1}(D^n \times \{q\})$$

donde  $Q_{L,U}$  es un subconjunto numerable de puntos de  $D^{m-n}$ .

Los subconjuntos de la forma  $\varphi^{-1}(D^n \times \{q\})$  son las placas de la carta distinguida  $(U, \varphi)$ .

**Definición 1.22** (Foliación dada por sumersiones locales). *Sea  $M$  una variedad de dimensión  $m$ . Una foliación de dimensión  $n$  viene dada por una familia  $\{(U_i, g_i)\}_{i \in I}$ , donde:*

1.  $\{U_i\}_{i \in I}$  es un recubrimiento por abiertos de  $M$ .
2.  $\{g_i\}_{i \in I}$  es una familia de sumersiones  $g_i : U_i \rightarrow D^{m-n}$ .
3.  $\forall i, j \in I$  tales que  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , existe un holomorfismo local

$$f_{i,j} : g_i(U_i \cap U_j) \subseteq \mathbb{C}^{m-n} \rightarrow g_j(U_i \cap U_j) \subseteq \mathbb{C}^{m-n}$$

de forma que  $g_j = f_{i,j} \circ g_i$  (evidentemente,  $f_{i,i} = Id$ ).

En este caso las placas de  $\mathcal{F}$  en  $U_i$  son los conjuntos de la forma  $g_i^{-1}(p)$ , con  $p \in g_i(U_i) \subseteq \mathbb{C}^{m-n}$ .

La demostración de que las tres definiciones de foliación que hemos dado hasta ahora son equivalentes puede consultarse en el capítulo 3 de [19]). A modo de ejemplo, veamos como una sumersión puede definir una foliación en el sentido de la primera definición 1.18:

**Ejemplo 1.23** (Foliación dada por una sumersión). Sean  $M$  y  $N$  dos variedades de dimensión  $m$  y  $m - n$ , respectivamente, y  $f : M \rightarrow N$  una sumersión. Aplicando la proposición 1.17 (la forma local de las sumersiones) tenemos que existen dos atlas  $\mathcal{F}_M = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$  en  $M$  y  $\mathcal{F}_N = \{(V_j, \phi_j)\}_{j \in J}$  en  $N$ , tales que:

- $\varphi(U_i) = D^n \times D^{m-n}$  y  $\phi(V_j) = D^{m-n}$ .
- para todo  $p \in M$  existen  $i \in I, j \in J$  con  $p \in U_i$  y  $f(p) \in V_j$ , tales que la aplicación  $\phi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1} : D^n \times D^{m-n} \rightarrow D^{m-n}$  está dada por  $\phi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1}(x, y) = y$ , con  $(x, y) \in D^n \times D^{m-n}$ .

Para ver que el atlas es una foliación, consideremos dos cartas  $(U_1, \varphi_1)$  y  $(U_2, \varphi_2)$  de  $\mathcal{F}_M$  y un punto  $p \in U_1 \cap U_2$ . Entonces, se tienen dos cartas  $(V_1, \phi_1)$  y  $(V_2, \phi_2)$  de  $\mathcal{F}_N$  que cumplen la segunda propiedad con  $(U_1, \varphi_1)$  y  $(U_2, \varphi_2)$ , respectivamente. Además, denotemos como  $\pi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{m-n} \rightarrow \mathbb{C}^{m-n}$  la proyección de las  $m - n$  últimas coordenadas. Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned} (\pi \circ \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(p) &= (\phi_2 \circ f \circ \varphi_2^{-1} \circ \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(p) = (\phi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1})(p) = \\ &= (\phi_2 \circ \phi_1^{-1} \circ \phi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1})(p) = (\phi_2 \circ \phi_1^{-1} \circ \pi)(p), \end{aligned}$$

con lo que  $\pi \circ \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$  no depende de las primeras  $n$  coordenadas, y cumple la definición 1.18. Como consecuencia tenemos que el atlas  $\mathcal{F}_M$  define una *foliación* en  $M$ , cuyas hojas son las componentes conexas de  $f^{-1}(c)$ , con  $c \in N$ .

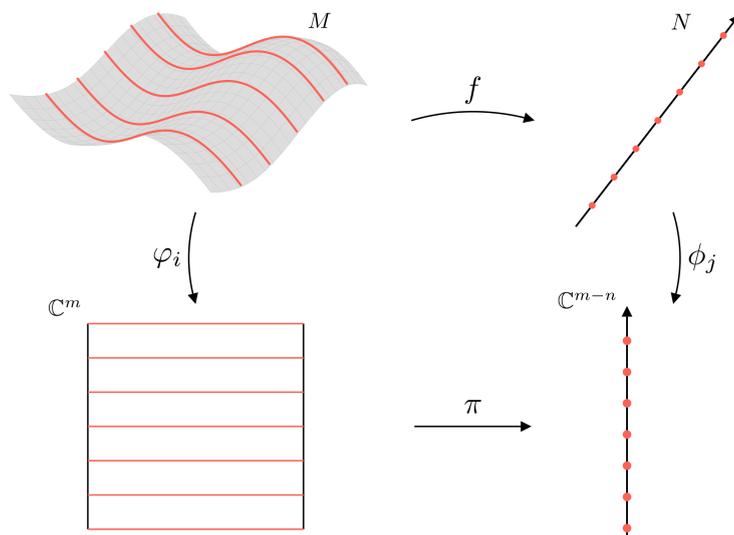


Figura 1.4: Foliación dada por una sumersión  $f : M \rightarrow N$ .

Los resultados anteriores permiten definir foliaciones de dimensión arbitraria. Veamos ahora que también se pueden definir foliaciones mediante campos vectoriales, pero que en

este caso la foliación que se obtiene será de dimensión uno. Antes de dar la definición, recordemos que dada una carta  $(U, \varphi)$  de  $M$ , con  $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ , una curva  $C$  generada por  $\gamma : \mathbb{C} \rightarrow U$  tiene vector tangente en un punto  $p = \gamma(t_0) \in U$ ,

$$\gamma'(t_0) = \sum_{i=1}^n \frac{d\gamma^i}{dt} \Big|_{t_0} \frac{\partial}{\partial x^i},$$

donde  $\gamma^i = x^i \circ \gamma$ . Ahora, dado un campo vectorial  $X \in \mathfrak{X}(U)$ , una curva  $C$  en  $U$  se dice que es *una trayectoria de  $X$*  si el vector tangente a la curva en cada punto coincide con  $X$ , es decir, si  $C$  está generado por  $\gamma : \mathbb{C} \rightarrow U$ , en cada punto  $\gamma(t_0) \in C$  se tiene que

$$X^i(\gamma(t_0)) = \frac{d\gamma^i}{dt} \Big|_{t_0} \text{ para } i \in \{1, \dots, n\}.$$

**Definición 1.24** (Foliación generada por un campo de vectores). *Sea  $M$  una variedad compleja de dimensión  $n > 1$  y  $X$  un campo de vectores holomorfo tal que  $X(p) \neq 0$  para todo punto  $p \in M$ . Entonces  $X$  genera una foliación holomorfa  $\mathcal{F}$  de dimensión 1 en  $M$ , donde las hojas de  $\mathcal{F}$  son las trayectorias de  $X$  en  $M$ .*

Para ver que efectivamente el campo  $X$  define una foliación en  $M$ , nos apoyamos en el siguiente resultado:

**Lema 1.25** (Rectificación de campos vectoriales). *Sea  $X$  un campo vectorial sobre una variedad  $M$ , entonces para todo  $p \in M$  tal que  $X(p) \neq 0$  existen un entorno  $U$  y coordenadas  $\varphi = (x_1, x_2, \dots, x_m)$  tales que  $\varphi(U) = \mathbb{C}^n$  y  $X = \frac{\partial}{\partial x_1}$ .*

Evidentemente, las trayectorias de  $X$  en el sistema de coordenadas dado por el lema son de la forma  $\varphi^{-1}(c)$ , con  $c \in \mathbb{C}^{n-1}$ , con lo que de acuerdo con las definiciones de foliación que hemos dado (por ejemplo, la definición 1.21), se tiene una foliación de dimensión 1.

Resulta que el inverso también es cierto, es decir, cualquier foliación de dimensión 1 se puede definir de forma local mediante un campo vectorial (ver proposición 3.2.5 de [19]).

Antes de ver qué ocurre en el caso de 1-formas, recordemos el concepto de distribución holomorfa:

**Definición 1.26** (Distribución holomorfa). *Sea  $M$  una variedad de dimensión  $n$  y sea  $0 < k < n$ . Una familia  $\mathcal{D} = \{\mathcal{D}_p \subseteq T_p M : p \in M\}$ , con  $\mathcal{D}_p$  un subespacio vectorial de dimensión  $k$  de  $T_p M$ , se llama distribución holomorfa de dimensión  $k$ , si para todo  $p \in M$  existe un entorno  $U$  de forma que  $\mathcal{D}|_U$  está generado por  $k$  campos vectoriales  $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(U)$ .*

Se dice que una subvariedad  $N \xrightarrow{i} M$  es *subvariedad integral de la distribución  $\mathcal{D}$*  si  $i_{*p}(T_p N) = \mathcal{D}_p$  para todo  $p \in N$ . Una distribución  $\mathcal{D}$  se llama *completamente integrable* si para cada  $p \in M$  existe una subvariedad integral de  $\mathcal{D}$  que contiene a  $P$ .

Con esto, también se pueden utilizar 1-formas para definir foliaciones, en este caso de codimensión 1:

**Definición 1.27** (Foliación generada por una 1-forma). *Sea  $M$  una variedad compleja de dimensión  $m$  y  $\omega$  una 1-forma holomorfa que no se anula en ningún punto  $p \in M$ . Entonces  $\omega$  induce una distribución  $\mathcal{D}$  de hiperplanos en  $M$  definida por*

$$\mathcal{D}_p = \ker(\omega_p) = \{v \in T_p M : \omega_p(v) = 0\}.$$

*En este caso las hojas de la foliación son las subvariedades  $L$  de  $M$  cuyo espacio tangente  $T_p L$  se corresponde con  $\mathcal{D}_p$  en cada punto  $p \in L$ .*

Dada una 1-forma  $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx^i$ , denotemos como  $X_\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i \frac{\partial}{\partial x^i}$ . Entonces, en cada punto  $p \in M$  el núcleo  $\ker(\omega_p)$  se corresponde con el subespacio de  $T_p M$  ortogonal a  $X_\omega(p)$  (basta ver que  $\omega(X) = \sum_{i=1}^n \omega_i X^i$  para todo  $X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ ), con lo que es claro que  $\ker(\omega_p)$  tiene dimensión  $n - 1$ .

Cuando existe una foliación  $\mathcal{F}$  tal que las hojas  $L$  de  $\mathcal{F}$  son subvariedades integrales de la distribución  $\mathcal{D}$  generada por una 1-forma  $\omega$ , diremos que  $\omega$  es *integrable*. Al igual que ocurre en el caso de campos de vectores, una foliación de codimensión 1 está definida localmente por 1-formas integrables (ver proposición 3.2.9 de [19]).

### 1.2.2. El teorema de Frobenius

Antes de pasar a estudiar el caso de foliaciones con singularidades, veamos algunas condiciones que se pueden pedir a las distribuciones para que sean integrales y generen una foliación. Para ello, comenzamos introduciendo el concepto de corchete de Lie de campos de vectores.

**Definición 1.28** (Corchete de Lie). *Sean  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  dos campos de vectores y  $f \in \mathfrak{F}(M)$ , el corchete de Lie  $[X, Y]$  es un nuevo campo vectorial que actúa de la siguiente manera sobre las funciones:*

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

Es inmediato comprobar que el corchete de Lie es aditivo, antisimétrico y cumple que  $[gX, hY] = gh[X, Y] + gX(h)Y - hY(g)X$  para cualquier  $g, h \in \mathfrak{F}(M)$ .

Una distribución holomorfa  $\mathcal{D}$  se dice que es *involutiva* si para todo par de campos vectoriales  $X, Y$  tales que  $X(p), Y(p) \in \mathcal{D}_p$ , se tiene que  $[X, Y]_p \in \mathcal{D}_p$ . Esta propiedad está íntimamente relacionada con que la distribución sea completamente integrable, como se muestra en el siguiente resultado clásico (ver por ejemplo, en la página 182 de [2]):

**Teorema 1.29** (de Frobenius). *Una distribución holomorfa  $\mathcal{D}$  es completamente integrable si y sólo si es involutiva.*

La siguiente versión del teorema de Frobenius (ver página 36 de [2]), permite ver claramente el interés en las distribuciones involutivas a la hora de estudiar foliaciones:

**Teorema 1.30.** *Dada una variedad  $M$  de dimensión  $n$  y una distribución involutiva  $\mathcal{D}$  de dimensión  $k < n$ , existe una foliación  $\mathcal{F}_{\mathcal{D}}$  en  $M$  de dimensión  $k$  de forma que en cada punto  $p \in M$  el espacio tangente a la hoja  $L_p$  de  $\mathcal{F}$  es igual a  $\mathcal{D}_p$ .*

*Recíprocamente, dada una foliación  $\mathcal{F}$  de dimensión  $k < n$ , entonces se puede definir una distribución  $\mathcal{D}$  de dimensión  $k$  tal que, en cada punto  $p \in M$ , el espacio tangente a la hoja  $L_p$  de  $\mathcal{F}$  es  $\mathcal{D}_p$ .*

Al igual que en una variedad  $M$  de dimensión  $n$  una distribución  $\mathcal{D}$  de dimensión  $k$  está generada por una familia de  $k$  campos de vectores, también está generada por una familia de  $n - k$  1-formas  $\{\omega_1, \dots, \omega_{n-k}\}$ . Fijado  $p \in M$ , en  $T_p M$  podemos considerar

$$A = \{v \in T_p M : v \in (\ker(\omega_{1p}) \cap \dots \cap \ker(\omega_{(n-k)p}))\}.$$

que tiene dimensión  $k$  si las 1-formas son linealmente independientes. Vemos entonces que para generar una distribución  $\mathcal{D}$  de dimensión  $k$  basta encontrar las  $n - k$  1-formas linealmente independientes de forma que  $\mathcal{D}_p = A$  en todo punto  $p \in M$ . El siguiente enunciado relaciona la integrabilidad de la distribución con las 1-formas que la generan:

**Teorema 1.31** (de Frobenius). *Sea  $\mathcal{D}$  una distribución de dimensión  $k$  dada por una familia de 1-formas  $\{\omega_1, \dots, \omega_{n-k}\}$ . Entonces,  $\mathcal{D}$  es completamente integrable si para todo  $i \in \{1, \dots, n - k\}$  se tiene que*

$$d\omega_i \wedge \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_{n-k} = 0.$$

**Observación 1.32.** En una variedad  $M$  de dimensión 2, una distribución de dimensión uno viene dada por una 1-forma  $\omega$ . Entonces la condición del teorema anterior se reduce a que  $d\omega \wedge \omega = 0$ , lo cual se cumple para cualquier  $\omega$ . Esto implica que en  $M$  toda distribución definida mediante una 1-forma es integrable.

### 1.2.3. Foliaciones con singularidades

Vamos ahora a definir las foliaciones holomorfas con singularidades en una variedad en general, para lo que seguiremos el capítulo 4 de [19].

**Definición 1.33** (Foliación con singularidades). *Sea  $M$  una variedad de dimensión  $m$ . Una foliación holomorfa de dimensión  $n < m$  de  $M$  con singularidades es un par  $(\mathcal{F}^*, S)$  donde  $\mathcal{F}^*$  es una foliación holomorfa sin singularidades de dimensión  $n$  en  $M \setminus S$ , y  $S$  es un conjunto analítico de  $M$ . El conjunto  $S$  es el conjunto de puntos singulares de  $\mathcal{F}$ , y las hojas de  $\mathcal{F}$  son las hojas de  $\mathcal{F}^*$ .*

Denotaremos por  $\text{Sing}(\mathcal{F})$  al conjunto de puntos singulares de la foliación  $\mathcal{F}$ . Antes de dar la siguiente definición, recordemos que  $\text{Sing}(X) = \{p \in M : X(p) = 0\}$  es el conjunto de puntos singulares de un campo vectorial  $X$ . Entonces:

**Definición 1.34** (Foliación con singularidades aisladas de dimensión 1). *Sea  $M$  una variedad holomorfa tal que existe una familia  $\{U_i, X_i\}_{i \in I}$  que cumple las propiedades siguientes:*

1. *Los conjuntos  $U_i$  son subconjuntos conexos de  $M$  tales que  $M = \cup_{i \in I} U_i$ .*
2. *Cada  $X_i$  es un campo vectorial holomorfo definido en  $U_i$ .*
3. *Si  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , entonces  $X_i = g_{ij} X_j$  en  $U_i \cap U_j$ , donde  $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  es una función holomorfa.*
4. *En cada  $U_i$  se tiene que  $\text{Sing}(X_i) = \emptyset$  o  $\text{Sing}(X_i) = \{p_i\}$ , con  $p_i \in U_i$ .*

*Entonces  $\{U_i, X_i\}_{i \in I}$  define una foliación holomorfa  $\mathcal{F}$  de dimensión 1 con singularidades aisladas, de forma que, para todo  $i \in I$ , las placas de  $\mathcal{F}$  en  $U_i$  están definidas por las trayectorias de  $X_i$  y  $\text{Sing}(\mathcal{F}) \cap U_i = \text{Sing}(X_i)$ .*

El recíproco también es cierto, dada una foliación holomorfa  $\mathcal{F}$  de dimensión 1 con singularidades aisladas sobre una variedad  $M$ , existe una familia  $\{U_i, X_i\}_{i \in I}$  que cumple las propiedades de la definición, de forma que localmente la foliación  $\mathcal{F}$  viene dado por los campos vectoriales  $X_i$  (ver el lema 4.2.3 de [19]).

De forma análoga, también podemos definir localmente una foliación de codimensión 1 mediante 1-formas (ver proposición 4.4.1 y definición 4.4.2 de [19]). Para ello, denotemos como  $\text{Sing}(\omega) = \{p \in M : \omega_p \neq 0\}$  el conjunto de puntos singulares de  $\omega$ .

**Definición 1.35.** *Sea  $M$  una variedad holomorfa y una foliación  $\mathcal{F}$  de codimensión 1 con singularidades aisladas. Entonces existe una familia  $\{U_i, \omega_i\}_{i \in I}$  que cumple las siguientes propiedades:*

1. Los conjuntos  $U_i$  son subconjuntos conexos de  $M$  tales que  $M = \cup_{i \in I} U_i$  y  $\text{Sing}(\mathcal{F}) \cap U_i = \emptyset$  o  $\text{Sing}(\mathcal{F}) \cap U_i = \{p_i\}$ , con  $p_i \in U_i$ .
2. Cada  $\omega_i$  es un 1-forma integrable en  $U_i$ , de forma que  $\text{Sing}(\omega_i) = \text{Sing}(\mathcal{F}) \cap U_i$ .
3. En cada  $U_i \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$ , las placas de  $\mathcal{F}$  están definidas por la distribución de hiperplanos generada por  $\omega_i$ .
4. Si  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , entonces  $\omega_i = g_{ij}\omega_j$  en  $U_i \cap U_j$ , donde  $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  es una función holomorfa.

Recíprocamente, si existe una familia  $\{U_i, \omega_i\}_{i \in I}$  que cumple las propiedades anteriores, entonces esta define localmente una foliación holomorfa de codimensión 1 con singularidades aisladas.

**Observación 1.36.** En nuestro caso, estamos interesados en el caso de foliaciones holomorfas con singularidades aisladas en dimensión dos, de forma que codimensión 1 y dimensión 1 son lo mismo, y podemos definir localmente la foliación mediante campos de vectores u 1-formas, según sea más conveniente. De hecho, es fácil ver como se puede obtener la expresión en coordenadas locales de una 1-forma que define una foliación  $\mathcal{F}$  a partir de la de un campo de vectores que define  $\mathcal{F}$ , y viceversa:

Sean  $(U, \varphi)$  una carta de una variedad  $M$  de dimensión dos y un campo vectorial  $X$  en  $U$ , de forma que

$$X = A \frac{\partial}{\partial x} + B \frac{\partial}{\partial y},$$

con  $A, B \in \mathfrak{F}(U)$  y  $(x, y)$  las coordenadas en la carta  $\varphi$ . Entonces, podemos considerar la 1-forma  $\omega$  dada por

$$\omega = Bdx - A dy,$$

que verifica  $X \in \ker(\omega)$ , con lo que  $X$  y  $\omega$  generan la misma distribución de dimensión 1 en  $U$ .

### 1.3. Gérmenes de curvas y 1-formas

Hasta ahora la mayoría de las definiciones que hemos dado han sido globales, para toda la variedad. Sin embargo, el resto del trabajo se centra en el estudio local de las singularidades. A partir de ahora, durante el resto del trabajo se trabajaremos en dimensión

dos. Vamos a detenernos brevemente a estudiar algunos objetos importantes que serán de utilidad más adelante. Seguiremos la sección 0.8 de [11] y el capítulo 1 de [22].

En primer lugar, denotaremos por  $(M, p)$ , donde  $M$  es una variedad de dimensión dos y  $p \in M$ , a un dominio de una carta  $U \subseteq M$  tal que  $p \in U$ . Diremos que dos curvas  $C_1, C_2$  tienen el mismo *germen* en un punto  $p$  si existe un entorno  $U$  de  $p$  en el que  $C_1 \cap U = C_2 \cap U$ . Podemos entonces definir una relación de equivalencia: un *germen de curva en un punto*  $p$  es la clase de equivalencia de curvas definidas en un entorno  $V$  de  $p$  por la relación de equivalencia de tener la misma restricción en un entorno  $U \subseteq V$  de  $p$ .

**Definición 1.37.** *Sea  $M$  una variedad y  $p \in M$  un punto. Consideremos dos funciones  $f$  y  $g$  definidas en abiertos  $U, V \subseteq M$ , respectivamente, de forma que  $p \in U \cap V$ . Si existe un entorno  $W \subseteq U \cap V$  de  $p$  tal que  $f|_W \equiv g|_W$  diremos que  $f$  y  $g$  son equivalentes. Así, toda función  $f$  definida en un entorno de  $p$  pertenece a una clase de equivalencia por la relación anterior, que llamamos germen de la función  $f$  por  $p$ .*

De esta manera, podemos definir los gérmenes de funciones, así como gérmenes de campos de vectores, de 1-formas, de biholomorfismos, de foliaciones, etc.

Sea  $p$  un punto de una variedad  $M$  de dimensión dos y  $(U, \varphi)$  una carta tal que  $p \in U$  y  $(x, y)$  son las coordenadas en la carta. Entonces los gérmenes de funciones en  $p$  se pueden representar mediante funciones definidas en entornos de  $p$  contenidos en  $U$ . Resulta entonces que los gérmenes de funciones holomorfas en  $p$  forman un anillo isomorfo al anillo de series convergentes (ver la sección 1.3.5 de [6])

$$\mathbb{C}\{x, y\} = \left\{ \sum_{i,j \geq 0} a_{ij} x^i y^j \text{ convergente, con } a_{ij} \in \mathbb{C} \text{ para todo } i, j \right\}$$

Por otro lado, los gérmenes de campos vectoriales y 1-formas tienen una base formada por los campos  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\}$  y  $\{dx, dy\}$ , respectivamente. Juntando esto con lo anterior, los gérmenes de campos de vectores se pueden escribir de manera única como  $A(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$ , con  $A, B \in \mathbb{C}\{x, y\}$ ; del mismo modo, los gérmenes de 1-formas admiten una escritura única como  $A(x, y)dx + B(x, y)dy$ , con  $A, B \in \mathbb{C}\{x, y\}$ .

Por último, presentamos la siguiente forma de escribir los elementos de  $\mathbb{C}\{x, y\}$ , ya que será utilizada en varias ocasiones a lo largo de la memoria. Sea  $a(x, y) \in \mathbb{C}\{x, y\}$ , entonces

$$a(x, y) = \sum_{i \geq 0} a_i(x, y)$$

con  $a_i(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$  polinomio homogéneo de grado  $i$ .

# Capítulo 2

## Reducción de singularidades de curvas

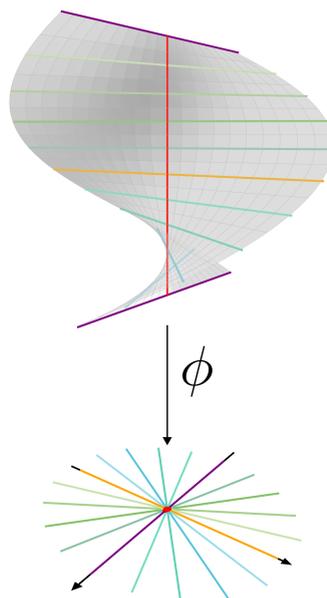
En este capítulo vamos a presentar algunos resultados importantes de la reducción de singularidades de curvas planas. En la primera sección introducimos la principal herramienta que utilizaremos, la explosión de un punto de una superficie. A continuación, explicaremos en qué consiste resolver una singularidad de una curva, centrándonos en el caso de las cúspides de la forma  $y^p - x^q = 0$ , con  $p, q \in \mathbb{Z}_{>0}$ . Seguiremos el capítulo 3 del libro de Wall [22] y los capítulos 2 y 3 del libro de Casas-Alvero [11].

### 2.1. Explosión de un punto de una superficie

Dado un punto  $P$  en una superficie  $S_0$ , queremos construir una nueva superficie  $S_1$  y una aplicación  $\phi : S_1 \rightarrow S_0$  que cumplan las siguientes propiedades:

- $\phi^{-1}(P)$  es una curva  $E \subseteq S_1$ .
- $\phi$  es un isomorfismo entre  $S_1 \setminus E$  y  $S_0 \setminus \{P\}$ .
- Los puntos de  $E$  se corresponden con las direcciones de  $S_0$  que pasan por  $P$ .

A la aplicación  $\phi$  que cumpla las propiedades anteriores se le llama *explosión* de  $S_0$  con centro  $P$ .



Comencemos con el caso en el que  $S_0 = \mathbb{C}^2$  con coordenadas  $(x, y)$  y  $P = (0, 0)$ . Recordemos que los puntos  $[\xi : \eta]$  de la recta proyectiva compleja  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  se pueden interpretar como las distintas rectas en  $\mathbb{C}^2$  que pasan por el origen. Entonces, consideremos el espacio producto  $\widehat{S}_1 := \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ , con coordenadas  $(x, y, [\xi : \eta])$ .

En  $\widehat{S}_1$  podemos ahora considerar el subespacio

$$S_1 = \{(x, y, [\xi : \eta]) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 : x\eta = y\xi\},$$

de manera que la proyección

$$\begin{aligned} \pi : S_1 \subseteq \widehat{S}_1 &\rightarrow \mathbb{C}^2 \\ (x, y, [\xi : \eta]) &\mapsto (x, y) \end{aligned} \quad (2.1)$$

es la *explosión* de  $\mathbb{C}^2$  de centro el origen  $(0, 0)$ . Cada punto  $(x, y)$  de  $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  determina un único punto  $[x : y]$  de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ , la recta que pasa por dicho punto y el origen, de forma que  $\pi^{-1}(x, y) = (x, y, [x : y])$ . Por otro lado, se tiene que la curva

$$E := \pi^{-1}(0, 0) = \{(0, 0, [\xi : \eta]) : [\xi : \eta] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1\} \simeq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1,$$

y recibe el nombre de *divisor excepcional* de la explosión.

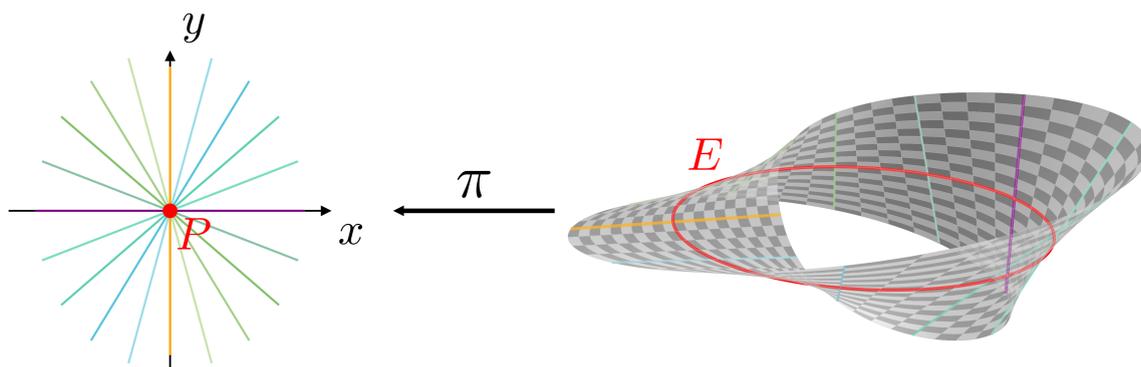


Figura 2.1: Explosión de  $\mathbb{C}^2$  en un punto  $P$ , que da como resultado una superficie  $S_1$  y un divisor excepcional  $E$ .

Como se vio en el ejemplo 1.3, en  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  podemos considerar un atlas formado por dos cartas  $(U_1, \varphi_1)$  y  $(U_2, \varphi_2)$ , de forma que podemos escribir  $S_1 = V_1 \cup V_2$  con

$$V_1 = S_1 \cap (\mathbb{C}^2 \times U_1) = \{(x, y, [1 : v]) \in \mathbb{C}^2 \times U_1 : y = xv\}$$

$$V_2 = S_1 \cap (\mathbb{C}^2 \times U_2) = \{(x, y, [u : 1]) \in \mathbb{C}^2 \times U_2 : x = uy\}$$

Es inmediato ver que  $\pi(V_1) = (\mathbb{C}^2 \setminus \{x = 0\}) \cup \{(0, 0)\}$  y  $\pi(V_2) = (\mathbb{C}^2 \setminus \{y = 0\}) \cup \{(0, 0)\}$ . Por otro lado, las aplicaciones  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  se definen como

$$\begin{aligned} \varphi_1 : \quad V_1 &\rightarrow \mathbb{C}^2 \\ (x, xv, [1 : v]) &\mapsto (x, v) \end{aligned} \quad \varphi_2 : \quad V_2 \rightarrow \mathbb{C}^2 \\ (uy, y, [u : 1]) \mapsto (u, y)$$

De esta forma, la expresión local  $\pi^i = \pi \circ \varphi_i^{-1}$  de la explosión  $\pi$  en cada una de las cartas es

$$\begin{aligned} \pi^1 : \quad \mathbb{C}^2 &\rightarrow \mathbb{C}^2 \\ (x, v) &\mapsto (x, xv) \end{aligned} \quad \pi^2 : \quad \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2 \\ (u, y) &\mapsto (uy, y)$$

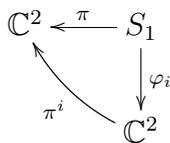


Figura 2.2: Esquema de una explosión en el origen.

Dadas las coordenadas locales  $(x, v)$  en la primera carta, el divisor excepcional viene dado por la ecuación  $x = 0$ , mientras que el eje  $v = 0$  no varía por la explosión. Análogamente, en la segunda carta, con coordenadas  $(u, y)$ , la ecuación del divisor excepcional es  $y = 0$ , y es el eje  $u = 0$  el que no varía por la explosión.

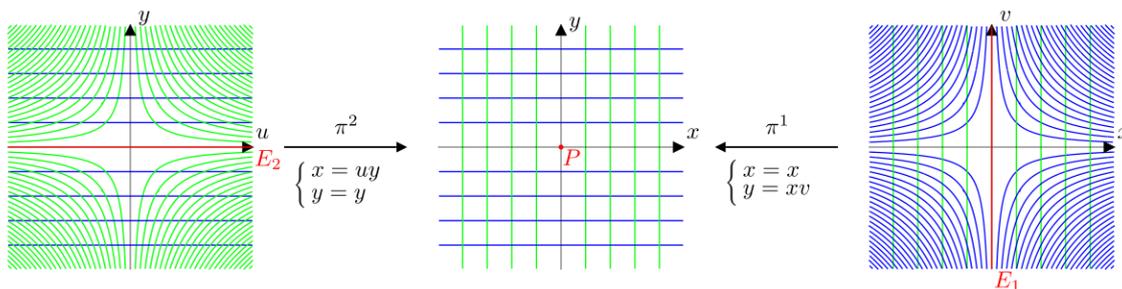
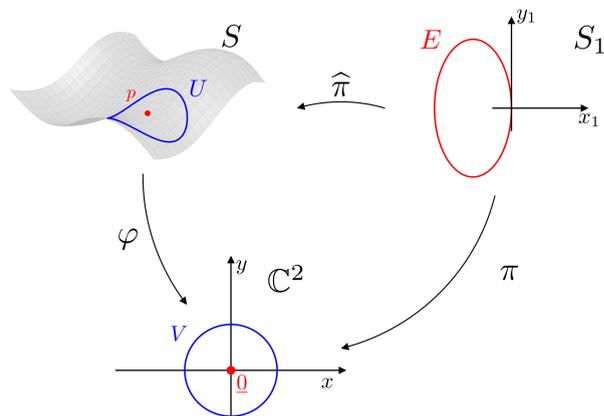


Figura 2.3: esquema de cómo se transforman las rectas horizontales y verticales en  $(\mathbb{C}^2, \underline{0})$  al explotar con centro el origen y mirar en cada una de las dos cartas.

Para el caso de una superficie general  $S_0$ , se pueden introducir coordenadas locales  $(x, y)$  en un entorno del punto  $P$ . Estas coordenadas definen una biyección  $\varphi$  entre un entorno  $U \subseteq S_0$  de  $P$  y un entorno  $V$  de  $(0, 0)$  en  $\mathbb{C}^2$ . En  $\mathbb{C}^2$  podemos definir una explosión  $\pi : S_1 \rightarrow \mathbb{C}^2$  con centro el origen, y componiendo con  $\varphi^{-1}$  se tiene la aplicación  $\hat{\pi} : S_1 \rightarrow S_0$ .



Aunque hemos descrito la construcción de una explosión mediante coordenadas locales, la explosión no depende de las coordenadas elegidas, como muestra el siguiente resultado, que damos sin demostración (ver, por ejemplo, el lema 3.2.1 de [22]).

**Proposición 2.1.** *La explosión de una superficie  $S$  con centro un punto  $P$  definida anteriormente está bien definida.*

Ver como es una explosión en una superficie compleja en general es además importante para poder hacer sucesivas explosiones. Tras realizar una explosión  $\pi_1$  en el origen se obtiene una superficie  $S_1$  y un divisor excepcional  $E_1$ . Ahora, para explotar un punto  $P_1 \in E_1$ , consideramos una carta  $(U_i^1, \varphi_i^1)$  tal que  $P_1 \in U_i^1$ , tomando coordenadas en esa carta

podemos definir una explosión  $\pi_2 : S_2 \rightarrow \varphi_i^1(U_i^1) \subseteq \mathbb{C}^2$ . Así, la explosión entre  $S_1$  y  $S_2$  es  $\widehat{\pi}_2 := (\varphi_i^1)^{-1} \circ \pi_2$  (ver figura 2.4a). Repitiendo este proceso  $n$  veces podemos obtener una sucesión de  $n$  explosiones  $(\mathbb{C}^2, \underline{0}) \xleftarrow{\widehat{\pi}_1} (S_1, P_1) \xleftarrow{\widehat{\pi}_2} \dots \xleftarrow{\widehat{\pi}_n} S_n$  (ver figura 2.4b). En lo que sigue, como trabajaremos localmente con las cartas, no distinguiremos entre la aplicación entre las cartas y la aplicación entre las superficies.

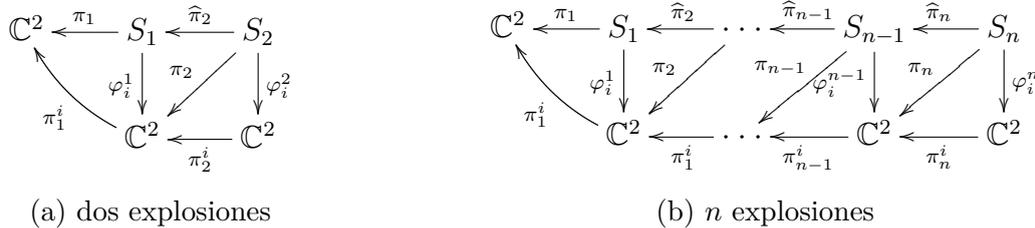


Figura 2.4: Esquema de dos y varias explosiones

**Observación 2.2.** Si  $\pi_1$  es la explosión en  $\mathbb{C}^2$  con centro el origen y  $(x_1, y_1)$  son coordenadas locales en la primera carta, como hemos visto la expresión local de  $\pi_1$  está dada por  $(x_1, y_1) \rightarrow (x_1, x_1 y_1)$ . Si  $(x, y)$  son coordenadas en  $(\mathbb{C}^2, \underline{0})$ , escribimos que la explosión en la primera carta está dada por  $\pi_1(x_1, y_1) = (x_1, x_1 y_1)$ , o bien

$$\begin{cases} x = x_1 \\ y = x_1 y_1 \end{cases}$$

Tras hacer una explosión  $\pi_1$  en  $\mathbb{C}^2$  con centro el origen, se tienen coordenadas en la primera carta  $(x, y) = (x_1, x_1 y_1)$ . Si en esta carta se vuelve a hacer una explosión  $\pi_2$  del origen, y de nuevo se considera la primera carta con coordenadas  $(x_2, y_2)$ , entonces escribimos

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = x_2 y_2 \end{cases} \quad \text{y por lo tanto} \quad \begin{cases} x = x_2 \\ y = x_2^2 y_2 \end{cases}$$

Así, tras hacer  $n$  explosiones del origen en la primera carta, la composición de todas las explosiones en las coordenadas de la primera carta  $(x_n, y_n)$  de  $S_n$  de la siguiente manera

$$\begin{cases} x = x_n \\ y = x_n^n y_n \end{cases}$$

Análogamente, si se realizan  $n$  explosiones del origen en la segunda carta  $(x_n, y_n)$ , entonces si consideramos las coordenadas en la segunda carta en la superficie  $S_n$  tenemos que  $(x, y) = (x_n y_n^n, y_n)$ .

Se puede codificar la información de los exponentes de las coordenadas en una matriz, de forma que hacer una explosión se corresponde con una matriz triangular

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ para la primera carta,} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ para la segunda carta.}$$

Para obtener los exponentes de la composición basta multiplicar las matrices de correspondientes a cada una de las explosiones.

Consideremos una sucesión de explosiones  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$  donde  $\pi_i : S_i \rightarrow S_{i-1}$  es la explosión de centro  $P_{i-1} \in S_{i-1}$ . A partir de ahora, salvo que se indique lo contrario, denotaremos por  $(x_i, y_i)$  a las coordenadas en una de las cartas de  $S_i$  tras hacer la explosión  $\pi_i$ . Además, al divisor excepcional de la explosión  $\pi_i$  se le denotará como  $E_i$ , y a su antiimagen en el resto de  $S_j$  con  $j > i$  se le llamará también  $E_i$ . Por otro lado, dada la aplicación  $\pi = \pi_n \circ \dots \circ \pi_1$ , llamaremos divisor excepcional  $E$  de  $\pi$  a  $\pi^{-1}(P_0)$ , y es la unión de todas las antiimágenes de los divisores excepcionales  $E_i$  en  $S_n$ , que llamaremos componentes irreducibles del divisor excepcional.

Por último veamos como se transforma una curva por una explosión. Sea  $\pi_1 : S_1 \rightarrow S_0$  una explosión con centro  $P$ , y sea  $E_1$  el divisor excepcional de la explosión. Dada una curva  $C \subseteq S_0$ , se llama *transformado total* de  $C$  a la curva  $\pi^{-1}(C) \subseteq S_1$ . Si  $C$  pasa por  $P$ , entonces el transformado total contiene al divisor excepcional  $E_1$ , mientras que si no pasa por  $P$ , entonces el transformado total no interseca en ningún punto a  $E$ .

## 2.2. Reducción de singularidades de curvas

En esta sección se introduce la reducción de singularidades de curvas en superficies. A través de sucesivas explosiones, se puede resolver una singularidad de una curva. Seguiremos principalmente el capítulo 3 de [22], aunque también nos apoyaremos en el capítulo 3 de [11].

Sea  $f(x, y) \in \mathbb{C}\{x, y\}$  y  $C$  la curva dada por  $f = 0$ . La serie  $f(x, y)$  se puede escribir como suma de polinomios homogéneos

$$f(x, y) = f_n(x, y) + f_{n+1}(x, y) + \dots$$

donde  $f_n \neq 0$ . Decimos que  $n$  es la multiplicidad en el origen de la curva  $C$ , y lo denotamos por  $m_{\underline{0}}(C) = m_{\underline{0}}(f) = \nu_{\underline{0}}(f) = \text{ord}(f(x, y)) = n$ . Diremos que la curva  $C$  tiene una singularidad en el origen (o que el punto  $\underline{0}$  es un punto singular) si

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\underline{0}}, \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{\underline{0}} \right) = (0, 0).$$

Fijándonos en la expresión de  $f$ , esta condición es equivalente a que  $m_{\underline{0}}(C) > 1$ . Diremos que una curva es *no singular* o *lisa* si no tiene puntos singulares.

Tras realizar una explosión  $\pi$  y tomando coordenadas  $(x_1, y_1)$  en la primera carta de  $S_1$ , se tiene que

$$\begin{aligned} f \circ \pi(x_1, y_1) &= f(x_1, x_1 y_1) = f_n(x_1, x_1 y_1) + f_{n+1}(x_1, x_1 y_1) + \dots = \\ &= x_1^n (f_n(1, y_1) + x_1 f_{n+1}(1, y_1) + \dots), \end{aligned}$$

donde  $x_1^n = 0$  es la ecuación del divisor excepcional en la primera carta, y a la curva de  $S_1$  dada por la ecuación

$$\frac{f(x_1, x_1 y_1)}{x_1^n} = 0$$

se la llama *transformado estricto* de  $C$  en la primera carta. Del mismo modo, tomando coordenadas  $(x_2, y_2)$  en la segunda carta de  $S_1$ , el *transformado estricto* de  $C$  viene dado por la ecuación

$$\frac{f(x_2 y_2, y_2)}{y_2^n} = 0.$$

Por otro lado, al conjunto finito de rectas determinadas por el polinomio homogéneo  $f_n(x, y)$  se le conoce como *cono tangente* de  $C$ . Así, la ecuación  $f_n(1, y) = 0$  da los puntos en la primera carta en los que se cortan el divisor excepcional y el transformado estricto de la curva, mientras que  $f_n(x, 1) = 0$  da los puntos en la segunda carta.

Consideraremos ahora el caso de una curva irreducible. Sea  $C$  una curva irreducible en  $(\mathbb{C}^2, \underline{0})$  con una singularidad en  $P_0 = (0, 0)$  en  $S_0 = \mathbb{C}^2$ . La explosión de  $S_0$  con centro  $P_0$  da una nueva superficie  $S_1$ , un divisor excepcional  $E_1$  en  $S_1$  y un transformado estricto  $C_1$  de la curva que interseca a  $E_1$  en un único punto  $P_1$ .

Inductivamente, supongamos que se ha construido una superficie  $S_i$  que contiene curvas  $E_j$  con  $0 < j \leq i$  y una curva  $C_i$  que corta al divisor excepcional en un único punto  $P_i$ . Entonces la explosión  $\pi_{i+1}$  de  $S_i$  con centro  $P_i$  da una superficie  $S_{i+1}$  con un nuevo divisor excepcional  $E_{i+1}$  y un transformado estricto  $C_{i+1}$ , que interseca a  $E_{i+1}$  en un único punto  $P_{i+1}$ .

La siguiente proposición (cuya demostración puede encontrarse, por ejemplo, en la página 43 de [22]) asegura que el proceso descrito antes permite obtener en un número finito de pasos a una curva no singular:

**Proposición 2.3.** *En la situación anterior existe  $N \in \mathbb{Z}^+$  de forma que  $C_N$  es no singular (y por tanto  $C_n$  es no singular para todo  $n > N$ ).*

Al proceso anterior se le llama *reducción de singularidades* de  $C$  y a la aplicación  $\pi = \pi_N \circ \dots \circ \pi_1 : S_n \rightarrow S_0$  se le llama *reducción* de  $C$ .

**Ejemplo 2.4.** Sea  $C$  el germen en  $(\mathbb{C}, \underline{0})$  de la cúspide dada por la ecuación  $y^7 - x^{19} = 0$ . Consideremos la explosión  $\pi_1$  de  $\mathbb{C}^2$  en  $P_0 = (0, 0)$ , obteniendo una superficie  $S_1$ , de forma que  $\pi_1 : S_1 \rightarrow \mathbb{C}^2$ . Como el cono tangente de  $C$  en  $P_0$  es  $\{y = 0\}$ , nos fijamos en la primera carta de  $S_1$ , de forma que la explosión viene dada por  $\pi_1(x_1, y_1) = (x_1, x_1 y_1)$ , y la ecuación del divisor excepcional  $E_1$  es  $x_1 = 0$ . Así, el transformado estricto de la curva  $C_1$  se obtiene dividiendo por la ecuación del divisor excepcional elevado a la multiplicidad de la curva, obteniendo que  $C_1$  está definida por  $y_1^7 - x_1^{12} = 0$ .

Volvemos a explotar, en este caso con centro en el origen  $P_1$  de la primera carta, y al igual que antes, como el cono tangente en  $P_1$  es  $\{y_1 = 0\}$ , miramos la explosión en la primera carta, de forma que  $\pi_2(x_2, y_2) = (x_2, x_2 y_2)$ . El divisor excepcional  $E_2$  es  $x_2 = 0$ , y el transformado estricto  $C_2$  es  $y_2^7 - x_2^5 = 0$ , por lo que en el origen  $P_2$  de la primera carta su cono tangente es  $x_2 = 0$ .

En la siguiente explosión cambiamos a la segunda carta, así que  $\pi_3(x_3, y_3) = (x_3 y_3, y_3)$ , el divisor excepcional  $E_3$  tiene de ecuación  $y_3 = 0$ , y el transformado estricto  $C_3$  viene dado por  $y_3^2 - x_3^5 = 0$ . Notemos que en este caso, el transformado estricto del divisor excepcional

$E_2$  sigue viéndose en la segunda carta (viene dado por la ecuación  $x_3 = 0$ ), al contrario de lo que ocurrió en la explosión anterior.

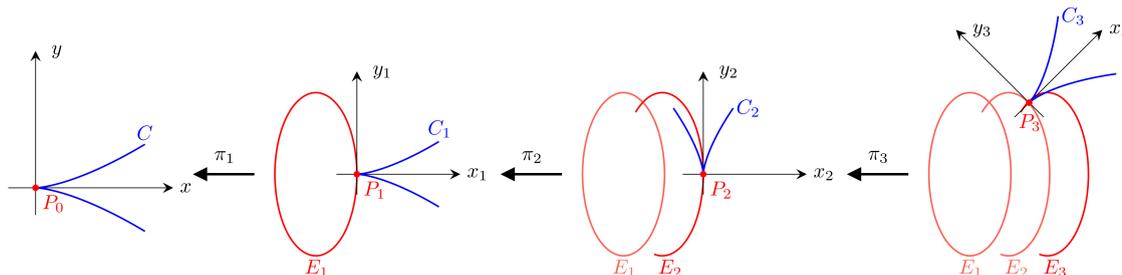


Figura 2.5: Primeras tres explosiones de la reducción de la curva dada por  $y^7 - x^{19} = 0$ .

Para la explosión  $\pi_4$  del origen de la segunda carta  $P_3$ , nos fijamos en el cono tangente de  $C_3$ , que es  $y_3 = 0$ , con lo que volvemos a cambiar de carta, por lo que la explosión viene dada por  $\pi_4(x_4, y_4) = (x_4, x_4 y_4)$ . Así, el divisor excepcional  $E_4$  es  $x_4 = 0$  y el transformado estricto  $C_4$  tiene ecuación  $y_4^2 - x_4^3 = 0$ . De manera similar a lo que ocurría en la anterior explosión, el transformado estricto del divisor excepcional  $E_3$  sigue apareciendo en la carta, con ecuación  $y_4 = 0$ .

Seguimos explotando en la primera carta  $\pi_5(x_5, y_5) = (x_5, x_5 y_5)$ , con lo que  $E_5$  viene dado por  $x_5 = 0$  y el transformado estricto de la curva  $C_5$  por la ecuación  $y_5^2 - x_5 = 0$ . Tras esta explosión, se sigue viendo el transformado estricto de  $E_3$  (con ecuación  $y_5 = 0$ ), aunque el transformado de  $E_4$  ya no se vea en la carta. La curva  $C_5$  es una curva no singular o lisa en  $(S_5, P_5)$ .

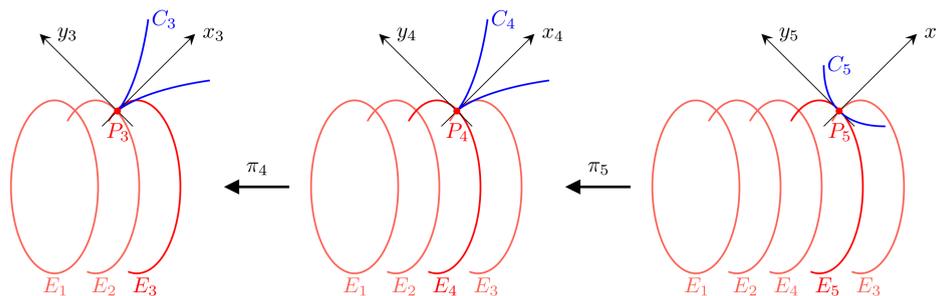


Figura 2.6: Continuación de la reducción de la curva dada por  $y^7 - x^{19} = 0$ .

### 2.2.1. Cruzamientos normales

Aunque ya hemos visto que en número finito de explosiones obtenemos una curva lisa, hay ocasiones que nos interesa seguir explotando, para llegar a una situación en la que la curva no interseque a más de una componente irreducible del divisor excepcional. Comenzamos dando la siguiente definición:

**Definición 2.5** (Cruzamientos normales). *Una colección de curvas en una superficie se dice que tienen cruzamientos normales si cada curva es lisa, no existe ningún punto de la*

superficie en el que se intersequen más de dos curvas de la familia, y la intersección de dos de ellas es transversal.

De hecho, se puede ver que las componentes irreducibles del divisor excepcional tienen siempre cruzamientos normales. Para ello, basta considerar el siguiente lema (lema 3.4.1 de [22]):

**Lema 2.6.** *Sea  $C$  una curva lisa en una superficie  $S$ , y  $P$  un punto de  $C$ . Entonces, tras explotar  $S$  con centro  $P$ , se obtiene en la superficie  $S_1$  un divisor excepcional  $E_1$  y un transformado estricto  $C_1$  tal que  $C_1$  es una curva lisa isomorfa a  $C$  que interseca transversalmente a  $E_1$  en un solo punto.*

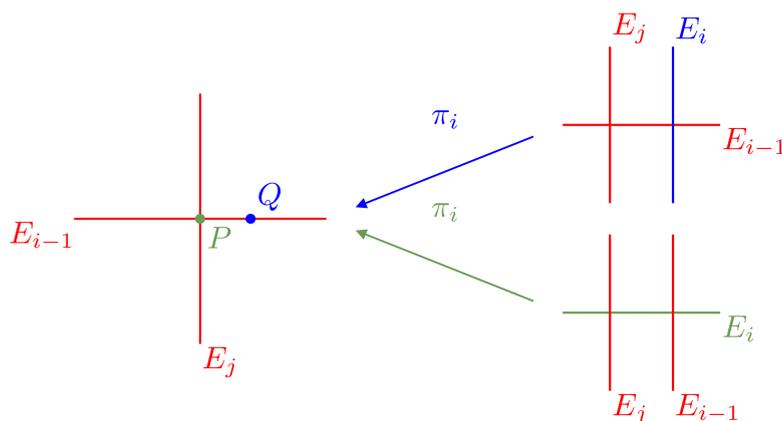


Figura 2.7: Esquema de una explosión con centro la intersección de dos componentes del divisor excepcional (el punto  $P$ ) en la parte inferior, o con centro un punto en una sola componente del divisor (el punto  $Q$ ) en la parte superior.

Con ello, si consideramos un punto  $P_i$  intersección de  $E_i$  con  $E_j$ , con  $i > j$ , se tiene que  $E_i$  y  $E_j$  se cortan transversalmente en  $P_i$ , por lo que tiene direcciones tangentes distintas. Así, tras explotar con centro  $P_i$ , esas direcciones se corresponden con puntos diferentes del divisor excepcional  $E_{i+1}$ , de forma que  $E_{i+1}$  interseca transversalmente a  $E_i$  y a  $E_j$  en puntos diferentes.

Dada una curva  $C$  con un punto singular  $P$  en una superficie holomorfa  $S$ , se llama *buena reducción* a una aplicación  $\pi : T \rightarrow S$  tal que, si  $E = \pi^{-1}(P)$ , entonces  $\pi|_{T \setminus E}$  es un isomorfismo entre  $T \setminus E$  y  $S \setminus P$ , y el transformado total  $\pi^{-1}(C)$  es una colección de curvas con cruzamientos normales. Observemos que las curvas de esa familia son los divisores excepcionales de  $\pi$  y los transformados estrictos de las componentes irreducibles de  $C$ .

Dada una curva  $C$ , por la proposición 2.3 sabemos que en un número finito de explosiones el conjunto de divisores excepcional y los transformados estrictos de las componentes irreducibles de  $C$  forman una familia de curvas lisas. Cuando nos encontremos en un punto singular donde falle alguna de las condiciones para tener cruzamientos normales, se explota hasta que todos los puntos cumplan las condiciones. El orden en el que se explotan los puntos no afecta al resultado final, ya que explotar un punto no afecta lo que ocurre en un entorno del otro. Procediendo de esta manera podemos obtener una buena reducción de la curva  $C$ .

**Ejemplo 2.7** (continuación del ejemplo 2.4). Tras las cinco explosiones que realizamos en el ejemplo, el transformado estricto  $C_5$  de la curva  $C$  es una curva lisa, pero el transformado total (la unión de los divisores excepcionales y el transformado estricto de la curva) no tiene cruzamientos normales, por lo que hay que seguir explotando.

Para la sexta explosión hacemos un cambio a la segunda carta, de forma que

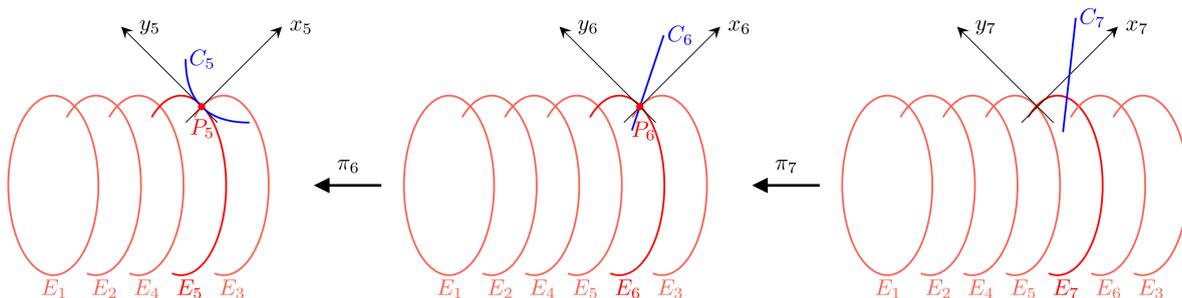


Figura 2.8: Aunque  $C_5$  es una curva lisa, no tiene cruzamientos normales con el divisor excepcional, por lo que hay que realizar dos explosiones más para tener una buena reducción.

$\pi_6(x_6, y_6) = (x_6 y_6, y_6)$ , el divisor excepcional  $E_6$  viene dado por  $y_6 = 0$  y el transformado  $C_6$  por  $y_6 - x_6 = 0$ . Ahora el transformado de  $E_3$  ya no aparece en la carta, mientras que el de  $E_5$  sí, y tiene ecuación  $x_6 = 0$ .

Tras una última explosión con centro el origen de la carta y fijándonos de nuevo en la segunda carta, con lo que  $\pi_7(x_7, y_7) = (x_7 y_7, y_7)$ , el divisor excepcional  $E_7$  tiene ecuación  $y_7 = 0$ , y se corta en el origen  $P_7$  con el transformado del divisor  $E_5$ , que tiene ecuación  $x_7 = 0$ . El transformado estricto de la curva  $C_7$  tiene ecuación  $1 - x_7 = 0$ , con lo que se interseca con  $E_7$  fuera de  $P_7$  (y de la intersección de  $E_7$  con  $E_6$ , que está en el infinito en esta carta), de forma que hemos conseguido cruzamientos normales.

**Proposición 2.8.** Sean  $p, q \in \mathbb{N}$  tales que  $\gcd(p, q) = 1$  y  $p < q$ . La reducción de la singularidad en  $(\mathbb{C}^2, \underline{0})$  del germen de curva  $C = \{y^p - x^q = 0\}$  viene dada por los cocientes obtenidos al aplicar el algoritmo de Euclides a  $\gcd(p, q)$ .

*Demostración:* Como  $p < q$  el cono tangente en  $P_0 = \underline{0}$  es  $\{y = 0\}$ , y en la primera explosión nos fijaremos en la primera carta. Supongamos que tenemos que el algoritmo de Euclides de  $p$  y  $q$  está dado por

$$\begin{aligned} q &= k_1 p + r_1 \text{ con } r_1 < p \\ p &= k_2 r_1 + r_2 \text{ con } r_2 < r_1 \\ &\vdots \\ r_{n-2} &= k_n r_{n-1} + r_n \text{ con } r_n < r_{n-1} \\ r_{n-1} &= k_{n+1} r_n + 1 \text{ con } 1 < r_n \\ r_n &= k_{n+2} \cdot 1 \end{aligned}$$

Veamos que el primer paso del algoritmo de Euclides nos determina el número de explosiones consecutivas que haremos en esta carta. El primer paso del algoritmo determina  $k_1, r_1 \in \mathbb{N}$  tales que  $q = k_1 p + r_1$  y  $r_1 < p$ . Después de  $j \leq k_1$  explosiones en la primera carta, el transformado estricto  $C_j$  viene dado por la ecuación  $y_j^p - x_j^{q-jp} = 0$ , y se tienen dos casos:

- Si  $j < k_1$ , entonces  $q - jp > p$ , con lo que el cono tangente sigue siendo  $\{y_j = 0\}$ , y se sigue explotando en la primera carta.
- Si  $j = k_1$ , entonces  $q - jp = r_1 < p$ , con lo que el cono tangente pasa a ser la recta  $\{x_{k_1} = 0\}$ , y al realizar la siguiente explosión, habrá que cambiar a la segunda carta.

Así, tras realizar exactamente  $k_1$  explosiones en la primera carta hay que cambiar a la segunda. Notemos que tras las  $k_1$  explosiones, la curva  $C_{k_1}$  viene dada por la ecuación  $y_{k_1}^p - x_{k_1}^{r_1} = 0$ . La situación es similar a la inicial, con  $r_1$  y  $p$  en vez de  $p$  y  $q$  y las coordenadas  $(y_{k_1}, x_{k_1})$  en vez de  $(x, y)$ . Razonando de la misma forma, se puede seguir explotando en la misma carta un número igual al cociente de cada paso del algoritmo, hasta que el transformado estricto  $C_i$  sea una curva lisa, donde  $i = \sum_{j=1}^{n+1} k_j$ .

Sin pérdida de generalidad, podemos considerar que la curva  $C_i$  viene dada por la ecuación  $y_i^{r_n} - x_i = 0$  (el caso  $y_i - x_i^{r_n} = 0$  es completamente simétrico), y que la explosión anterior  $\pi_{i-1}$  se hizo tomando coordenadas en la primera carta (ya que si se hubiera hecho en la segunda, la curva  $C_{i-1}$  vendría dada por  $y_{i-1}^{r_n+1} - x_{i-1} = 0$ , que también es una curva lisa). En este caso, el divisor excepcional  $E_i$  se corresponde con la curva  $\{x_i = 0\}$ , y, como el cono tangente viene dado por  $x_i = 0$ , en el origen de la primera carta  $P_i$  las curvas  $E_i$  y  $C_i$  no tienen cruzamientos normales. Así, en la siguiente explosión habrá que tomar coordenadas en la segunda carta. Supongamos que se hacen  $j$  explosiones en la segunda carta, con  $j \leq k_{n+2} = r_n$ , entonces se tienen dos casos:

- Si  $j < k_{n+2}$ , entonces  $C_{i+j}$  viene dado por la ecuación  $y_{i+j}^{r_n-j} - x_{i+j} = 0$ , con lo que la curva sigue pasando por el origen de la segunda carta  $P_{i+j}$ . Sin embargo, el transformado estricto del divisor excepcional  $E_i$  sigue teniendo ecuación  $x_{i+j} = 0$ , y el nuevo divisor excepcional  $E_{i+j}$  viene dado por  $y_{i+j} = 0$ , con lo que en el origen se encuentran las tres curvas, y no se tienen cruzamientos normales.
- Si  $j = k_{n+2}$ , entonces la ecuación del transformado estricto  $C_{i+r_n}$  es  $1 - x_{i+k_{n+2}} = 0$ , con lo que la curva ya no pasa por el origen, y por tanto tenemos cruzamientos normales entre todos los divisores excepcionales y el transformado estricto.

Así, el último paso del algoritmo de Euclides nos determina cuantas explosiones hay que hacer en la misma carta desde que el transformado estricto de la cúspide es una curva lisa hasta que se tienen cruzamientos normales, con lo que la singularidad ya está bien resuelta.  $\square$

Como consecuencia directa del resultado anterior, se tiene el siguiente corolario para una cúspide  $y^p - x^q = 0$  general:

**Corolario 2.9.** *La reducción de la singularidad en  $(\mathbb{C}^2, \underline{0})$  del germen de curva  $C = \{y^p - x^q = 0\}$  es la misma que la de la curva dada por  $y^{\frac{p}{d}} - x^{\frac{q}{d}} = 0$ , donde  $d = \gcd(p, q)$ .*

Este enunciado es consecuencia de la factorización de  $y^p - x^q$  como  $\prod_{i=1}^d (y^{\frac{p}{d}} - \xi_d^i x^{\frac{q}{d}})$ , donde  $\xi_d$  es una raíz  $d$ -ésima primitiva de la unidad. Cada curva  $y^{\frac{p}{d}} - \xi_d^i x^{\frac{q}{d}} = 0$  es irreducible y tiene la misma reducción que  $y^{\frac{p}{d}} - x^{\frac{q}{d}} = 0$ . Dado que en el último paso de la reducción, el transformado estricto de cada curva interseca transversalmente al divisor excepcional de la última explosión en un punto diferente dado por  $\xi_d^i$ , y se tiene la condición de cruzamientos

normales.

En 1968 Zariski [24] probó que dos curvas irreducibles tienen el mismo tipo topológico (ver apéndice B) si y sólo si tienen la misma reducción de singularidades. En particular, esto implica que la reducción de singularidades de una curva irreducible está determinada por los exponentes característicos de la curva (ver apéndice B). Por ejemplo, la proposición 2.8 muestra como podemos calcular la reducción de singularidades de una cúspide a partir de sus exponentes característicos  $\{p, q\}$ .



# Capítulo 3

## Reducción de singularidades de foliaciones

En este capítulo vamos a estudiar el comportamiento de foliaciones definidas en  $(\mathbb{C}^2, \underline{0})$  por explosiones, con el objetivo de dar una prueba de la reducción de singularidades de foliaciones y del teorema de existencia de separatriz. Las referencias principales de esta primera parte del capítulo son el libro de F. Loray [16] (especialmente los capítulos 6 y 7), el libro de F. Cano, D. Cerveau y J. Déserti [6] (especialmente los capítulos 3 y 4).

Sea  $\mathcal{F}$  una foliación en  $(\mathbb{C}^2, \underline{0})$  definida por una 1-forma  $\omega = 0$  donde

$$\omega = a(x, y)dx + b(x, y)dy,$$

con  $a, b \in \mathbb{C}\{x, y\}$  y  $\gcd(a, b) = 1$ . También se puede definir  $\mathcal{F}$  mediante el campo vectorial  $X = -b(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + a(x, y)\frac{\partial}{\partial y}$ . Diremos que el origen es *un punto singular de  $\mathcal{F}$*  si  $a(0, 0) = b(0, 0) = 0$ . La *multiplicidad*  $\nu_{\underline{0}}(\mathcal{F}) = \nu_{\underline{0}}(\omega)$  de la foliación  $\mathcal{F}$  en el origen se define como  $\min\{\nu_{\underline{0}}(a(x, y)), \nu_{\underline{0}}(b(x, y))\}$ . Comenzamos introduciendo la noción de cono tangente de una foliación:

**Definición 3.1** (Cono tangente). *Sea  $\mathcal{F}$  una foliación en  $(\mathbb{C}^2, \underline{0})$  definida por una 1-forma  $\omega = 0$ , donde  $\omega = a(x, y)dx + b(x, y)dy$  con  $a, b \in \mathbb{C}\{x, y\}$  y  $\gcd(a, b) = 1$ . Sea  $\nu$  la multiplicidad de  $\mathcal{F}$ , y sean  $a(x, y) = \sum_{i \geq \nu} a_i(x, y)$  y  $b(x, y) = \sum_{i \geq \nu} b_i(x, y)$ , con  $a_i, b_i \in \mathbb{C}[x, y]$  polinomios homogéneos de grado  $i$ . Entonces el cono tangente de la foliación viene dado por  $P_{\nu+1}(x, y) = 0$ , donde*

$$P_{\nu+1}(x, y) = xa_{\nu}(x, y) + yb_{\nu}(x, y).$$

Observemos que puede suceder que  $P_{\nu+1}(x, y) \equiv 0$ , por ejemplo, si consideramos la foliación definida por la 1-forma  $\omega = ydx - xdy$ . Esto supone una diferencia con el caso de curvas (donde el cono tangente no podía anularse), y tendrá importantes implicaciones a la hora de estudiar el comportamiento de una foliación con una singularidad en el origen al explotarlo.

Supongamos que tenemos una foliación  $\mathcal{F}$  con una singularidad en el origen dada por una 1-forma  $\omega = adx + bdy$ , con  $a, b \in \mathbb{C}\{x, y\}$ . Sea  $\nu$  la multiplicidad de  $\omega$ , y  $P_{\nu+1}(x, y) = xa_{\nu}(x, y) + yb_{\nu}(x, y)$  el polinomio que define el cono tangente. Sea

$\pi : S_1 \rightarrow (\mathbb{C}^2, \underline{0})$  la explosión del origen y consideremos  $(x_1, y_1)$  coordenadas en la primera carta, donde la explosión está dada por  $\pi(x_1, y_1) = (x_1, x_1 y_1)$  (el resultado es análogo en la segunda carta), el pullback de la 1-forma  $\omega$  viene dado por

$$\begin{aligned} \pi^* \omega &= a(x_1, x_1 y_1) dx_1 + b(x_1, x_1 y_1) (y_1 dx_1 + x_1 dy_1) = \\ &= [a(x_1, x_1 y_1) + y_1 b(x_1, x_1 y_1)] dx_1 + x_1 b(x_1, x_1 y_1) dy_1 = \\ &= x_1^\nu \left[ \sum_{i \geq \nu} x_1^{i-\nu} (a_i(1, y_1) + y_1 b_i(1, y_1)) \right] dx_1 + x_1^{\nu+1} \left[ \sum_{i \geq \nu} x_1^{i-\nu} b_i(1, y_1) \right] dy_1 = \\ &= x_1^\nu [(a_\nu(1, y_1) + y_1 b_\nu(1, y_1) + x_1 A(x_1, y_1)) dx_1 + x_1 B(x_1, y_1) dy_1] \\ &= x_1^\nu [(P_{\nu+1}(1, y_1) + x_1 A(x_1, y_1)) dx_1 + x_1 B(x_1, y_1) dy_1], \end{aligned}$$

donde  $A(x_1, y_1) = \sum_{i > \nu} x_1^{i-(\nu+1)} (a_i(1, y_1) + y_1 b_i(1, y_1))$  y  $B(x_1, y_1) = \sum_{i \geq \nu} x_1^{i-\nu} b_i(1, y_1)$ . El transformado estricto  $\omega_1$  de la 1-forma, se obtiene eliminando los factores comunes que multiplican  $dx_1$  y  $dy_1$ . Podemos diferenciar dos casos:

- *Caso dicrítico:* Si  $P_{\nu+1} \equiv 0$ , entonces

$$\pi^* \omega = x_1^{\nu+1} (A(x_1, y_1) dx_1 + B(x_1, y_1) dy_1).$$

El transformado estricto  $\omega_1$  se tiene entonces dividiendo por  $x_1^{\nu+1}$ , de forma que

$$\omega_1 = A(x_1, y_1) dx_1 + (b_\nu(1, y_1) + x_1 C(x_1, y_1)) dy_1,$$

con  $C(x_1, y_1) = \sum_{i > \nu} x_1^{i-(\nu+1)} b_i(1, y_1)$ . Como  $b_\nu(1, y_1) \neq 0$ , resulta que en los puntos del divisor excepcional  $E$  (que en la primera carta viene dado por  $x_1 = 0$ ) con  $b_\nu(1, y_1) \neq 0$ , las hojas de la foliación son transversales a  $E$ . En los puntos con coordenadas  $(0, y_1^*)$  donde  $b_\nu(1, y_1) = 0$ , la foliación es tangente al divisor excepcional en ese punto.

- *Caso no dicrítico:* Si  $P_{\nu+1} \not\equiv 0$ , entonces el transformado estricto es

$$\omega_1 = \frac{\pi^* \omega}{x_1^\nu} = (P_{\nu+1}(1, y_1) + x_1 A(x_1, y_1)) dx_1 + x_1 B(x_1, y_1) dy_1,$$

con lo que las singularidades de  $\omega_1$  se corresponden con los puntos del divisor excepcional  $E$  en los que  $P_{\nu+1}(1, y_1)$  se anula (lo que justifica el nombre de cono tangente).

Diremos que la explosión del origen es *dicrítica* si  $P_{\nu+1} \equiv 0$ , y no dicrítica en otro caso. En el ejemplo de la foliación definida por  $\omega = ydx - xdy$ , tras la explosión con centro el origen se tiene que el transformado estricto de la foliación es transversal al divisor excepcional.

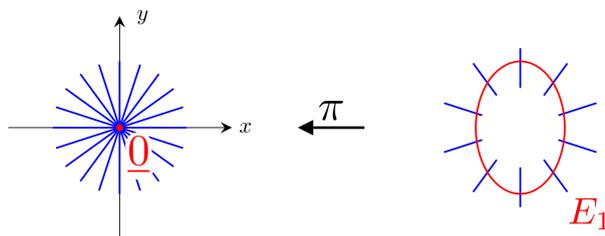


Figura 3.1: Explosión del origen de la foliación definida por  $\omega = ydx - xdy$ .

Por otra parte, otro concepto muy importante es el de curva integral o separatriz de una foliación:

**Definición 3.2** (Separatriz). Sea  $\mathcal{F}$  una foliación de una variedad  $M$  de dimensión dos. Una curva integral irreducible o separatriz de  $\mathcal{F}$  es una curva analítica irreducible  $C \subseteq M$  tal que  $C \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$  es una hoja.

Si  $\mathcal{F}$  está definida en  $(\mathbb{C}^2, \underline{0})$  por una 1-forma  $\omega = 0$  y  $C$  viene dada por  $f = 0$ , donde  $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ , entonces  $C$  es una separatriz de  $\mathcal{F}$  si

$$\omega \wedge df = fgdx \wedge dy$$

con  $g \in \mathbb{C}\{x, y\}$ .

La siguiente proposición (que se corresponde con el lema 3.4 de [6]) muestra otra forma de caracterizar las curvas integrales de una foliación y, además, asegura que el transformado estricto de una separatriz sigue siendo curva integral (del transformado estricto de la foliación  $\mathcal{F}$ ) tras una explosión.

**Proposición 3.3.** Sea  $\mathcal{F}$  un germen de foliación en  $(\mathbb{C}^2, \underline{0})$  definido por una 1-forma  $\omega = 0$  y  $C$  un germen de curva irreducible en  $(\mathbb{C}^2, \underline{0})$  definido por  $f = 0$ , con  $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ . Consideremos  $\pi : S \rightarrow (\mathbb{C}^2, \underline{0})$  la explosión del origen de  $(\mathbb{C}, \underline{0})$ , y denotemos por  $C'$  el transformado estricto de la curva  $C$  y  $\mathcal{F}'$  el transformado estricto de la foliación  $\mathcal{F}$  por  $\pi$ . Las afirmaciones siguientes son equivalentes:

1.  $C$  es una separatriz de  $\mathcal{F}$  (es decir,  $f$  divide a  $\omega \wedge df$ ).
2.  $\gamma^*\omega \equiv 0$ , donde  $\gamma(t)$  es una parametrización de Puiseux de la curva  $C$ .
3.  $C'$  es una separatriz de  $\mathcal{F}'$  en el punto  $S' \cap E$ , con  $E$  el divisor excepcional de  $\pi$ .

**Observación 3.4.** Sea  $\mathcal{F}$  una foliación dada por la 1-forma  $\omega = a(x, y)dx + b(x, y)dy$  con una singularidad en el origen tal que  $P_{\nu+1} \not\equiv 0$ . Como hemos visto, el transformado estricto  $\mathcal{F}_1$  de la foliación viene dado en la primera carta por la 1-forma

$$\omega_1 = [a_\nu(1, y_1) + y_1 b_\nu(1, y_1) + x_1(\dots)] dx_1 + x_1 [b_\nu(1, y_1) + x_1(\dots)] dy_1.$$

Notemos que la curva  $x_1 = 0$  es una curva integral de la foliación generada por  $\omega_1$ . Un análisis análogo en la segunda carta permite ver que la curva  $y_1 = 0$  es una curva integral del transformado estricto de la 1-forma  $\omega$ , con lo que el divisor excepcional de la explosión es una curva integral de la foliación  $\mathcal{F}_1$ . Decimos que el divisor es invariante por la foliación  $\mathcal{F}_1$ .

Así, una explosión es no dicrítica cuando el divisor excepcional es una curva invariante del transformado estricto, mientras que en el caso dicrítico, el divisor excepcional será en general transversal a la foliación.

### 3.1. Singularidades simples

Pasamos ahora a definir el tipo de singularidades finales que buscamos a la hora de obtener una reducción singularidades, ya que, al contrario de lo que ocurre con el caso de curvas, no es posible deshacerse de algunas singularidades tras una sucesión de explosiones.

**Definición 3.5** (singularidad simple). Sea  $\mathcal{F}$  una foliación en  $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$  definida por  $\omega = 0$ , donde  $\omega = a(x, y)dx + b(x, y)dy$ , y supongamos que el origen un punto singular de  $\mathcal{F}$ . Se dice que el origen es una singularidad simple de  $\mathcal{F}$  si la matriz jacobiana

$$J(\omega; x, y) := \begin{pmatrix} -\frac{\partial b}{\partial x}(\mathbf{0}) & -\frac{\partial b}{\partial y}(\mathbf{0}) \\ \frac{\partial a}{\partial x}(\mathbf{0}) & \frac{\partial a}{\partial y}(\mathbf{0}) \end{pmatrix}$$

tiene dos valores propios  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$  tales que  $\lambda_2 \neq 0$  y  $\lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{Q}_{>0}$ . Si  $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$  se dice que la singularidad es de tipo hiperbólico; en otro caso, se dice que la singularidad es de tipo silla-nodo.

Si tenemos una foliación  $\mathcal{F}$  definida por  $\omega = 0$ , donde

$$\omega = (\lambda y + a(x, y))dx - (\mu x + b(x, y))dy,$$

con  $a, b \in \mathbb{C}\{x, y\}$  con orden mayor que 1, diremos que la dirección tangente a  $y = 0$  (respectivamente, la dirección tangente a  $x = 0$ ) es una *dirección fuerte* si  $\mu \neq 0$  (respectivamente,  $\lambda \neq 0$ ).

La siguiente proposición permite asegurar que las singularidades simples son las singularidades finales que buscamos, ya que son estables tras explotarlas:

**Proposición 3.6** (estabilidad de las singularidades simples por explosiones). Sea  $\mathcal{F}$  una foliación con una singularidad simple en el origen con valores propios  $\lambda_1, \lambda_2$ . Si  $\pi : S_1 \rightarrow (\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$  es la explosión del origen, entonces el divisor excepcional  $E_1 \subset S_1$  es una separatriz del transformado estricto  $\mathcal{F}_1$  de la foliación, y además  $\mathcal{F}_1$  tiene dos puntos singulares  $p_1, p_2 \in E_1 \subseteq S_1$ , que también son singularidades simples.

*Demostración:* Elegimos coordenadas de  $(x, y)$  en  $\mathbb{C}^2$  tales que  $\mathcal{F}$  está definida por una 1-forma

$$\omega = \lambda_1 y dx - \lambda_2 x dy + a(x, y)dx + b(x, y)dy$$

con  $\nu_0(\omega) > 1$ .

Veamos cómo es el transformado estricto de la 1-forma. Tras la explosión, en la primera carta tenemos que

$$\begin{aligned} \pi^*\omega &= [\lambda_1 x_1 y_1 + a(x_1, x_1 y_1)] dx_1 + [-\lambda_2 x_1 + b(x_1, x_1 y_1)] (y_1 dx_1 + x_1 dy_1) = \\ &= [\lambda_1 x_1 y_1 - \lambda_2 x_1 y_1 + a(x_1, x_1 y_1) + y_1 b(x_1, x_1 y_1)] dx_1 + x_1 [-\lambda_2 x_1 + b(x_1, x_1 y_1)] dy_1 = \\ &= x_1 [(\lambda_1 - \lambda_2) y_1 + x_1 A(x_1, y_1)] dx_1 - x_1^2 [\lambda_2 - x_1 B(x_1, y_1)] dy_1, \end{aligned}$$

con  $A(x_1, y_1) = \sum_{i \geq 2} x_1^{i-2} (a_i(1, y_1) + y_1 b_i(1, y_1))$  y  $B(x_1, y_1) = \sum_{i \geq 2} x_1^{i-2} b_i(1, y_1)$ . El transformado estricto  $\omega_1$  se obtiene dividiendo  $\pi^*\omega$  por  $x_1$ ,

$$\omega_1 = [(\lambda_1 - \lambda_2) y_1 + x_1 A(x_1, y_1)] dx_1 - x_1 [\lambda_2 - x_1 B(x_1, y_1)] dy_1$$

y su único punto singular en la primera carta es el origen. Calculando la matriz  $J(\pi^*\omega; x, y)$  en el origen de la primera carta

$$\begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ A(0, 0) & (\lambda_1 - \lambda_2) \end{pmatrix}$$

se tiene que sus valores propios son  $\lambda_2$  y  $(\lambda_1 - \lambda_2)$ . Ambos son distintos de 0, y su razón  $\lambda_1/\lambda_2 - 1$  no puede ser un racional positivo. Además, como  $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ , el divisor excepcional  $E_1$ , con ecuación  $x_1 = 0$ , es una curva invariante de  $\mathcal{F}_1$ .

Un análisis similar, con coordenadas  $(x'_1, y'_1)$  en la segunda carta lleva a que  $\mathcal{F}_1$  está definida por una 1-forma

$$\omega'_1 = y'_1 [\lambda_1 + y'_1 A'(x'_1, y'_1)] dx'_1 + [(\lambda_1 - \lambda_2)x'_1 + y'_1 B'(x'_1, y'_1)] dy'_1,$$

con  $A'(x'_1, y'_1) = \sum_{i \geq 2} y_1^{i-2} a_i(x'_1, 1)$  y  $B'(x'_1, y'_1) = \sum_{i \geq 2} y_1^{i-2} (x'_1 a_i(x'_1, 1) + b_i(x'_1, 1))$ . De esto se sigue que el origen de la segunda carta también es un punto singular de  $\mathcal{F}_1$ . La matriz jacobiana es

$$\begin{pmatrix} (\lambda_1 - \lambda_2) & B'(0, 0) \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix},$$

con lo que sus valores propios son  $\lambda_1$  y  $(\lambda_1 - \lambda_2)$ , de forma que al menos uno de ellos es distinto de 0, y su razón  $\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}$  no es un número racional positivo. Por otro lado, el divisor excepcional  $E_1$ , con ecuación  $y'_1 = 0$  es una curva invariante de  $\omega'_1$ . Así, el divisor excepcional  $E_1$  de la explosión es una separatriz del transformado estricto  $\mathcal{F}_1$ , los únicos puntos singulares de  $\mathcal{F}_1$  son el origen de cada una de las dos cartas, y ambos siguen siendo singularidades simples.  $\square$

En contraposición con el comportamiento de las singularidades simples, veamos ahora unos ejemplos de foliaciones con una singularidad no simple en el origen y  $\nu_0(\omega) = 1$ . En el primero, la singularidad “se resuelve” tras una explosión, ya que o bien aparece una componente dicrítica en el divisor excepcional, o la singularidad pasa a ser simple.

**Ejemplo 3.7** (Singularidad de una foliación con  $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$ ). Supongamos que tenemos una foliación dada por una 1-forma  $\omega$  con una singularidad en el origen, de forma que tras calcular  $J(\omega; x, y)$  se tiene un único valor propio doble, distinto de 0. Tenemos dos tipos de matriz posibles:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. En el primer caso, existen coordenadas  $(x, y) \in (\mathbb{C}^2, \underline{0})$  tales que la foliación viene dada por una 1-forma

$$\omega = (y + a(x, y))dx - (x + b(x, y))dy,$$

con  $\nu_0(\omega) > 1$ . En este caso, tenemos que  $P_2(x, y) \equiv 0$ , con lo que la explosión del origen es dicrítica, y tras una explosión no habrá puntos singulares en el divisor excepcional.

2. En el segundo caso, la foliación viene generada por

$$\omega = (x + y + a(x, y))dx - (x + b(x, y))dy,$$

con  $\nu_0(\omega) > 1$ ; y el cono tangente viene dado por  $P_2(x, y) = y^2 = 0$ . Si miramos la explosión del origen en la primera carta, tenemos

$$\begin{aligned} \pi^* \omega &= (x_1 + a(x_1, x_1 y_1) - y_1 b(x_1 y_1)) dx_1 - x_1 (x_1 + b(x_1, x_1 y_1)) dy_1 = \\ &= x_1 (1 + x_1(\dots)) dx_1 - x_1 (x_1 + x_1^2(\dots)) dy_1, \end{aligned}$$

Luego el transformado estricto de la foliación está dado por

$$\omega_1 = (1 + x_1(\dots))dx_1 - (x_1 + x_1^2(\dots))dy_1$$

y en el divisor excepcional  $E_1$ , dado por la ecuación  $x_1 = 0$ , no habrá puntos singulares (en la primera carta). Sin embargo, si miramos en la segunda carta, con lo que la explosión viene dada por  $\pi(x_2, y_2) = (x_2y_2, y_2)$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \pi^*\omega &= y_2(x_2y_2 + y_2 + a(x_2y_2, y_2))dx_2 + (x_2^2y_2 + x_2a(x_2y_2, y_2) - b(x_2y_2, y_2))dy_2 \\ &= y_2^2(1 + x_2 + A(x_2, y_2))dx_2 + y_2(x_2^2 + y_2B(x_2, y_2))dy_2, \end{aligned}$$

donde  $A(x_2, y_2) = \sum_{i \geq 2} y_2^{i-2} a_i(x_2, 1)$  y  $B(x_2, y_2) = \sum_{i \geq 2} y_2^{i-2} (x_2 a_i(x_2, 1) - b_i(x_2, 1))$ . En esta carta, el transformado estricto de la foliación está dado por

$$\omega_2 = y_2(1 + x_2 + A(x_2, y_2))dx_2 + (x_2^2 + y_2B(x_2, y_2))dy_2,$$

con lo que el origen (de la segunda carta), es un punto singular. Si calculamos la matriz jacobiana obtenemos

$$J(\omega_2; x_2, y_2) = \begin{pmatrix} 0 & -b_2(0, 1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

con lo que la singularidad que tenemos es una singularidad simple del tipo silla-nodo.

Como conclusión, si se tiene una foliación con una singularidad en el origen dada por  $\omega$  con  $\nu_0(\omega) = 1$  y un valor propio no nulo doble, entonces tras una explosión, o bien la singularidad desaparece y el divisor excepcional es transversal a las curvas invariantes del transformado  $\omega_1$ , o bien el transformado estricto tiene una sola singularidad simple.

A diferencia del ejemplo anterior, en el siguiente ejemplo el tipo de la singularidad guarda un parecido con las singularidades simples, ya que, tras la explosión, el origen en cada una de las dos cartas es un punto singular del transformado estricto de la foliación. Además, uno de los dos puntos singulares resulta ser siempre una singularidad simple, mientras que el otro puede seguir siendo del mismo tipo que antes de la explosión. Sin embargo, como veremos más adelante, esta situación no puede ocurrir indefinidamente.

**Ejemplo 3.8** (Singularidad de una foliación con  $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{Q}_{>0}$ ). Supongamos que la foliación  $\mathcal{F}$  tiene una singularidad en el origen, y en  $(\mathbb{C}^2, \underline{0})$  viene dada por una 1-forma  $\omega$  con  $\nu_0(\omega) = 1$ . Sean  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  los dos valores propios distintos de  $J(\omega; x, y)$ , tales que  $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{Q}_{>0}$ . Entonces podemos elegir coordenadas  $(x, y)$  tales que

$$\omega = (\lambda_1 y + a(x, y))dx + (-\lambda_2 x + b(x, y))dy,$$

con  $\nu_0(a(x, y)), \nu_0(b(x, y)) > 1$ . El cono tangente está compuesto entonces por las direcciones  $\{x = 0\}$  e  $\{y = 0\}$ . Sea  $\pi : S_1 \rightarrow \mathbb{C}^2$  la explosión del origen, y nos fijamos en la primera carta de la explosión

$$\begin{aligned} \pi^*\omega &= [\lambda_1 x_1 y_1 - \lambda_2 x_1 y_1 + a(x_1, x_1 y_1) + y_1 b(x_1, x_1 y_1)] dx_1 + x_1 [-\lambda_2 x_1 + b(x_1, x_1 y_1)] dy_1 = \\ &= x_1 [(\lambda_1 - \lambda_2) y_1 + x_1 A(x_1, y_1)] dx_1 - x_1^2 [\lambda_2 - x_1 B(x_1, y_1)] dy_1, \end{aligned}$$

con  $A(x_1, y_1) = \sum_{i \geq 2} x_1^{i-2} (a_i(1, y_1) + y_1 b_i(1, y_1))$  y  $B(x_1, y_1) = \sum_{i \geq 2} x_1^{i-2} b_i(1, y_1)$ . El transformado estricto de la foliación  $\mathcal{F}_1$  viene dado en la primera carta por la 1-forma

$$\omega_1 = [(\lambda_1 - \lambda_2)y_1 + x_1 A(x_1, y_1)] dx_1 - x_1 [\lambda_2 - x_1 B(x_1, y_1)] dy_1,$$

y su único punto singular en la carta es el origen. Entonces

$$J(\omega_1; x_1, y_1) = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ A(0, 0) & \lambda_1 - \lambda_2 \end{pmatrix},$$

con lo que los dos valores propios son distintos de 0, y su razón es  $\lambda_1/\lambda_2 - 1$ .

Un desarrollo análogo en la segunda carta conduce a que el único punto singular de  $\mathcal{F}_1$  es el origen de la segunda carta, y los valores propios del jacobiano son  $\lambda_1$  y  $-(\lambda_1 - \lambda_2)$ , con lo que también son distintos de cero, y su razón es  $-\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}$ .

Como vemos, al explotar con centro en la singularidad se obtienen dos singularidades, el origen de cada una de las dos cartas de  $S_1$ . Además, si  $\lambda_1 > \lambda_2$ , el origen de la segunda carta es una singularidad simple, mientras que si  $\lambda_1 < \lambda_2$ , lo será el origen de la primera carta.

## 3.2. Reducción de singularidades de foliaciones

En esta sección presentamos la reducción de singularidades de foliaciones. La existencia de una reducción de singularidades fue probada por Seidenberg en [21]. Nosotros seguiremos la demostración dada por Mattei y Moussu en [17], aunque también nos apoyaremos en el capítulo 4 de [6]. Comencemos definiendo qué entendemos por una reducción de singularidades:

**Definición 3.9** (Reducción de singularidades de una foliación). *Dada una foliación  $\mathcal{F}$  en  $(\mathbb{C}^2, \mathbb{0})$  definida por una 1-forma  $\omega$  con una singularidad en el origen, una sucesión finita de explosiones  $(\mathbb{C}^2, \mathbb{0}) \xleftarrow{\pi_2} (S_1, P_1) \xleftarrow{\pi_1} \dots \xleftarrow{\pi_k} S_k$ , y denotemos como  $\pi : \pi_k \circ \dots \circ \pi_1$ . Diremos que la sucesión de las explosiones es una reducción de singularidades de  $\mathcal{F}$  si el transformado estricto  $\mathcal{F}_k$  por  $\pi$  cumple las siguientes propiedades:*

- *Cada componente irreducible de  $\pi^{-1}(\mathbb{0})$  es una curva invariante de  $\mathcal{F}_k$  o es transversal a  $\mathcal{F}_k$  (el caso de las componentes dicríticas).*
- *Todos los puntos los puntos singulares de  $\mathcal{F}_k$  son singularidades simples y no pertenecen a las componentes dicríticas del divisor excepcional.*

Diremos que una foliación  $\mathcal{F}$  es dicrítica si alguna de las explosiones en su reducción lo es. En otro caso, diremos que la foliación es no dicrítica. Introducimos a continuación el número de Milnor de una foliación, que será de gran utilidad en la primera parte de la demostración.

**Definición 3.10.** *Sea  $\omega = adx + bdy$  una 1-forma que define de una foliación  $\mathcal{F}$  en  $(\mathbb{C}^2, p)$ , con  $a, b \in C\{x, y\}$  sin factores comunes. El número de Milnor de la foliación  $\mathcal{F}$  en  $p$  está dado por*

$$\mu_p(\mathcal{F}) = i_p(a, b).$$

A lo largo del texto, denotaremos el número de Milnor también como  $\mu_p(\omega)$ , abusando de la notación. Observemos que si la foliación  $\mathcal{F}$  está definida por una 1-forma del tipo  $df = 0$ , con  $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ , entonces  $\mu_p(\mathcal{F})$  coincide con el número de Milnor de la curva  $C = (f = 0)$ , que está dado por  $\mu_p(C) = i_p\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ , y es un invariante topológico de la curva  $C$ .

El siguiente lema (que se puede encontrar en [6] o [17]), que se apoya en la fórmula de Noether (ver lema B.5), permite relacionar el número de Milnor de una foliación en el origen con el número de Milnor de su transformado estricto tras explotar el origen.

**Lema 3.11** (Fórmula de Noether para foliaciones). *Sea  $\mathcal{F}$  una foliación definida por una 1-forma  $\omega = adx + ydy$  con una singularidad en el origen  $\underline{0} \in \mathbb{C}^2$ , y sea  $\nu$  la multiplicidad de  $\omega$ . Denotemos  $\pi : S_1 \rightarrow (\mathbb{C}^2, \underline{0})$  la explosión del origen y  $E_1$  el divisor excepcional tras la explosión, entonces se tienen las siguientes expresiones:*

1. *Caso dicrítico:*

$$\mu_{\underline{0}}(\omega) = \nu^2 + \nu - 1 + \sum_{p \in E} \mu_p(\tilde{\omega}).$$

2. *Caso no dicrítico:*

$$\mu_{\underline{0}}(\omega) = \nu^2 - (\nu + 1) + \sum_{p \in E} \mu_p(\tilde{\omega}).$$

Donde  $\tilde{\omega}$  denota el transformado estricto de la 1-forma  $\omega$  por  $\pi$ .

*Demostración:* Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $\{x = 0\}$  no es una curva del cono tangente (luego el origen de la segunda carta no es un punto singular), y que  $\nu_{\underline{0}}(a) = \nu_{\underline{0}}(b) = \nu_{\underline{0}}(\omega) = \nu$ . Sea  $P(x, y) = xa + yb \in C\{x, y\}$  y, como es habitual, denotemos por  $P_{n+1}(x, y) = xa_n + yb_n$  al polinomio homogéneo de grado  $n + 1$ . Tras explotar en la primera carta obtenemos

$$\begin{aligned} \pi^*\omega &= [a(x_1, x_1y_1) + y_1b(x_1, x_1y_1)]dx_1 + x_1b(x_1, x_1y_1)dy_1 = \\ &= \left[\sum_{i \geq \nu} x_1^i (a_i(1, y_1) + y_1b(1, y_1))\right] dx_1 + \left[\sum_{i \geq \nu} x_1^{i+1} b(1, y_1)\right] dy_1 \\ &= x_1^\nu \left[\sum_{i \geq \nu} x_1^{i-\nu} P_{i+1}(1, y_1)\right] dx_1 + x_1^{\nu+1} \left[\sum_{i \geq \nu} x_1^{i-\nu} b(1, y_1)\right] dy_1 \\ &= x_1^\nu [P_{\nu+1}(1, y_1) + x_1(\dots)] dx_1 + x_1^{\nu+1} [b_\nu(1, y_1) + x_1(\dots)] dy_1 \end{aligned}$$

Veamos cada caso por separado:

1. *Caso dicrítico:* tenemos que  $P_{\nu+1}(1, y) \equiv 0$ . Podemos escribir el transformado  $\omega_1$  de  $\omega$  por  $\pi$  como

$$\omega_1 = \tilde{P}(x_1, y_1)dx_1 + \tilde{b}(x_1, y_1)dy_1,$$

donde

$$\tilde{b}(x_1, y_1) = \frac{b(x_1, x_1y_1)}{x_1^\nu}$$

es el transformado estricto de  $b(x, y)$ , y

$$\tilde{P}(x_1, y_1) = \frac{a(x_1, x_1y_1) + y_1b(x_1, x_1y_1)}{x_1^{\nu+1}}.$$

Multiplicando por  $x_1$  tenemos que

$$x_1\tilde{P}(x_1, y_1) = \tilde{a}(x_1, y_1) + y_1\tilde{b}(x_1, y_1),$$

donde  $\tilde{a}(x_1, y_1) = x_1^{-\nu} a(x_1, x_1 y_1)$  es el transformado estricto de  $a(x, y)$ .

Ahora, en un punto  $p \in E_1$  se tiene que

$$i_p(x_1 \tilde{P}, \tilde{b}) = i_p(x_1, \tilde{b}) + i_p(\tilde{P}, \tilde{b}) = i_p(x_1, \tilde{b}) + \mu_p(\omega_1)$$

y, por otro lado,

$$i_p(x_1 \tilde{P}, \tilde{b}) = i_p(\tilde{a}, \tilde{b}),$$

de forma que

$$i_p(\tilde{a}, \tilde{b}) = i_p(x_1, \tilde{b}) + \mu_p(\omega_1).$$

Como  $P_{\nu+1}(x, y) \equiv 0$ , entonces

$$x a_\nu(x, y) = -y b_\nu(x, y) \Rightarrow b_\nu(x, y) = x h(x, y),$$

con  $h(x, y)$  un polinomio de grado  $\nu - 1$ . Por tanto, podemos escribir

$$b_\nu(x, y) = x \prod_{l=1}^k (y - c_l x)^{\alpha_l},$$

con  $\sum_{l=1}^k \alpha_l = \nu - 1$ . Además, tenemos que

$$\tilde{b}(x_1, y_1) = b_\nu(1, y_1) + x_1(\dots),$$

de forma que

$$i_p(x_1, \tilde{b}) = i_p(x_1, b_\nu) = \sum_{l=1}^k \alpha_l i_p(x_1, y_1 - c_l),$$

que es 0 salvo en los  $k$  puntos del divisor excepcional  $(0, c_l)$ , donde se tiene que  $i_{p_l}(x_1, \tilde{b}) = \alpha_l$ . Finalmente, aplicando el lema B.5,

$$i_{\underline{0}}(a, b) = \nu_{\underline{0}}(a) \nu_{\underline{0}}(b) + \sum_{p \in E_1} i_p(\tilde{a}, \tilde{b}) = \nu^2 + \sum_{p \in E_1} [i_p(x_1, \tilde{b}) + \mu_p(\omega_1)],$$

y se tiene entonces que

$$\mu_{\underline{0}}(\omega) = i_{\underline{0}}(a, b) = \nu^2 + (\nu - 1) + \sum_{p \in E_1} \mu_p(\omega_1).$$

2. *Caso no dicrítico:* como  $P_{\nu+1} \not\equiv 0$ , podemos factorizar  $P_{\nu+1}$  como

$$P_{\nu+1}(x, y) = \prod_{j=1}^k (y - c_j x)^{\alpha_j},$$

donde  $\sum_{j=1}^k \alpha_j = \nu + 1$ . Tras la explosión  $\pi_1$ , cada uno de los factores de  $P_{\nu+1}$  se corresponde con un punto  $p_j \in E_1$  de coordenadas  $(0, c_j)$  y  $p_1, \dots, p_k$  son los únicos

puntos singulares del transformado de la foliación en  $E_1$ . Ahora, si denotamos como  $\tilde{P}$  el transformado estricto de  $P$ , tenemos que

$$\begin{aligned} i_{p_l}(\tilde{P}, x_1) &= i_{p_l}(P_{\nu+1}(1, y_1) + x_1(\dots), x_1) = i_{p_l}(P_{\nu+1}(1, y_1), x_1) = \\ &= \sum_{j=1}^k \alpha_j i_{p_l}(y - c_j, x_1) = \alpha_l. \end{aligned}$$

Por otro lado, si  $\tilde{a} = \sum_{i \geq \nu} x_1^{i-\nu} a_i(1, y_1)$  y  $\tilde{b} = \sum_{i \geq \nu} x_1^{i-\nu} b_i(1, y_1)$ , entonces

$$\mu_{p_l}(\omega_1) = i_{p_l}(\tilde{a} + y_1 \tilde{b}, x_1 \tilde{b}) = i_{p_l}(\tilde{a} + y_1 \tilde{b}, x_1) + i_{p_l}(\tilde{a} + y_1 \tilde{b}, \tilde{b}) = \alpha_l + i_{p_l}(\tilde{a}, \tilde{b}).$$

Ahora, utilizando el lema B.5, tenemos que

$$\mu_{\underline{0}}(\omega) = i_{\underline{0}}(a, b) = \nu^2 + \sum_{p \in E_1} i_p(\tilde{a}, \tilde{b}) = \nu^2 + \sum_{l=1}^k \mu_{p_l}(\omega_1) - \sum_{l=1}^k \alpha_l$$

y, como  $\sum_{l=1}^k \alpha_l = \nu + 1$ , se tiene la igualdad que queríamos probar. □

El siguiente lema, tomado de la pag. 515 de [17], será necesario para la segunda parte de la demostración, y relaciona la multiplicidad de los factores del polinomio que define el cono tangente con la existencia de un valor propio no nulo de la matriz jacobiana.

**Lema 3.12.** *Sea  $\omega = a(x, y)dx + b(x, y)dy$  un germen de una 1-forma holomorfa no dicrítica en el origen. Sea  $\nu = \nu_{\underline{0}}\omega$  y  $P_{\nu+1}(x, y) = xa_{\nu}(x, y) + yb_{\nu}(x, y)$  el polinomio homogéneo que define el cono tangente. Si tras la explosión  $\pi : S_1 \rightarrow \mathbb{C}^2$  del origen existe un punto  $p$  en el divisor excepcional  $E_1$  tal que el factor de  $P_{\nu+1}$  asociado a  $p$  tiene multiplicidad  $\alpha_p = 1$ , entonces el transformado estricto  $\omega_1$  de la 1-forma tiene un valor propio no nulo en  $p$ .*

*Demostración:* Podemos elegir coordenadas  $(x, y)$  de manera que  $x = 0$  no sea tangente a la foliación, de forma que basta considerar la primera carta en la explosión. Además, como  $P_{\nu+1}(x, y)$  es un polinomio homogéneo, se puede factorizar como

$$P_{\nu+1}(x, y) = \prod_{i=1}^k (y - c_i x)^{\alpha_i}.$$

Esto nos da  $k$  puntos  $p_i$  en el divisor excepcional  $E$ , con coordenadas en la primera carta  $(0, c_i)$ .

Ahora, tras la explosión, si nos fijamos en la primera carta

$$\pi_1^* \omega = \left[ \sum_{i \geq \nu} x_1^i (a_i(1, y_1) + y_1 b_i(1, y_1)) \right] dx_1 + \left[ \sum_{i \geq \nu} x_1^{i+1} b_i(1, y_1) \right] dy_1,$$

con lo que el transformado estricto es

$$\omega_1 = \left[ P_{\nu+1}(1, y_1) + x_1 \sum_{i > \nu} x_1^{i-\nu-1} (a_i(1, y_1) + y_1 b_i(1, y_1)) \right] dx_1 + x_1 \left[ b_{\nu}(1, y_1) + x_1 \sum_{i > \nu} x_1^{i-\nu-1} b_i(1, y_1) \right] dy_1.$$

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $p_1$  es el punto para el que  $\alpha_1 = 1$ , entonces la matriz jacobiana de  $\omega_1$  en el punto  $(0, c_1)$  es

$$\begin{pmatrix} -b_\nu(1, c_1) & 0 \\ d & c \end{pmatrix},$$

donde  $c = \prod_{i=2}^k (c_1 - c_i)^{\alpha_i} \neq 0$  y  $d = a_{\nu+1}(1, c_1) + c_1 b_{\nu+1}(1, c_1)$ . Con esto, en el punto  $p_1$  la 1-forma  $\omega_1$  tiene un valor propio no nulo.  $\square$

Por último, antes de pasar a la demostración de la reducción de singularidades, veamos como se comporta un tipo particular de foliación tras una explosión en el origen. El interés en este tipo particular radica en que aparecerá en la segunda parte de la demostración del teorema.

**Ejemplo 3.13.** Consideremos una foliación  $\mathcal{F}$  con una singularidad en el origen generada por una 1-forma

$$\omega = (ny^2 + xa(x, y))dx + x(y + xb(x, y))dy,$$

donde  $n \in \mathbb{Z}_{>0}$  y  $a, b \in C\{x, y\}$ . Si hacemos la una explosión  $\pi : S_1 \rightarrow \mathbb{C}^2$  con centro el origen, tenemos dos casos dependiendo del valor de  $a(0, 0)$ :

1. Si  $a(0, 0) = a_0 \neq 0$ , entonces el cono tangente de la foliación  $\mathcal{F}$  viene dado por  $P_2(x, y) = a_0x^2 = 0$ , por lo que nos fijamos en la segunda carta, donde la explosión está dada por  $\pi(x_1, y_1) = (x_1y_1, y_1)$ , de forma que

$$\pi^*\omega = y_1^2[ny_1 + x_1a(x_1y_1, y_1)]dx_1 + x_1y_1[(n+1)y_1 + x_1a(x_1y_1, y_1) + x_1y_1b(x_1y_1, y_1)]dy_1.$$

Entonces, el transformado estricto  $\mathcal{F}_1$  de la foliación viene dado por

$$\omega_1 = y_1[ny_1 + x_1a_0 + A(x_1, y_1)]dx_1 + x_1[(n+1)y_1 + x_1a_0 + B(x_1, y_1)]dy_1,$$

con  $\nu_0(A), \nu_0(B) > 1$ . El cono tangente de  $\mathcal{F}_1$  se obtiene del polinomio

$$x_1y_1(ny_1 + a_0x_1) + y_1x_1((n+1)y_1 + a_0x_1) = x_1y_1[(2n+1)y_1 + a_0x_1].$$

Tras una nueva explosión, cada una de las tres rectas del cono tangente nos da un punto singular en el transformado estricto de  $\omega_1$ . Fijándonos en cada punto singular, al tener multiplicidad uno, aplicando el lema 3.12, el transformado estricto de la foliación  $\mathcal{F}_1$  está generado por una 1-forma con multiplicidad 1 y con un valor propio no nulo. Los puntos podrían ser singularidades simples, pero en principio no tiene por qué.

2. Si  $a_0 = 0$ , entonces el cono tangente de  $\omega$  viene dado por  $P_3(x, y) = 0$ , donde

$$P_3(x, y) = x(ny^2 + xa_1(x, y)) + yx(y + xb_0) = x[(n+1)y^2 + xyb_0 + xa_1(x, y)],$$

con  $b_0 = b(0, 0)$ . Así,  $P_3(x, y)$  tendrá tres factores  $x$ ,  $(y - \alpha x)$  e  $(y - \beta x)$ , con  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Si  $\alpha \neq \beta$ , podemos aplicar el lema 3.12, por lo que nos centraremos en el caso en el que  $\alpha$  y  $\beta$  son iguales.

- a) Si  $\alpha = \beta = 0$ , entonces el cono tangente viene dado por  $xy^2 = 0$ , e implica que  $a_1(x, y) = -b_0y$ . Tras una explosión en la primera carta  $\pi(x_1, y_1) = (x_1, x_1y_1)$

$$\begin{aligned}\pi^*\omega &= [(n+1)x_1^2y_1^2 + x_1a(x_1, x_1y_1) + x_1^2y_1b(x_1, x_1y_1)]dx_1 + x_1^3[y_1 + b(x_1, x_1y_1)]dy_1 \\ &= [(n+1)x_1^2y_1^2 + x_1^3C(x_1, y_1)]dx_1 + x_1^3[y_1 + b(x_1, x_1y_1)]dy_1,\end{aligned}$$

con  $C(x_1, y_1) = \sum_{i \geq 2} x_1^{i-2}[a_i(1, y_1) + x_1y_1b_{i-1}(1, y_1)]$ . El transformado estricto de la foliación viene dado por

$$\omega_1 = [(n+1)y_1^2 + x_1C(x_1, y_1)]dx_1 + x_1[y_1 + b(x_1, x_1y_1)]dy_1.$$

En el origen de la primera carta hay una singularidad, y se puede observar que volvemos a tener una foliación del mismo tipo que la inicial. Por otro lado, si tomamos coordenadas  $(x_2, y_2)$  en la segunda carta, se tiene que

$$\pi^*\omega = y_2^3[n + x_2D(x_2, y_2)]dx_2 + x_2y_2^2[(n+1) + x_2D(x_2, y_2) + x_2b(x_2y_2, y_2)]dy_2,$$

donde  $D(x_2, y_2) = \sum_{i \geq 1} y_2^{i-1}a(x_2, 1)$ . Así, el transformado estricto viene dado por la 1-forma

$$\omega_2 = y_2[n + x_2D(x_2, y_2)]dx_2 + x_2[(n+1) + x_2(D(x_2, y_2) + b(x_2y_2, y_2))]dy_2,$$

y la única singularidad en la segunda carta es el origen, con valores propios  $(n+1)$  y  $-n$ , de lo que se sigue que la singularidad es simple.

- b) Si  $\alpha = \beta \neq 0$ , entonces el transformado estricto de  $\omega$  en la primera carta es

$$\begin{aligned}\omega_1 &= [(n+1)y_1^2 + a_1(1, y_1) + y_1b_0 + x_1C(x_1, y_1)]dx_1 + x_1(y_1 + b(x_1, x_1y_1))dy_1 \\ &= [(y_1 - \alpha)^2 + x_1C(x_1, y_1)]dx_1 + x_1(y_1 + b(x_1, x_1y_1))dy_1.\end{aligned}$$

Vemos que el único punto singular en el divisor excepcional es el  $(0, \alpha)$ , y la matriz jacobiana de  $\omega_1$  en dicho punto está dada por

$$\begin{pmatrix} -(\alpha + b_0) & 0 \\ C(0, \alpha) & -2\alpha \end{pmatrix}$$

que tiene un valor propio no nulo, si bien éste no tiene por qué ser simple.

Por otra parte, en la segunda carta tras la explosión, se tiene que el transformado estricto de la foliación viene dado por

$$\omega_2 = y_2[n + x_2D(x_2, y_2)]dx_2 + x_2[(n+1) + x_2(D(x_2, y_2) + b(x_2y_2, y_2))]dy_2,$$

con lo que, al igual que ocurría en el caso anterior, el origen es una singularidad simple.

Como conclusión, dada la foliación inicial, si  $a_0 = 0$  y el cono tangente está definido por el polinomio  $xy^2$  (el caso a)), tras explotar se obtiene una foliación del mismo tipo, mientras que, en otro caso, tras un número finito de explosiones se tiene que el transformado estricto de la foliación está generado por una 1-forma de orden 1 y en sus puntos singulares el jacobiano tiene al menos un valor propio no nulo.

### 3.2.1. El teorema de reducción de singularidades

Vamos a dividir la prueba de la reducción de singularidades en dos teoremas: en el primero, veremos que, dada una 1-forma  $\omega$ , existe una sucesión finita de explosiones  $(\mathbb{C}^2, \underline{0}) \xleftarrow{\pi_1} (S_1, P_1) \xleftarrow{\pi_2} \dots \xleftarrow{\pi_k} S_k$  tales que, si  $\pi = \pi_k \circ \dots \circ \pi_1$ , la multiplicidad del transformado estricto  $\omega_k$  por  $\pi$  es uno en todos los puntos de  $\pi^{-1}(\underline{0})$ . En el segundo teorema veremos que, dada una 1-forma con una singularidad y multiplicidad uno, existe una sucesión finita de explosiones de forma que todos los puntos singulares del transformado estricto de la 1-forma tras las explosiones son singularidades simples.

**Teorema 3.14.** *Sea  $\omega = adx + bdy$  una 1-forma holomorfa con una singularidad aislada en el origen  $\underline{0} \in \mathbb{C}^2$ . Entonces existe una sucesión finita de explosiones*

$$(\mathbb{C}^2, \underline{0}) \xleftarrow{\pi_1} (S_1, P_1) \xleftarrow{\pi_2} \dots \xleftarrow{\pi_k} S_k$$

tales que su composición  $\pi : S_k \rightarrow \mathbb{C}^2$  cumple que  $\nu_p(\pi^*(\omega)) \leq 1$  para todo  $p \in E = \pi^{-1}(\underline{0})$ .

*Demostración:* Observemos que, aplicando el lema 3.11, si la multiplicidad de la foliación  $\nu_p(\omega) > 1$  en un punto singular  $p$ , el número de Milnor necesariamente se reduce tras explotar  $p$ . Como esto no puede ocurrir indefinidamente, en un número finito de explosiones tiene que reducirse la multiplicidad. Aplicando el mismo razonamiento, la multiplicidad no puede descender indefinidamente, por lo que en un número finito de explosiones la multiplicidad del transformado estricto en todos sus puntos singulares debe ser uno.  $\square$

**Teorema 3.15** (Reducción de singularidades de foliaciones). *Sea  $\omega = adx + bdy$  una 1-forma holomorfa con una singularidad aislada en el origen  $\underline{0} \in \mathbb{C}^2$ . Entonces existe una sucesión de explosiones*

$$(\mathbb{C}^2, \underline{0}) \xleftarrow{\pi_1} (S_1, P_1) \xleftarrow{\pi_2} \dots \xleftarrow{\pi_k} S_k$$

tales que su composición  $\pi : S_k \rightarrow (\mathbb{C}^2, \underline{0})$  cumple las siguientes propiedades:

1.  $\nu_p(\pi^*(\omega)) \leq 1$  para todo  $p \in E$ .
2. Si  $\nu_p(\pi^*(\omega)) = 1$  en un punto  $p \in E$ , la foliación tiene una singularidad simple en  $p$ .

*Demostración:* Tras una sucesión de explosiones dadas por el teorema 3.14 anterior, tenemos una 1-forma  $\tilde{\omega}$  definida en un entorno de  $E = \pi^{-1}(\underline{0})$  en  $S_k$  tal que en todos sus puntos singulares  $p \in E$  el orden  $\nu_p(\tilde{\omega}) = 1$ . Si nos fijamos en una de esas singularidades, pueden ocurrir:

1. Que la singularidad sea simple. En ese caso hemos acabado.
2. Que la singularidad tenga dos valores propios  $\lambda_1, \lambda_2$  distintos tales que  $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{Q}_{>0}$ , esto es, el caso del ejemplo 3.8. Comprobemos que tras un número finito de explosiones, todas las singularidades que se tienen son simples.

Supongamos que  $\lambda_1 > \lambda_2$ , entonces se tienen los siguientes pasos del algoritmo de Euclides:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= q_1 \lambda_2 + r_1 & r_1 &< \lambda_2 \\ \lambda_2 &= q_2 r_1 + r_2 & r_2 &< r_1 \\ &\vdots & & \\ r_{k-2} &= q_k r_{k-1} + r_k & r_k &< r_{k-1} \\ r_{k-1} &= q_{k+1} r_k & & \end{aligned}$$

Tras una explosión, el origen de la segunda carta es una singularidad simple, mientras que los valores propios en el origen de la primera son  $(\lambda_1 - \lambda_2)$  y  $\lambda_2$ .

Razonando por inducción, supongamos que se han realizado  $j \leq q_1$  explosiones  $\pi_i : S_i \rightarrow S_{i-1}$ , entonces en  $S_{j-1}$  el origen de la segunda carta es una singularidad simple, y el origen de la primera tiene valores propios  $(\lambda_1 - (j-1)\lambda_2)$  y  $\lambda_2$ . En  $S_j$  los valores propios en el origen de la segunda carta serán  $-(\lambda_1 - (j-1)\lambda_2)$  y  $(\lambda_1 - j\lambda_2)$ , de forma que su razón es

$$-\frac{\lambda_1 - (j-1)\lambda_2}{\lambda_1 - j\lambda_2} = -\left(1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - j\lambda_2}\right),$$

que es negativo, con lo que el origen en la segunda carta es una singularidad simple. Por otro lado, en el origen de la primera carta se tienen los valores propios  $(\lambda_1 - j\lambda_2)$  y  $\lambda_2$ , con lo que su razón es

$$\frac{\lambda_1 - j\lambda_2}{\lambda_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - j = q_1 - j + \frac{r_1}{\lambda_2},$$

de forma que  $\frac{\lambda_1 - j\lambda_2}{\lambda_2} \in \mathbb{Q}_{>0}$ .

Tras la explosión  $\pi_{q_1}$ , el origen de la primera carta tiene valores propios  $(\lambda_1 - q_1\lambda_2) = r_1$  y  $\lambda_2$ , con lo que en la siguiente explosión  $\pi_{q_1+1}$ , los valores propios son  $r_1 - \lambda_2$  y  $\lambda_2$  en el origen de la primera carta, de forma que su razón es  $\frac{r_1}{\lambda_2} - 1 < 0$ , con lo que el origen de la primera carta es una singularidad simple. Por otro lado, en el origen de la segunda carta se tienen valores propios  $r_1$  y  $-r_1 + \lambda_2$ , luego la razón es racional positiva. Vemos que ahora se han invertido los papeles, y habrá que seguir explotando el origen de la segunda carta, hasta hacer  $q_2$  explosiones.

Finalmente, tras  $q = \sum_{i=1}^{k+1} q_i$  explosiones, se llega que el origen de cada carta es un punto simple, en un caso con un valor propio nulo, y el otro con razón negativa.

3. Que la singularidad tenga dos valores propios no nulos iguales. En este caso, como hemos visto en el ejemplo 3.7, o bien nos encontramos en el caso dicrítico, y tras una explosión en el divisor excepcional no habrá puntos singulares, o tras una explosión sólo uno de los dos valores propios es cero, por lo que la única singularidad en el divisor excepcional será simple.
4. Que la singularidad tenga un valor propio doble igual a cero. Tras un cambio de coordenadas conveniente, la foliación está generada por una 1-forma que se puede escribir como

$$\tilde{\omega} = a(x, y)dx + (y + b(x, y))dy,$$

con  $\nu_0(a(x, y), \nu_0(b(x, y))) > 1$ . Entonces el cono tangente está generado por  $P_2(x, y) = y^2 = 0$ , con lo que basta mirar en la primera carta:

$$\pi^*\tilde{\omega} = [a(x_1, x_1y_1) + x_1y_1^2 + y_1b(x_1, x_1y_1)]dx_1 + x_1(x_1y_1 + b(x_1, x_1y_1))dy_1,$$

con lo que el transformado estricto está dado por

$$\omega_1 = (y_1^2 + x_1A(x_1, y_1))dx_1 + x_1(y_1 + B(x_1, y_1))dy_1,$$

donde  $A(x_1, y_1) = \sum_{i>1} x_1^{i-2}(a_i(1, y_1) + y_1 b_i(1, y_1))$  y  $B(x_1, y_1) = \sum_{i>1} x_1^{i-2} b_i(1, y_1)$ .

Como vemos, la multiplicidad de  $\omega_1$  puede ser mayor que 1. Sin embargo, esto no resulta ser un gran inconveniente, ya que  $\omega_1$  es del mismo tipo que la foliación estudiada en el ejemplo 3.13. Así, tras a lo sumo dos explosiones, la 1-forma se reduce a una de orden 1, y en cuyas singularidades tiene, al menos, un valor propio no nulo (con lo que nos encontraríamos en alguno de los casos anteriores); con la única excepción de que el cono tangente esté generado por  $xy^2$  y  $A(0, 0) = 0$ , en cuyo caso se vuelve a tener una 1-forma  $\omega_2$  del mismo tipo tras una explosión.

Ya que no puede ocurrir que esta situación se dé indefinidamente (por el teorema anterior), el orden de la 1-forma debe bajar tras un número finito  $k$  de explosiones, en cuyo caso la 1-forma  $\omega_k$  sigue siendo de la misma forma, pero con orden 1, como ocurre en el caso 1 del ejemplo 3.13, y tras dos explosiones se obtiene una 1-forma con multiplicidad 1 tal que en sus puntos singulares tiene un valor propio no nulo.  $\square$

El teorema anterior permite asegurar que, para una foliación  $\mathcal{F}$  en  $(\mathbb{C}^2, \underline{0})$ , existe una sucesión finita de explosiones  $(\mathbb{C}^2, \underline{0}) \xleftarrow{\pi_1} (S_1, P_1) \xleftarrow{\pi_2} \dots \xleftarrow{\pi_k} (S_k, P_k)$  tal que todas las singularidades del transformado estricto  $\mathcal{F}'$  de la foliación por  $\pi = \pi_k \circ \dots \circ \pi_1$  son simples. Aún puede ocurrir que en las componentes dicríticas del divisor excepcional  $E = \pi^{-1}(\underline{0})$  haya puntos en los que el divisor excepcional sea tangente a la foliación (esto es similar a lo que ocurría en el caso de curvas, donde el transformado estricto de la curva podía ser una curva lisa, pero ser tangente al divisor excepcional, de forma que no se tenían cruzamientos normales). Como el número de puntos en los que puede ocurrir esto es finito en cada componente dicrítica, podemos asegurar que tras un número finito de explosiones  $(S_k, P_k) \xleftarrow{\pi_{k+1}} (S_{k+1}, P_{k+1}) \xleftarrow{\pi_{k+2}} \dots \xleftarrow{\pi_{k+s}} (S_{k+s}, P_{k+s})$  el transformado estricto  $\tilde{\mathcal{F}}$  de  $\mathcal{F}$  por  $\tilde{\pi} = \pi_{k+s} \circ \dots \circ \pi_{k+1} \circ \pi$  cumple que todas sus singularidades en el divisor excepcional  $\tilde{E} = \tilde{\pi}^{-1}(\underline{0})$  son singularidades simples y en las componentes dicríticas de  $\tilde{E}$  no hay ningún punto en el que  $\tilde{E}$  sea tangente a  $\tilde{\mathcal{F}}$ .

### 3.3. Teorema de Camacho-Sad

En esta sección vamos a ver el teorema de Camacho-Sad, o de existencia de separatriz, que asegura que por cualquier punto singular de una foliación pasa al menos una curva integral. Seguiremos principalmente el libro de Cano, Cerveau y Déserti [6], aunque parte de la demostración del teorema está tomada de [9]. Antes de comenzar, enunciamos el siguiente teorema, conocido como teorema de Briot-Bouquet (ver corolario 3.7 de [6]):

**Teorema 3.16** (de Briot-Bouquet). *Sea  $\mathcal{F}$  un germen de foliación en  $(\mathbb{C}^2, \underline{0})$  con una singularidad simple en el origen, entonces la foliación  $\mathcal{F}$  tiene exactamente dos curvas integrales formales  $C_1$  y  $C_2$  que son no singulares, se cortan transversalmente en el origen y cuyos espacios tangentes son exactamente las direcciones propias de la matriz jacobiana de  $\mathcal{F}$ . Además, si  $C_i$  se corresponde con una dirección fuerte (el valor propio es no nulo), entonces  $C_i$  es convergente.*

Como consecuencia inmediata del teorema anterior, tenemos el siguiente corolario (corolario 3.8 de [6]):

**Corolario 3.17.** *Si  $\mathcal{F}$  es un germen de foliación en  $(\mathbb{C}^2, \underline{0})$  con una singularidad simple de tipo hiperbólico en el origen, entonces la foliación  $\mathcal{F}$  tiene exactamente dos separatrices convergentes, que son no singulares y se cortan transversalmente en el origen.*

Finalmente, el siguiente resultado nos asegura que cualquier foliación con una singularidad tiene al menos una separatriz que pase por ella.

**Teorema 3.18** (de Camacho-Sad [3]). *Sea  $\mathcal{F}$  un germen de foliación en  $(\mathbb{C}^2, \underline{0})$  con una singularidad en el origen, entonces la foliación  $\mathcal{F}$  tiene una separatriz.*

Aunque la demostración original de este teorema es de Camacho y Sad [3], nosotros vamos a dar una posterior, de J. Cano [9]. Recientemente, L. Ortiz, E. Rosales y S. M. Voronin han dado otra prueba de este teorema utilizando teoría de grafos [18], y han demostrado el siguiente resultado (corolario 1.1 de [18]):

**Proposición 3.19.** *El número de separatrices de una foliación holomorfa  $\mathcal{F}$  en  $(\mathbb{C}^2, \underline{0})$  es mayor que el número de singularidades simples del transformado estricto  $\mathcal{F}'$  obtenido de la reducción de singularidades de  $\mathcal{F}$  que están en la intersección del divisor excepcional y cumplen que la razón entre sus valores propios es positiva.*

Antes dar la demostración, es necesario introducir un nuevo índice, que se conoce como índice de Camacho-Sad, para lo que seguiremos la sección 4.5.1 de [6]. La prueba del teorema se dará al final de la sección 3.3.2.

### 3.3.1. El índice de Camacho-Sad

El índice de Camacho-Sad es un invariante analítico de una foliación, y fue introducido por C. Camacho y P. Sad en [3] para poder demostrar el teorema de existencia de separatriz. Las propiedades de este índice juegan un papel crucial en la prueba original del teorema de existencia de separatriz dado por ambos autores en [3], y también en la que posteriormente dio J. Cano en [9].

**Definición 3.20** (Índice de Camacho-Sad). *Sea  $\mathcal{F}$  un germen de foliación en  $(\mathbb{C}^2, \underline{0})$  y  $C$  una curva integral de  $\mathcal{F}$  dada por  $y = 0$ . Entonces  $\mathcal{F}$  está definido por una 1-forma  $\omega = 0$ , donde*

$$\omega = ya(x, y)dx + b(x, y)dy,$$

con  $a, b \in \mathbb{C}\{x, y\}$ . Definimos el índice de Camacho-Sad  $I_{\underline{0}}(\mathcal{F}, C)$  en el origen de  $\mathcal{F}$  relativo a  $C$  como

$$I_{\underline{0}}(\mathcal{F}, C) := -\text{Res}_{x=0} \left( \frac{a(x, 0)}{b(x, 0)} \right).$$

Si  $\frac{a(x, 0)}{b(x, 0)}$  viene dado por una serie de Laurent  $\sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j x^j$ , entonces  $I_{\underline{0}}(\mathcal{F}, C) = c_{-1}$ .

Se puede ver que el índice no depende ni de las coordenadas ni de la 1-forma  $\omega$  elegida. De la definición se tiene que  $I_{\underline{0}}(\mathcal{F}, C) = 0$  si el origen no es un punto singular. Además, cumple las dos siguientes propiedades tras una explosión (ver [3] y proposición 4.23 de [6]):

**Lema 3.21.** [3]. *Sea  $\mathcal{F}$  un germen de foliación en  $(\mathbb{C}^2, \underline{0})$  y  $\pi : S \rightarrow (\mathbb{C}^2, \underline{0})$  la explosión del origen de  $\mathbb{C}^2$ , y denotemos por  $E$  el divisor excepcional de la explosión y  $\mathcal{F}'$  el transformado estricto de la foliación. Supongamos que  $\pi$  es no dicrítica, entonces*

$$-1 = \sum_{p \in E} I_p(\mathcal{F}', E).$$

**Lema 3.22.** [3]. Sea  $\mathcal{F}$  un germen de foliación en  $(\mathbb{C}^2, \underline{0})$  y  $\pi : S \rightarrow (\mathbb{C}^2, \underline{0})$  la explosión del origen de  $\mathbb{C}^2$ . Sean  $E$  el divisor excepcional de la explosión y  $\mathcal{F}'$  el transformado estricto de la foliación. Supongamos que  $\pi$  es no dicrítica y  $C$  es una separatriz de  $\mathcal{F}$  cuyo transformado estricto  $C'$  interseca a  $E$  en un punto  $p$ , entonces

$$I_p(\mathcal{F}', C') = I_{\underline{0}}(\mathcal{F}, C) - 1.$$

Por último, sea  $\mathcal{F}$  una foliación con una singularidad simple en  $(\mathbb{C}^2, \underline{0})$ , y sean  $\lambda$  y  $\mu$  los dos valores propios de la matriz jacobiana de la foliación en el origen. Por el teorema de Briot-Bouquet (teorema 3.16), podemos elegir una carta con coordenadas  $(x, y)$ , de forma que  $\mathcal{F}$  está definida por una 1-forma

$$\omega = y(\lambda + a(x, y))dx - x(\mu + b(x, y))dy.$$

Si  $\mu \neq 0$ , entonces  $I_{\underline{0}}(\mathcal{F}, y = 0) = \frac{\lambda}{\mu}$  (si  $\lambda \neq 0$  se tiene análogo para  $x = 0$ ). De esta forma, es directo comprobar que si  $\lambda = 0$ , entonces  $I_{\underline{0}}(\mathcal{F}, y = 0) = 0$  (y viceversa) y, además, se tiene el siguiente resultado cuando la singularidad simple es de tipo hiperbólico (lema 4.25 de [6]):

**Lema 3.23.** Sea  $\mathcal{F}$  un germen de foliación en  $(\mathbb{C}^2, \underline{0})$  definida por una 1-forma  $\omega$ , con  $\underline{0}$  una singularidad simple. Si los valores propios  $\lambda, \mu$  de la matriz jacobiana de  $\omega$  en  $\underline{0}$  cumplen que  $\lambda\mu \neq 0$  y  $C_\lambda, C_\mu$  son las dos separatrices no singulares de  $\mathcal{F}$  por  $\underline{0}$ , entonces

$$I_{\underline{0}}(\mathcal{F}, C_\lambda) \cdot I_{\underline{0}}(\mathcal{F}, C_\mu) = 1.$$

### 3.3.2. Demostración del teorema

Para demostrar el teorema 3.18, J. Cano introduce en [9] una propiedad (que denotaremos  $(\star)$ , como en el artículo), en la que se basa la posterior demostración del teorema de Camacho-Sad:

**Definición 3.24** (propiedad  $(\star)$ ). Sea  $\pi : S \rightarrow (\mathbb{C}^2, \underline{0})$  la composición de las explosiones  $(\mathbb{C}^2, \underline{0}) \xleftarrow{\pi_1} (S_1, P_1) \xleftarrow{\pi_2} \dots \xleftarrow{\pi_n} S$ , donde  $E = \pi^{-1}(\underline{0})$  es el divisor excepcional de  $\pi$  con cruzamientos normales. Sea  $\mathcal{F}$  una foliación en  $S$  y consideremos un punto  $p \in E$ . Entonces se dice que  $(\mathcal{F}, E, p)$  cumple la propiedad  $(\star)$  si alguna de las siguientes situaciones es cierta:

1. El punto  $p$  se encuentra en una única componente irreducible  $E_i$  de  $E$ , no es un punto singular de  $\mathcal{F}$  y  $E_i$  es transversal a  $\mathcal{F}$  en  $p$ .
2. El punto  $p$  se encuentra en una única componente irreducible  $E_i$  de  $E$  que es curva invariante de  $\mathcal{F}$  y el índice  $I_p(\mathcal{F}, E) \notin \mathbb{Q}_{\geq 0}$ .
3. El punto  $p$  es la intersección de dos componentes irreducibles  $E_i, E_j$  de  $E$  (diremos que este punto es una esquina), ambas componentes  $E_i, E_j$  son separatrices de  $\mathcal{F}$  y existe  $a \in \mathbb{R}_{>0}$  tal que

$$I_p(\mathcal{F}, E_i) \in \mathbb{Q}_{\leq -a} \quad \text{e} \quad I_p(\mathcal{F}, E_j) \notin \mathbb{Q}_{\geq -1/a}.$$

La siguiente proposición asegura que la propiedad  $(\star)$  se mantiene a través de explosiones:

**Proposición 3.25.** Sean  $\mathcal{F}$ ,  $E$  y  $p$  con las condiciones de la definición anterior tales que cumplen  $(\star)$ -2 o  $(\star)$ -3. Sea  $\pi_{n+1} : S' \rightarrow S$  la explosión de centro  $p$ , con  $\mathcal{F}'$  el transformado de  $\mathcal{F}$ , el transformado estricto  $E' = \pi_{n+1}^{-1}(E)$  y  $E_{n+1} = \pi_{n+1}^{-1}(p)$  el divisor excepcional de  $\pi_{n+1}$ . Entonces existe un punto  $q \in E_{n+1}$  en el que  $(\mathcal{F}', E', q)$  satisfacen la propiedad  $(\star)$ .

*Demostración:* Si  $\pi_{n+1}$  es una explosión dicrítica, entonces se tiene inmediatamente un punto  $q$  que satisface  $(\star)$ -1.

Supongamos, por tanto, que  $\pi_{n+1}$  es no dicrítica, de forma que  $E_{n+1}$  es curva invariante de  $\mathcal{F}'$ . Podemos diferenciar dos casos:

- $(\mathcal{F}, E, p)$  satisfacen  $(\star)$ -2. Entonces  $p \in E_i$  para una sola componente irreducible  $E_i$  de  $E$ . Sea  $E'_i$  el transformado estricto de  $E_i$  por  $\pi_{n+1}$ , y denotemos por  $q_i = E'_i \cap E_{n+1}$ . Sean  $p_1, \dots, p_2$  el resto de puntos singulares en  $E_{n+1} \setminus \{q_i\}$ , si algún  $p_j$  cumple la propiedad  $(\star)$ -2 (ningún  $p_j$  puede ser esquina), entonces  $(\mathcal{F}', E', q = p_j)$  satisfacen la propiedad  $(\star)$ . En caso contrario, aplicando el lema 3.21, tenemos que

$$I_{q_i}(\mathcal{F}', E_{n+1}) = -1 - \sum_{j=1}^s I_{p_j}(\mathcal{F}', E_{n+1}) \in \mathbb{Q}_{\leq -1},$$

ya que  $I_{p_j}(\mathcal{F}', E_{n+1}) \in \mathbb{Q}_{>0}$  para todo  $j \in \{1, \dots, s\}$ . Por otro lado, aplicando el lema 3.22 a la curva  $E_i$ ,

$$I_{q_i}(\mathcal{F}', E'_i) = I_p(\mathcal{F}, E_i) - 1 \notin \mathbb{Q}_{\leq -1},$$

con lo que  $q_i$  es una esquina, ambas componentes  $E'_i$  y  $E_{n+1}$  son separatrices de  $\mathcal{F}'$  (hemos supuesto que  $E_{n+1}$  lo es, y  $E'_i$  también lo es por la proposición 3.3) y la condición  $(\star)$ -3 sobre el índice se cumple para  $a = 1$ . Así,  $(\mathcal{F}', E', q = q_i)$  satisfacen la propiedad  $(\star)$ -3.

- $(\mathcal{F}, E, p)$  satisfacen  $(\star)$ -3. Sean entonces  $E_i$  y  $E_j$  las dos componentes irreducibles de  $E$  tales que  $p \in E_i \cap E_j$  y satisfacen

$$I_p(\mathcal{F}, E_i) \in \mathbb{Q}_{\leq -a} \quad \text{e} \quad I_p(\mathcal{F}, E_j) \notin \mathbb{Q}_{\geq -1/a}.$$

para algún  $a \in \mathbb{R}_{>0}$ .

Sean  $E'_i$  y  $E'_j$  los transformados estrictos de  $E_i$  y  $E_j$  por  $\pi_{n+1}$ , respectivamente; y sean  $q_i = E'_i \cap E_{n+1}$  y  $q_j = E'_j \cap E_{n+1}$ . Denotemos como  $p_1, \dots, p_s$  el resto de puntos singulares en  $E_{n+1} \setminus \{q_i, q_j\}$ ; al igual que antes, si algún  $p_k$  cumple la propiedad  $(\star)$ -2, entonces  $(\mathcal{F}', E', q = p_k)$  satisfacen la propiedad  $(\star)$ . Supongamos por tanto, que  $I_{p_k}(\mathcal{F}', E_{n+1}) \in \mathbb{Q}_{>0}$  para todo  $k \in \{1, \dots, s\}$ , entonces por el lema 3.21, se tiene que

$$I_{q_i}(\mathcal{F}', E_{n+1}) + I_{q_j}(\mathcal{F}', E_{n+1}) = -1 - \sum_{k=1}^s I_{p_k}(\mathcal{F}', E_{n+1}) \in \mathbb{Q}_{\leq -1}. \quad (3.1)$$

Por otro lado, aplicando el lema 3.22 a  $E_i$  y  $E_j$ , tenemos que

$$I_{q_i}(\mathcal{F}', E'_i) = I_p(\mathcal{F}, E_i) - 1 \in \mathbb{Q}_{\leq -(a+1)}$$

$$I_{q_j}(\mathcal{F}', E_j') = I_p(\mathcal{F}, E_j) - 1 \notin \mathbb{Q}_{\geq -\frac{1+a}{a}}.$$

Supongamos que  $(\mathcal{F}', E', q_i)$  no satisface la propiedad  $(\star)$ -3. Entonces  $I_{q_i}(\mathcal{F}', E_{n+1}) \in \mathbb{Q}_{\geq -\frac{1}{a+1}}$ , de forma que

$$I_{q_j}(\mathcal{F}', E_{n+1}) = -1 - I_{q_i}(\mathcal{F}', E_{n+1}) - \sum_{k=1}^s I_{p_k}(\mathcal{F}', E_{n+1}) \in \mathbb{Q}_{\leq -\frac{a}{a+1}},$$

con lo que  $(\mathcal{F}', E', q_j)$  satisface la propiedad  $(\star)$ -3. En otro caso, es  $(\mathcal{F}', E', q_i)$  quien cumple  $(\star)$ -3. □

**Observación 3.26** (Las singularidades simples en una esquina no cumplen  $(\star)$ ). Sea  $\mathcal{F}$  una foliación no dicrítica definida por una 1-forma  $\omega$ , y sean  $E_i$  y  $E_j$  dos componentes irreducibles del divisor excepcional. Supongamos que  $p \in E_i \cap E_j$  es una singularidad simple de  $\mathcal{F}$ . Los dos divisores son separatrices de  $\mathcal{F}$  y, de acuerdo con el teorema de Briot-Bouquet, sus espacios tangentes se corresponden con las direcciones asociadas a los valores propios  $\lambda, \mu$  de la matriz jacobiana de  $\omega$ . Aplicando el lema 3.23, se tiene que

$$I_p(\mathcal{F}, E_i) \cdot I_p(\mathcal{F}, E_j) = 1.$$

Supongamos que existe un  $a \in \mathbb{R}_{>0}$  tal que  $I_p(\mathcal{F}, E_i) \in \mathbb{Q}_{\leq -a}$ . Entonces

$$I_p(\mathcal{F}, E_j) = \frac{1}{I_p(\mathcal{F}, E_i)} \in \mathbb{Q} \cap \left( \frac{1}{-a}, 0 \right),$$

con lo que no puede cumplir  $(\star)$ . De esta manera, las esquinas que sean singularidades simples no pueden cumplir  $(\star)$ .

La idea de la demostración del teorema de Camacho-Sad consiste en encontrar en el divisor excepcional que se obtiene tras la reducción de singularidades de una foliación  $\mathcal{F}$  una singularidad simple que cumpla la propiedad  $(\star)$  y no sea una esquina, o una componente dicrítica del divisor excepcional.

*Demostración del teorema 3.18.* Comencemos haciendo una explosión  $\pi_1 : S_1 \rightarrow (\mathbb{C}^2, \underline{0})$ , y denotemos por  $\mathcal{F}_1$  el transformado estricto de  $\mathcal{F}$ . Si la explosión es dicrítica, entonces es inmediato encontrar una curva integral de  $\mathcal{F}_1$ . En otro caso, por el lema 3.21, debe haber un punto  $p_1$  en el divisor excepcional  $E_1$  donde se cumpla la propiedad  $(\star)$ -2.

Por el teorema de reducción de singularidades, existe un morfismo  $\pi$  composición de un número finito de explosiones  $\pi_1, \dots, \pi_k$  de forma que todas las singularidades del transformado estricto  $\mathcal{F}'$  de la foliación  $\mathcal{F}$  son singularidades simples. Denotemos por  $E = \pi^{-1}(\underline{0})$  al divisor excepcional total; si hay componentes dicríticas en  $E$ , basta considerar un punto en ellas que cumpla  $(\star)$ -1 y tenemos una curva integral  $C'$  de  $\mathcal{F}'$  transversal al divisor excepcional.

En otro caso  $\mathcal{F}$  es no dicrítica, y de acuerdo con la observación anterior, las singularidades simples en las esquinas no cumplen la propiedad  $(\star)$ . Como es seguro que tiene que

haber algún punto singular que cumpla  $(\star)$  (por la proposición 3.25) existe un punto  $p$  que es singularidad simple de  $\mathcal{F}'$ , no es una esquina de  $E$  y cumple la propiedad  $(\star)$ -2. Sea  $E_i$  la componente irreducible de  $E$  tal que  $p \in E_i$ , como  $(\mathcal{F}', E, p)$  cumplen  $(\star)$ -2, la componente  $E_i$  es separatriz de  $\mathcal{F}'$ , y aplicando el teorema de Briot-Bouquet (teorema 3.16), debe existir otra separatriz  $C'$  de  $\mathcal{F}'$  transversal a  $E$  en  $p$ .

En ambos casos, se obtiene una separatriz  $C'$  de  $\mathcal{F}'$  transversal al divisor excepcional, y aplicando la proposición 3.3, esta separatriz  $C'$  se proyecta por  $\pi$  a una curva integral  $C$  de  $\mathcal{F}$  en  $(\mathbb{C}^2, \underline{0})$ .  $\square$

### 3.4. Foliaciones cuspidales

En esta sección daremos un ejemplo donde aplicamos los resultados probados en las secciones anteriores de este capítulo. Vamos a estudiar la reducción de singularidades de las foliaciones definidas por 1-formas del tipo

$$\omega = d(y^p - x^q) + A(x, y)(pxdx - qydx)$$

con  $p, q \in \mathbb{Z}_{>0}$  y  $A(x, y) \in \mathbb{C}\{x, y\}$ , que denominaremos cuspidales. Las propiedades de estas foliaciones han sido estudiadas por F. Loray en [15].

Antes de enunciar el resultado que queremos probar, vamos dar la definición de orden pesado para los pesos  $(p, q)$ . Dada una serie  $A(x, y) = \sum_{i,j \geq 0} a_{ij}x^i y^j$  y  $p, q \in \mathbb{Z}_{>0}$ , definimos el siguiente orden pesado

$$\text{ord}_{(p,q)}(A(x, y)) := \inf_{a_{ij} \neq 0} \left\{ \frac{pi + qj}{\gcd(p, q)} : i, j \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\}$$

**Proposición 3.27.** *Sea  $\mathcal{F}$  un germen de foliación en  $(\mathbb{C}^2, \underline{0})$  definido por un germen de 1-forma  $\omega = 0$ , donde*

$$\omega = d(y^p - x^q) + A(x, y)(pxdx - qydx).$$

con  $p, q \in \mathbb{Z}_{>0}$  y  $A \in \mathbb{C}\{x, y\}$ . Entonces  $\mathcal{F}$  tiene la misma reducción de singularidades que la curva definida por  $y^p - x^q = 0$  si y sólo si

$$\text{ord}_{(p,q)}(A(x, y)) > \frac{pq - p - q}{\gcd(p, q)}.$$

*Demostración:* Consideremos  $\pi : S_k \rightarrow (\mathbb{C}^2, \underline{0})$  el morfismo de la reducción de singularidades de la curva dada por la ecuación  $y^p - x^q = 0$ , el cual es la composición de las explosiones  $(\mathbb{C}^2, \underline{0}) \xleftarrow{\pi_1} (S_1, p_1) \xleftarrow{\pi_2} \dots \xleftarrow{\pi_k} S_k$ . Por el corolario 2.9, sabemos que la sucesión de explosiones viene dada por el algoritmo de Euclides de  $p^* = \frac{p}{\delta}$  y  $q^* = \frac{q}{\delta}$ , con  $\delta = \gcd(p, q)$ . Además, sabemos que existen  $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$  tales que  $mp - nq = \delta$ . Tras la última explosión, podemos tomar coordenadas  $(u, v)$  en una carta de forma que el morfismo  $\pi$  esté dado por  $\pi(u, v) = (u^n v^{p^*}, u^m v^{q^*})$  (ver la sección A.1 en los apéndices). Veamos como se transforma cada uno de los dos sumandos de  $\omega$ :

$$\begin{aligned} \pi^* d(y^p - x^q) &= d(u^{mp} v^{q^* p} - u^{nq} v^{p^* q}) = \\ &= (mpu^{mp-1} v^{q^* p} - nqu^{nq-1} v^{p^* q}) du + (q^* p u^{mp} v^{q^* p-1} - p^* q u^{nq} v^{p^* q-1}) dv =, \end{aligned}$$

y como  $p^*q = \frac{pq}{\delta} = q^*p$ , entonces

$$\begin{aligned}\pi^*d(y^p - x^q) &= v^{\frac{pq}{\delta}}(mpu^{mp-1} - nqu^{nq-1})du + \frac{pq}{\delta}v^{\frac{pq}{\delta}-1}(u^{mp} - u^{nq})dv = \\ &= v^{\frac{pq}{\delta}-1} \left[ v(mp u^{mp-1} - nq u^{nq-1})du + \frac{pq}{\delta}v^{\frac{pq}{\delta}-1}(u^{mp} - u^{nq})dv \right] = \\ &= v^{\frac{pq}{\delta}-1}u^{nq-1} \left[ v(mp u^\delta - nq)du + \frac{pq}{\delta}v^{\frac{pq}{\delta}-1}u(u^\delta - 1)dv \right].\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\pi^*(pxdy - qydx) &= pu^n v^{p^*} (mu^{m-1} v^{q^*} du + q^* u^m v^{q^*-1} dv) - qu^m v^{q^*} (nu^{n-1} v^{p^*} du + p^* u^n v^{p^*-1} dv) \\ &= (pmu^{m+n-1} v^{p^*+q^*} - qnu^{m+n-1} v^{p^*+q^*})du = \delta u^{m+n-1} v^{\frac{p+q}{\delta}} du.\end{aligned}$$

De esta forma, el *pull back* de la 1-forma está dado por

$$\pi^*\omega = u^{nq-1} v^{\frac{pq}{\delta}-1} \left[ v(mp u^\delta - nq)du + \frac{pq}{\delta}v^{\frac{pq}{\delta}-1}u(u^\delta - 1)dv \right] + \tilde{A}(u, v)\delta u^{m+n-1} v^{\frac{p+q}{\delta}} du,$$

donde  $\tilde{A}(u, v) = A(u^n v^{p^*}, u^m v^{q^*})$ . Dividiendo  $\pi^*\omega$  entre  $v^{\frac{pq}{\delta}-1}u^{nq-1}$  se tiene la expresión

$$\begin{aligned}\tilde{\omega} &= v(mp u^\delta - nq)du + \frac{pq}{\delta}v^{\frac{pq}{\delta}-1}u(u^\delta - 1)dv + \tilde{A}(u, v)\delta u^{m+n-qn} v^{\frac{p+q-pq}{\delta}+1}du = \\ &= \frac{pq}{\delta}v^{\frac{pq}{\delta}-1}u(u^\delta - 1)dv + v \left( mp u^\delta - nq + \delta \tilde{A}(u, v)u^{m+n-qn} v^{\frac{p+q-pq}{\delta}} \right) du.\end{aligned}$$

Si  $A(x, y) = \sum_{i,j \geq 0} a_{ij} x^i y^j$ , la condición sobre  $\text{ord}_{(p,q)}(A(x, y))$  implica que para todo  $i, j$

$$\frac{pi + qj}{\delta} > \frac{pq - p - q}{\delta} \iff pi + qj > pq - p - q \quad (3.2)$$

y, además

$$pi + qj > pq - p - q \iff p(i + 1) > pq - q(j + 1). \quad (3.3)$$

Veamos ahora cual es la expresión de  $\tilde{A}(u, v)$ :

$$\tilde{A}(u, v) = A(u^n v^{p^*}, u^m v^{q^*}) = \sum_{i,j \geq 0} a_{ij} u^{ni+mj} v^{p^*i+q^*j},$$

de forma que

$$\Delta(u, v) := \tilde{A}(u, v)u^{m+n-qn} v^{\frac{p+q-pq}{\delta}} = \sum_{i,j \geq 0} a_{ij} u^{m+n-qn+ni+mj} v^{\frac{p+q-pq}{\delta}+p^*i+q^*j} = \sum_{i,j \geq 0} a_{ij} u^{\alpha_{ij}} v^{\beta_{ij}}.$$

Veamos cómo es la expresión de  $\alpha_{ij}$  y  $\beta_{ij}$  cuando  $a_{ij} \neq 0$

$$\alpha_{ij} = m(j + 1) + n(i + 1 - q) = \frac{pm(j + 1) + np(i + 1 - q)}{p} > \frac{pm(j + 1) - nq(j + 1)}{p},$$

donde se ha aplicado (3.3), con lo que que

$$\alpha_{ij} > \frac{(pm - nq)(j + 1)}{p} = \frac{\delta}{p}(j + 1) > 0.$$

Por otro lado, aplicada la desigualdad de (3.2), se tiene que

$$\beta_{ij} = \frac{p + q - pq + ip + jq}{\delta} > 0,$$

con lo que la condición sobre el  $\text{ord}_{(p,q)}(A(x,y))$  es necesaria para que  $\Delta(u,v)$  esté bien definido (no tenga polos) y  $\Delta(u,v)$  sea divisible por el monomio  $uv$ . Es inmediato que si  $\text{ord}_{(p,q)}(A(x,y)) < \frac{pq-p-q}{\text{gcd}(p,q)}$ , entonces  $\Delta(u,v)$  tiene un polo, lo cual no se puede conseguir mediante explosiones (esto implica que no se puede dividir  $\pi^*\omega$  por  $v^{\frac{pq}{d}-1}u^{nq-1}$ , y por tanto la foliación no tendrá la misma reducción de singularidades que la curva).  $\square$

El siguiente resultado es consecuencia directa de la proposición anterior y del corolario 2.9:

**Corolario 3.28.** *Sea  $\mathcal{F}$  un germen de foliación en  $(\mathbb{C}^2, \underline{0})$  definido por un germen de 1-forma  $\omega = 0$ , donde  $\omega = d(y^p - x^q) + A(x,y)(pdx - qydx)$  con  $p, q \in \mathbb{Z}_{>0}$  y  $A \in \mathbb{C}\{x,y\}$  cumple que  $\text{ord}_{(p,q)}(A(x,y)) > \frac{pq-p-q}{\text{gcd}(p,q)}$ . Entonces la reducción de singularidades de  $\mathcal{F}$  viene dada por el algoritmo de Euclides de  $\frac{p}{d}$  y  $\frac{q}{d}$ , con  $d = \text{gcd}(p, q)$ .*

# Bibliografía

- [1] C. A. Briot y J. C. Bouquet. «Recherches sur les fonctions définies par des équations différentielles». En: *J. Ec. Polytechnique* 38 (1856), págs. 133-198.
- [2] C. Camacho y A. Lins Neto. *Geometric theory of foliations*. Birkhäuser Boston, MA, 2013. ISBN: 978-0817631390.
- [3] C. Camacho y P. Sad. «Invariant Varieties Through Singularities of Holomorphic Vector Fields». En: *Ann. Math.* 115.3 (1982), págs. 579-595. DOI: 10.2307/2007013.
- [4] F. Cano. «Sistemas dinámicos, valoraciones y explosiones». En: *Teoría de Singularidades en Topología, Geometría y Foliaciones II* (2017), págs. 4-59.
- [5] F. Cano y D. Cerveau. «Desingularization of non-dicritical holomorphic foliations and existence of separatrices». En: *Acta Math.* 169.708 (1992), págs. 1-103. DOI: 10.1007/BF02392757.
- [6] F. Cano, D. Cerveau y J. Déserti. *Théorie élémentaire des feuilletages holomorphes singuliers*. Berlin, 2013. ISBN: 978-2701174846.
- [7] F. Cano y J-F. Mattei. «Hypersurfaces intégrales des feuilletages holomorphes». En: *Annales de l'institut Fourier* 42.1-2 (1992), págs. 49-72.
- [8] F. Cano y B. Molina-Samper. «Invariant surfaces for toric type foliations in dimension three». En: *Pub. Mat.* 65.1 (2021), págs. 291-307. DOI: 10.5565/PUBLMAT6512109.
- [9] J. Cano. «Construction of invariant curves for singular holomorphic vector fields». En: *Proc. Amer. Math. Soc.* 125.9 (1997), págs. 2649-2650.
- [10] S. A. Carrillo y F. Sanz. «Briot-Bouquet's theorem in high dimension». En: *Publ. Mat.* 58.S1 (2014), págs. 135-152. DOI: 10.5565/PUBLMAT\_Extra14\_07.
- [11] E. Casas-Alvero. *Singularities of Plane Curves*. Cambridge University Press, 2000. ISBN: 978-0511569326.
- [12] J. P. Jouanolou. *Equations de Pfaff algébriques*. Lect. Notes in Math. 708. Springer-Verlag. 1979. ISBN: 3-540-09239-0.
- [13] A. Khinchin. *Continued fractions*. The University of Chicago Press. 1964. ISBN: 978-0486696300.
- [14] J. M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer, 2013. DOI: 10.1007/978-1-4419-9982-5.
- [15] F. Loray. «Réduction formelle des singularités cuspidales de champs de vecteurs analytiques». En: *Journal of Differential Equations* 158.1 (1999), págs. 152-173. DOI: /10.1016/S0022-0396(99)80021-7.

- 
- [16] F. Loray. *Pseudo-groupe d'une singularité de feuilletage holomorphe en dimension deux*. Vol. 36. Ensaos Matemáticos. 2021, págs. 53-274. DOI: 10.21711/217504322021/em362.
- [17] J.-F. Mattei y R. Moussu. «Holonomie et intégrales premières». En: *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* 4e série, 13.4 (1980), págs. 469-523. DOI: 10.24033/asens.1393.
- [18] L. Ortiz-Bobadilla, E. Rosales-González y S. M. Voronin. «On Camacho–Sad's theorem about the existence of a separatrix». En: *International Journal of Mathematics* 21.11 (2010), págs. 1413-1420. DOI: 10.1142/S0129167X10006513.
- [19] B. Scardua. *Holomorphic Foliations with Singularities*. Latin American Mathematics Series. Springer, 2021. DOI: 10.1007/978-3-030-76705-1.
- [20] B. Scardua y C. A. Morales Rojas. *Geometry, Dynamics and Topology of Foliations: A First Course*. World Scientific, 2017. ISBN: 978-9813207073.
- [21] A. Seidenberg. «Reduction of singularities of the differential equation  $Ady = Bdx$ ». En: *Am. J. Math.* 90 (1968), págs. 248-269.
- [22] C. T. C. Wall. *Singular Points of Plane Curves*. Cambridge University Press, 2004. ISBN: 978-0511617560.
- [23] F. W. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Springer, 1983. DOI: 10.1007/978-1-4757-1799-0.
- [24] O. Zariski. «Studies in Equisingularity III. Saturation of local rings and equisingularity». En: *Amer. J. of Math.* 90 (1968), págs. 961-1023.

# Apéndice A

## Fracciones continuas

En este apéndice introducimos el concepto de fracción continua de un número racional, íntimamente relacionado con el algoritmo de Euclides. Seguiremos el libro de Khinchin [13].

**Definición A.1.** Dada una serie de números enteros  $a_0, a_1, \dots, a_n$  con  $a_i > 0$  para todo  $i > 0$ , la fracción continua  $[a_0; a_1, \dots, a_n]$  se define como el número racional

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n}}}}$$

**Observación A.2.** Dado un número racional cuya fracción continua sea  $[a_0; a_1, \dots, a_n]$ , también se puede representar mediante la fracción continua  $[a_0; a_1, \dots, a_n - 1, 1]$ , ya que  $a_n = (a_n - 1) + \frac{1}{1}$ .

**Definición A.3.** Dada la fracción continua  $[a_0; a_1, \dots, a_n]$  correspondiente al número  $\frac{p}{q}$ , se llaman aproximantes de la fracción continua a la serie de números racionales  $\left\{ \frac{p_i}{q_i} \right\}_{i=0}^n$ , con  $\frac{p_i}{q_i} = [a_0; a_1, \dots, a_i]$

Los primeros aproximantes son relativamente sencillos de calcular. Para  $i = 0$ , la fracción continua que se tiene es simplemente  $\frac{p_0}{q_0} = a_0$ , por lo que  $p_0 = a_0$  y  $q_0 = 1$ . Del mismo modo, para  $i = 1$ , se tiene que  $\frac{p_1}{q_1} = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}$ , y entonces  $p_1 = a_0 a_1 + 1$  y  $q_1 = a_1$ . En general, se puede calcular un aproximante en función de los anteriores, como se muestra en el siguiente resultado (ver teorema 1 en la página 4 de [13]):

**Proposición A.4.** El aproximante  $\frac{p_i}{q_i}$ , con  $i > 1$ , de una fracción continua  $[a_0; a_1, \dots, a_n]$  se puede calcular como

$$\begin{aligned} p_i &= a_i p_{i-1} + p_{i-2} \\ q_i &= a_i q_{i-1} + q_{i-2} \end{aligned}$$

Los aproximantes tienen las siguientes propiedades básicas (ver teorema 2 en la página 5 de [13]):

**Proposición A.5.** Sea  $\frac{p}{q} = [a_0; a_1, \dots, a_n]$  una fracción continua y  $\left\{ \frac{p_i}{q_i} \right\}_{i=0}^n$  la familia de aproximantes de la fracción continua, entonces:

$$a) p_{k-1}q_k - p_kq_{k-1} = (-1)^k \text{ para todo } k \geq 1$$

$$b) \gcd(p_k, q_k) = 1$$

Sean  $p, q \in \mathbb{Z}_{>0}$  tales que  $p > q$ , entonces el algoritmo de Euclides es

$$\begin{aligned} p &= k_1q + r_1 && \text{con } r_1 < q \\ q &= k_2r_1 + r_2 && \text{con } r_2 < r_1 \\ r_1 &= k_3r_2 + r_3 && \text{con } r_3 < r_2 \\ &\vdots \\ r_{n-4} &= k_{n-2}r_{n-3} + r_{n-2} && \text{con } r_{n-2} < r_{n-3} \\ r_{n-3} &= k_{n-1}r_{n-2} + 1 && \text{con } 1 < r_{n-2} \\ r_{n-2} &= k_n \cdot 1 \end{aligned}$$

dividiendo la primera igualdad entre  $q$ , tenemos que

$$\frac{p}{q} = k_1 + \frac{r_1}{q}$$

y  $0 < \frac{r_1}{q} < 1$ . Vemos entonces que  $k_1 = a_0$  y, de forma inductiva, se tiene que la fracción continua finita correspondiente a  $\frac{p}{q}$  es  $[k_1; k_2, \dots, k_n]$ .

## A.1. Fracciones continuas y exponentes de las explosiones

Recordamos de la observación 2.2 que los exponentes de las coordenadas tras una explosión  $\pi : S \rightarrow (\mathbb{C}^2, \underline{0})$  pueden codificarse mediante las matrices

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde  $T_1$  se corresponde con los exponentes en la primera carta y  $T_2$  en la segunda carta. Como para obtener los exponentes de la composición de explosiones basta multiplicar las matrices correspondientes, un cálculo directo muestra que la matriz para la composición de  $k$  explosiones en la misma carta es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} \text{ para la primera carta} \qquad \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ para la segunda carta.}$$

Supongamos que estamos realizando explosiones siguiendo los cocientes del algoritmo de Euclides de  $p$  y  $q$ , con  $p < q$  (como ocurre, por ejemplo, en la reducción de singularidades de la curva  $y^q - x^p = 0$  de la proposición 2.8). Supongamos que comenzamos fijándonos en la segunda carta (el análisis es idéntico comenzando en la primera carta, intercambiando las dos filas de las matrices). Entonces tras  $k_1 + k_2$  explosiones los exponentes son

$$\begin{pmatrix} 1 & k_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k_2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1k_2 + 1 & k_1 \\ k_2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & p_0 \\ q_1 & q_0 \end{pmatrix}$$

Vemos que los coeficientes de la matriz se corresponden con el numerador y el denominador de los dos primeros aproximantes. Por otro lado, tenemos que para  $n > i > 0$

$$\begin{pmatrix} p_i & p_{i-1} \\ q_i & q_{i-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k_{i+2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_i & p_{i+1} \\ q_i & q_{i+1} \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} p_{i-1} & p_i \\ q_{i-1} & q_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k_{i+2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{i+1} & p_i \\ q_{i+1} & q_i \end{pmatrix}.$$

Con todo lo anterior, tras hacer  $K = \sum_{j=1}^n k_j$  explosiones siguiendo los cocientes del algoritmo de Euclides, los exponentes de las coordenadas serán

$$\begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix} \text{ si } n \text{ es impar} \qquad \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_n \\ q_{n-1} & q_n \end{pmatrix} \text{ si } n \text{ es par}$$

De forma que si tras las  $K$  explosiones tenemos coordenadas  $(u, v)$  en una carta, entonces

$$(x, y) = (u^{p_{n-1}} v^{p_n}, u^{q_{n-1}} v^{q_n})$$

Ahora, como  $p_n = \frac{p}{d}$  y  $q_n = \frac{q}{d}$ , donde  $d = \gcd(p, q)$ , y aplicando la primera propiedad de la proposición A.5, tenemos que

$$(x, y) = \left( u^n v^{\frac{p}{d}}, u^m v^{\frac{q}{d}} \right)$$

con  $m, n \in \mathbb{Z}$  tales que  $mp - nq = d$  si  $n$  es impar o  $mp - nq = -d$  si  $n$  es par (siempre puedes suponer  $n$  es impar, por la observación A.2).



# Apéndice B

## Algunas propiedades locales de curvas planas

En esta sección presentamos brevemente el teorema de Puiseux y dos conjuntos de invariantes de una curva llamados exponentes característicos y pares de Puiseux, íntimamente relacionados entre sí. Para ello seguiremos el capítulo 2 de [11] y los capítulos 2 y 3 de [22]. Finalmente, introducimos la noción de multiplicidad de intersección de curvas y algunas de sus propiedades.

**Teorema B.1** (de Puiseux). *Si  $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$  es irreducible y  $x$  no divide a  $f$ , entonces existe una serie de Puiseux  $s(x) = \sum_{i \geq 0} a_i x^{i/n} \in \mathbb{C}\{x^{1/n}\}$  tal que  $f(x, s(x)) = 0$ , donde  $n = m_{\underline{0}}(f)$ .*

La prueba de este resultado se basa en el algoritmo de Newton-Puiseux (ver el capítulo 2 de [22] o el capítulo 2 de [11]).

Sea  $C$  un germen de una curva plana irreducible en  $(\mathbb{C}^2, \underline{0})$ , es decir,  $C = (f(x, y) = 0)$  con  $f(x, y) \in \mathbb{C}\{x, y\}$  irreducible. Tras una elección de coordenadas apropiada,  $C$  tiene una parametrización primitiva

$$\begin{cases} x(t) = t^n \\ y(t) = \sum_{j \geq m} a_j t^j \end{cases}$$

con  $m \geq n$ , dada por el Teorema de Newton-Puiseux, de forma que el máximo común divisor entre  $n$  y  $\{i : a_i \neq 0\}$  es 1.

Vamos a definir un conjunto finito de números, denominados *exponentes característicos* de  $C$ , de la manera siguiente:

Sean  $\beta_0 = n$  y  $e_0 = n$ . Se define  $\beta_1 = \min\{i : a_i \neq 0, i \neq 0 \pmod{n}\}$ . Como la parametrización es primitiva,  $\beta_1$  existe, de forma que establecemos

$$e_1 = \gcd(e_0, \beta_1) = \gcd(n, \beta_1)$$

De forma recursiva, para  $k \geq 2$ , se definen

$$\beta_k = \min\{i : a_i \neq 0, i \neq 0 \pmod{e_{k-1}}\} \quad e_k = \gcd(e_{k-1}, \beta_k)$$

Notemos que  $\beta_k \notin (e_{k-1})$ , luego  $e_k < e_{k-1}$ , de forma que la sucesión de los  $e_k$  es estrictamente decreciente, y existe un  $k = g$  tal que  $e_g = 1$ . A la sucesión  $\{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_g\}$  se le denomina *exponentes característicos* de la curva  $C$ .

A partir de los exponentes característicos de la curva  $C$  se pueden definir, para cada  $0 < i \leq g$ , dos enteros

$$n_i = \frac{e_{i-1}}{e_i} \quad \frac{m_i}{n_1 \dots n_i} = \frac{\beta_i}{e_i}$$

con  $\gcd(n_i, m_i) = 1$ . A estos pares  $\{(m_i, n_i)\}_{i=1}^g$  se les llama *pares de Puiseux* de la curva  $C$ , y se tiene que  $n = n_1 \dots n_g$ . Es fácil comprobar que los exponentes característicos se pueden recuperar de los Pares de Puiseux, por lo que son equivalentes.

**Observación B.2.** Dada una cúspide de la forma  $y^p - x^q = 0$ , con  $p < q$  y  $\gcd(p, q) = 1$ , esta tiene un solo par de Puiseux  $(q, p)$ . Como la cúspide tiene una parametrización de la forma  $\{x(t) = t^p, y(t) = t^q\}$ , entonces los exponentes característicos son  $\beta_0 = e_0 = p$ ,  $\beta_1 = q$  y  $e_1 = 1$ , de forma que  $n_1 = p$  y  $m_1 = q$ .

Los exponentes característicos son invariantes topológicos de una curva irreducible. Recordemos que dos curvas  $C_1$  y  $C_2$  en  $(\mathbb{C}, \underline{0})$  son *topológicamente equivalentes* si existe un homeomorfismo  $\phi : U \rightarrow V$  tal que  $\phi(U \cap C_1) = V \cap C_2$ , donde  $U$  (respectivamente,  $V$ ) es un entorno de  $\underline{0}$  donde  $C_1$  está definida (respectivamente,  $C_2$ ).

## B.1. Multiplicidad de intersección

En esta sección vamos a introducir la definición y algunas propiedades de la multiplicidad de intersección de dos curvas en un punto, que utilizaremos posteriormente durante el trabajo. Seguiremos las secciones 2.6 y 3.2 de [11].

Sea  $C$  una curva dada por  $f(x, y) = 0$ , para calcular la multiplicidad de intersección con el eje  $y = 0$  en el punto  $(0, 0)$  se sustituye  $y = 0$  en  $f$ , de forma que la *multiplicidad de intersección* se obtiene como  $\text{ord}_x(f(x, 0))$ . En general, si se tiene una curva  $C_1$  dada por una ecuación  $f(x, y) = 0$  y otra curva  $C_2$  irreducible definida por  $g(x, y) = 0$  y con una parametrización  $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$  con  $\varphi(0) = (0, 0)$ , entonces la multiplicidad de intersección de  $C_1$  y  $C_2$  en el origen es igual a

$$i_{\underline{0}}(C_1, C_2) = i_{\underline{0}}(f, g) = \text{ord}_t(f(\varphi_1(t), \varphi_2(t))).$$

En caso de que  $g$  no sea irreducible, entonces podemos escribir  $g = g_1^{\alpha_1} \dots g_k^{\alpha_k}$  con  $g_i$  un factor irreducible de  $g$  en  $\mathbb{C}\{x, y\}$ , y la *multiplicidad de intersección* de  $f$  y  $g$  en  $\underline{0}$  se define como

$$i_{\underline{0}}(f, g) = \sum_{j=1}^k \alpha_j i_{\underline{0}}(f, g_j)$$

La multiplicidad de intersección cumple las siguientes propiedades:

1.  $i_{\underline{0}}(f, g) = i_{\underline{0}}(g, f)$
2.  $i_{\underline{0}}(f, g) = 0$  si  $f(\underline{0}) \neq 0$

3.  $i_{\underline{0}}(f, g) = \infty$  si existe un  $h \in \mathbb{C}\{x, y\}$  que divide a  $f(x, y)$  y  $g(x, y)$ .
4.  $i_{\underline{0}}(f_1 f_2, g) = i_{\underline{0}}(f_1, g) + i_{\underline{0}}(f_2, g)$
5. Sean  $a, b, c, d \in \mathbb{C}\{x, y\}$  tales que  $ad - bc \neq 0$ , y sean  $f_1 = af + bg$  y  $g_1 = cf + dg$ .  
Entonces  $i_{\underline{0}}(f_1, g_1) = i_{\underline{0}}(f, g)$

A continuación presentamos dos lemas en los que se muestra como se comporta la multiplicidad de intersección con las explosiones. El primero, que se corresponde con el lema 3.4.2 de [22], relaciona la multiplicidad de una curva con la multiplicidad de intersección del transformado estricto de la curva y el divisor excepcional tras una explosión:

**Lema B.3.** *Dada una curva  $C$ , sea  $C^*$  el transformado estricto de la curva tras una explosión  $\pi$  de centro  $p \in C$ , de forma que aparece un divisor excepcional  $E$ . Sea  $p^*$  el punto en el que se intersecan  $C^*$  y  $E$ , entonces la multiplicidad de intersección de  $E$  y  $C^*$  en  $p^*$  es igual a la multiplicidad de  $C$ .*

**Lema B.4.** *Sea  $\pi : S \rightarrow (\mathbb{C}^2, \underline{0})$  la explosión del origen, y sea  $E = \pi^{-1}(\underline{0})$  el divisor excepcional por la explosión. Sea  $C$  una curva irreducible en  $(\mathbb{C}^2, \underline{0})$  y  $C^*$  su transformado estricto por  $\pi$ . Si  $p$  es el punto de intersección de  $C^*$  con  $E$ , se tiene que  $m_{\underline{0}}(C) = i_p(C^*, E)$ .*

Por otro lado, el siguiente lema indica como varía la multiplicidad de intersección de dos curvas que pasan por el origen tras una explosión del origen (para su demostración ver el lema 3.3.4 de [11]):

**Lema B.5** (Fórmula de Noether). *Sea  $\pi : S \rightarrow (\mathbb{C}^2, \underline{0})$  la explosión del origen  $\underline{0} \in \mathbb{C}^2$ , con  $E_1$  el divisor excepcional. Sean  $C_1, C_2$  gérmenes de curvas en el origen y sean  $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$  el transformado estricto de  $C_1$  y  $C_2$  respectivamente. Entonces se tiene la siguiente igualdad*

$$i_{\underline{0}}(C_1, C_2) = m_{\underline{0}}(C_1)m_{\underline{0}}(C_2) + \sum_{p \in E_1} i_p(\tilde{C}_1, \tilde{C}_2).$$