

Facultad
de
Ciencias

**CÍCLIDOS DE DUPIN:
PROPIEDADES Y SU APLICACIÓN
A LA MEZCLA DE SUPERFICIES**
(DUPIN CYCLIDES: PROPERTIES AND THEIR
APPLICATION IN SURFACE BLENDING)

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autora: Pilar Rojas Puente

Director: Mario Alfredo Fioravanti

Septiembre-2024

Resumen/Abstract

Resumen:

En este trabajo se presenta una estructura organizada en varios capítulos. En el primer capítulo se repasan conceptos básicos necesarios para el desarrollo posterior. En el segundo capítulo, se realiza un análisis detallado de los cíclidos de Dupin, abordando sus definiciones, tipos y propiedades fundamentales, así como su construcción mediante inversión aplicada a ejemplos específicos como cilindros circulares y toros. En el tercer capítulo comienza el estudio de las mezclas entre cuádricas naturales. Se propone una definición de mezcla con cíclidos que implica la construcción de mezclas no singulares, excluyendo uniones con cíclidos y superficies singulares. Además, se analizan las implicaciones de esta definición sobre la posición de las cuádricas en la mezcla y sobre las propiedades de las circunferencias extremas de estas mezclas. En el cuarto capítulo, se analizan los casos de mezclas entre cuádricas naturales, utilizando principalmente cíclidos de tipo elíptico-hiperbólico anulares. También se examina la relación entre la existencia de mezclas con cíclidos y la condición de esfera inscrita común. Al final de este capítulo, se proporcionan dos ejemplos implementados que ilustran dos tipos de mezcla con cíclidos, uno entre dos esferas y otro entre un cono y un plano. Por último, tenemos una breve conclusión y reflexión sobre el trabajo futuro.

Palabras clave: Cíclidos de Dupin, Diseño Geométrico Asistido por Computadora (CAGD), cuádricas naturales, mezcla de superficies, líneas de curvatura circulares.

Abstract:

This work is organized into several chapters. In the first chapter, basic concepts necessary for subsequent development are reviewed. In the second chapter, a detailed analysis of Dupin cyclides is provided, addressing their definitions, types, and fundamental properties, as well as their construction through inversion applied to specific examples such as circular cylinders and tori. In the third chapter, the study of blends between natural quadrics begins. A definition of blend with cyclides is proposed, which involves the construction of non-singular blends, excluding joins with cyclides and singular surfaces. Additionally, the implications of this definition on the position of the quadrics in the blend and on the properties of the extreme circles of these blends are analyzed. In the fourth chapter, cases of blends between natural quadrics are analyzed, mainly using ring elliptic-hyperbolic cyclides. The relationship between the existence of blends with cyclides and the common inscribed sphere condition is also examined. At the end of this chapter, two implemented examples are provided to illustrate two types of blends with cyclides: one between two spheres and another between a cone and a plane. Finally, a brief conclusion and reflection on future work is presented.

Keywords: Dupin Cyclides, Computer-Aided Geometric Design (CAGD), natural quadrics, surface blending, circular lines of curvature.

Índice general

Introducción	1
1. Conceptos básicos	3
1.1. Superficies en \mathbb{R}^3	3
1.2. Aplicación de Weingarten	4
1.3. Conjuntos focales	5
2. Cíclidos de Dupin	7
2.1. Tipos de cíclidos de Dupin	7
2.1.1. Cíclidos de tipo Elíptico-Hiperbólico	9
2.1.2. Cíclidos de tipo Parabólico	12
2.2. Propiedades de los cíclidos	14
2.3. Construcción de cíclidos usando inversiones	18
2.3.1. Inversión de un cilindro circular	18
2.3.2. Inversión de un toro	19
3. Mezcla con cíclidos: requisitos previos	21
3.1. Preliminares	21
3.2. Definición de mezcla	22
3.3. Las circunferencias extremas	25
3.3.1. Las circunferencias extremas del cíclido anular	25
3.4. La posición de las cuádricas	29
3.4.1. Cíclidos anulares tangentes	29
4. Aplicación práctica de la mezcla	33
4.1. Mezclas de cuádricas naturales	33
4.2. Condición de esfera inscrita	41
4.3. Mezcla de dos esferas	44
4.4. Mezcla de un cono y un plano	46
5. Conclusión	49

Introducción

Los cíclidos de Dupin, nombrados en honor al matemático francés Charles Dupin, han sido objeto de estudio desde principios del siglo XIX por destacados matemáticos como Maxwell, Cayley, Srinivas y Dutta. Estas superficies sobresalen por sus notables propiedades geométricas y analíticas, lo que las convierte en una herramienta esencial en el Diseño Geométrico Asistido por Computadora (CAGD, del inglés *Computer Aided Geometric Design*). Entre sus propiedades más relevantes destacan su bajo grado algebraico, la representación paramétrica racional, la presencia de líneas de curvatura circulares y su caracterización mediante únicamente tres constantes. Estas características no solo permiten una integración eficiente en algoritmos geométricos avanzados, sino que también facilitan su uso en los estándares de CAGD, mejorando su implementación en sistemas de diseño computacional. Asimismo, la simplicidad geométrica de los cíclidos de Dupin permite una manipulación intuitiva y facilita el desarrollo de algoritmos automáticos para aplicaciones como la mezcla de superficies.

En el contexto del modelado geométrico, los cíclidos de Dupin se han mostrado especialmente útiles para generar superficies de transición suaves entre cuádricas naturales. En estudios recientes, se ha profundizado en su aplicación en la mezcla de superficies, obteniendo resultados eficaces en la construcción de superficies con radios variables, tal como se analiza en Dutta [9], así como en la mezcla de superficies de canal [7]. Además, Srinivas y Dutta [18] han investigado en detalle el uso de los cíclidos en la combinación y unión de superficies geométricas.

El presente trabajo se enfoca en la utilización de los cíclidos de Dupin como superficies de mezcla entre cuádricas naturales, abarcando tanto sus aspectos teóricos como su aplicación práctica en CAGD. A lo largo de la literatura, autores como Valk [19] y Shene [17] han estudiado diversas aplicaciones de estas superficies, subrayando su versatilidad en la creación de superficies de mezcla y su capacidad para modelar transiciones suaves entre geometrías complejas.

La estructura de este trabajo está dividida en varios capítulos:

El Capítulo 1 presenta una revisión de los conceptos fundamentales de la geometría diferencial necesarios para el desarrollo de los capítulos posteriores, abordando temas como superficies en \mathbb{R}^3 , curvatura, líneas de curvatura y transformaciones geométricas pertinentes.

El Capítulo 2 está dedicado a un análisis detallado de los cíclidos de Dupin, ofreciendo varias definiciones equivalentes de estas superficies. Además, se describen los tipos principales de cíclidos, se exploran sus propiedades geométricas más relevantes y se discute su construcción mediante la técnica de inversión, aplicada en ejemplos como la inversión de un cilindro circular y un toro.

En el Capítulo 3, se detallan las condiciones necesarias para la existencia de una mezcla cíclida, se define el concepto de mezcla con cíclidos y se investigan las propiedades geométricas de las circunferencias extremas en dichas superficies. Además, se discuten las posiciones relativas de las cuádricas que se mezclan.

A continuación, en el Capítulo 4, se examinan las superficies de mezcla construidas a partir de cíclidos de Dupin, y se presentan ejemplos originales de mezclas de cuádricas naturales.

Finalmente, en el Capítulo 5, se encuentra una breve conclusión y una reflexión final sobre el trabajo futuro.

A lo largo del texto, salvo que se indique una fuente específica, las figuras y ejemplos han sido creados por la autora utilizando el software GeoGebra (www.geogebra.org).

Capítulo 1

Conceptos básicos

En este capítulo se introducen las nociones fundamentales de superficies en \mathbb{R}^3 , como la parametrización, las superficies regulares, las líneas de curvatura y los conjuntos focales. Estos conceptos son esenciales para comprender la geometría de los cíclidos de Dupin, el tema principal de este trabajo. Las definiciones se basan en referencias como el libro de DoCarmo [6], los apuntes de Fernando Etayo [10, 11] y la obra de Alfred Gray [13, 5].

1.1. Superficies en \mathbb{R}^3

Definición 1.1.1 (Superficie parametrizada)

Una superficie parametrizada o parametrización local es una aplicación diferenciable

$$f : \mathcal{U} \mapsto \mathbb{R}^3,$$

siendo \mathcal{U} un subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 .

Definición 1.1.2 (Superficie regular)

Un subconjunto $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie regular si para cada punto $p \in \mathcal{M}$ existe un entorno abierto \mathcal{V} de p en \mathbb{R}^3 y una aplicación $f : \mathcal{U} \mapsto \mathbb{R}^3$ de un subconjunto abierto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ sobre $\mathcal{V} \cap \mathcal{M}$ tal que:

- (I) f es diferenciable;
- (II) $f : \mathcal{U} \mapsto \mathcal{V} \cap \mathcal{M}$ es un homeomorfismo. Esto significa que f posee una inversa continua $f^{-1} : \mathcal{V} \cap \mathcal{M} \mapsto \mathcal{U}$ tal que f^{-1} es la restricción a $\mathcal{V} \cap \mathcal{M}$ de una aplicación continua $F : \mathcal{W} \mapsto \mathbb{R}^2$, siendo \mathcal{W} un subconjunto abierto de \mathbb{R}^3 que contiene a $\mathcal{V} \cap \mathcal{M}$;
- (III) cada aplicación $f : \mathcal{U} \mapsto \mathcal{M}$ es una superficie parametrizada regular.

Cada una de tales aplicaciones $f : \mathcal{U} \mapsto \mathcal{M}$ se denomina carta local o sistema de coordenadas locales en un entorno de $p \in \mathcal{M}$.

Definición 1.1.3 (Vector normal unitario de la superficie)

Para una superficie parametrizada inyectiva $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ el campo de vectores normal y unitario o normal unitaria \vec{N} de la superficie está dado por

$$\vec{N}(u, v) = \frac{f_u(u, v) \times f_v(u, v)}{\|f_u(u, v) \times f_v(u, v)\|},$$

en aquellos puntos $(u, v) \in \mathcal{U}$ en los cuales $f_u(u, v) \times f_v(u, v)$ no se anula. Abreviadamente se suele escribir

$$\vec{N} = \frac{f_u \times f_v}{\|f_u \times f_v\|}.$$

Definición 1.1.4 (Ángulo)

El ángulo formado por dos superficies que se cortan en un punto p es igual al ángulo formado por sus planos tangentes (o sus rectas normales) en p .

Definición 1.1.5 (Envolvente)

Una familia de superficies uniparamétrica está descrita por una función diferenciable $F(x, y, z, \lambda) = 0$, donde λ es un parámetro. Cuando λ puede ser eliminado de las ecuaciones

$$F(x, y, z, \lambda) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{dF(x, y, z, \lambda)}{d\lambda} = 0,$$

obtenemos la envolvente de esta familia, como una superficie en forma implícita.

Definición 1.1.6 (Superficie de canal)

La envolvente de una familia uniparamétrica $t \mapsto S^2(t)$ de esferas en \mathbb{R}^3 se denomina superficie de canal. La curva formada por los centros de las esferas se denomina curva central de la superficie de canal. El radio de la superficie de canal es la función r tal que $r(t)$ es el radio de la esfera $S^2(t)$.

Definición 1.1.7 (Superficie paralela)

Sea $f : \mathcal{U} \mapsto \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada regular. Entonces la superficie parametrizada paralela a f a distancia $d \in \mathbb{R}$ es la superficie parametrizada definida por

$$f[d](u, v) = f(u, v) + d\vec{N}(u, v),$$

donde

$$\vec{N}(u, v) = \frac{f_u(u, v) \times f_v(u, v)}{\|f_u(u, v) \times f_v(u, v)\|}.$$

El parámetro d se denominará distancia offset.

Nota 1.1.8 Al referirnos a superficie paralela utilizaremos el término *d-offset* para abreviar.

Definición 1.1.9 (Inversión)

La inversión de \mathbb{R}^n con respecto a un punto $q \in \mathbb{R}^n$ con radio de inversión ρ es la aplicación inversión $[q, \rho] : \mathbb{R}^n \setminus q \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus q$ dada por:

$$\text{inversión}[q, \rho](p) = q + \frac{\rho^2(p - q)}{\|p - q\|^2}.$$

Llamamos q al centro de inversión o polo de una inversión.

1.2. Aplicación de Weingarten

Consideremos la aplicación de Weingarten $\mathcal{L} : T_p \rightarrow T_p$ definida del plano vectorial tangente en sí mismo. Conocemos dos matrices para \mathcal{L} :

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} L_1^1 & L_2^1 \\ L_1^2 & L_2^2 \end{pmatrix} = g^{-1}L, \text{ respecto de la base } \{f_u, f_v\},$$

siendo g la matriz de la primera forma fundamental de la superficie, y L la matriz de la segunda forma fundamental, y

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}, \text{ respecto de la base } \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}.$$

Como \mathcal{L} es un endomorfismo de un espacio vectorial, la traza y el determinante son independientes de la base escogida (son coeficientes del polinomio característico del endomorfismo y, por tanto no depende de la base).

Definición 1.2.1 Con las notaciones precedentes, se llaman:

- **Curvaturas principales:** los valores propios k_1, k_2 de \mathcal{L} .
- **Direcciones principales:** las rectas vectoriales generadas por los vectores propios \vec{e}_1, \vec{e}_2 , y son perpendiculares entre sí.

Definición 1.2.2 (Líneas de curvatura)

Toda curva γ contenida en la superficie, que en cada uno de sus puntos es tangente a una dirección principal.

Teorema 1.2.3 (Teorema de Olinde Rodrigues)

Sean γ una curva contenida en una superficie y \vec{N} el vector normal a la superficie. Entonces γ es línea de curvatura si y sólo si

$$\frac{d\vec{N}(\gamma(t))}{dt} \quad y \quad \frac{d\gamma(t)}{dt}$$

son vectores proporcionales en todo punto de la curva γ . Además, en tal caso,

$$\frac{d\vec{N}(\gamma(t))}{dt} = -k_i(\gamma(t)) \frac{d\gamma(t)}{dt}$$

siendo k_i la curvatura principal asociada a la curva.

1.3. Conjuntos focales

Dado un punto q en una superficie regular \mathcal{M} , denotaremos por L_q a la recta normal a \mathcal{M} en q ; entonces el vector normal a la superficie en q , \vec{N}_q , es un vector en L_q . Considerando un plano P que contiene a L_q , su intersección con la superficie \mathcal{M} será una curva plana C . Como \vec{N}_q es perpendicular a C en q , el centro de curvatura de C se encuentra en la recta que contiene a \vec{N}_q .

Los conjuntos focales son esenciales en geometría diferencial, ya que permiten clasificar superficies según la distribución de sus radios principales de curvatura. Su estudio revela la estructura local y global de la superficie, facilitando la identificación de superficies especiales como los cíclidos de Dupin, que poseen características geométricas distintivas.

Definición 1.3.1 (Intervalo focal/ Puntos focales)

Los centros de curvatura en q definen un subconjunto conexo F de L_q , llamado intervalo focal de \mathcal{M} en q . A los extremos de F se les denomina puntos focales de \mathcal{M} en q .

Definición 1.3.2 (Conjunto focal)

El conjunto focal de una superficie regular $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ es

$$Focal(\mathcal{M}) = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid p \text{ es un punto focal de algún } q \in \mathcal{M}\}.$$

En el caso de que $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ sea conexa, orientable y sin puntos umbílicos, el conjunto focal tiene dos componentes, una correspondiente a cada curvatura principal. Hay tres posibilidades:

- **Caso 1:** Cada componente del conjunto focal es una superficie.
- **Caso 2:** Una componente del conjunto focal es una curva y la otra una superficie.
- **Caso 3:** Cada componente del conjunto focal es una curva.

Nota 1.3.3 El Caso 3 es el de los cíclidos de Dupin. Ver Sección 2.1.

Hasta este punto, hemos establecido las definiciones clave y los conceptos geométricos necesarios para comprender los conjuntos focales y su relación con superficies regulares en \mathbb{R}^3 . Estas nociones preliminares proporcionan las bases teóricas para introducir los cíclidos de Dupin, que son el tema central de este trabajo. A partir de ahora, procederemos a explorar en detalle los cíclidos de Dupin y sus propiedades geométricas distintivas.

Capítulo 2

Cíclidos de Dupin

A principios del siglo XIX, Charles Dupin estudió una clase de superficies cuyas líneas de curvatura son circunferencias. Esta clase no sólo incluye conos, cilindros y toros, sino también nuevas superficies distintas. Dupin llamó cíclidos a estas superficies en su libro *Applications de Géométrie et de Méchanique* ([8]). Ahora existe una noción más general de cíclidos pero estas superficies suelen denominarse cíclidos de Dupin para rendir homenaje a este matemático.

En 1847, Liouville demostró que cualquier cíclido de Dupin es la imagen por inversión de un cilindro circular, un cono doble circular o un toro. En la Sección 2.3 se presentarán tres ejemplos.

James Clerk Maxwell desarrolló, en 1868, la construcción de un cíclido de Dupin como la envolvente de una familia de esferas cuyos centros se mueven sobre una elipse, una hipérbola o una parábola. Este es el desarrollo que se explicará a continuación. Para la elaboración de este capítulo se ha utilizado esencialmente [13], [4], además de [1].

2.1. Tipos de cíclidos de Dupin

A continuación se exponen diferentes definiciones de cíclido presentes en la literatura, desde la original dada por Dupin [8] hasta la última por Maxwell [15], junto a interpretaciones propias y mostrando la equivalencia entre ellas. La definición introducida por Dupin es la siguiente:

Definición 2.1 (Dupin [8]) *Un cíclido es la envolvente de una esfera variable que toca tres esferas fijas de manera continua.*

Posición	Descripción
$F_1F_2F_3(\emptyset)$	Las esferas fijas tocan a V desde el exterior de V .
$\emptyset(F_1F_2F_3)$	Las esferas fijas tocan a V desde el interior de V .
$F_1F_2(F_3)$	V contiene a F_3 pero ni a F_1 ni a F_2 .
$F_3(F_1F_2)$	V contiene a F_1 y F_2 pero no a F_3 .
$F_1F_3(F_2)$	V contiene a F_2 pero ni a F_1 ni a F_3 .
$F_2(F_1F_3)$	V contiene a F_1 y F_3 pero no a F_2 .
$F_2F_3(F_1)$	V contiene a F_1 pero ni a F_2 ni a F_3 .
$F_1(F_2F_3)$	V contiene a F_2 y F_3 pero no a F_1 .

Cuadro 2.1: Posiciones topológicas de la esfera variable V con respecto a las esferas fijas F_1, F_2, F_3 .

Una esfera variable V que toca tres esferas fijas F_1, F_2, F_3 puede ocupar ocho posiciones topológicas distintas, expuestas en el Cuadro 2.1 siguiendo la notación de [4]. Consideremos las posiciones $F_1F_3(F_2)$ y $F_2(F_1F_3)$. A medida que aumentamos gradualmente el radio de V mientras mantenemos la tangencia con las esferas fijas, el centro de V se aleja de F_2 , lo que provoca que V se expanda. A

medida que V sigue creciendo, eventualmente alcanza un punto en el que se vuelve tangente a F_1 y F_3 desde el interior, lo que da lugar a la transición a la posición $F_2(F_1F_3)$, donde V ahora contiene a F_1 y F_3 pero no a F_2 .

A medida que el radio de V aumenta, los puntos de tangencia en F_1 y F_3 se mueven hacia los polos. Inicialmente, en la posición $F_1F_3(F_2)$, los puntos de tangencia están cerca del centro de V , pero al expandirse, V acaba conteniendo a F_1 y F_3 desde el interior, alcanzando la posición $F_2(F_1F_3)$.

Este proceso muestra que ambas posiciones forman una serie continua de esferas, manteniendo la tangencia con las tres esferas fijas. La envolvente de esta serie es un cíclico, conforme a la definición de Cayley que introducimos a continuación, ya que el radio de V varía suavemente entre configuraciones con las mismas restricciones geométricas.

Definición 2.2 (Cayley [3]) *Un cíclico es la envolvente de una esfera variable perteneciente a una de las cuatro series de esferas que tocan tres esferas dadas. Equivalentemente,*

El desarrollo para las demás series es análogo, emparejando las posiciones $F_1F_2(F_3)$ y $F_3(F_1F_2)$ forman una serie; las esferas en las posiciones $F_1F_2F_3(\emptyset)$ y $\emptyset(F_1F_2F_3)$ forman otra serie; y las esferas en las posiciones $F_2F_3(F_1)$ y $F_1(F_2F_3)$ forman otra serie más. Por ejemplo, el caso de $F_1F_2F_3(\emptyset)$ y $\emptyset(F_1F_2F_3)$ sigue un proceso similar, que se detalla en [4]. Esta transición entre posiciones topológicas se ilustra en la Figura 2.1, realizada en Python [12] por la autora.

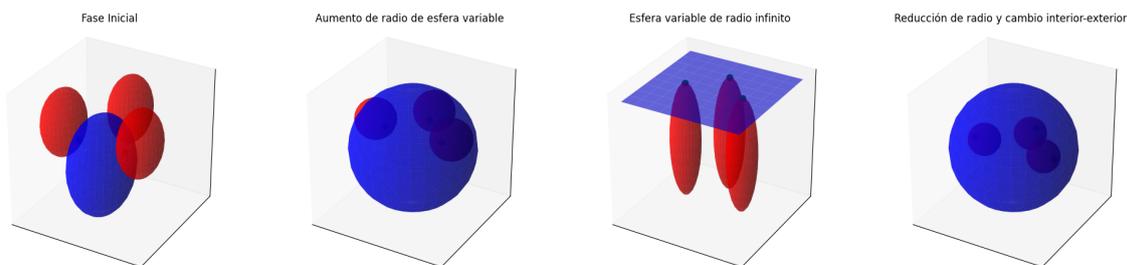


Figura 2.1: Transición entre $F_1F_2F_3(\emptyset)$ y $\emptyset(F_1F_2F_3)$, donde en rojo se muestran las esferas fijas y en azul la variable.

Para llegar a la equivalencia expuesta en la definición 2.2, consideramos una serie de esferas variables y sus círculos de intersección en el plano de los centros de las esferas fijas, invirtiendo los roles de esferas fijas y variables. Al hacerlo, obtenemos un nuevo cíclico, definido por dos esferas fijas, con la condición de que los centros de las esferas variables se mantengan en un mismo plano.

Desde esta última equivalencia, podemos obtener la definición expuesta en [15], que dice así:

Definición 2.3 (Maxwell [15]) *Un cíclico es una superficie, cuyas normales pasan por dos curvas fijas.*

La superficie canal de una serie de esferas se puede interpretar como el conjunto de los círculos de intersección entre esferas adyacentes, conocidos como círculos característicos. Las normales a una superficie canal pasan por estos círculos y, por tanto, por la curva fija. Si aplicamos esta idea a un cíclico, el envolvente de esferas variables genera una superficie canal. Si fijamos tres esferas de este envolvente y volvemos a aplicar la definición, obtenemos un segundo envolvente. Ambas superficies canal son complementarias y comparten un cíclico como superficie común. Las líneas de curvatura de ambas superficies canal coinciden con las del cíclico, y las normales a estas superficies pasan por dos curvas fijas, lo que conduce a la definición de Maxwell 2.3.

Las definiciones de Dupin, Cayley y Maxwell presentan varias similitudes fundamentales. En primer lugar, todas ellas conceptualizan los cíclicos en relación con esferas o superficies asociadas a esferas. Tanto Dupin como Cayley describen a los cíclicos como envolventes de esferas, mientras que

Maxwell se refiere a la relación entre las normales de la superficie y dos curvas fijas, que aunque más abstracto, sigue implicando una conexión profunda con la geometría de las esferas. Además, las tres definiciones subrayan la importancia de las propiedades geométricas intrínsecas de los cíclidos, estableciendo un vínculo entre estas superficies y otras figuras geométricas clave como esferas y cónicas.

Por otro lado, la definición de Maxwell proporciona una descripción basada en la posición de las normales respecto a dos curvas fijas, lo que la hace especialmente útil para análisis teóricos avanzados y aplicaciones en diseño geométrico asistido por computadora.

Vamos a dar, en primer lugar, varios tipos de cíclidos de Dupin y a obtener las ecuaciones paramétricas de dichas superficies. Se verá también que el conjunto focal de un cíclido de Dupin consta de dos curvas. Por tanto, un cíclido de Dupin es una superficie de canal de cualquiera de los componentes de su conjunto focal.

2.1.1. Cíclidos de tipo Elíptico-Hiperbólico

Sea la elipse en el plano XY dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1,$$

y sea la hipérbola en el plano XZ dada por

$$\frac{x^2}{c^2} - \frac{z^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Suponemos que $a > c > 0$. Como vemos en la Figura 2.2, la elipse y la hipérbola están contenidas en planos perpendiculares. Tenemos que un foco de la elipse es $(c, 0, 0)$ y se encuentra en la hipérbola, mientras que un foco de la hipérbola es $(a, 0, 0)$, y está en la elipse.

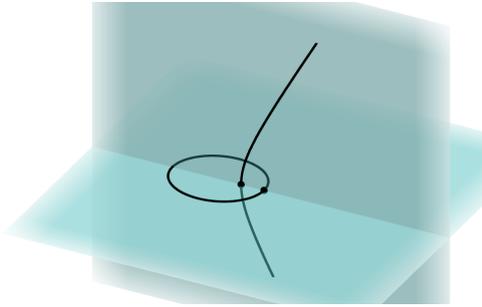


Figura 2.2: Elipse e hipérbola que forman el conjunto focal del cíclido elíptico-hiperbólico, en planos perpendiculares.

Lema 2.1.1.1 Sean $(x_1, y_1, 0)$ un punto de la elipse y $(x_2, 0, z_2)$ un punto de la hipérbola. la distancia entre estos puntos viene dada por la siguiente fórmula

$$d((x_1, y_1, 0), (x_2, 0, z_2)) = \left| \frac{c}{a}x_1 - \frac{a}{c}x_2 \right|. \quad (2.1)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} (d((x_1, y_1, 0), (x_2, 0, z_2)))^2 &= (x_1 - x_2)^2 + y_1^2 + z_2^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 + (a^2 - c^2) \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{c^2} - 1 \right) \\ &= x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - x_1^2 + \frac{c^2}{a^2}x_1^2 + \frac{a^2}{c^2}x_2^2 - x_2^2 \\ &= \frac{c^2}{a^2}x_1^2 - 2\frac{c}{a}x_1\frac{a}{c}x_2 + \frac{a^2}{c^2}x_2^2 = \left(\frac{c}{a}x_1 - \frac{a}{c}x_2 \right)^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, queda demostrada la igualdad (2.1). \square

A continuación, tenemos las parametrizaciones de la elipse y la hipérbola:

$$\begin{cases} (x_1, y_1, 0) = \alpha(u) = (a \cos u, b \operatorname{sen} u, 0), \\ (x_2, 0, z_2) = \beta(v) = (c \sec v, 0, b \tan v). \end{cases}$$

siendo $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, α la elipse y β la hipérbola. Tenemos $0 \leq u < 2\pi$ y restringimos nuestro análisis al segmento de la hipérbola en el cual $-\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}$ para garantizar que $\sec v$ sea positivo.

Lema 2.1.1.2 Sean $S_1(u)$ una esfera con radio $\rho_1(u)$ centrada en $\alpha(u)$, y $S_2(v)$ una esfera con radio $\rho_2(v)$ centrada en $\beta(v)$. Supongamos que las esferas $S_1(u)$ y $S_2(v)$ son tangentes en el punto (x_3, y_3, z_3) . Entonces existe k , que es constante con respecto a u y v , tal que

$$\rho_1(u) = -c \cos u + k \quad y \quad \rho_2(v) = a \sec v - k. \quad (2.2)$$

Demostración.

Tenemos

$$\begin{cases} d((x_1, y_1, 0), (x_3, y_3, z_3)) = \rho_1(u), \\ d((x_2, 0, z_2), (x_3, y_3, z_3)) = \rho_2(v). \end{cases} \quad (2.3)$$

Dado que $S_1(u)$ y $S_2(v)$ son tangentes en (x_3, y_3, z_3) , el centro de ambas esferas y el punto de tangencia están alineados, luego aplicando el Lema 2.1.1.1 se tiene que

$$\begin{aligned} \rho_1(u) + \rho_2(v) &= d((x_1, y_1, 0), (x_3, y_3, z_3)) + d((x_2, 0, z_2), (x_3, y_3, z_3)) \\ &= d((x_1, y_1, 0), (x_2, 0, z_2)) = \left| \frac{c}{a}x_1 - \frac{a}{c}x_2 \right| \\ &= |c \cos u - a \sec v| = a \sec v - c \cos u. \end{aligned}$$

De este modo,

$$\rho_1(u) + c \cos u = -\rho_2(v) + a \sec v. \quad (2.4)$$

Dado que el lado izquierdo de la ecuación (2.4) depende sólo de u , mientras que el lado derecho depende sólo de v , entonces las dos expresiones son iguales a una constante k y obtenemos (2.2):

$$\begin{cases} \rho_1(u) + c \cos u = k \Rightarrow \rho_1(u) = -c \cos u + k, \\ -\rho_2(v) + a \sec v = k \Rightarrow \rho_2(v) = a \sec v - k. \end{cases}$$

\square

Probemos ahora el recíproco del Lema 2.1.1.2.

Lema 2.1.1.3 Sea $S_1(u)$ una esfera con radio $\rho_1(u)$ centrada en $\alpha(u)$, y sea $S_2(v)$ una esfera con radio $\rho_2(v)$ centrada en $\beta(v)$. Supongamos que $\rho_1(u)$ y $\rho_2(v)$ están dados por 2.2 para algún k . Sea (x_3, y_3, z_3) un punto en la recta que une los puntos $\alpha(u)$ y $\beta(v)$, a una distancia $\rho_1(u)$ de $\alpha(u)$. Entonces la distancia entre los puntos (x_3, y_3, z_3) y $\beta(v)$ es $\rho_2(v)$. Además, $S_1(u)$ y $S_2(v)$ son tangentes en (x_3, y_3, z_3) .

Demostración.

A partir del Lema 2.1.1.1 se deduce que la distancia entre $\alpha(u)$ y $\beta(v)$ es

$$d((x_1, y_1, 0), (x_2, 0, z_2)) = \left| \frac{c}{a}x_1 - \frac{a}{c}x_2 \right| = |c \cos u - a \sec v| = a \sec v - c \cos u,$$

que es exactamente igual a $\rho_1(u) + \rho_2(v)$. Por tanto, se cumple (2.3). Esto sólo ocurre si $S_1(u)$ y $S_2(v)$ son tangentes en (x_3, y_3, z_3) . \square

Cuando el centro de la esfera $S_1(u)$ se mueve a lo largo de la elipse $\alpha(u)$, forma una superficie,

que es la envolvente de esa familia de esferas. Esta envolvente debe coincidir con la envolvente formada por la esfera $S_2(v)$ a medida que su centro se mueve a lo largo de la hipérbola $\beta(v)$. La superficie resultante se denomina cíclido de Dupin de tipo elíptico-hiperbólico. Depende de tres parámetros a , c y k , tales que $a > c > 0$ y $k \geq 0$. Para parametrizar el cíclido, definimos

$$x(u, v) = \alpha(u) + \rho_1(u) V(u, v) = \beta(v) - \rho_2(v) V(u, v),$$

donde $V(u, v)$ es un vector unitario y $0 \leq u, v < 2\pi$. Tenemos

$$0 = \alpha(u) - \beta(v) + (\rho_1(u) + \rho_2(v)) V(u, v),$$

de modo que

$$V(u, v) = -\frac{\alpha(u) - \beta(v)}{\rho_1(u) + \rho_2(v)}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} x(u, v) &= \alpha(u) - \rho_1(u) \left(\frac{\alpha(u) - \beta(v)}{\rho_1(u) + \rho_2(v)} \right) = \frac{\rho_2(v)\alpha(u) + \rho_1(u)\beta(v)}{\rho_1(u) + \rho_2(v)} \\ &= \frac{(-k + a \sec v)\alpha(u) + (k - c \cos u)\beta(v)}{a \sec v - c \cos u}. \end{aligned}$$

Multiplicamos numerador y denominador por $\cos v$ y denotamos por $e = a - k \cos v$ y $f = k - c \cos u$, obteniendo una parametrización:

$$\begin{aligned} x(u, v) &= \frac{e\alpha(u) + f \cos v \beta(v)}{a - c \cos u \cos v} = \frac{e(a \cos u, b \sin u, 0)}{a - c \cos u \cos v} + \frac{f \cos v (c \sec v, 0, b \tan v)}{a - c \cos u \cos v} \\ &= \left(\frac{cf + ae \cos u}{a - c \cos u \cos v}, \frac{be \sin u}{a - c \cos u \cos v}, \frac{bf \sin v}{a - c \cos u \cos v} \right). \end{aligned}$$

La representación implícita correspondiente es:

$$(x^2 + y^2 + z^2 + b^2 - k^2)^2 = 4(ax - ck)^2 + 4b^2y^2, \quad (2.5)$$

o equivalentemente

$$(x^2 + y^2 + z^2 - b^2 - k^2)^2 = 4(cx - ak)^2 - 4b^2z^2. \quad (2.6)$$

Este lema subraya la importancia de las relaciones de distancia entre los radios de las esferas, que permiten establecer condiciones precisas de tangencia en la mezcla de cuádricas.

Ejemplo 2.1.1.4 *En función de los valores de los parámetros, distinguimos:*

- *Cíclido anular.*

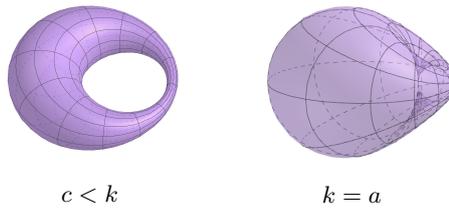


Figura 2.3: Cíclidos anulares.

- *Cíclido de huso.*

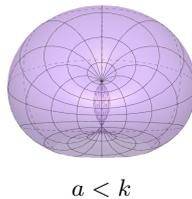


Figura 2.4: Cíclido de huso.

- *Cíclido con cuernos.*

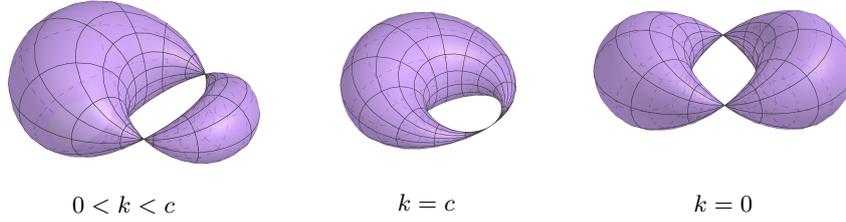


Figura 2.5: Cíclidos con cuernos.

La distinción entre cíclidos anulares, de huso y con cuernos pone de manifiesto la riqueza geométrica de los cíclidos de Dupin, permitiendo obtener formas que pueden integrarse eficazmente en aplicaciones geométricas más avanzadas.

2.1.2. Cíclidos de tipo Parabólico

Existe otro tipo de cíclido cuyo conjunto focal consta de dos parábolas. Sea la parábola en el plano XZ dada por

$$z = -\frac{x^2}{8a} + a,$$

y sea la parábola en el plano YZ dada por

$$z = \frac{y^2}{8a} - a.$$

Las parametrizaciones de las parábolas son:

$$\begin{cases} (x_1, 0, z_1) = \alpha(u) = \left(u, 0, -\frac{u^2}{8a} + a\right), \\ (0, y_2, z_2) = \beta(v) = \left(0, -v, \frac{v^2}{8a} - a\right). \end{cases}$$

El foco de α , $(0, 0, -a)$, se encuentra en $\beta(v)$, y el foco de β , $(0, 0, a)$, se encuentra en $\alpha(u)$, tal y como podemos ver en la Figura 2.6.

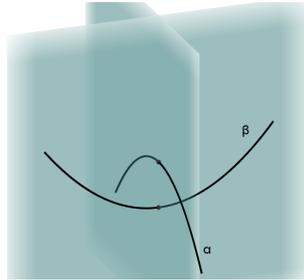


Figura 2.6: Parábolas que definen el conjunto focal de un cíclido parabólico, en planos perpendiculares.

Lema 2.1.2.1 Sean $S_1(u)$ una esfera con radio $\rho_1(u)$ centrada en $\alpha(u)$, y $S_2(v)$ una esfera con radio $\rho_2(v)$ centrada en $\beta(v)$. Supongamos que las esferas $S_1(u)$ y $S_2(v)$ son tangentes en el punto (x_3, y_3, z_3) . Entonces existe k , que es constante con respecto a u y v , tal que

$$\rho_1(u) = \frac{u^2}{8a} + a + k \quad y \quad \rho_2(v) = \frac{v^2}{8a} + a - k. \quad (2.7)$$

Demostración.

Tenemos

$$\begin{aligned}\|\alpha(u) - \beta(v)\|^2 &= \left\| \left(u, v, -\frac{u^2}{8a} - \frac{v^2}{8a} + 2a \right) \right\|^2 = u^2 + v^2 + \left(2a - \frac{1}{8a}(u^2 + v^2) \right)^2 \\ &= \frac{1}{64a^2} \left((u^2 + v^2)^2 + 32a^2(u^2 + v^2) + 256a^4 \right).\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\|\alpha(u) - \beta(v)\| = \frac{u^2 + v^2 + 16a^2}{8a}.$$

Además,

$$d((x_1, 0, z_1), (x_3, y_3, z_3)) = \rho_1(u)$$

y

$$d((0, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)) = \rho_2(v).$$

Dado que $S_1(u)$ y $S_2(v)$ son tangentes en (x_3, y_3, z_3) , el centro de ambas esferas y el punto de tangencia están alineados, luego tenemos

$$\begin{aligned}\rho_1(u) + \rho_2(v) &= d((x_1, 0, z_1), (x_3, y_3, z_3)) + d((0, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)) \\ &= d((x_1, 0, z_1), (0, y_2, z_2)) \\ &= \|\alpha(u) - \beta(v)\| = \frac{u^2 + v^2 + 16a^2}{8a},\end{aligned}$$

de modo que

$$\rho_1(u) - \frac{u^2}{8a} - a = -\rho_2(v) + \frac{v^2}{8a} + a. \quad (2.8)$$

Tal como en la prueba del Lema 2.1.1.2, el lado izquierdo de (2.8) depende sólo de u , mientras que el lado derecho depende sólo de v . Por tanto, la única posibilidad es que sean constantes de forma que:

$$\rho_1(u) - \frac{u^2}{8a} - a = -\rho_2(v) + \frac{v^2}{8a} + a = k,$$

con k constante, y obtenemos (2.7). □

Una fórmula para parametrizar un cíclido de Dupin de tipo parabólico sería:

$$x(u, v) = \left(\frac{a}{2} \frac{2v^2 + k(1 - u^2 - v^2)}{1 + u^2 + v^2}, au \frac{v^2 + k}{1 + u^2 + v^2}, av \frac{1 + u^2 - k}{1 + u^2 + v^2} \right).$$

con $-\infty < u, v < \infty$. Depende de dos parámetros a y k .

Una representación implícita correspondiente es

$$\left(x + \left(\frac{k}{2} - 1 \right) a \right) \left(x^2 + y^2 + z^2 - \frac{k^2 a^2}{4} \right) + az^2 = 0.$$

Ejemplo 2.1.2.2 *En función de los valores de los parámetros, tenemos:*

- Cíclido anular ($\frac{1}{2} \leq k < 1$).

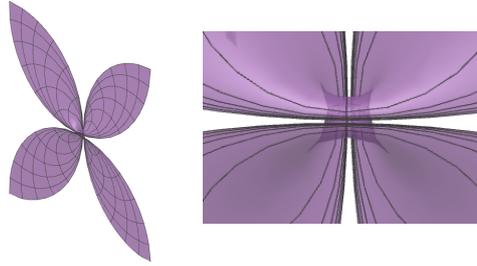


Figura 2.7: Cíclido anular con $k = \frac{1}{2}$.

- *Cíclido con cuernos* ($k = 1$).

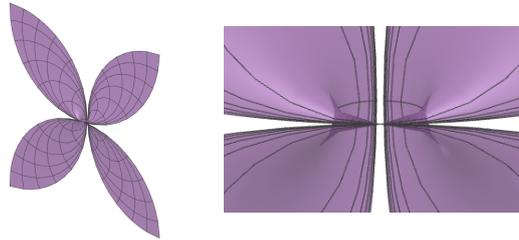


Figura 2.8: Cíclido con cuernos con $k = 1$.

- *Cíclido con cuernos* ($k > 1$).

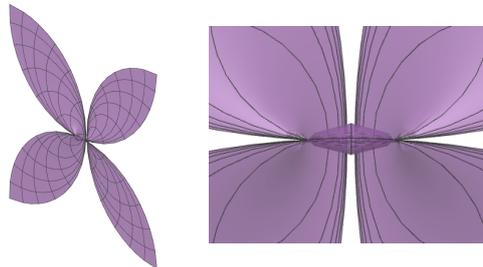


Figura 2.9: Cíclido con cuernos con $k = \frac{3}{2}$.

2.2. Propiedades de los cíclidos

Los cíclidos de Dupin son superficies geométricas especiales en el campo de CAGD. Estas superficies son importantes en la representación y modelado de objetos tridimensionales en la informática gráfica y la animación.

Las siguientes premisas y definiciones serán útiles para el desarrollo del trabajo.

- Las d -offsets de un cíclido son cíclidos. (Para que en la nueva superficie no aparezcan auto-intersecciones, no se puede tomar una distancia d superior al menor de los dos radios de las circunferencias extremas del cíclido original. Por otro lado, el sentido de la normal se escoge de modo que la offset permanezca en el mismo “lado” de la superficie original. Para verlo más detalladamente, se puede consultar [16]). Véase la Figura 2.13.

Demostración.

Una fórmula para parametrizar un cíclido de Dupin de tipo parabólico sería:

$$f(u, v) = \left(\frac{a}{2} \frac{2v^2 + k(1 - u^2 - v^2)}{1 + u^2 + v^2}, au \frac{v^2 + k}{1 + u^2 + v^2}, av \frac{1 + u^2 - k}{1 + u^2 + v^2} \right).$$

Vamos a calcular las derivadas parciales:

$$f_u(u, v) = \frac{a(v^2 + k)}{(1 + u^2 + v^2)^2} (-2u, 1 - u^2 + v^2, 2uv),$$

$$f_v(u, v) = \frac{a(1 + u^2 - k)}{(1 + u^2 + v^2)^2} (2v, 2uv, 1 + u^2 - v^2).$$

Hallamos el vector normal a la superficie:

$$\vec{N} = \frac{f_u \times f_v}{\|f_u \times f_v\|}.$$

$$f_u \times f_v = \frac{a^2(v^2 + k)(1 + u^2 - k)}{(1 + u^2 + v^2)^4} (1 - (u^2 + v^2)^2, 2u(1 + u^2 + v^2), -2v(1 + u^2 + v^2))$$

$$\|f_u \times f_v\| = \sqrt{(1 - (u^2 + v^2)^2)^2 + 4u^2(1 + u^2 + v^2)^2 + 4v^2(1 + u^2 + v^2)^2} = (1 + u^2 + v^2)^2$$

luego el vector normal unitario es

$$\vec{N} = \frac{1}{1 + u^2 + v^2} (1 - u^2 - v^2, 2u, -2v).$$

Tenemos que la d-offset en el caso parabólico es:

$f[d](u, v) = f(u, v) + d\vec{N}(u, v)$ con $d < \min\{\text{radios circunferencias extremas}\}$.

$$\begin{aligned} f[d](u, v) &= \left(\frac{\frac{a}{2}(2v^2 + k(1 - u^2 - v^2)) + d(1 - u^2 - v^2)}{1 + u^2 + v^2}, \frac{au(v^2 + k) + 2du}{1 + u^2 + v^2}, \frac{av(1 + u^2 - k) - 2dv}{1 + u^2 + v^2} \right) \\ &= \left(\frac{a}{2} \frac{2v^2 + \tilde{k}(1 - u^2 - v^2)}{1 + u^2 + v^2}, au \frac{v^2 + \tilde{k}}{1 + u^2 + v^2}, av \frac{1 + u^2 - \tilde{k}}{1 + u^2 + v^2} \right), \end{aligned}$$

que tiene la misma forma de cíclico parabólico con $\tilde{k} = k + \frac{2d}{a}$.

Una fórmula para parametrizar un cíclico de Dupin de tipo elíptico-hiperbólico sería:

$$f(u, v) = \left(\frac{k(c - a \cos u \cos v) + b^2 \cos u}{a - c \cos u \cos v}, \frac{b \sin u(a - k \cos v)}{a - c \cos u \cos v}, \frac{b \sin v(c \cos u - k)}{a - c \cos u \cos v} \right).$$

Vamos a calcular las derivadas parciales:

$$f_u(u, v) = \frac{b(a - k \cos v)}{(a - c \cos u \cos v)^2} (-b \sin u, a \cos u - c \cos v, -c \sin u \sin v),$$

$$f_v(u, v) = \frac{b(c \cos u - k)}{(a - c \cos u \cos v)^2} (-b \cos u \sin v, -a \sin u \sin v, a \cos v - c \cos u).$$

Hallamos el vector normal a la superficie:

$$\vec{N} = \frac{f_u \times f_v}{\|f_u \times f_v\|}.$$

$$f_u \times f_v = \frac{b^2(c \cos u - k)(a - k \cos v)}{(a - c \cos u \cos v)^3} (c - a \cos u \cos v, -b \sin u \cos v, b \sin v)$$

$$\|f_u \times f_v\| = \sqrt{(c - a \cos u \cos v)^2 + b^2 \sin^2 u \cos^2 v + b^2 \sin^2 v}$$

luego el vector normal unitario es

$$\vec{N} = \frac{1}{a - c \cos u \cos v} (c - a \cos u \cos v, -b \sin u \cos v, -b \sin v).$$

La d-offset en el caso elíptico-hiperbólico sería:

$f[d](u, v) = f(u, v) + d\vec{N}(u, v)$ con $d < \min\{\text{radios circunferencias extremas}\}$.

$$\begin{aligned} f[d](u, v) &= \left(\frac{k(c - a \cos u \cos v) + b^2 \cos u + d(c - a \cos u \cos v)}{a - c \cos u \cos v}, \right. \\ &\quad \left. \frac{b \sin u(a - k \cos v) + d(-b \sin u \cos v)}{a - c \cos u \cos v}, \frac{b \sin v(c \cos u - k) + d(-b \sin v)}{a - c \cos u \cos v} \right) \\ &= \left(\frac{\tilde{k}(c - a \cos u \cos v) + b^2 \cos u}{a - c \cos u \cos v}, \frac{b \sin u(a - \tilde{k} \cos v)}{a - c \cos u \cos v}, \frac{b \sin v(c \cos u - \tilde{k})}{a - c \cos u \cos v} \right), \end{aligned}$$

que tiene la misma forma de cíclico elíptico-hiperbólico con $\tilde{k} = k + d$. \square

- Todas las líneas de curvatura de un cíclico son circunferencias. (Se obtienen tomando u o v , variables de la parametrización del cíclico, constante).

Demostración.

Se va a demostrar para el caso de que la variable u tome un valor constante y sería análogo para el caso v constante.

Aplicamos el Teorema de Olinde Rodrigues:

En el caso parabólico tenemos:

$$f(u, v) = \left(\frac{a}{2} \frac{2v^2 + k(1 - u^2 - v^2)}{1 + u^2 + v^2}, au \frac{v^2 + k}{1 + u^2 + v^2}, av \frac{1 + u^2 - k}{1 + u^2 + v^2} \right).$$

$$\vec{N} = \frac{1}{1 + u^2 + v^2} (1 - u^2 - v^2, 2u, -2v).$$

Tomando $u = u_0$ fijo, $v \in [0, 2\pi)$, tenemos una de las familias de circunferencias

$$f(u_0, v) = \left(\frac{a}{2} \frac{2v^2 + k(1 - u_0^2 - v^2)}{1 + u_0^2 + v^2}, au_0 \frac{v^2 + k}{1 + u_0^2 + v^2}, av \frac{1 + u_0^2 - k}{1 + u_0^2 + v^2} \right).$$

$$\vec{N}(f(u_0, v)) = \frac{1}{1 + u_0^2 + v^2} (1 - u_0^2 - v^2, 2u_0, -2v).$$

Derivando, obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial v} (f(u_0, v)) = \frac{a(1 - k + u_0^2)}{(1 + u_0^2 + v^2)^2} (2v, 2vu_0, 1 + u_0^2 - v^2)$$

$$\frac{\partial}{\partial v} (\vec{N}(f(u_0, v))) = \frac{-2}{(1 + u_0^2 + v^2)^2} (2v, 2vu_0, 1 + u_0^2 - v^2)$$

Y se ve que efectivamente son proporcionales, de hecho:

$$\frac{\partial}{\partial v} (\vec{N}(f(u_0, v))) = \frac{-2}{a(1 - k + u_0^2)} \frac{\partial}{\partial v} (f(u_0, v)).$$

Por otro lado, en el caso elíptico-hiperbólico, tenemos:

$$f(u, v) = \left(\frac{k(c - a \cos u \cos v) + b^2 \cos u}{a - c \cos u \cos v}, \frac{b \sin u(a - k \cos v)}{a - c \cos u \cos v}, \frac{b \sin v(c \cos u - k)}{a - c \cos u \cos v} \right).$$

$$\vec{N} = \frac{1}{a - c \cos u \cos v} (c - a \cos u \cos v, -b \sin u \cos v, -b \sin v).$$

Tomando $u = u_0$ fijo, $v \in [0, 2\pi)$, tenemos una de las familias de circunferencias

$$f(u_0, v) = \left(\frac{k(c - a \cos u_0 \cos v) + b^2 \cos u_0}{a - c \cos u_0 \cos v}, \frac{b \sin u_0 (a - k \cos v)}{a - c \cos u_0 \cos v}, \frac{b \sin v (c \cos u_0 - k)}{a - c \cos u_0 \cos v} \right).$$

$$\vec{N}(f(u_0, v)) = \frac{1}{a - c \cos u_0 \cos v} (c - a \cos u_0 \cos v, -b \sin u_0 \cos v, -b \sin v).$$

Derivamos y por cálculos directos obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial v}(f(u_0, v)) = \frac{k - c \cos u_0}{(a - c \cos u_0 \cos v)^2} (b^2 \cos u_0 \sin v, ab \sin u_0 \sin v, bc \cos u_0 - ab \cos v)$$

$$\frac{\partial}{\partial v}(\vec{N}(f(u_0, v))) = \frac{1}{(a - c \cos u_0 \cos v)^2} (b^2 \cos u_0 \sin v, ab \sin u_0 \sin v, bc \cos u_0 - ab \cos v)$$

Y se ve que efectivamente son proporcionales, de hecho:

$$\frac{\partial}{\partial v}(\vec{N}(f(u_0, v))) = \frac{1}{k - c \cos u_0} \frac{\partial}{\partial v}(f(u_0, v)).$$

□

- Un cíclido tiene dos planos de simetría perpendiculares. Los centros de las esferas de las familias que envuelven al cíclido se encuentran en estos planos a lo largo de una elipse o una hipérbola según el plano. Estos planos se denominan plano de la hipérbola y plano de la elipse. Ver Figura 2.11.
- Las líneas de curvatura que provienen de la familia de las esferas con centro en la hipérbola se denominan circunferencias latitudinales. Las circunferencias procedentes de la familia con centro en la elipse son circunferencias longitudinales. Véase la Figura 2.10.
- La intersección de cada plano de simetría con el cíclido contiene dos circunferencias especiales llamadas circunferencias extremas. Las circunferencias extremas en el plano de la elipse son las circunferencias latitudinales máximas y mínimas. De manera similar, las circunferencias extremas en el plano de la hipérbola son las circunferencias longitudinales máximas y mínimas. Estas circunferencias extremas pueden obtenerse a partir del cíclido tomando $u = 0$ o $u = \pi$ o $v = 0$ o $v = \pi$. Ver Figura 2.12.

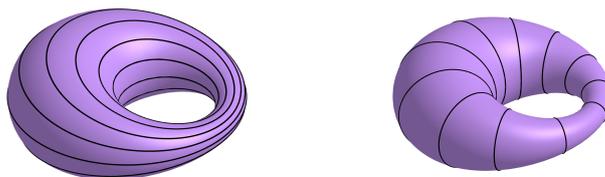


Figura 2.10: Las líneas de curvatura latitudinales (circunferencias latitudinales) y las líneas de curvatura longitudinales (circunferencias longitudinales) de un cíclido anular, respectivamente.

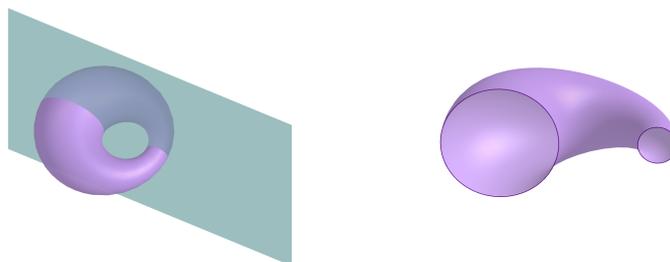


Figura 2.11: Corte de un cíclido anular por su plano de simetría $P_y : (y = 0)$.

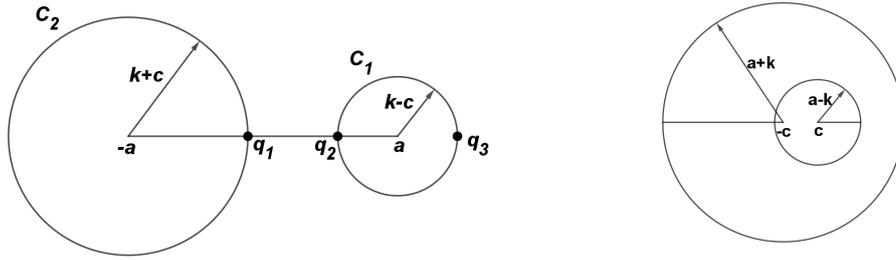


Figura 2.12: Esta figura muestra las dos circunferencias extremas c_1 y c_2 al cortar el cíclico por cada uno de sus planos de simetría, así como el significado geométrico de los parámetros del cíclico.

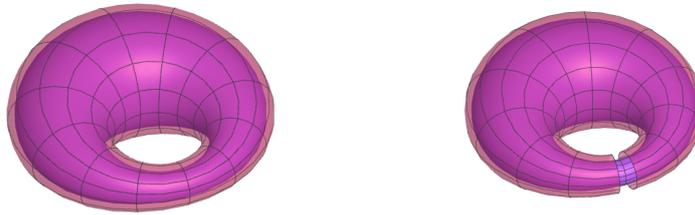


Figura 2.13: Esta figura muestra un cíclico anular y una de sus offsets, siendo el valor de los parámetros $a = 12$, $c = 3$, $k = 5$, $d = 1$.

2.3. Construcción de cíclicos usando inversiones

Una inversión de centro q y radio ρ en \mathbb{R}^3 (ver Definición 2.3), transforma rectas o circunferencias en rectas o circunferencias, dependiendo de que la recta o circunferencia inicial pase o no por el punto q .

Si $q = (0, 0, 0)$, dada una superficie parametrizada por $f(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t))$,

$$\text{inversión}[q, \rho](f(s, t)) = \frac{\rho^2 \dot{(x(s, t), y(s, t), z(s, t))}}{x(s, t)^2 + y(s, t)^2 + z(s, t)^2}.$$

A modo de ejemplo, aplicaremos la inversión con centro en el origen a un cilindro circular cuyo eje no pasa por el origen (ver Figura 2.14), la inversión a un cilindro circular con centro en el cilindro cuyo eje no pasa por el origen (ver Figura 2.15) y a un toro cuyo eje no pasa por el origen (ver Figura 2.16). En ambos casos se observará que el resultado de la transformación es un cíclico.

2.3.1. Inversión de un cilindro circular

Sea S el cilindro parametrizado por $f(s, t) = (\rho \cos(t), y_0 + \rho \sin(t), s)$, con y_0 una constante positiva y $0 \leq t \leq 2\pi$. Entonces

$$\text{inversión}[(0, 0, 0), \rho](f(s, t)) = \frac{\rho^2 (\rho \cos(t), y_0 + \rho \sin(t), s)}{\rho^2 + y_0^2 + 2\rho y_0 \sin(t) + s^2}.$$

Las líneas de curvatura del cilindro se transforman en líneas de curvatura del cíclico. Las que son circunferencias se transforman en circunferencias latitudinales y las que son rectas se transforman en circunferencias meridionales.

2.3.2. Inversión de un toro

Sea T el toro parametrizado por $((R + r \cos(t)) \cos(s), y_0 + (R + r \cos(t)) \sin(s), r \sin(t))$ donde $0 \leq t \leq 2\pi, 0 \leq s \leq 2\pi, y_0, R$ y r son constantes positivas.

El resultado de la inversión con centro $(0, 0, 0)$ y radio ρ es el siguiente cíclido:

$$\frac{\rho^2((R + r \cos(t)) \cos(s), y_0 + (R + r \cos(t)) \sin(s), r \sin(t))}{((R + r \cos(t))^2 \cos(s)^2 + (y_0 + (R + r \cos(t)) \sin(s))^2 + r^2 \sin(t)^2)}$$

Los paralelos $t = cte.$ del toro se transforman en paralelos del cíclido y los meridianos $s = cte.$ se transforman en los meridianos del cíclido.

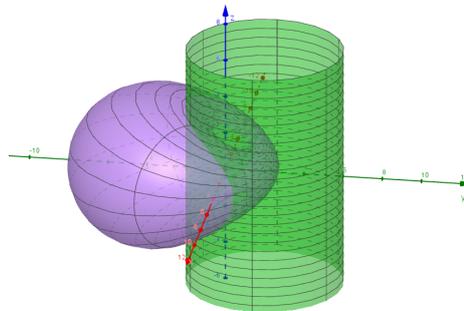


Figura 2.14: Cíclido como resultado de la inversión con centro en el origen a un cilindro circular cuyo eje no pasa por el origen. Si $R = q$, el centro de inversión está en el cilindro y el resultado de la inversión es un cíclido de anillo parabólico.

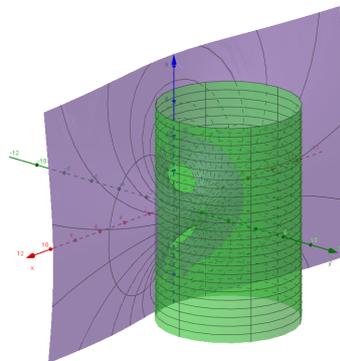


Figura 2.15: Cíclido como resultado de la inversión a un cilindro circular con centro de inversión en el cilindro, cuyo eje no pasa por el origen y el resultado de la inversión es un cíclido de anillo parabólico. En este caso, $R = q$.

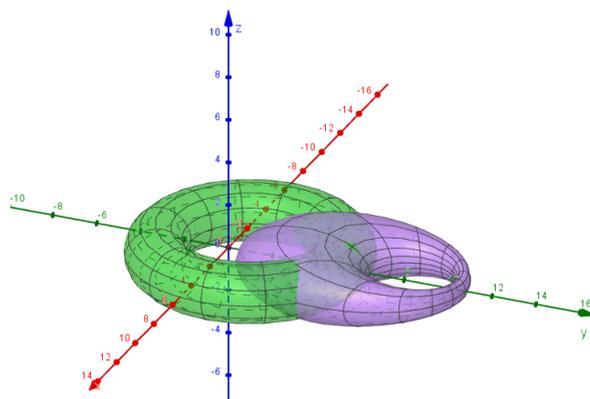


Figura 2.16: Cíclido como resultado de la inversión con centro en el origen a un toro cuyo eje no pasa por el origen.

La inversión de un cilindro circular demuestra cómo las líneas de curvatura se preservan en forma, transformándose en circunferencias latitudinales y meridionales en el cíclido, lo que resalta la simetría de estas superficies.

Capítulo 3

Mezcla con cíclidos: requisitos previos

Antes de analizar los casos prácticos de mezcla entre los distintos tipos de cuádricas naturales, es necesario estudiar las condiciones previas que deben cumplir dichas cuádricas y los cíclidos que se quieran utilizar como superficies de mezcla.

Para la elaboración de este capítulo se ha consultado fundamentalmente [1].

3.1. Preliminares

Para clasificar mezclas con cíclidos, emplearemos teoremas claves como el siguiente:

Teorema 3.1.1 *Si un cíclido C y una cuádrica Q son tangentes a lo largo de su curva de intersección, entonces esta curva es una línea de curvatura del cíclido.*

Demostración.

Consideramos un cíclido C y una cuádrica Q , así como todos los planos que son tangentes a ambas superficies en la región de interés. En el cíclido, los puntos de tangencia de estos planos definen una línea de curvatura del cíclido. Por lo tanto, si Q y C son tangentes a lo largo de una curva, los planos tangentes deben coincidir en esa curva, lo que implica que la curva es una línea de curvatura del cíclido C . \square

Nota 3.1.2 *Las cuádricas naturales son el plano, la esfera, el cilindro circular y el cono circular.*

Nota 3.1.3 *Nos referiremos a cilindro circular y cono circular como cilindro y cono, respectivamente. Estas cuádricas naturales son axiales.*

Hacemos las siguientes observaciones que serán útiles para gran parte de lo que sigue.

Observación 3.1.4 *Cada curva en un plano (respectivamente esfera) es una línea de curvatura del plano (respectivamente esfera).*

Observación 3.1.5 *Las líneas de curvatura de un cono o cilindro Q son rectas y circunferencias. Las líneas de curvatura circulares corresponden a las circunferencias obtenidas al cortar Q con planos perpendiculares a su eje. Las líneas de curvatura rectas se obtienen al cortar Q con planos que contienen el eje de Q .*

Teorema 3.1.6 (Teorema de Joachimsthal) *(Extraído de [5]).*

Sea α una curva contenida en la intersección de dos superficies regulares $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \subset \mathbb{R}^3$. Denotemos por \vec{N}_i la normal unitaria de \mathcal{M}_i , $i = 1, 2$. Supongamos que las superficies \mathcal{M}_1 y \mathcal{M}_2 se cortan formando un ángulo constante a lo largo de α , es decir, $\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2$ es constante a lo largo de α . Entonces α es una línea de curvatura sobre \mathcal{M}_1 si y sólo si es una línea de curvatura sobre \mathcal{M}_2 .

Demostración.

A lo largo de la curva intersección se verifica

$$0 = \frac{d}{dt}(\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2) = \left(\frac{d}{dt}\vec{N}_1\right) \cdot \vec{N}_2 + \vec{N}_1 \cdot \left(\frac{d}{dt}\vec{N}_2\right). \quad (3.1)$$

Supongamos que la curva de intersección α es una línea de curvatura sobre \mathcal{M}_1 . Entonces, por el Teorema de Olinde Rodrigues, sabemos que se cumple:

$$\frac{d}{dt}\vec{N}_1 = -k_1\alpha', \quad (3.2)$$

donde k_1 es una curvatura principal de \mathcal{M}_1 .

Veamos que α' es ortogonal a \vec{N}_2 :

Como $\alpha \subset \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$, a su vez es una curva contenida en la superficie \mathcal{M}_2 . Sea p un punto de \mathcal{M}_2 , y $T_p\mathcal{M}_2$ el plano tangente. Como el vector tangente $\vec{t} \in T_p\mathcal{M}_2$, tenemos que $\vec{t} \perp \vec{N}_2 \Rightarrow \vec{t} \cdot \vec{N}_2 = 0 \Rightarrow \alpha' \cdot \vec{N}_2 = 0$.

Luego de (3.1) y (3.2) deducimos

$$\vec{N}_1 \cdot \left(\frac{d}{dt}\vec{N}_2\right) = 0. \quad (3.3)$$

Veamos que $\frac{d}{dt}\vec{N}_2$ es también perpendicular a \vec{N}_2 :

$$\frac{d}{dt}\vec{N}_2 \cdot \vec{N}_2 = \left(-k_{n,2}\vec{t} + \tau_{g,2}\vec{S}\right) \cdot \vec{N}_2 = -k_{n,2}\vec{t} \cdot \vec{N}_2 + \tau_{g,2}\vec{S} \cdot \vec{N}_2 \stackrel{(*)}{=} \stackrel{(**)}{=} 0.$$

siendo \vec{S} el vector normal intrínseco a la curva, $k_{n,2}$ la curvatura normal y $\tau_{g,2}$ la torsión geodésica, donde

$$\begin{cases} (*_1) \vec{t} \cdot \vec{N}_2 = 0, \\ (*_2) \vec{S} \perp \vec{N}_2. \end{cases}$$

De (3.3) se sigue que

$$\frac{d}{dt}\vec{N}_2 = -k_2\alpha',$$

para algún k_2 . En otras palabras, α es una línea de curvatura sobre \mathcal{M}_2 . □

Dos superficies que se cortan tangencialmente forman un ángulo 0 o π . Por los teoremas 3.1.6 y 3.1.1, si un cíclido y una cuádrca natural se cortan tangencialmente, la curva de intersección debe ser una línea de curvatura de ambas superficies. Como las líneas de curvatura de un cíclido son las circunferencias latitudinales y longitudinales, el problema de la mezcla de dos cuádras naturales usando un cíclido solo requiere encontrar las condiciones bajo las cuales un cíclido y una cuádrca natural se cortan tangencialmente en una línea de curvatura circular de ambas superficies.

3.2. Definición de mezcla

La mezcla entre dos superficies regulares que se cortan S y T consiste en la construcción de una tercera superficie regular M que corta tangencialmente a S y a T . La superficie de mezcla M tendrá dos bordes, uno que corta tangencialmente a S y el otro que corta tangencialmente a T .

Observación 3.2.1 *En el estudio de la interacción entre un cíclido no singular C y una cuádrca natural axial Q , uno de los aspectos importantes es la tangencia a lo largo de una línea de curvatura L .*

Definamos \vec{N}_c como la normal a la superficie del cíclido C y \vec{N}_q como la normal a la superficie de la cuádrca Q , ambos apuntando hacia el exterior de sus respectivas superficies en los puntos donde son tangentes a lo largo de L .

A lo largo de la línea de curvatura L , las normales \vec{N}_c y \vec{N}_q deben apuntar en la misma dirección o en direcciones opuestas. Además, el Teorema 3.1.6 asegura que el signo del producto escalar entre \vec{N}_c y \vec{N}_q no puede cambiar a lo largo de L , dado que no hay puntos singulares en C . Esto significa que la relación angular entre las normales se mantiene constante a lo largo de L .

Proposición 3.2.2 *Supongamos que tenemos un cíclido no singular C y consideremos una esfera cualquiera S que es parte de la familia F de esferas que envuelven a C , con centros en la elipse de C . Siempre existe otra esfera S_0 en la misma familia F tal que S_0 no corta a S .*

Demostración.

Para probar esta proposición, partimos de la definición de la familia de esferas F . Cada esfera en F tiene su centro en la elipse descrita por el cíclido C . Consideramos una esfera específica S en esta familia y queremos encontrar otra esfera S_0 en la misma familia que no corte a S .

Elegimos un plano P_e que contiene la elipse de C y dos circunferencias extremas c_1 y c_2 en P_e , de forma que c_1 está contenida en c_2 . Seleccionamos una recta L que pasa por el centro de c_1 y que no corta a S . Luego, elegimos una esfera S_0 de F que esté completamente al otro lado de L respecto a S en P_e , asegurando que S_0 sea tangente a L . Esta construcción garantiza que S_0 no corta a S . \square

Lema 3.2.3 *Supongamos que una cuádrlica natural axial Q es tangente a un cíclido no singular C a lo largo de una curva. Entonces, C se encuentra completamente dentro o completamente fuera de Q si y sólo si C y Q se cortan a lo largo de una línea de curvatura latitudinal de C .*

Demostración.

Supongamos que el cíclido C y la cuádrlica Q son tangentes a lo largo de una línea de curvatura longitudinal L en C . Las circunferencias extremas de C , denotadas como c_1 y c_2 , están en el plano de la elipse P_e , donde c_1 está contenida en c_2 . La proyección de Q en P_e se asemeja a dos rectas, una tangente a c_1 en el punto q_1 y la otra tangente a c_2 en el punto q_2 . Ver Figura 3.1.

Estas rectas determinan la posición relativa de Q respecto a C . La recta que va desde la intersección de Q con P_e y es tangente a c_2 se encuentra completamente fuera de C , mientras que la recta tangente a c_1 está dentro de C , cerca del punto q_1 . Esto indica que Q se encuentra tanto dentro como fuera de C cerca de L .

Ahora, supongamos que un cíclido C y una cuádrlica natural axial Q son tangentes a lo largo de una línea de curvatura latitudinal L . Sea S la esfera de la familia de esferas que envuelve a Q y que genera L y sea F la familia de esferas que envuelve a C con sus centros en la elipse. Cada esfera de F genera una línea de curvatura longitudinal, por lo que cada esfera de F es tangente a Q , y por lo tanto a S , en un punto de L (donde L y la línea de curvatura longitudinal se cortan). Sea S_0 cualquier esfera de F . Dado que S y S_0 son tangentes en algún punto p , tenemos una de las tres condiciones siguientes:

- (1) ni S ni S_0 está contenida una dentro de la otra,
- (2) S está contenida dentro de S_0 , o
- (3) S_0 está contenida dentro de S .

Ver Figura 3.2.

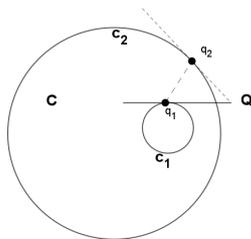


Figura 3.1: La cuádrlica natural axial Q es tangente a C a lo largo de la línea de curvatura longitudinal L en P_e .

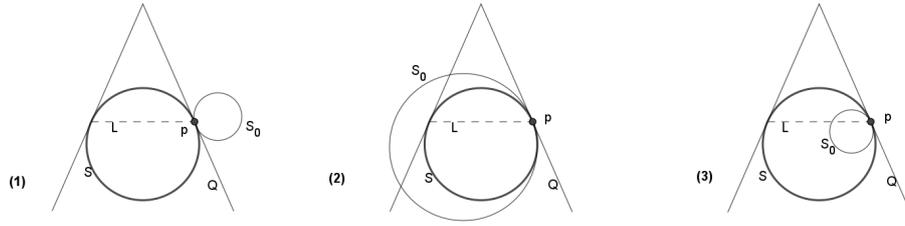


Figura 3.2: Diferentes posibilidades de las esferas tangentes.

Dentro del caso (1) se tiene ni S ni S_0 se encuentra una dentro de la otra. Entonces las normales a C y Q apuntan en direcciones opuestas a p . Dado que S_0 se encuentra en un lado del plano tangente a p y Q se encuentra en el otro, S_0 se encuentra completamente fuera de Q . Como en el caso (1) las normales a Q y a C apuntan en direcciones opuestas y en los casos (2) y (3) las normales apuntan en las mismas direcciones, usando la Observación 3.2.1 vemos que cada esfera de F debe estar completamente fuera de Q . Entonces, C está completamente fuera de Q .

Veamos el caso (2). Si S está contenida dentro de S_0 , entonces L está contenida dentro de S_0 , por lo que cada esfera de F se corta con S_0 . Según la Proposición 3.2.2, esto no puede suceder. Por tanto, el caso (2) no se da.

Consideremos por último el caso (3). S_0 está contenida dentro de S , por lo que las normales a C y Q apuntan en la misma dirección a p . Por la Observación 3.2.1, y el hecho de que el caso (2) no se da, tenemos que todas las esferas de F deben estar dentro de S . Entonces, C está dentro de Q . \square

Observación 3.2.4 *Un cíclico con cuernos nunca puede ser una superficie de mezcla.*

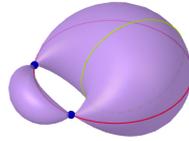


Figura 3.3: Los puntos azules muestran dónde se encuentran las singularidades del cíclico con cuernos. Estas singularidades son las que impiden que el cíclico con cuernos sea una superficie de mezcla, ya que la suavidad de la superficie se ve interrumpida en estos puntos.

Esta observación se basa en el hecho de que un cíclico con cuernos, debido a sus propiedades geométricas, no puede satisfacer las condiciones para ser una superficie de mezcla en la forma descrita por las definiciones y teoremas anteriores. Además, todas las líneas de curvatura latitudinales pasan por puntos singulares del cíclico con cuernos, lo que impide que pueda ser clasificado como una superficie de mezcla.

A partir de ahora, siempre que hablemos de cíclicos nos referiremos a cíclicos no singulares a no ser que se indique lo contrario.

Proposición 3.2.5 *Supongamos que un cíclico C y una cuádrlica natural Q son tangentes a lo largo de una línea de curvatura latitudinal. Entonces, C se encuentra completamente dentro o completamente fuera de Q .*

Demostración.

Por hipótesis, el cíclico C y la cuádrlica Q son tangentes a lo largo de una línea de curvatura latitudinal en C . Esta línea de curvatura latitudinal es una curva en C donde C y Q se tocan, pero no se cortan. Consideramos la familia de esferas F que envuelven al cíclico C . Cada esfera en F tiene su centro en la elipse de C . Dada una esfera específica S en F , examinamos cómo esta esfera interactúa

con Q .

Dado que S es parte de la familia F , sus centros están en la elipse de C . Si S no corta a Q , entonces no hay intersección entre S y Q en la región de tangencia. Para verificar esto, necesitamos analizar las posibles posiciones relativas entre la esfera S y la cuádrica Q .

Elegimos una segunda esfera S_0 en la familia F tal que S_0 no corta a S . La elección de S_0 se basa en la posición relativa a S y a la cuádrica Q . Si S_0 está completamente al otro lado de la línea de curvatura latitudinal L en relación con S , se garantiza que S_0 no cortará a S . La posición de S_0 debe ser tal que no corte a S . Esto significa que S_0 debe estar fuera de la región en la que S toca a Q . Para cumplir esto, S_0 se elige de manera que esté en una región de F que no interseca la región de tangencia entre S y Q .

Se debe verificar que S_0 no corta a S . Esto se puede hacer evaluando la posición de S_0 en relación con S y asegurando que el centro de S_0 se encuentra en una región que no tiene intersección con S .

□

Teniendo en cuenta la Proposición 3.2.5, restringimos las mezclas a que se realicen a lo largo de líneas de curvatura latitudinales del cíclido de mezcla.

Definición 3.2.6 (Mezcla con cíclidos)

Un cíclido no singular C mezcla dos cuádricas naturales P y Q que se cortan si

- (1) la curva de la intersección de P y Q , L , no está vacía y es cerrada,
- (2) C es tangente a cada cuádrica a lo largo de una línea de curvatura latitudinal, y
- (3) en el caso de que alguna de las cuádricas sea axial, L debe rodear el eje de cada cuádrica natural axial (un cono o un cilindro) que se está mezclando.

Se hace la siguiente distinción adicional entre mezclas interiores, exteriores y mixtas.

Definición 3.2.7 (Mezcla interior/exterior/mixta con cíclidos)

Una mezcla con cíclidos es una mezcla interior (respectivamente exterior) cuando el cíclido está contenido en el interior (respectivamente exterior) de ambas cuádricas que mezcla. Una mezcla con cíclidos mixta es aquella en la que el cíclido se encuentra dentro de una cuádrica y fuera de la otra.

Definición 3.2.8 (Unión con cíclidos)

Un cíclido no singular C une dos cuádricas naturales P y Q si

- (1) C es tangente a ambas cuádricas a lo largo de líneas de curvatura longitudinales, o
- (2) C es tangente a ambas cuádricas a lo largo de líneas de curvatura latitudinales y
 - P y Q no se cortan, o
 - en el caso de que alguna de las cuádricas sea axial, la curva de intersección de las cuádricas, L , no se envuelve alrededor del eje de la cuádrica natural axial que se está uniendo.

La clasificación entre mezclas interiores, exteriores y mixtas ofrece flexibilidad en el diseño geométrico, permitiendo adaptar la mezcla de cíclidos a diferentes configuraciones geométricas según la disposición de las cuádricas.

3.3. Las circunferencias extremas

La construcción de los cíclidos depende de elegir adecuadamente las circunferencias que servirán como circunferencias extremas ya que deben cumplir una serie de condiciones para obtener un cíclido de mezcla. Posteriormente, utilizaremos estas condiciones para construir cíclidos tangentes a una cuádrica específica.

3.3.1. Las circunferencias extremas del cíclido anular

En primer lugar, veamos las condiciones que deben cumplir las circunferencias extremas para garantizar que sea un cíclido de mezcla.

Lema 3.3.1.1 *Dados un plano y dos circunferencias c_1 y c_2 en P_h , las circunferencias c_1 y c_2 determinan un cíclido no singular con ellas como circunferencias extremas si y sólo si*

- (1) c_1 y c_2 no se cortan, y
 (2) ni c_1 ni c_2 está contenida una dentro de la otra.

El cíclico determinado es único.

Demostración.

Sea r_i el radio de c_i , y supongamos sin pérdida de generalidad que $r_2 \geq r_1 > 0$.

Sabemos que el cíclico de Dupin tiene tres parámetros a , c y k que determinan su forma, con $a^2 > c^2$. El parámetro b se define como $b = \sqrt{a^2 - c^2}$. En su posición estándar, el cíclico se representa algebraicamente por (2.5) o equivalentemente por (2.6).

Consideramos estos parámetros como positivos ya que cambiar el signo de a, b, c o k solo refleja el cíclico a través del plano $x = 0$.

Para asegurar que el cíclico está determinado de forma única, calculamos sus parámetros. El parámetro a es la mitad de la distancia entre los centros de c_1 y c_2 . Como $r_2 = k + c$ y $r_1 = k - c$, entonces $k = \frac{r_1 + r_2}{2}$ y $c = \frac{r_2 - r_1}{2}$.

Definimos el siguiente sistema de coordenadas en P_h . Dejamos que el eje x se alinee con el vector desde el centro de c_2 hasta el centro de c_1 , colocando el centro de c_2 en el punto $(-a, 0)$.

Sean q_1 el punto de c_2 más cercano al centro de c_1 , q_2 el punto de c_1 más cercano al centro de c_2 , y q_3 el punto de c_1 más alejado del centro de c_2 . Ver Figura 2.12. Entonces

$$q_1 = ((k + c) - a, 0), \quad q_2 = (a - (k - c), 0), \quad y \quad q_3 = (a + (k - c), 0).$$

Para demostrar que C está bien definido, comprobamos que c_2 no contiene a c_1 . Esto se cumple si q_3 se encuentra a la derecha de q_1 , lo cual se traduce en la desigualdad:

$$(k + c) - a < (k - c) + a.$$

Dado que $r_1 > 0$, obtenemos $k > c$, lo cual implica que C no es un cíclico con cuernos.

Finalmente observamos que $a > k$ si y sólo si c_1 y c_2 no se cortan. Esto se cumple si q_2 está a la derecha de q_1 , lo que se traduce en la desigualdad:

$$(k + c) - a < a - (k - c).$$

De esta manera, C no es un cíclico de huso si y sólo si c_1 y c_2 no se cortan. □

La siguiente observación añade dos condiciones adicionales necesarias para las circunferencias extremas.

Observación 3.3.1.2 *Supongamos que un cíclico C es tangente a una cuádrica Q a lo largo de una línea de curvatura latitudinal. Sea P_h el plano de la hipérbola del cíclico y c_1 y c_2 las circunferencias extremas de C en dicho plano. Entonces:*

- (1) tanto c_1 como c_2 son tangentes a la sección transversal de Q en P_h , y
 (2) tanto c_1 como c_2 se encuentran completamente dentro o completamente fuera de Q .

Demostración.

Cada línea de curvatura latitudinal en un cíclico corta a todas las líneas de curvatura longitudinales. Por lo tanto, c_1 y c_2 cortan la línea de curvatura latitudinal a lo largo de la cual C es tangente a Q . En el punto de intersección de c_i con esta línea de curvatura, c_i debe ser tangente a Q , lo que prueba la condición (1).

Según la Proposición 3.2.5, como C y Q son tangentes a lo largo de una línea de curvatura latitudinal, se tiene que C debe estar completamente dentro o completamente fuera de Q . Por lo tanto, la segunda condición se sigue directamente de esta proposición. □

Dados el lema y la observación anteriores, podemos determinar un conjunto de condiciones que deben cumplir las circunferencias extremas, que se encuentran en el plano de la hipérbola, para una mezcla. Estas condiciones se resumen en la siguiente definición.

Definición 3.3.1.3 (Condiciones de circunferencias extremas)

Sean una cuádrlica Q y un plano P_h . Dos circunferencias c_1 y c_2 que se encuentran en el plano P_h satisfacen las condiciones de circunferencias extremas cuando

- (1) c_1 y c_2 no se cortan,
- (2) ni c_1 ni c_2 está contenida una dentro de la otra,
- (3) tanto c_1 como c_2 son tangentes a la sección transversal de Q en P_h , y
- (4) tanto c_1 como c_2 se encuentran a la vez completamente dentro o completamente fuera de Q .

Ahora presentaremos tres lemas que nos ayudarán a establecer que el cíclico, determinado por circunferencias que cumplen la condición de circunferencias extremas, es tangente a la cuádrlica en cuestión. Veremos que cumplir la condición de circunferencias extremas es suficiente para mezclas de planos y esferas, pero se necesita una condición adicional para mezclas de cuádrlicas naturales axiales.

Introducimos también las siguientes definiciones:

Definición 3.3.1.4 (Recta de similitud)

La recta de similitud es una recta en la que se cortan todos los planos de las circunferencias de una familia.

Definición 3.3.1.5 (Centros de similitud)

Dadas dos circunferencias en un plano con centros c_1 y c_2 y radios r_1 y r_2 , los centros de similitud son los dos puntos ubicados en la recta que pasa por c_1 y c_2 . Estos puntos satisfacen la siguiente ecuación:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\text{dist}(p, c_1)}{\text{dist}(p, c_2)}$$

donde $\text{dist}(\cdot, \cdot)$ es la función de distancia euclidiana en \mathbb{R}^3 , y p es un punto en la recta que pasa por c_1 y c_2 .

Lema 3.3.1.6 Supongamos que tenemos dos planos P y P_h tales que P es perpendicular a P_h . Además, supongamos que hay dos circunferencias c_1 y c_2 en P_h que satisfacen las condiciones de circunferencias extremas con P . Entonces el cíclico determinado por c_1 y c_2 es tangente a P .

Demostración.

Sea C el cíclico determinado por las circunferencias c_1 y c_2 . Supongamos que c_i es tangente a P en el punto q_i para $i = 1, 2$. Dado que la recta $\overleftrightarrow{q_1q_2}$ es tangente a ambas circunferencias, contiene un centro de similitud s de c_1 y c_2 que se encuentra fuera de las circunferencias (es decir, no entre ellas). La recta L que pasa por s y es perpendicular a P_h es la recta de similitud de C en el plano de la elipse correspondiente a P . Dado que P_h es perpendicular a P , P contiene a L . Esto implica que P corta a C a lo largo de una de sus líneas de curvatura, ya que L define la dirección de esta intersección. Además, según la Observación 3.1.4, P también corta a C a lo largo de una línea de curvatura de P . or lo tanto, de acuerdo con el Teorema 3.1.6, el ángulo entre C y P es constante a lo largo de la intersección.

Dado que c_i es una circunferencia extrema de C , todas las normales a C a lo largo de c_i apuntan desde el centro de c_i . Como P y P_h son perpendiculares, la normal a P en el punto q_i también apunta hacia el centro de c_i . Esto implica que P y C son tangentes en los puntos q_1 y q_2 .

Finalmente, dado que el ángulo entre C y P es constante en todos los puntos de la intersección, se concluye que C y P deben ser tangentes a lo largo de toda la curva de intersección. \square

Observación 3.3.1.7 Dadas dos circunferencias fijas distintas C_1 y C_2 y una tercera circunferencia C tangente a C_1 y C_2 en los puntos P_1 y P_2 respectivamente, la recta $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ pasa por uno de los centros de similitud S de C_1 y C_2 . Ver Figura 3.4.

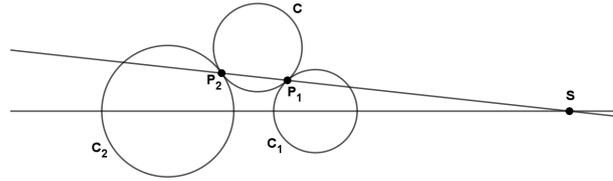


Figura 3.4: Si tenemos dos circunferencias tangentes a una tercera, entonces la recta que conecta los puntos de tangencia contiene un centro de similitud entre las dos circunferencias

Lema 3.3.1.8 *Supongamos que tenemos una esfera S y un plano P_h que contiene el centro de S . Además, supongamos que hay dos circunferencias c_1 y c_2 en P_h que satisfacen las condiciones de circunferencias extremas con S . Entonces, el cíclico determinado por c_1 y c_2 es tangente a S .*

Demostración.

Sea C el cíclico determinado por las circunferencias c_1 y c_2 . Supongamos que c_i es tangente a S en el punto q_i para $i = 1, 2$. Utilizando la Observación 3.3.1.7, se puede deducir que la recta $\overleftrightarrow{q_1q_2}$ contiene un centro de similitud s de c_1 y c_2 que está fuera de las circunferencias.

Consideremos la recta L , que pasa por s y es perpendicular a P_h . Esta recta actúa como la recta de similitud de C en el plano de la elipse. Consideramos el plano P , perpendicular a P_h y que contiene a L y a $\overleftrightarrow{q_1q_2}$.

P corta a S en una circunferencia cuyo diámetro está dado por el segmento $\overline{q_1q_2}$, ya que P_h contiene el centro de S y es perpendicular a P . Además, P corta a C en una línea de curvatura de C , que coincide con dicha circunferencia.

Según la Observación 3.1.4, esta línea de curvatura también es una línea de curvatura de S . Por lo tanto, C y S se cortan en una línea de curvatura compartida. Entonces, por el Teorema 3.1.6, el ángulo entre C y S debe ser constante a lo largo de esta intersección.

Dado que c_i es una circunferencia extrema de C , todas las normales a C a lo largo de c_i apuntan desde el centro de c_i . Debido a que P_h contiene el centro de S , la normal a S en el punto q_i también apunta hacia el centro de c_i . Por lo tanto, S y C son tangentes en los puntos q_1 y q_2 .

Finalmente, dado que el ángulo entre C y S es constante en todos los puntos de la intersección, concluimos que C y S deben ser tangentes a lo largo de toda la curva de intersección. \square

Consideremos ahora un cíclico C que es tangente a una cuádrica natural axial Q a lo largo de una línea de curvatura latitudinal. Sean c_1 y c_2 las circunferencias extremas de C en el plano de la hipérbola del cíclico P_h , y supongamos que c_i corta a Q en el punto q_i . Como veremos en el Corolario 3.4.1.7, P_h contiene el eje de Q . Entonces, dado que las líneas de curvatura circulares de Q se encuentran en planos perpendiculares al eje de Q , la recta $\overleftrightarrow{q_1q_2}$ debe ser perpendicular al eje de Q .

Definición 3.3.1.9 (Condiciones de circunferencias extremas axiales)

Supongamos que tenemos una cuádrica natural axial Q y un plano P_h que contiene el eje de Q . Dos circunferencias c_1 y c_2 que se encuentran en P_h satisfacen las condiciones de circunferencias extremas axiales cuando

- (1) c_1 y c_2 satisfacen las condiciones de circunferencias extremas con Q , y
- (2) si c_i corta a Q en el punto q_i , entonces la recta $\overleftrightarrow{q_1q_2}$ es perpendicular al eje de Q .

Lema 3.3.1.10 *Si Q es una cuádrica natural axial y P_h un plano que contiene su eje, y si hay dos circunferencias c_1 y c_2 en P_h que cumplen las condiciones de circunferencias extremas axiales con Q , entonces el cíclico determinado por c_1 y c_2 es tangente a Q .*

Demostración.

Sea C el cíclico determinado por las circunferencias c_1 y c_2 . Supongamos que c_i es tangente a Q en el punto q_i para $i = 1, 2$. Consideremos el plano P que contiene la recta $\overleftrightarrow{q_1q_2}$ perpendicular al eje

de Q . Este plano P corta a Q en una de sus líneas de curvatura, conteniendo así a los puntos q_1 y q_2 . Al considerar Q como una circunferencia de canal, sea S la esfera de la familia de esferas que define Q , cuya circunferencia característica se encuentra en el plano P . Dado que c_1 y c_2 satisfacen la condición de circunferencias extremas respecto a S , C es tangente a S a lo largo de la línea de curvatura circular que se encuentra en el plano P (Lema 3.3.1.8). Como Q y S son tangentes a lo largo de esta misma curva, Q y C también lo son. \square

Finalmente, al seleccionar ambas circunferencias extremas fuera (o dentro) de la cuádrica, aseguramos que el cíclido quede completamente fuera (o dentro) de dicha cuádrica.

3.4. La posición de las cuádricas

3.4.1. Cíclidos anulares tangentes

Los siguientes corolarios derivados del Teorema 3.1.1 permiten determinar la posición de una cuádrica en relación a un cíclido de mezcla.

Nota 3.4.1.1 *El término anticónicas hace referencia a la elipse y la hipérbola que forman el conjunto focal de un cíclido.*

Corolario 3.4.1.2 *Si un cíclido C y un cilindro Q son tangentes a lo largo de una curva L , entonces L es una de las circunferencias extremas de C y el eje de Q es perpendicular al plano de simetría P que contiene a L .*

Demostración.

De acuerdo con el Teorema 3.1.1, L debe ser una línea de curvatura circular tanto de C como de Q . Siguiendo la Observación 3.1.5, se deduce que el plano P que contiene a L es perpendicular al eje de Q . Dado que todas las normales a Q a lo largo de L se encuentran en P , utilizando la definición de cíclido de Maxwell, se concluye que una de las anticónicas de C también se encuentra en P .

Es importante destacar que cuando C es un toro, todas las líneas de curvatura longitudinales son circunferencias extremas, ya que todas se encuentran en planos de simetría. Con esto, el corolario queda demostrado. \square

La referencia a las anticónicas como el conjunto focal del cíclido subraya la relación íntima entre estas superficies y las cuádricas involucradas en la mezcla. La elipse y la hipérbola del conjunto focal proporcionan una estructura geométrica que guía las condiciones de tangencia y simetría en las superficies de transición.

Observación 3.4.1.3 *Este corolario sugiere que cuando un cíclido y un cilindro son tangentes a lo largo de una curva, pueden adoptar una de las cuatro posiciones mostradas en la Figura 3.5.*

La definición de mezcla de cíclidos con la que estamos trabajando excluye las posiciones indicadas en las Figuras 3.5 A) y 3.5 C). Es decir, cuando un cíclido mezcla un cilindro, el eje del cilindro debe ser perpendicular al plano de simetría del cíclido que contiene la elipse, y la circunferencia de intersección debe ser una de las circunferencias extremas situadas en ese plano. Además, dado que el centro de una circunferencia extrema que se encuentra en el plano de la elipse es un vértice de la hipérbola, el eje del cilindro también estará contenido en el plano de la hipérbola, cortándola tangencialmente en uno de sus vértices.

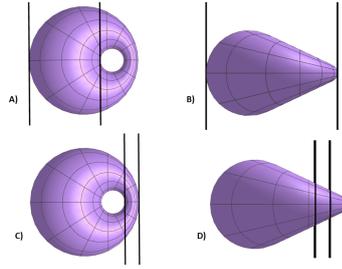


Figura 3.5: Las 4 posiciones posibles para la tangencia entre un cíclido y un cilindro, en el que el cilindro se muestra mediante dos rectas paralelas.

Definición 3.4.1.4 (Planos delimitadores)

Consideramos la familia de esferas que generan un cíclido cuyos centros están ubicados en la hipérbola asociada al cíclido. A medida que estas esferas se alejan del plano que contiene la elipse, sus radios aumentan progresivamente. En el límite, estas esferas llegan a transformarse en uno de dos planos. Estos planos se conocen como los planos delimitadores del cíclido.

Corolario 3.4.1.5 Si un cíclido C y un plano P son tangentes a lo largo de una curva, entonces P debe ser uno de los planos delimitadores de C . Por lo tanto, P debe contener la recta de similitud L que se encuentra en el plano de la elipse P_e .

Demostración.

De acuerdo con el Teorema 3.1.1, la intersección entre P y C es una línea de curvatura circular. Dado que P aporta una de las circunferencias características de C y es un caso particular de una esfera, P debe pertenecer a la familia de esferas centradas en la hipérbola que define C . En el caso de que C sea un toro, P_e y L se cortan en el infinito. Por lo tanto, el corolario queda demostrado. \square

Corolario 3.4.1.6 Si un cíclido C y una esfera S son tangentes a lo largo de una curva, entonces S debe pertenecer a una de las dos familias de esferas que envuelven a C .

Demostración.

Según el Teorema 3.1.1, S y C se cortan a lo largo de una línea de curvatura de C . Como S aporta una circunferencia característica a C , necesariamente S debe ser miembro de una de las familias de esferas que definen C . \square

Al aplicar el Corolario 3.4.1.6 junto con nuestra definición de mezcla con cíclidos, concluimos que cuando un cíclido se emplea para mezclar una esfera, la esfera debe pertenecer a la familia de esferas con sus centros en la hipérbola. Este resultado es importante porque establece una conexión directa entre la geometría del cíclido y la estructura geométrica de las esferas involucradas en el proceso de mezcla.

Corolario 3.4.1.7 Supongamos que un cíclido C y una cuádrica natural axial Q son tangentes a lo largo de una curva. Entonces, la intersección de estas dos superficies es una línea de curvatura circular de C , y el eje de Q se encuentra en uno de los planos de simetría de C .

Demostración.

Comenzamos recordando que, por el Teorema 3.1.1, la intersección de Q y C debe ser una línea de curvatura común a ambas superficies. Esta intersección es una circunferencia c , lo que significa que c no es solo una curva de intersección, sino también una línea de curvatura.

Siguiendo la Observación 3.1.5, sabemos que c debe ser el resultado de la intersección de la cuádrica Q con un plano P que es perpendicular al eje de Q . Esto nos permite localizar c en el espacio tridimensional con respecto a la geometría de Q .

Ahora, sin pérdida de generalidad, supongamos que esta intersección c corresponde a una de las circunferencias latitudinales del cíclido C . Dado que estamos trabajando con un cíclido, esta suposición implica que el centro de C debe encontrarse en el plano de simetría de la hipérbola, denotado como

P_h . Ver Figura 3.6.

El siguiente paso en la demostración consiste en ver que el eje de Q también está contenido en el plano P_h . Para ello, observamos que el eje de Q es perpendicular al plano P , que pasa por el centro de la circunferencia c . Esto significa que el plano P incluye una recta de similitud L que se encuentra en el plano de simetría de la elipse P_e .

Dado que L es normal a P_h y que el eje de Q es perpendicular a L (porque es perpendicular a un plano que contiene a L), concluimos que el eje de Q debe estar contenido en un plano paralelo a P_h . Sin embargo, como el eje de Q contiene un punto que está en P_h , se sigue que el eje de Q debe estar en P_h mismo.

Por último, consideremos el caso en el que la circunferencia c fuera una circunferencia longitudinal en lugar de latitudinal. En este caso, una demostración análoga muestra que el eje de Q se encontraría en el plano de simetría de la elipse P_e , lo que completa la argumentación.

Así, hemos demostrado que el eje de Q está contenido en un plano de simetría de C , ya sea P_h o P_e , dependiendo de la naturaleza de la circunferencia c . □

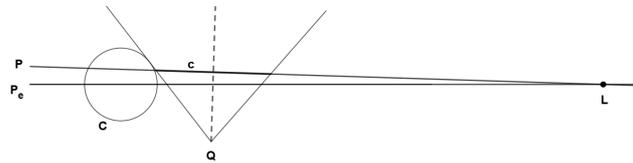


Figura 3.6: Q y su intersección con C (c), en P_h .

Teorema 3.4.1.8 *Supongamos que un cíclico C mezcla dos cuádricas naturales axiales Q y T . Entonces los ejes de Q y T son coplanares y, más específicamente, ambos ejes deben estar en el plano de simetría del cíclico que contiene la hipérbola, denotado como P_h .*

Demostración.

Se tiene a partir del Corolario 3.4.1.7. □

Capítulo 4

Aplicación práctica de la mezcla

En el capítulo anterior se han visto conceptos básicos y condiciones necesarias previas a la realización de la mezcla. Ahora, vamos a estudiar todos los casos posibles de mezcla entre cuádricas naturales. En las dos últimas secciones tenemos dos ejemplos que se han implementado en Geogebra. Para la realización de este capítulo se ha utilizado la referencia [2].

4.1. Mezclas de cuádricas naturales

Teorema 4.1.1 *Un cíclido nunca puede mezclar dos planos.*

Demostración.

Para que se pueda realizar una mezcla, una de las condiciones que tienen que cumplir las cuádricas es que la curva de la intersección entre ambas no esté vacía y sea cerrada.

Las posibilidades entre dos planos son:

- Caso 1: No se cortan.
- Caso 2: Son coincidentes.
- Caso 3: Se cortan en una recta.

En ningún caso se cumple la condición anterior. □

Teorema 4.1.2 *Un cíclido nunca puede mezclar dos cilindros.*

Demostración.

Supongamos que un cíclido mezcla dos cilindros, de modo que los cilindros son tangentes al cíclido a lo largo de líneas de curvatura latitudinales. Según el Corolario 3.4.1.2, los ejes de estos cilindros deben ser paralelos entre sí. Existen dos posibles casos para la intersección de los cilindros:

- Caso 1: La intersección de los cilindros es vacía.
- Caso 2: La intersección de los cilindros no es vacía y contiene únicamente rectas.

Ambos contradicen la definición de mezcla con cíclidos ya que la curva de intersección entre los cilindros debería ser cerrada y no vacía. □

Teorema 4.1.3 *Un plano y una esfera que se cortan siempre pueden mezclarse mediante un cíclido.*

Demostración.

Supongamos que una esfera S y un plano P se cortan. Consideremos un plano P_h cualquiera que contenga el centro de la esfera S y sea perpendicular al plano P . Existen infinitos planos que cumplen estas condiciones.

A continuación, seleccionamos dos circunferencias, c_1 y c_2 , en el plano P_h . Estas circunferencias deben satisfacer las condiciones de ser circunferencias extremas tanto con el plano P como con la

esfera S . Para demostrar que siempre es posible encontrar tales circunferencias, podemos imaginar que colocamos circunferencias “pequeñas” cerca de los puntos de intersección entre el plano P y la esfera S . Ver Figura 4.1.

Denotemos por C el cíclido determinado por las circunferencias c_1 y c_2 . Según el Lema 3.3.1.1, sabemos que C es no singular. Además, a partir de los Lemas 3.3.1.6 y 3.3.1.8, podemos concluir que el cíclido C es tangente tanto a la esfera S como al plano P . \square

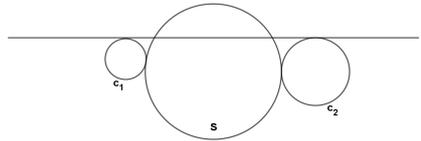


Figura 4.1: Una posible elección de c_1 y c_2 para un plano P y una esfera S , en el plano P_h .

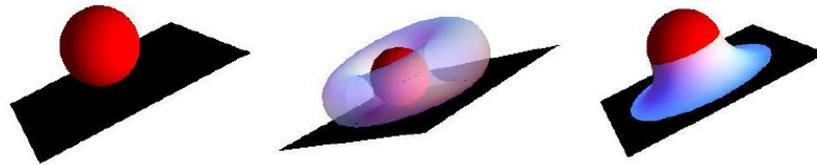


Figura 4.2: Mezcla entre un plano y una esfera tangentes entre sí mediante un toro, extraída de [19].

Observación 4.1.4 *Si se eligen las circunferencias con el mismo radio, entonces una esfera y un plano siempre pueden ser mezclados por un toro.*

Demostración.

Dados una esfera S y un plano P , consideramos dos circunferencias extremas c_1 y c_2 en un plano P_h que contiene al centro de S y es perpendicular a P . Supongamos que ambas circunferencias tienen el mismo radio r .

Un toro es la superficie de revolución generada por una circunferencia que gira alrededor de un eje. Si giramos c_1 (o c_2) alrededor de un eje en P_h que es paralelo a un eje de simetría fijo, se genera un toro.

Como c_1 y c_2 son tangentes tanto a P como a S y tienen el mismo radio, el toro resultante de su rotación será tangente a ambas superficies.

Por lo tanto, si se eligen las circunferencias extremas con el mismo radio, siempre existe un toro que puede mezclar la esfera y el plano. \square

Teorema 4.1.5 *Dos esferas que se cortan siempre se pueden mezclar con un cíclido.*

Demostración.

Supongamos que dos esferas S_1 y S_2 se cortan en una circunferencia. Consideremos un plano P_h que contiene a los centros de ambas esferas. Existen infinitos planos que cumplen esta condición.

Ahora, dentro de uno de estos planos P_h , seleccionamos dos circunferencias c_1 y c_2 . Estas circunferencias deben cumplir las condiciones para ser extremas tanto respecto a S_1 como a S_2 . Es decir, c_1 y c_2 son tangentes a ambas esferas en P_h .

Para demostrar que tales circunferencias siempre existen, podemos imaginar colocar circunferencias “pequeñas” en P_h , cerca de los puntos donde las esferas S_1 y S_2 se cortan. Estas circunferencias pequeñas pueden expandirse hasta convertirse en circunferencias extremas, es decir, hasta que sean tangentes tanto a S_1 como a S_2 . (Ver Figura 4.3).

De acuerdo con los Lemas 3.3.1.1 y 3.3.1.8, se cumple que las circunferencias c_1 y c_2 cumplen las condiciones necesarias, lo que concluye la demostración del teorema. \square El Teorema 4.1.5 establece la universalidad del cíclido como superficie de mezcla para dos esferas, lo que subraya la flexibilidad geométrica de los cíclidos en la construcción de transiciones suaves entre superficies esféricas.

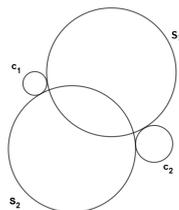


Figura 4.3: Mezcla exterior entre dos esferas S_1 y S_2 con circunferencias extremas c_1 y c_2 , en el plano P_h .

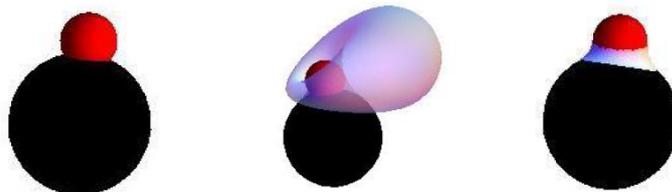


Figura 4.4: Una mezcla cíclica entre dos esferas que se cortan, extraída de [19].

Observación 4.1.6 *Un toro siempre puede mezclar dos esferas.*

Nota 4.1.7 *La Observación 4.1.6 es un caso particular del Teorema 4.1.5, escogiendo en la demostración que las circunferencias c_1 y c_2 tengan el mismo radio. Un cíclico con dos circunferencias latitudinales iguales es un toro.*

Observación 4.1.8 *Se pueden colocar las circunferencias extremas en cualquiera de las cuatro regiones determinadas por S_1 y S_2 con el fin de determinar el tipo de mezcla necesario: interior, exterior o mixta.*

Observación 4.1.9 *Sean l_1 y l_2 dos rectas que se cortan en un punto x , y sea p un punto en l_1 . Además, sea R una de las dos regiones delimitadas por l_1 y l_2 que contiene a p . Entonces, existe una única circunferencia C que es tangente a l_1 en p y a l_2 en un punto q . Además, las longitudes de \overline{px} y \overline{qx} son iguales. Ver Figura 4.5.*

El resultado relacionado con la intersección de dos rectas y la existencia de una única circunferencia tangente a ambas es un ejemplo clave de cómo las propiedades de tangencia en geometría plana se pueden extender a contextos tridimensionales. Este tipo de construcciones son útiles para generar mezclas suaves entre superficies más complejas.

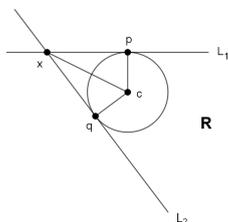


Figura 4.5: Dadas una región específica R y dos rectas con un punto específico p en una de ellas, siempre es posible encontrar una circunferencia única con centro c que sea tangente a ambas rectas.

Observación 4.1.10 *Sea L una recta cualquiera y s una circunferencia en el mismo plano que corta a L de manera no tangencial. Sea p un punto en L , ya sea dentro o fuera de s , y sea R uno de los semiplanos determinados por L . Entonces, existe una única circunferencia c en R que es tangente a L en p y también tangente a s . (Ver Figura 4.6).*

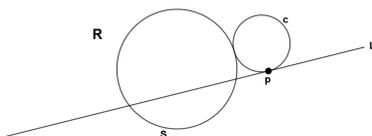


Figura 4.6: La circunferencia c es tangente a la recta L en p y a la circunferencia s .

Proposición 4.1.11 Sean Q una cuádrica natural axial y P_h un plano que contiene el eje de Q . Sea L una recta en P_h que corta a Q en dos puntos distintos. Entonces, en cada una de las cuatro regiones determinadas por Q y L en P_h , existen dos circunferencias que cumplen las condiciones de circunferencias extremas axiales con respecto a Q y que son tangentes a L .

Demostración.

Supongamos que L y Q se cortan en los puntos p' y q' . Denotemos p y q como los puntos de Q en P_h tales que las rectas pp' y qq' son perpendiculares al eje de Q . Sin pérdida de generalidad, supongamos que p está por encima de L .

Primero, consideremos la región que está por encima de L dentro de Q . Aplicando la Observación 4.1.9, seleccionemos una circunferencia c que sea tangente a Q en el interior en p y tangente a L . Afirmamos que c se encuentra completamente dentro de Q . Para comprobar esto, consideremos otra circunferencia S que es tangente a L en p y a p' con su centro en el eje de Q . Dado que L no es tangente a Q en p' , L corta a S en dos puntos. Por lo tanto, la circunferencia c está dentro de S . (Ver Figura 4.7). Ahora, al considerar a p' como una circunferencia con radio 0, vemos que al aumentar ligeramente el radio de p' , siempre se pueden encontrar circunferencias en la región por encima de L y dentro de Q que cumplen las condiciones de circunferencias extremas axiales con Q y que son tangentes a L . La circunferencia más pequeña será tangente a Q cerca de p' , y la circunferencia más grande será tangente a Q cerca de p .

Luego, consideremos la región que está por encima de L y fuera de Q . Elegimos una circunferencia c que sea tangente a Q en el exterior en p y tangente a L . Es evidente que c no contiene a p' y se encuentra fuera de Q . Por lo tanto, con el mismo razonamiento anterior, hay dos circunferencias en la región por encima de L y fuera de Q que cumplen las condiciones extremas axiales con Q y son tangentes a L .

Un razonamiento similar aplicado a los puntos q y q' demuestra que también existen circunferencias que cumplen las condiciones deseadas cerca de los puntos q y q' en las regiones por debajo de L . \square

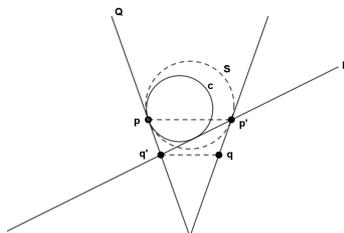


Figura 4.7: Se tiene una circunferencia c tangente a Q en p y tangente a L , que se encuentra dentro de S (cuyo centro está en el eje de Q y es tangente a Q en p y p').

Usando la Observación 4.1.10 y un argumento similar al de la demostración de la Proposición 4.1.11, obtenemos:

Observación 4.1.12 Sean Q una cuádrica natural axial y P_h un plano que contiene el eje de Q . Consideremos una circunferencia S en P_h que corta cada recta de Q en P_h de forma no tangencial. Entonces, en cada una de las cuatro regiones determinadas por Q y S en P_h , se pueden encontrar dos circunferencias que cumplen con las condiciones de circunferencias extremas axiales con respecto a Q y que son tangentes a S . Ver Figura 4.8.

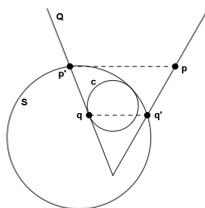


Figura 4.8: Tenemos una circunferencia c tangente a Q en p y tangente a S , dentro tanto de S como de Q .

Para controlar el tamaño de las circunferencias elegidas usando la Proposición 4.1.11 y la Observación 4.1.12, solo es necesario especificar el radio de la circunferencia más pequeña.

Cuando la región R es ilimitada y Q es un cilindro o un cono con R conteniendo la parte infinita de la intersección de Q con P_h , el radio de la circunferencia más pequeña puede ser arbitrariamente grande.

En otros casos, el radio de la circunferencia más pequeña debe estar dentro de un rango finito debido a las condiciones que deben cumplirse. Si el rango es limitado y aumentar el radio obliga a las circunferencias a cortarse, se puede permitir esta intersección para obtener más flexibilidad en la elección de la mezcla, siempre que se cumplan las demás condiciones. Esto podría hacer que la mezcla sea parte de un cíclido de huso, donde los puntos singulares no afectan la superficie de mezcla requerida. Esta opción solo ofrece más flexibilidad en la elección, sin cambiar el número de mezclas aceptables, por lo que no se profundiza en ella.

Teorema 4.1.13 *Un cíclido puede mezclar un plano y un cilindro si y sólo si la normal al plano y el eje del cilindro no son perpendiculares.*

Demostración.

Supongamos que tenemos una mezcla entre un plano y un cilindro mediante un cíclido. De acuerdo con el Corolario 3.4.1.2, el eje del cilindro debe ser tangente a la hipérbola en el vértice de dicha hipérbola. Además, según el Corolario 3.4.1.5, el plano en cuestión debe ser un plano delimitador del cíclido. Esto implica que la normal al plano está en la dirección de una de las asíntotas de la hipérbola. Como resultado, el eje del cilindro y la normal al plano no pueden ser perpendiculares. Si lo fueran, la intersección del plano y el cilindro debería contener una curva cerrada no vacía, lo cual es imposible.

Ahora, consideremos el caso en el que el cilindro Q y el plano P tienen la propiedad de que el eje de Q y la normal a P no son perpendiculares, es decir, el eje de Q corta pero no se encuentra en P . Sean P_h un plano que contiene el eje de Q y es perpendicular a P . Solo existirá un plano P_h con estas características, a menos que el eje de Q sea perpendicular a P , lo que ya hemos descartado. Dado que la normal a P no es perpendicular al eje de Q , la intersección entre P y Q en P_h consta de dos puntos.

Utilizando la Proposición 4.1.11, seleccionamos dos circunferencias, c_1 y c_2 , de manera que cumplan tanto con las condiciones de circunferencias extremas con respecto a P , como con las condiciones de circunferencias extremas axiales con respecto a Q . Estas circunferencias pueden encontrarse en cualquiera de las cuatro regiones determinadas por P y Q .

Finalmente, aplicando los Lemas 3.3.1.1, 3.3.1.6 y 3.3.1.10, concluimos que el cíclido definido por c_1 y c_2 mezcla P y Q . \square

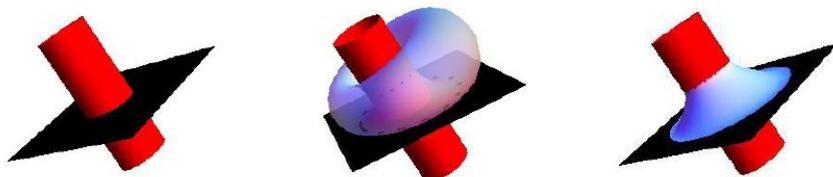


Figura 4.9: Una mezcla cíclica entre un cilindro y un plano que se cortan, extraída de [19].

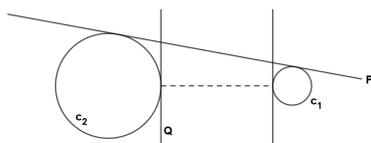


Figura 4.10: Representación de la mezcla entre un cilindro y un plano mediante un cíclico en P_h , que es el plano de simetría del cíclico que contiene la hipérbola.

Teorema 4.1.14 *Dado un cono Q y un plano P , sea α el semiángulo del cono y β el ángulo entre el eje de Q y la normal a P . Entonces, la intersección entre P y Q se puede mezclar mediante un cíclico si y solo si $\alpha < \beta$.*

Nota 4.1.15 *El Teorema 4.1.14 establece que un cono Q y un plano P pueden ser mezclados por un cíclico si y solo si la intersección $P \cap Q$ es una elipse.*

Demostración.

Supongamos que el cono Q y el plano P están mezclados por un cíclico. Esto implica que la intersección de Q y P debe ser una elipse. Por lo tanto, se deduce que $\alpha < \beta$.

Ahora, consideremos el caso inverso: supongamos que Q y P se cortan formando una elipse. Tomamos el plano P_h que contiene el eje de Q y es perpendicular a P . Si P es perpendicular al eje de Q , podemos elegir cualquier plano P_h que contenga dicho eje. En este caso específico, el cíclico que mezcla el cono y el plano será un toro.

Dado que Q y P se cortan formando una elipse, esta intersección consta de dos puntos distintos dentro del plano P_h . Según la Proposición 4.1.11, podemos seleccionar dos circunferencias que cumplan simultáneamente las condiciones de ser circunferencias extremas axiales con respecto a Q y de ser circunferencias extremas con respecto a P .

Finalmente, aplicando los Lemas 3.3.1.1, 3.3.1.6, y 3.3.1.10, concluimos que el cíclico definido por estas dos circunferencias mezcla P y Q . \square

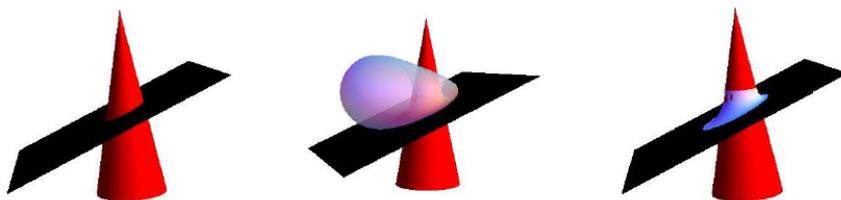


Figura 4.11: Una mezcla cíclica entre un cono y un plano que se cortan, extraída de [19].

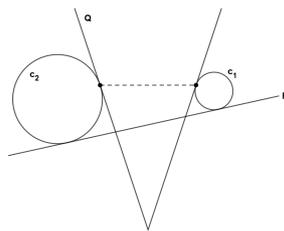


Figura 4.12: Representación de la mezcla entre un cono y un plano mediante un cíclico en P_h .

Teorema 4.1.16 *Supongamos que tenemos una esfera S de radio R_s y un cilindro Q de radio R_q . Además, consideremos que la distancia entre el centro de S y el eje de Q es d . Entonces, S y Q se pueden mezclar mediante un cíclico si y solo si $R_s - R_q \geq d$.*

Demostración.

Sea P_h un plano que contiene tanto el centro de S como el eje de Q . Este plano P_h está determinado únicamente cuando el centro de S no se encuentra sobre el eje de Q .

Supongamos primero que S y Q están mezclados por un cíclico. La condición (3) de la Definición 3.2.6 establece que para que esto ocurra, debe cumplirse que $R_s - R_q \geq d$. Si el cíclico que realiza la mezcla está fuera de Q , debe también cumplir $R_s - d > R_q$. En este caso, las circunferencias extremas del cíclico en P_h serían tangentes a S en puntos que están fuera de Q , lo que implica que S debe estar posicionada a ambos lados de Q en P_h . Esta disposición se muestra en la Figura 4.13.

Ahora, supongamos que se cumple la desigualdad $R_s - R_q \geq d$. Usando la Observación 4.1.12, podemos seleccionar dos circunferencias en el plano P_h que satisfagan tanto las condiciones de circunferencias extremas axiales con respecto a Q , como las condiciones de circunferencias extremas con respecto a S . A continuación, aplicando los Lemas 3.3.1.1, 3.3.1.8 y 3.3.1.10, se concluye que el cíclico determinado por estas circunferencias mezcla S y Q .

En el caso especial donde $R_s - R_q = d$, las circunferencias extremas solo existirán en la región del espacio que se encuentra dentro de Q pero fuera de S . \square

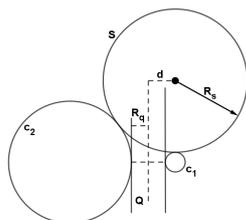


Figura 4.13: Mezcla entre un cilindro y una esfera, en el plano P_h .

Teorema 4.1.17 *Dados una esfera S y un cono Q , sea P_h el plano que contiene el centro de S y el eje de Q . Sean l_1 y l_2 los rayos que resultan de la intersección de P_h con Q , y sea s la circunferencia en la que se cortan P_h y S . Entonces, S y Q pueden ser mezclados mediante un cíclico si y solo si s corta tanto a l_1 como a l_2 .*

Nota 4.1.18 *Si el centro de S se encuentra en el eje de Q , entonces se puede tomar cualquier plano P_h que contenga el eje de Q . En este caso, la mezcla de S y Q se realizará mediante un toro.*

Demostración.

Supongamos que la esfera S y el cono Q están mezclados por un cíclico. De acuerdo con la condición (3) de la Definición 3.2.6, la circunferencia s debe cortar tanto a l_1 como a l_2 . Ver Figura 4.14. Si el cíclico que realiza la mezcla se encuentra fuera de Q , entonces es necesario que s corte a l_1 y l_2 de

manera no tangencial. Esto es porque, en este caso, las circunferencias extremas del cíclico situadas en P_h serán tangentes a s en puntos que están fuera de Q , lo que implica que s debe estar a ambos lados de Q en P_h .

Ahora, supongamos que s corta tanto a l_1 como a l_2 . Según la Observación 4.1.12, podemos elegir dos circunferencias en P_h que cumplan las condiciones de circunferencias extremas axiales con respecto a Q y también las condiciones de circunferencias extremas con respecto a S . De acuerdo con los Lemas 3.3.1.1, 3.3.1.6 y 3.3.1.10, el cíclico determinado por estas circunferencias mezcla S y Q . En el caso especial donde s corta tangencialmente a l_1 o l_2 , las circunferencias extremas sólo existirán en la región que está dentro de Q y fuera de S . \square

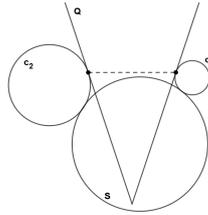


Figura 4.14: Mezcla entre un cono y una esfera, en el plano P_h .

Definición 4.1.19 (Condición para la mezcla)

Dos cuádricas naturales axiales Q_1 y Q_2 satisfacen la condición de mezcla si se cumplen las siguientes condiciones:

- (1) *la intersección de Q_1 y Q_2 contiene una curva cerrada no vacía,*
- (2) *los ejes de Q_1 y Q_2 se encuentran en un mismo plano común P_h , y*
- (3) *en el plano P_h , existen dos circunferencias c_1 y c_2 que cumplen con las condiciones de circunferencias extremas axiales tanto para Q_1 como para Q_2 .*

Lema 4.1.20 *Si Q_1 y Q_2 son dos cuádricas naturales axiales que cumplen con la condición de mezcla, entonces existe una curva en su intersección que envuelve tanto el eje de Q_1 como el eje de Q_2 .*

Teorema 4.1.21 *Dos conos pueden ser mezclados por un cíclico si y sólo si ambos satisfacen la condición de mezcla.*

Teorema 4.1.22 *Un cono y un cilindro pueden mezclarse mediante un cíclico si y sólo si ambos satisfacen la condición de mezcla.*

Demostración de los Teoremas 4.1.21 y 4.1.22.

Consideremos dos cuádricas naturales axiales, Q_1 y Q_2 , donde Q_1 puede ser un cono o un cilindro, y Q_2 es un cono.

Supongamos primero que Q_1 y Q_2 pueden mezclarse mediante un cíclico C . Por el Teorema 3.4.1.8, los ejes de ambas cuádricas deben encontrarse en el plano de simetría del cíclico, P_h , el cual contiene la hipérbola. Además, las circunferencias c_1 y c_2 , que son las circunferencias extremas del cíclico, deben estar en el plano P_h y ser tangentes tanto a Q_1 como a Q_2 .

Supongamos que c_1 es tangente a Q_1 en el punto p_1 y a Q_2 en el punto q_1 , y que c_2 es tangente a Q_1 en p_2 y a Q_2 en q_2 . Según el Teorema 3.1.1, el cíclico C comparte una línea de curvatura con Q_1 . Esto implica que el plano perpendicular a P_h que contiene la recta $\overleftrightarrow{p_1 p_2}$ corta tanto a Q_1 como a C en una línea de curvatura común. De esto se deduce que la recta $\overleftrightarrow{p_1 p_2}$ es perpendicular al eje de Q_1 .

De manera análoga, la recta $\overleftrightarrow{q_1 q_2}$ es perpendicular al eje de Q_2 . Si C es un cíclico de huso, donde

c_1 y c_2 se cortan, entonces Q_1 y Q_2 son tangentes al cíclido en la región del huso o ninguna de ellas lo es, dado que una superficie de mezcla no puede contener singularidades. En este caso, es posible ajustar las posiciones de $\overrightarrow{p_1 p_2}$ y $\overrightarrow{q_1 q_2}$ manteniendo su perpendicularidad con los ejes de Q_1 y Q_2 , respectivamente, mientras se actualizan las circunferencias c_1 y c_2 para conservar su tangencia con Q_1 y Q_2 . De este modo, siempre es posible encontrar circunferencias c_1 y c_2 que no se corten y que, por lo tanto, satisfagan la condición de mezcla.

Supongamos ahora que Q_1 y Q_2 satisfacen la condición de mezcla. Sean c_1 y c_2 las circunferencias que cumplen las condiciones establecidas en la definición de mezcla. Entonces, por los Lemas 3.3.1.1, 3.3.1.10 y 4.1.20, podemos concluir que el cíclido determinado por c_1 y c_2 mezcla Q_1 y Q_2 . \square

4.2. Condición de esfera inscrita

En esta sección, se considera la condición de esfera inscrita para la mezcla con cíclidos. El Teorema 4.2.1 y el Teorema 4.2.5 muestran cómo se relaciona la condición de mezcla con la condición de esfera inscrita común.

Teorema 4.2.1 *Sean Q_1 un cono o un cilindro y Q_2 un cono tales que tienen una esfera inscrita común S de radio r . Entonces como en el centro de S se cortan los ejes de Q_1 y Q_2 , son coplanarios. Denotamos por P_h al plano que contiene dichos ejes. Si Q_1 y Q_2 se cortan exactamente en dos puntos en P_h , entonces Q_1 y Q_2 satisfacen la condición de mezcla.*

Nota 4.2.2 *Si Q_1 y Q_2 se cortan en cuatro puntos en P_h se haría una unión cíclida.*

Demostración.

Sea \tilde{Q}_i la offset de Q_i por $-r$, para $i = 1, 2$.

- Caso 1: Q_1 es un cono. Sea v el vértice común de \tilde{Q}_1 y \tilde{Q}_2 . Como Q_1 y Q_2 se cortan en dos puntos en P_h , se tiene que:

$$(1) \tilde{Q}_2 \subset \tilde{Q}_1,$$

$$(2) \tilde{Q}_1 \subset \tilde{Q}_2, \text{ o}$$

$$(3) \tilde{Q}_i \not\subset \tilde{Q}_j \text{ para } i \neq j \text{ con } i, j \in \{1, 2\} \text{ y } \tilde{Q}_1 \text{ y } \tilde{Q}_2 \text{ no se encuentran en ningún semiplano (en caso de que } \tilde{Q}_1 \text{ y } \tilde{Q}_2 \text{ se encontraran en un semiplano, } Q_1 \text{ y } Q_2 \text{ se cortarían en cuatro puntos en } P_h).$$

Ver Figura 4.15. En cualquier caso se pueden elegir las circunferencias extremas \tilde{c}_1 y \tilde{c}_2 con radios mayores que r satisfaciendo la condición para mezclarse con \tilde{Q}_1 y \tilde{Q}_2 . Desplazando \tilde{Q}_1 y \tilde{Q}_2 por r , y \tilde{c}_1 y \tilde{c}_2 se obtienen Q_1 , Q_2 , c_1 y c_2 respectivamente. Como \tilde{c}_1 y \tilde{c}_2 satisfacen la condición de mezcla y la offset hace las circunferencias más pequeñas, c_1 y c_2 satisfacen la condición para mezclarse con Q_1 y Q_2 .

- Caso 2: Q_1 es un cilindro. Entonces la offset de Q_1 , \tilde{Q}_1 , es una recta que pasa por el vértice de \tilde{Q}_2 . \tilde{Q}_2 se encuentra a ambos lados de \tilde{Q}_1 en P_h ya que Q_1 y Q_2 se cortan en dos puntos en dicho plano. Ver Figura 4.16. Existen circunferencias \tilde{c}_1 y \tilde{c}_2 en P_h que satisfacen la condición de mezcla a no ser que \tilde{c}_1 y \tilde{c}_2 se corten en un punto de la recta \tilde{Q}_1 . Se eligen los \tilde{c}_i con radios sean mayores que r . Desplazando \tilde{Q}_1 y \tilde{Q}_2 por r , y \tilde{c}_1 y \tilde{c}_2 por $-r$, se obtienen Q_1 , Q_2 , c_1 y c_2 . De esta forma, c_1 y c_2 satisfacen la condición para mezclarse con Q_1 y Q_2 .

\square

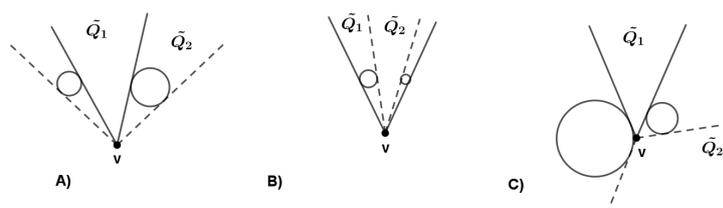


Figura 4.15: Las distintas posiciones que pueden adoptar de \tilde{Q}_1 y \tilde{Q}_2 en el plano P_h , y unos posibles círculos extremos.

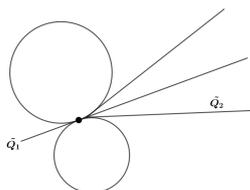


Figura 4.16: La posición de \tilde{Q}_1 y \tilde{Q}_2 en el plano P_h , y unos posibles círculos extremos.

Ahora se demuestra que una mezcla cíclica de dos cuádricas naturales axiales con ejes secantes implica una esfera inscrita común. Es necesario introducir previamente la siguiente definición:

Definición 4.2.3 (Eje radical)

Dadas dos circunferencias no concéntricas c_1 y c_2 en un plano P_h , el eje radical de c_1 y c_2 es la recta L en dicho plano tal que para cualquier punto $q \in L$ la distancia a lo largo de una tangente de q a c_1 es igual a la distancia a lo largo de una tangente de q a c_2 .

Observación 4.2.4 Sean c_1 y c_2 las circunferencias extremas del cíclico C en el plano de la hipérbola P_h . Entonces:

- (1) Si Q es un cono tangente a C a lo largo de una línea de curvatura latitudinal, el vértice de Q está en el eje radical de c_1 y c_2 , y
- (2) el eje radical es paralelo a la recta de similitud de C que se encuentra en el plano P_h . (En este caso, el eje radical coincide con la recta de similitud).

Demostración.

Dado que c_1 y c_2 son circunferencias extremas en el plano de la hipérbola de C , no pueden ser concéntricas. Esto implica que el eje radical de c_1 y c_2 está bien definido.

El caso (1) se deduce directamente del Lema 2.1 en [14].

Ahora, analizamos el caso (2). Sea L la recta que pasa por los centros de c_1 y c_2 . Dado que c_1 y c_2 son circunferencias simétricas con respecto a L , se sigue que el eje radical debe ser perpendicular a L . □

Teorema 4.2.5 Sean Q_1 y Q_2 cuádricas naturales axiales que satisfacen la condición de mezcla y tienen ejes de intersección, entonces tienen una esfera inscrita común.

Demostración.

Sean c_1 y c_2 las circunferencias que cumplen la condición de mezcla con Q_1 y Q_2 , y sea C el cíclico de mezcla asociado. Como los ejes de Q_1 y Q_2 se cortan, podemos encontrar una distancia d de forma que al desplazar Q_1 y Q_2 por $-d$ (con $d \geq 0$), el vértice de una de las cuádricas se encuentre sobre el eje de la otra.

Definimos \tilde{Q}_i como la offset de Q_i en $-d$, y \tilde{C} y \tilde{c}_i como las offsets de C y c_i , respectivamente, en $-d$. Por la construcción, \tilde{C} es un cíclico tangente tanto a \tilde{Q}_1 como a \tilde{Q}_2 . Según el Teorema 4.1.2, al menos una de las cuádricas Q_1 o Q_2 debe ser un cono. Suponemos sin pérdida de generalidad que Q_2 es un cono y que el vértice de Q_2 está en el eje de Q_1 .

Según la Observación 4.2.4, existen dos posibilidades:

- (1) Los vértices de \tilde{Q}_1 y \tilde{Q}_2 coinciden, o
- (2) el eje de \tilde{Q}_1 es el eje radical de \tilde{c}_1 y \tilde{c}_2 . En este caso, el eje radical es perpendicular a la línea de curvatura L a lo largo de la cual \tilde{Q}_1 y \tilde{C} se cortan. La línea de curvatura L debe ser paralela al plano de la elipse \tilde{P}_e de \tilde{C} .

Consideremos los posibles casos detalladamente (que no son mutuamente excluyentes):

- Si L no se encuentra en \tilde{P}_e , y siendo \tilde{C} es un toro, el eje radical debe ser paralelo a la línea de curvatura L que se encuentra en el plano de la hipérbola. Esto implica que, al desplazar \tilde{Q}_1 y \tilde{Q}_2 aún más, llevando los conos a lo largo de sus ejes, el problema se reduce al caso en el que Q_1 y Q_2 tienen vértices coincidentes.
- En el caso en que L se encuentra en \tilde{P}_e y \tilde{Q}_1 es un cilindro, \tilde{Q}_1 es tangente a \tilde{c}_1 y \tilde{c}_2 en el mismo punto. La línea de tangencia se convierte en un punto, y \tilde{Q}_1 es el eje radical de \tilde{c}_1 y \tilde{c}_2 según la Definición 4.2.3. Por lo tanto, por la Observación 4.2.4, \tilde{Q}_1 debe contener el vértice de \tilde{Q}_2 . Esto indica que Q_1 y Q_2 tienen una esfera inscrita común, que es el desplazamiento del vértice de \tilde{Q}_2 .
- Finalmente, en el caso en que \tilde{Q}_1 y \tilde{Q}_2 tienen vértices coincidentes, se deduce que Q_1 y Q_2 tienen una esfera inscrita común que corresponde al desplazamiento de los vértices comunes de \tilde{Q}_1 y \tilde{Q}_2 .

□

A continuación, se va a demostrar el Lema 4.1.20, cuyo enunciado recordamos: Si Q_1 y Q_2 son dos cuádricas naturales axiales que satisfacen la condición de mezcla, entonces existe una curva en su intersección que envuelve tanto el eje de Q_1 como el eje de Q_2 .

Demostración del Lema 4.1.20.

Consideremos dos cuádricas naturales axiales Q_1 y Q_2 que cumplen la condición de mezcla. Sin pérdida de generalidad, supongamos que Q_1 es un cono o un cilindro y que Q_2 es un cono. Sean c_l y c_r las circunferencias extremas del cíclico de mezcla que se encuentran en el plano P_h . Definimos L como el eje radical de c_l y c_r en P_h .

Dado que c_l y c_r no se cortan y ninguna de ellas contiene a la otra, estas circunferencias están situadas en lados opuestos de L en P_h .

Sean l_{1r} y l_{1l} los rayos (o rectas cuando Q_1 es un cilindro) en la intersección de Q_1 y P_h , tales que l_{1i} es tangente a c_i para $i = l, r$. Análogamente, definimos l_{2r} y l_{2l} como los rayos en la intersección de Q_2 y P_h tangentes a c_r y c_l respectivamente. Ver Figura 4.17.

Sabemos, por la Observación 4.2.4, que el vértice de Q_2 se encuentra en L y, teniendo en cuenta que c_l y c_r se encuentran en lados opuestos de L , se obtiene que l_{2l} y l_{2r} también están en lados opuestos de L .

De manera similar, si Q_1 es un cono, l_{1l} y l_{1r} se encuentran en lados opuestos de L . Si Q_1 es un cilindro, L está contenido dentro de Q_1 ya que sabemos por la Observación 4.2.4 que el eje de Q_1 es paralelo a L y porque L se encuentra entre c_l y c_r . Por tanto, en cualquier caso, l_{1l} y l_{1r} también se encuentran en lados opuestos de L .

Como resultado, Q_1 y Q_2 se cortan en dos puntos p y q en el plano P_h , siendo p la intersección de l_{1l} y l_{2l} y q la intersección de l_{1r} y l_{2r} . Como p y q provienen de rayos diferentes que forman la intersección de las cuádricas naturales axiales con P_h , p y q están en lados opuestos de los ejes de Q_1 y Q_2 .

Por tanto, la curva de intersección de Q_1 y Q_2 forma una curva cerrada no vacía que une los puntos p y q , por lo que debe envolver alrededor de los ejes de las cuádricas. □

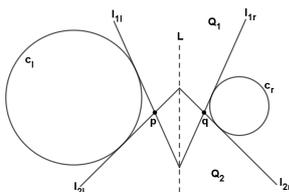


Figura 4.17: Dos cuádricas naturales axiales Q_1 y Q_2 que satisfacen la condición de mezcla con circunferencias extremas c_l y c_r , y L el eje radical.

En estas dos últimas secciones se van a presentar dos ejemplos detallados de mezclas entre cuádricas naturales mediante cíclidos anulares, que han sido construidos con GeoGebra.

4.3. Mezcla de dos esferas

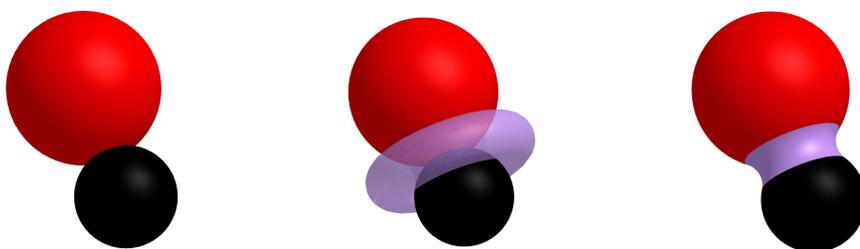


Figura 4.18: La mezcla entre dos esferas por un toro.

Para obtener la Figura 4.18, a continuación se van a detallar los pasos que se han llevado a cabo. También se dan las coordenadas o ecuaciones de los diferentes objetos involucrados en la mezcla:

- Construcción de dos esferas que se corten:

- Esfera de centro $A = (0, 0, 0)$ y radio $R_1 = 4$:

$$\text{Esf1} : x^2 + y^2 + z^2 = 16$$

- Esfera de centro $B = (-4.78, 0, 8)$ y radio $R_2 = 6$:

$$\text{Esf2} : (x + 4.78)^2 + y^2 + (z - 8)^2 = 36$$

- Comprobación de la intersección de las esferas:

$$\text{Esf1} \cap \text{Esf2} : c : \mathbf{X} = (-1.84, 0, 3.08) + (1.52 \sin t, -1.77 \cos t, 0.91 \sin t)$$

- Selección del radio del toro:

$$r = 2$$

- Construcción de dos esferas adicionales:

- Esfera concéntrica con Esf1, centro A y radio $R_1 + r$:

$$\text{Esf3} : x^2 + y^2 + z^2 = 36$$

- Esfera concéntrica con Esf2, centro B y radio $R_2 + r$:

$$\text{Esf4} : (x + 4.78)^2 + y^2 + (z - 8)^2 = 64$$

- $\text{Esf3} \cap \text{Esf4}$: Esas dos esferas se cortan en una circunferencia formada por los centros de todas las circunferencias de radio r que forman el toro (el toro es la envolvente de las esferas de radio r , con centro en esa circunferencia central). De ese modo, nos aseguramos de que el toro es tangente.

$$d : \mathbf{X} = (-1.62, 0, 2.71) + (4.38 \sin t, -5.1 \cos t, 2.62 \sin t)$$

- Cálculo de puntos de intersección entre d y los planos XZ , YZ :

- Plano XZ ($y = 0$):
- $d \cap \text{Plano } XZ$: $C = (-6, 0, 0.09)$, $D = (2.76, 0, 5.33)$
- Plano YZ ($x = 0$):
- $d \cap \text{Plano } YZ$: $E = (0, 4.74, 3.68)$, $F = (0, -4.74, 3.68)$
- Vector \overrightarrow{EF} :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9.48 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Vamos a generar la superficie de mezcla: nos quedamos con la parte del toro que que está entre las dos circunferencias donde el toro es tangente a las esferas iniciales.

- Circunferencia generadora del toro (de centro D , radio r y paralela a u):

$$e : \mathbf{X} = (2.76, 0, 5.33) + (2 \cos t, 0, 2 \sin t)$$

- Intersección de e con las esferas a mezclar:
 - $e \cap \text{Esf1}$: $I = (1.84, 0, 3.55)$
 - $e \cap \text{Esf2}$: $J = (0.88, 0, 6)$
- Arco de circunferencia (D, I, J) para generar la parte del toro que nos interesa:

$$f = 2.87$$

- Superficie de mezcla generada por rotación:

$$\alpha = 360^\circ$$

- Recta que pasa por los centros de las esferas:

$$g : \mathbf{X} = (0, 0, 0) + \lambda(-4.78, 0, 8)$$

- Superficie final (Mezcla): Superficie(f, α, g) =

$$\begin{pmatrix} (-1.464 \cos u - 0.9124 \sin u + 4.3876) \cos v + 0.544 \cos u - 0.8676 \sin u - 1.6276 \\ (-1.699 \cos u - 1.0616 \sin u + 5.0919) \sin v \\ (-0.8676 \cos u - 0.544 \sin u + 2.6002) \cos v - 0.9124 \cos u + 1.464 \sin u + 2.7298 \end{pmatrix}$$

Si realizásemos un corte de la imagen central de la Figura 4.18 con el plano XZ , podría verse de la siguiente manera:

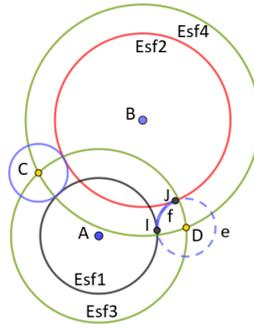


Figura 4.19: Corte de la construcción con el plano $\{y = 0\}$.

4.4. Mezcla de un cono y un plano

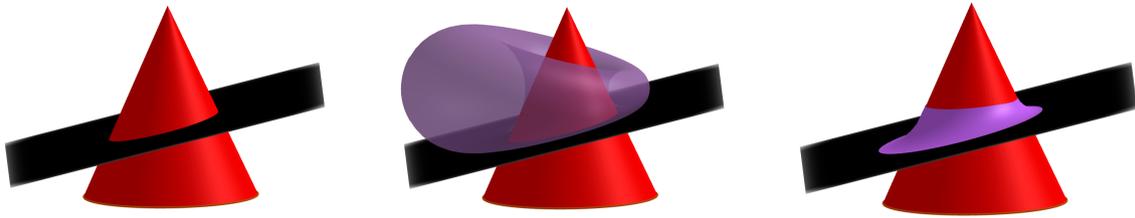


Figura 4.20: La mezcla entre un plano y un cono por un cíclido anular.

Como en la sección anterior, se va a explicar el procedimiento llevado a cabo para conseguir como resultado la Figura 4.20, dando las coordenadas o ecuaciones de los diferentes objetos involucrados en la mezcla:

- Las circunferencias extremas tienen centros en $(-a, 0, 0)$ y $(a, 0, 0)$. Tomando $a = 4$, el radio de la circunferencia grande es $R1 = 3$ (es decir, $3 = k + c$) y el de la pequeña es $R2 = 1$ (es decir, $1 = k - c$). Estas circunferencias determinan el cíclido:

- Circunferencia de centro $C_1 = (-4, 0, 0)$, radio $R1 = 3$ y paralela al eje Y :

$$circ_1 : X = (-4, 0, 0) + (3 \cos t, 0, -3 \sin t)$$

- Circunferencia de centro $C_2 = (4, 0, 0)$, radio $R2 = 1$ y paralela al eje Y :

$$circ_2 : X = (4, 0, 0) + (\cos t, 0, -\sin t)$$

- Construcción del plano:

- Cálculo de la recta contenida en el plano. Primero hallamos el punto de intersección de las rectas tangentes exteriores comunes a las dos circunferencias:

- Existen dos triángulos rectángulos semejantes que conectan el punto de intersección, denotado como G , con los centros de las circunferencias C_1 y C_2 , así como con los puntos de tangencia en las circunferencias (supongamos H en $circ_1$, I en $circ_2$).

La recta exterior inferior es la que determinará el plano que cortará al cono. Para construir esta recta, calculamos la distancia d desde el punto G a la circunferencia pequeña.

$$C_1H = 3, \quad C_2I = 1, \quad C_1G = 3 + 4 + 2 + d = 9 + d, \quad C_2G = 1 + d$$

Resolviendo la proporción:

$$\frac{3}{1} = \frac{9+d}{1+d}, \quad \text{obtenemos } d = 3.$$

- El punto de intersección de las rectas exteriores se encuentra en $G = (8, 0, 0)$.
- La recta que se encuentra contenida en el plano es:

$$f : X = (8, 0, 0) + \lambda(-11.25, 0, -2.9)$$

- Definición del plano: Plano que pasa por $(8, 1, 0)$ y f

$$p : 2.9x - 11.25z = 23.24$$

■ Construcción del cono:

- Elegimos un punto como vértice del cono: $V = (1, 0, 4)$.
- Trazamos las tangentes interiores a cada circunferencia que pasan por V , que serán las generatrices del cono.

- Recta tangente a $circ_1$ que pasa por M :

$$g_1 : X = (1, 0, 4) + \lambda(-2.25, 0, -5.19)$$

- Recta tangente a $circ_2$ que pasa por V :

$$g_2 : X = (1, 0, 4) + \lambda(2.1, 0, -4.43)$$

- Hallamos la bisectriz entre las dos rectas generatrices del cono (g_1 y g_2):

$$l : X = (1, 0, 4) + \lambda(0.03, 0, -1.82)$$

- Tomamos un punto cualquiera en una de las generatrices del cono:

$$A = (-3.04, 0, -5.34)$$

- Trazamos la recta en el espacio perpendicular a l que pasa por A , n .

$$n : X = (-3.04, 0, -5.34) + \lambda(-1, 0, -0.02)$$

- $g_2 \cap n$: Obtenemos otro punto de la circunferencia base.

$$B = (5.36, 0, -5.2)$$

- Punto medio entre A y B : El centro de la circunferencia base del cono.

$$C = (1.16, 0, -5.27)$$

- Radio de la circunferencia base: Distancia(A, C)

$$r = 4.2$$

- El cono es definido por (C, V, r)

$$\text{Cono} : 171.43$$

■ Comprobación de que $p \cap \text{Cono}$ es una elipse

$$e : X = (0.81, 0, -1.86) + (-2.64 \cos t, 2.63 \sin t, -0.68 \cos t)$$

- Definición del cíclico: Cíclico anular con parámetros $a = 4$, $c = 1$, $k = 2$, $u \in [0, 2\pi)$, $v \in [\frac{3\pi}{2}, \frac{17\pi}{9})$

$$f(u, v) = \left(\frac{2(1 - 4 \cos u \cos v) + 15 \cos u}{4 - \cos u \cos v}, \frac{\sqrt{15} \sin u(4 - 2 \cos v)}{4 - \cos u \cos v}, \frac{\sqrt{15} \sin v(2 - \cos u)}{4 - \cos u \cos v} \right)$$

Si se realizase un corte de la imagen central de la Figura 4.20 con el plano XZ , se obtendría:

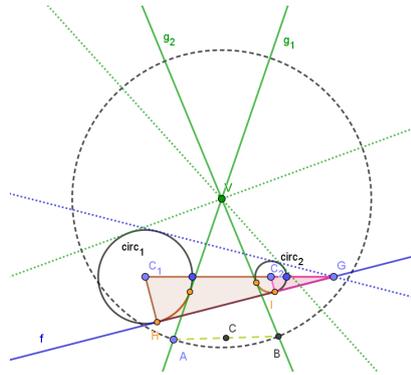


Figura 4.21: Corte de la construcción con el plano $\{y = 0\}$.

Capítulo 5

Conclusión

Comenzamos revisando conceptos fundamentales de geometría diferencial como base para comprender las propiedades de los cíclidos de Dupin. Luego, analizamos sus definiciones equivalentes, explorando su construcción mediante la técnica de inversión y sus principales tipos: elíptico-hiperbólico y parabólico.

Se describieron las propiedades geométricas de los cíclidos, destacando su utilidad en el Diseño Geométrico Asistido por Computadora debido a sus líneas de curvatura circulares y la simplicidad de su parametrización. También se abordó su construcción aplicando la inversión a superficies como cilindros y toros, resaltando su capacidad para modelar transiciones suaves entre superficies.

Finalmente, se analizaron las superficies de mezcla basadas en cíclidos de Dupin, investigando las condiciones para la existencia de mezclas no singulares y proponiendo una definición formal de mezcla con cíclidos. Se discutieron las propiedades de las circunferencias extremas en estas superficies, a partir de las cuales se puede definir el cíclido de mezcla en cuestión, y se presentaron ejemplos prácticos, como la mezcla entre dos esferas o entre un cono y un plano, demostrando su aplicabilidad en CAGD.

Trabajo Futuro

Este trabajo abre diversas vías de investigación futura. Una extensión natural sería explorar las propiedades geométricas de los cíclidos de Dupin en dimensiones superiores. En particular, se podría estudiar la envolvente de familias de esferas en \mathbb{R}^n utilizando geometría inversiva, lo que permitiría generalizar los resultados obtenidos en \mathbb{R}^3 y analizar hipersuperficies cíclidas en espacios de mayor dimensión.

Otra dirección interesante sería investigar la existencia y unicidad de cíclidos en escenarios más generales, como aquellos que involucran esferas fijas no propiamente dichas o combinaciones de esferas propias y no propias, extendiendo el problema clásico de Apolonio a espacios tridimensionales. Asimismo, el estudio de nuevas combinaciones de cuádricas naturales podría arrojar nuevas soluciones a problemas de mezcla, lo que implicaría clasificar los casos de intersección entre cuádricas naturales y explorar equivalencias con otros problemas de geometría clásica.

Esta investigación proporciona una base sólida para el desarrollo de nuevas técnicas de modelado geométrico y abre el camino para la creación de algoritmos más avanzados en el ámbito del CAGD.

Bibliografía

- [1] S. Allen and D. Dutta. Cyclides in pure blending i. *Computer Aided Geometric Design*, 14(1):51–75, 1997. doi:10.1016/S0167-8396(96)00021-0.
- [2] S. Allen and D. Dutta. Cyclides in pure blending ii. *Computer Aided Geometric Design*, 14(1):77–102, 1997. doi:10.1016/S0167-8396(96)00022-2.
- [3] Arthur Cayley. On the cyclide. *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, 12:148–163, 1873.
- [4] V. Chandru, D. Dutta, and C. M. Hoffman. On the geometry of dupin cyclides. Technical Report 697, Department of Computer Science Technical Reports, 1988. URL: <https://docs.lib.purdue.edu/cstech/697/>.
- [5] L.A. Cordero, M. Fernández, and A. Gray. *Geometría Diferencial de Curvas y Superficies con Mathematica*. Addison-Wesley Iberoamericana, 1995.
- [6] M.P. Do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, 1976.
- [7] L. Druoton, L. Garnier, and R. Langevin. Blending planes and canal surfaces using dupin cyclides. In M. Peternell and B. Pottmann, editors, *Mathematics of Surfaces XIII*, pages 412–422. Springer, 2009. URL: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-22027-2_33, doi:10.1007/978-3-642-22027-2_33.
- [8] C. Dupin. *Applications de Géométrie et de Mécanique*. Bachelier, 1822.
- [9] V. C. J. Dutta. Variable radius blending using dupin cyclides. *Academia*, 2016. URL: https://www.academia.edu/download/41221456/On_Variable_Radius_Blending_Using_Dupin_20160113-22188-1u114ea.pdf20160115-19908-baxc0k.pdf.
- [10] F. Etayo. *Geometría de Curvas y Superficies*. Universidad de Cantabria, 2020-2021.
- [11] F. Etayo. *Teoría Global de Superficies*. Universidad de Cantabria, 2023-2024.
- [12] Python Software Foundation. Python programming language, 1991. Python Language Reference, version 3.x. URL: <https://www.python.org/>.
- [13] A. Gray. *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*. CRC Press, 1998.
- [14] J.K. Johnstone and C.K. Shene. Dupin cyclides as blending surfaces for cones. In R.B. Fisher, editor, *Mathematics of surfaces V*, pages 3–29. Oxford University Press, 1994.
- [15] J.C. Maxwell. On the cyclide. *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, 9:111–126, 1868.
- [16] M.J. Pratt. Cyclides in computer aided geometric design. *Computer Aided Geometric Design*, 7(1):221–242, 1990. doi:10.1016/0167-8396(90)90033-N.

- [17] C. K. Shene. Blending two cones with dupin cyclides. *Computer Aided Geometric Design*, 14:307–327, 1997. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167839697000290>, doi:10.1016/S0167-8396(97)00029-0.
- [18] Y. L. Srinivas and D. Dutta. Blending and joining using cyclides. *Journal of Mechanical Design*, 116(4):1034–1040, 1994. URL: <https://asmedigitalcollection.asme.org/mechanicaldesign/article-abstract/116/4/1034/417785>, doi:10.1115/1.2919503.
- [19] M. van der Valk. *On Dupin Cyclides*. PhD thesis, University of Groningen, 2009. URL: https://fse.studenttheses.ub.rug.nl/8576/1/Martijn_van_der_Valk_WB_2009.pdf.