UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Facultad de Ciencias

ANÁLISIS DE ONDAS GRAVITACIONALES PROVENIENTES DE COLISIONES DE SISTEMAS BINARIOS DE AGUJEROS NEGROS MEDIANTE LA TÉCNICA DE FILTRO ADAPTADO

(Analysis of gravitational waves from binary black hole collisions using the matched filter technique)

Trabajo de Fin de Grado

para acceder al

GRADO EN FÍSICA

Autora: Natalia Sebrango Gutiérrez

Director: Diego Herranz Muñoz

Septiembre-2024

Resumen

Este trabajo se centra en el estudio de las ondas gravitacionales, específicamente aquellas que se originan en colisiones de sistemas binarios de agujeros negros, utilizando técnicas avanzadas de análisis de datos, como el filtrado adaptado.

El objetivo principal es profundizar en la comprensión de las ondas gravitacionales explorando su naturaleza, origen y métodos de detección. Lo que implica reforzar los conceptos fundamentales de la Relatividad General y aplicar métodos sofisticados de análisis de datos para interpretar las señales captadas por detectores como LIGO. Al analizar estas señales, se busca extraer los parámetros físicos de las fuentes de ondas gravitacionales y compararlos con las predicciones teóricas.

Abstract

This work focuses on the study of gravitational waves, specifically those originating from collisions of binary black hole systems, using advanced data analysis techniques such as matched filtering.

The main objective is to deepen the understanding of gravitational waves by exploring their nature, origin, and detection methods, which involves reinforcing the fundamental concepts of General Relativity and applying sophisticated data analysis methods to interpret the signals captured by detectors such as LIGO. By analyzing these signals, the goal is to extract the physical parameters of gravitational wave sources and compare them with theoretical predictions.

ÍNDICE

1. Introducción

1.1. Objetivos

El objetivo principal de este Trabajo de Fin de Grado es el estudio de las ondas gravitacionales con el fin de adquirir una amplia comprensión de su naturaleza, origen y métodos de detección. Para alcanzar este objetivo general se plantean los siguientes objetivos específicos: reforzar los conceptos fundamentales de la teoría de la Relatividad General ya trabajados en el curso introductorio de cuarto y adquirir otros nuevos más avanzados necesarios para entender las ondas gravitacionales, las ecuaciones de Einstein y su resolución; además de explorar los métodos de detección de ondas gravitacionales, enfocándose particularmente en el estudio del interferómetro LIGO (Observatorio de Ondas Gravitacionales por Interferometría Láser o *Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory*).

Por otro lado, se busca comprender en profundidad las técnicas de análisis de datos de ondas gravitacionales, con un enfoque particular en la técnica de filtro adaptado (matched filtering). Para así procesar y analizar los datos proporcionados por el observatorio LIGO, con el objetivo de extraer los parámetros físicos de las fuentes de ondas gravitacionales, y compararlos con las predicciones teóricas.

Finalmente, se busca divulgar los resultados obtenidos de manera clara y comprensible, tanto en el ámbito académico como en el público general, redactando un informe detallado con las conclusiones del estudio.

1.2. Importancia

La aparición y el estudio de las ondas gravitacionales tienen sus raíces en la teoría de la Relatividad General de Albert Einstein, formulada en 1915. Aunque Einstein predijo la existencia de estas ondas, su detección no se logró hasta un siglo después, debido a las enormes dificultades tecnológicas implicadas. Durante este extenso período, las ondas gravitacionales pasaron desapercibidas para muchos científicos, a pesar de ser uno de los fenómenos más fascinantes y prometedores en cuanto a la obtención de nueva información sobre el universo.

Con la primera detección directa de ondas gravitacionales por el Observatorio de Ondas Gravitacionales por Interferometría Láser (LIGO) en 2015, se inauguró una nueva era en la observación del cosmos. Las ondas gravitacionales permiten estudiar fenómenos que son invisibles a los telescopios tradicionales, abriendo así una ventana completamente nueva al universo. Durante siglos, las ondas electromagnéticas han sido la principal fuente de información en el ámbito científico de la astronomía. Gracias a ellas, se han realizado descubrimientos y estudios cruciales que han revolucionado la comprensión del universo.

Por ejemplo, los telescopios, diseñados para observar y estudiar las estrellas y otros objetos celestes como planetas, nebulosas y galaxias, han permitido estudiar la evolución galáctica y la formación estelar a lo largo de miles de millones de años. El análisis de los rayos X y los rayos gamma han llevado al descubrimiento de fenómenos extremadamente energéticos, como los agujeros negros supermasivos en el centro de las galaxias activas, que emiten radiaciones intensas debido a la acreción de materia. Estos son solo algunos de los innumerables estudios que se han podido realizar gracias a la detección de ondas electromagnéticas.

La radiación electromagnética tiene dos limitaciones muy importantes. En primer lugar, claramente toda aquella materia o fenómeno no radiante (que no emita ondas electromagnéticas) no va a poder ser observado. En segundo lugar, algunos fenómenos se pueden volver inobservables debido a que la luz se vea absorbida, dispersada u atrapada de alguna otra forma. Esto ocurre con el polvo galáctico, este absorbe la luz visible de las estrellas que se encuentran detrás e impide que se vean. A diferencia de las ondas electromagnéticas, las ondas gravitacionales interactúan de manera extremadamente débil con la materia, lo que significa que la información que transportan permanece prácticamente inalterada durante su viaje por el cosmos. Así, las ondas gravitacionales proporcionan una nueva y poderosa herramienta para explorar el universo y comprender fenómenos que antes eran inaccesibles.

2. Definición

Antes de entrar en materia es necesaria una primera definición cualitativa de las ondas gravitacionales, de esta manera se introduce el concepto permitiendo aportar las primeras pinceladas en el intrigante y extenso tema de las ondas gravitacionales.

Las ondas gravitacionales son perturbaciones ondulatorias de la curvatura del espacio-tiempo que se propagan a la velocidad de la luz. Estas son emitidas en procesos extremadamente violentos en los que participan cuerpos muy masivos. Se caracterizan por interactuar de manera muy débil con la materia, lo que junto con su diminuta intensidad, hace que su detección sea un desafío técnico significativo [1]. A su vez estas características permiten que la información transportada por la onda acerca de la fuente que la genera se mantenga prácticamente inalterada, lo que las hace una fuente de información muy interesante [2].

3. Historia

Las ondas gravitacionales, como una parte significativa de casos en la física, comienzan como una teoría para luego ser confirmadas experimentalmente. Desde su primera aparición fueron fuente de dudas dentro de la comunidad científica. En esta sección se repasan los principales hitos que llevaron del escepticismo a la certeza sobre la existencia de dichas ondas, lo cual impulsó el desarrollo en detectores de ondas gravitacionales que posteriormente permitieron comprobar experimentalmente su existencia.

En primer lugar se debe destacar el trabajo realizado por el matemático William Kingdon Clifford. Fue el primero en proponer la idea de que la materia y la energía eran diferentes tipos de curvatura del espacio. Su intuición sobre la relación entre gravedad y geometría sentó las bases que posteriormente influirían en el desarrollo de la teoría de la Relatividad General de Albert Einstein [3].

El concepto de onda gravitacional nace en 1893, cuando el físico Heaviside sugirió la existencia de estas ondas haciendo un tratamiento del campo gravitatorio análogo al del campo eléctrico [4]. Heaviside, al igual que Maxwell con el electromagnetismo, propuso que las perturbaciones en el campo gravitatorio podrían propagarse de manera similar a las ondas electromagnéticas, aunque su propuesta aún estaba en una fase muy preliminar.

Su desarrollo matemático no llegó hasta 1905, cuando Henri Poincaré publica el artículo *Sur la dynamique de l'électron*. La hipótesis de Poincaré partía de una idea fundamental: cuestionar la visión newtoniana de que la gravedad se transmite de manera instantánea a través del espacio. Poincaré propuso que, al igual que sucede con el campo electromagnético, la gravedad tiene una velocidad finita de propagación. En esta perspectiva, cualquier cambio en la distribución de masa debería provocar una propagación retardada en el campo gravitatorio, generando ondas gravitacionales que se propagan de manera análoga a las ondas electromagnéticas. Aunque este enfoque es conceptualmente elegante y ofrece una valiosa intuición, para su completa validación se necesitaba un desarrollo teórico más sólido [5].

Albert Einstein no coincidía con el pensamiento de Poincaré en cuanto a la existencia de las ondas gravitacionales, sin embargo su intriga le llevó a indagar en este concepto y, un año después de la publicación de la Teoría General de la Relatividad (1915), postuló la existencia de tres tipos de ondas gravitacionales (longitudinales-longitudinales, longitudinales-transversales y transversales-transversales) [6]. Einstein alcanza estos resultados realizando unas fuertes aproximaciones y suposiciones, lo que le lleva a pensar que dichas soluciones no son más que producto de la manipulación de las ecuaciones [7].

Sus temores se cumplieron en 1922, cuando Arthur Eddington demostró que dos de los tres tipos de onda viajaban a una velocidad que dependía del sistema de coordenadas. Además, Eddington señaló que el sistema de coordenadas empleado por Einstein era ondulado, lo que implicaba que todo lo que fuese estudiado bajo ese sistema tenía forma de onda [8]. Este análisis permitió descartar dos de los tres tipos de ondas gravitacionales propuestos inicialmente, manteniéndose una única solución válida, la transversal-transversal. Demostró que esta última viajaba a la velocidad de la luz en todos los sistemas de coordenadas.

La situación política en Europa llevó a Einstein a emigrar a América en 1933. Allí continuó con sus proyectos, entre ellos el estudio de las ondas gravitacionales junto al estudiante Nathan Rosen. En 1936, Einstein y Rosen escribieron a Max Born una carta donde concluían que las ondas gravitacionales no existían y el 1 de junio de ese mismo año enviaron un artículo titulado *Do gravitational waves exist?* [9] a la prestigiosa revista Physical Review. En este artículo se demostraba que todas las posibles soluciones de ondas planas tenían alguna singularidad, lo que les llevaba a negar su existencia.

El editor de Physical Review, John T. Tate, envió el manuscrito a Howard Percy Robertson, quien lo examinó y encontró que las singularidades eran debidas al uso de un sistema de coordenadas inadecuado. Dicha revisión no fue bien recibida por Einstein, quien decidió retirar el artículo de la revista [7].

Las correcciones del artículo no llegaron hasta pocos meses después, cuando el nuevo asistente de Einstein, Leopold Infeld, habló con Robertson y de manera conjunta confirmaron el error. Infeld informó a Einstein y realizó la corrección del artículo cambiando totalmente su postura acerca de las ondas gravitacionales. El artículo fue renombrado como *On gravitational waves* [10].

Posteriormente, en 1956, Felix A. E. Pirani publicó un artículo en el que definía las ondas gravitacionales en cantidades tensoriales puramente geométricas, el tensor de Riemann. Este trabajo permitió preceder de forma consistente la existencia de las ondas gravitacionales dentro del marco de la Relatividad General, descartando que se tratasen de una mala selección de sistema de coordenadas. Por desgracia sus hallazgos pasaron desapercibidos ya que los estudios en esa época se centraban exclusivamente en despejar las dudas sobre los efectos que tendría la radiación gravitatoria en la materia.

Entre el 18 y el 23 de enero de 1957, en la Universidad de Carolina del Norte, tuvo lugar la conferencia Chapel Hill, donde se discutieron importantes temas como la existencia de ondas gravitacionales (muchos científicos seguían escépticos) o la posibilidad de que estas transportasen energía.

En la conferencia Richard Feynman propuso un experimento mental denominado *sticky bead argument* con el fin de explicar los efectos de la radiación gravitacional en la materia. El experimento consistía en una barra con dos anillos de cuentas que se pueden deslizar libremente, de manera que el paso de una onda gravitacional con dirección de propagación perpendicular a la dirección de la barra provocaría una fuerza de marea modificando el montaje. La barra se mantendría fija por la fuerza atómica, mientras que la distancia entre los anillos cambiaría, deslizándose primero hacia los extremos de la barra y después hacia el centro. Si este movimiento generase algún tipo de fricción con la barra supondría un incremento de la temperatura tanto de los anillos como de la barra, lo que indicaría una transmisión de energía de la onda gravitacional a la barra, demostrando por lo tanto el transporte de energía por parte de las ondas gravitacionales [7].

Uno de los asistentes escépticos de esta conferencia, Hermann Bondi, publicó unos meses después un artículo titulado *Plane gravitational waves in general relativity* en la revista Nature, donde demostraba un tipo de soluciones de Einstein en forma de ondas planas, cambiando radicalmente su opinión sobre las ondas gravitacionales [11].

Los siguientes pasos en la historia de la formalización de las ondas gravitacionales vienen de la mano de Ivor Robinson, Pirani y Bondi con sus intentos de describir la ondas gravitacionales planas, llegando a la conclusión de que estas son un tipo de solución de las ecuaciones linealizadas de Einstein en el vacío que transportan energía [12].

Por otra parte, un año después de la conferencia, Joseph Weber comenzó a especular sobre cómo se podrían detectar las ondas gravitacionales. En 1960 publicó un artículo donde proponía detectar las ondas gravitacionales midiendo las vibraciones inducidas en un sistema mecánico. Junto a su equipo construyó el primer detector de ondas gravitacionales y durante varios años de funcionamiento llegaron a obtener algunas señales, que interpretaron como ondas gravitacionales. Mediante cálculos teóricos los físicos Sciama, Field y Rees demostraron que las mediciones de Weber no eran correctas[7].

A pesar de los fallidos resultados, varios equipos empezaron a considerar construir sus propios detectores. A mediados de los 70 había varios detectores mejorados operativos, por desgracia ninguno obtuvo ningún resultado. Lo que llevó a los científicos a plantearse otras alternativas para buscar estas ondas.

Una de estas alternativas consistía en utilizar métodos indirectos de detección. En 1974, Joseph Hooten Taylor y Alan Russell Hulse encontraron un púlsar PSR B1913+16, utilizando el radiotelescopio de Arecibo. Este púlsar llamó su atención ya que la emisión de pulsos no era constante. Se descubrió que junto a otra estrella de neutrones formaban un sistema binario y al observar los tiempos de los pulsos emitidos por el púlsar, Taylor y Hulse pudieron deducir con gran exactitud los parámetros orbitales del sistema binario. Durante varios años midieron el período orbital del púlsar y encontraron que se reducía a una tasa de aproximadamente 76,5 microsegundos por año, lo que coincidía perfectamente con las pérdidas de energía predichas debidas a la emisión de ondas gravitacionales. A pesar de no ser una detección directa, este evento reavivó las esperanzas entre la comunidad científica [13].

La historia de las ondas gravitacionales continúa con la aparición de los interferómetros como detectores de ondas gravitacionales. Durante la década de los 70, hubo hasta tres grupos diferentes que trabajaron de manera independiente.

En 1971, Robert Forward, quien había trabajado con Joseph Weber en antenas resonantes, diseñó y construyó el primer prototipo de interferómetro láser. Aunque los resultados de su prototipo no fueron exitosos, sentó las bases para futuros proyectos.

Independientemente, Rainer Weiss en MIT y Ronald Drever en la Universidad de Glasgow comenzaron en 1970 a estudiar la interferometría láser como detección. No fue hasta 1975 cuando Weiss recibió fondos para llevar a la realidad su proyecto de interferómetro de nueve metros.

Por último, en el grupo liderado por Heinz Billing en MPI, se empezó a desarrollar interferómetros de brazo largo en la década de 1970, comenzando con un prototipo de 3 metros. Para 1983, lograron avanzar hasta un interferómetro de 30 metros. Estos proyectos ayudaron mucho a reducir el ruido y aumentar la sensibilidad.

A principios de la década de 1980, Weiss y otros colaboradores fundaron el proyecto LIGO. Diseñaron y construyeron un interferómetro de un kilómetro de longitud [7].

En la década de los 90, comenzaron las colaboraciones internacionales, incluyendo el proyecto VIRGO en Italia, GEO600 en Alemania y KAGRA en Japón. De esta manera, se aumentaba la probabilidad de detección y la verificación de resultados.

El 14 de septiembre de 2015, los detectores gemelos de LIGO en Livingston (Louisiana) y Hanford (Washington) registraron la primera señal directa de ondas gravitacionales emitida en la fusión de dos agujeros negros. Después de décadas de desarrollo y avances, la primera onda gravitacional fue detectada, siendo uno de los logros más significativos de la historia de la astrofísica y la física en general [14].

El estudio futuro de las ondas gravitacionales continua con la próxima generación de detectores, como el Einstein Telescope y el observatorio LISA. Se espera que se detecten eventos de ondas gravitacionales con mayor sensibilidad y a mayores distancias, lo que permitirá estudiar el universo en mayor detalle [7].

4. Relatividad General

En esta sección, se discutirá cómo surgen las ondas gravitacionales a partir de la relatividad general, mediante la expansión de las ecuaciones de Einstein alrededor de una métrica plana de Minkowski. Además, de discutir su origen físico.

Einstein propuso que la gravedad es una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo inducida por la presencia de materia y energía. Para describir esta relación, desarrolló un conjunto de ecuaciones que conectan la curvatura del espacio-tiempo con la distribución de masa y energía. Estas ecuaciones se conocen como las Ecuaciones de Campo Gravitatorio o Ecuaciones de Einstein [15].

Las ecuaciones de Einstein son análogas a las ecuaciones de Maxwell para el campo electromagnético. Las ecuaciones de Maxwell son ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden que relacionan el campo (campo electromagnético) con su fuente (la 4-densidad de corriente). De manera similar, las ecuaciones de campo gravitatorio son ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden que están relacionadas con una fuente; en este caso, el tensor energía-momento [16].

4.1. El tensor energía-momento

El tensor energía-momento es una cantidad tensorial simétrica de orden dos que describe la distribución de energía, momento y flujo de masa en el espacio-tiempo [17]. Para un sistema en coordenadas arbitrarias x^μ, las componentes contravariantes del tensor energía-momento se pueden expresar en forma matricial de la siguiente manera:

$$[T^{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} T^{00} & T^{01} & T^{02} & T^{03} \\ T^{10} & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{20} & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{30} & T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

donde las diferentes componentes tienen interpretaciones físicas específicas:

1. T^{00} es la densidad de energía.
2. T^{i0} es la densidad de momento en la dirección i.
3. T^{0i} es el flujo de energía a través de una superficie con coordenada x^i =cte.
4. T^{ij} es el flujo de momento en la dirección i a través de una superficie con coordenada x^j =cte.

Cabe destacar que las interpretaciones de T^{i0} y T^{0i} pueden intercambiarse sin problema.

En este trabajo se considerará que el tensor energía-momento es simétrico, aunque existen teorías, como la teoría de Einstein-Cartan, en las que este tensor puede no serlo[18].

4.2. Ecuaciones de Einstein

Para formular una teoría que respete tanto el Principio de Covariancia como el Principio de Equivalencia, y que además generalice la gravedad de Newton, debe partirse de la ecuación de Poisson en la gravedad newtoniana:

$$\vec{\nabla}^2\Phi = 4\pi G\rho, \tag{2}$$

donde Φ es el potencial gravitatorio, ρ es la densidad de masa de la fuente que crea el campo gravitatorio y G es la constante gravitacional [15]. Esta ecuación presenta varios problemas, siendo el principal su carácter instantáneo, es decir, las variaciones en la densidad ρ se transmiten de manera instantánea al potencial Φ en cualquier punto del espacio. Sin embargo, la relatividad general establece que ninguna señal puede propagarse a una velocidad superior a la de la luz c

Para abordar estos problemas y cumplir con el Principio de Covariancia, que establece que las leyes físicas deben ser invariantes bajo transformaciones generales de coordenadas, se busca una generalización tensorial de la ecuación de Poisson. En términos generales, esta generalización se puede expresar como:

$$O(g) = kT, \tag{3}$$

donde O es un operador diferencial que actúa sobre el tensor métrico g, k es una constante a determinar y T es el tensor energía-momento, que actúa como la fuente del campo gravitatorio. Dado que $T^{\mu\nu}$ es un tensor de orden dos, el operador $O^{\mu\nu}$ también debe serlo[19].

Para generalizar la gravedad de Newton, se observa que las segundas derivadas del potencial Φ en la Eq.(2) sugieren que las componentes covariantes del operador O deben ser combinaciones de la métrica y de sus primeras y segundas derivadas. Cualquier tensor de la siguiente forma satisfará dichas condiciones:

$$O_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \mu g_{\mu\nu} R, \tag{4}$$

donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci, R es el escalar de Ricci y μ es una constante a determinar[18]. Para determinar esta constante se parte de la idea de que el tensor energía-momento satisface la siguiente relación:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \tag{5}$$

Esto expresa el Principio de Equivalencia, que impone la conservación local de energía y momento. Esta expresión requiere que se cumpla lo siguiente:

$$\nabla_\mu O^{\mu\nu} = \nabla_\mu (R_{\mu\nu} + \mu g_{\mu\nu} R) = 0 \tag{6}$$

Si se considera que $\nabla_\mu g^{\mu\nu} = 0$ y $R = g^{ab} R_{ab} = R^a_a$, se obtiene:

$$\nabla_\mu O^{\mu\nu} = \left(\frac{1}{2} + \mu\right) g_{\mu\nu} \nabla_\mu R = 0 \tag{7}$$

.

En general $\nabla_\mu R$ no va a ser cero en toda una región de espacio-tiempo a menos que este último sea plano y por lo tanto no haya campo gravitatorio. En consecuencia, se deduce que $\mu = -\frac{1}{2}$ y las ecuaciones de campo de Einstein se pueden expresar como:

$$G^{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = k T^{\mu\nu}, \tag{8}$$

donde $G^{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein, Dado que μ y ν pueden tomar valores de 0 a 3 en un espacio-tiempo de cuatro dimensiones, en principio hay 16 componentes diferentes en el tensor $G^{\mu\nu}$. Sin embargo, debido a la simetría de $G^{\mu\nu}$ y $T^{\mu\nu}$ ($G^{\mu\nu} = G^{\nu\mu}$ y $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$), solo 10 de estas ecuaciones son independientes [17].

Cada índice μ y ν puede tomar los valores de 0, 1, 2, y 3, que corresponden a las cuatro dimensiones del espacio-tiempo. En la práctica:

1. $\mu = 0$ y $\nu = 0$ se refiere a la componente temporal.
2. $\mu = 0$ y $\nu = i$ (donde i puede ser 1, 2, 3) se refiere a las componentes mixtas, que mezclan las coordenadas espaciales y temporales.
3. $\mu = i$ y $\nu = j$ (donde i y j pueden ser 1, 2, 3) se refiere a las componentes espaciales.

4.2.1. Límite Newtoniano

Para que las ecuaciones de Einstein sean consistentes con la gravedad newtoniana, deben coincidir con las ecuaciones de Newton en el límite newtoniano. Este límite se caracteriza por tres condiciones principales [19].

1. **Campo débil:** En una región donde el campo gravitatorio es débil (por ejemplo, en la superficie de la Tierra), se puede encontrar un sistema de coordenadas en el que la métrica se puede expresar como:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \tag{9}$$

donde $\eta_{\mu\nu}$ es la métrica de Minkowski y $h_{\mu\nu}$ se puede definir como la perturbación producida por el campo en un espacio-tiempo plano regido por la métrica de Minkowski ($\eta_{\mu\nu}$), es simétrica respecto al cambio de índices y cumple $|h_{\mu\nu}| \ll 1$.

2. **Campo estacionario:** En muchos escenarios gravitacionales de interés, como el campo gravitatorio de la Tierra, se asume que el campo es estático, es decir, las variaciones temporales del campo son despreciables. Esto se expresa matemáticamente como:

$$\partial_0 g_{\mu\nu} = \partial_0 h_{\mu\nu} = 0 \tag{10}$$

3. **Bajas velocidades:** La mecánica newtoniana es válida cuando los cuerpos se mueven a velocidades mucho menores que la velocidad de la luz. En términos matemáticos:

$$\frac{dx^i}{dt} \ll \frac{dx^0}{dt} \tag{11}$$

Por otro lado, el Principio de Equivalencia establece que la trayectoria de una partícula masiva en un campo gravitatorio, en ausencia de fuerzas externas, es una geodésica en el espacio-tiempo. La ecuación de la geodésica se puede escribir como:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\rho}{d\tau} = 0, \tag{12}$$

donde $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$ son los símbolos de Christoffel que describen cómo la métrica influye en el movimiento de las partículas [15]. Usando la tercera condición de bajas velocidades, Eq.(11), la ecuación se simplifica a:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{00}c^2\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0 \tag{13}$$

Por otro lado, el símbolo de Christoffel Γ^μ_{00} en este límite tiene la forma:

$$\Gamma^\mu_{00} = -\frac{1}{2}\eta^{\sigma\mu}\partial_\sigma h_{00} \tag{14}$$

Utilizando la condición de campo estacionario Eq.(10), se convierte en:

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{00} &= 0 \\ \Gamma^i_{00} &= \frac{1}{2}\delta^{ij}\partial_j h_{00} \end{aligned} \tag{15}$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación de las geodésicas en el límite newtoniano Eq.(12) se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d^2t}{d\tau^2} &= 0 \\ \frac{d^2\vec{x}}{d\tau^2} &= -\frac{1}{2}c^2\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2\vec{\nabla}h_{00}, \end{aligned} \tag{16}$$

donde la primera ecuación indica que $\frac{dt}{d\tau}$ =cte, por lo que la segunda ecuación se puede reescribir como:

$$\frac{d^2\vec{x}}{d\tau^2} = -\frac{1}{2}c^2\vec{\nabla}h_{00} \tag{17}$$

Comparando esta expresión con la ecuación de la gravedad newtoniana:

$$\frac{d^2\vec{x}}{d\tau^2} = -\vec{\nabla}\phi, \tag{18}$$

se obtiene de manera sencilla lo siguiente:

$$h_{00} = \frac{2\phi}{c^2} \tag{19}$$

Para comparar las ecuaciones de Einstein con el potencial newtoniano, se considera la componente temporal de las ecuaciones de campo de Einstein [19]:

$$R_{00} = k(T_{00} - \frac{1}{2}g_{00}T) \tag{20}$$

En el límite newtoniano, el término R_{00} se puede aproximar como:

$$R_{00} \approx -\partial_i \Gamma^i_{00} \approx -\frac{1}{2}\delta^{ij}\partial_i\partial_j h_{00} = -\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00} \tag{21}$$

Además se va a tener en cuenta que para un fluido perfecto, $T_{00} \approx \rho c^2$ y $T \approx \rho c^2$. Sustituyendo esto en la ecuación de Einstein Eq.(20) se obtiene:

$$-\frac{1}{2}\vec{\nabla}^2 h_{00} = k\left(\frac{1}{2}\rho c^2(1 - h_{00})\right) \approx -\frac{1}{2}k\rho c^2 \tag{22}$$

Usando la Eq.(19) y despejando, se obtiene:

$$\vec{\nabla}^2\phi = -\frac{1}{2}k\rho c^4 \tag{23}$$

Comparando esta ecuación con la ecuación de Poisson Eq.(2) se encuentra que el valor la constante k debe ser $k = -\frac{8\pi G}{c^4}$. Por lo tanto, las ecuaciones de Einstein se pueden escribir como:

$$G^{\alpha\beta} = -\frac{8\pi G}{c^4}T^{\alpha\beta} \tag{24}$$

Esta es la ecuación fundamental de la relatividad general, que describe cómo la geometría del espacio-tiempo está relacionada con la distribución de la energía y el momento en el universo[19].

4.3. Linealización de las ecuaciones de Eintein

El carácter no lineal de las ecuaciones de Einstein complica su resolución, por lo que se van a realizar una serie de aproximaciones.

Suponiendo una región local del espacio-tiempo que está ligeramente curvada, se puede usar la condición de campo débil mencionada anteriormente, en la que la métrica se podía expresar de la siguiente manera:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \tag{25}$$

donde $h_{\mu\nu}$ es simétrica respecto al cambio de índices, se define como la perturbación producida por el campo en un espacio-tiempo plano regido por la métrica de Minkowski ($\eta_{\mu\nu}$) y cumple $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Las coordenadas donde la métrica se escribe de esta manera se denominan coordenadas cuasi-Minkowskianas.[19]

Bajo unas coordenadas cuasi-Minkowskianas se pueden realizar dos tipos de cambios de coordenadas. En primer lugar, las transformaciones globales de Lorentz, estas transformaciones inducen un cambio en la métrica:

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma} = \eta_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \Lambda^\rho_\mu \Lambda^\sigma_\nu h_{\rho\sigma} \tag{26}$$

Por otro lado, se tienen las transformaciones infinitesimales de coordenadas. Cuando se hace un cambio minúsculo en unas coordenadas, estas se pueden expresar de la siguiente manera:

$$x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x), \tag{27}$$

donde $\xi^\mu(x)$ son cuatro funciones arbitrarias de la posición que cumplen las mismas condiciones que $h_{\mu\nu}$ ($|\xi_{\mu\nu}| \ll 1$). A partir de esta expresión se obtienen los valores de las derivadas y con ellas se logra obtener la expresión de la transformación de la métrica [19].

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma} \approx \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} - \partial_\nu \xi_\mu - \partial_\mu \xi_\nu \tag{28}$$

Los tres últimos término se van a recoger en uno único término $h'_{\mu\nu}$:

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \partial_\nu \xi_\mu - \partial_\mu \xi_\nu \tag{29}$$

En esta expresión y durante todo este trabajo los términos que no sean de primer orden de h, ξ o sus derivadas, se suprimirán (teoría lineal), permitiendo así que todas las expresiones se reduzcan de manera significativa.

Estas expresiones permiten calcular los símbolos de Christoffel, el tensor de Riemman, el tensor de Ricci y el escalar de Ricci:

- **Símbolos de Christoffel:**

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma}\left(\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}\right) = \frac{1}{2}\eta^{\lambda\sigma}\left(\partial_\mu h_{\sigma\nu} + \partial_\nu h_{\mu\sigma} - \partial_\sigma h_{\mu\nu}\right) \tag{30}$$

- **Tensor de Riemann:**

$$R^\sigma_{\mu\nu\rho} = \partial_\nu \Gamma^\sigma_{\mu\rho} - \partial_\mu \Gamma^\sigma_{\nu\rho} + \Gamma^\sigma_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\rho} - \Gamma^\sigma_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\rho} = \frac{1}{2}(\partial_\nu\partial_\mu h^\sigma_\rho + \partial_\rho\partial^\sigma h_{\mu\nu} - \partial_\nu\partial^\sigma h_{\mu\rho} - \partial_\rho\partial_\mu h^\sigma_\nu) \tag{31}$$

- **Tensor de Ricci:**

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^\sigma_{\mu\sigma\nu} - \Gamma^\sigma_{\nu\sigma\mu} + \partial_\nu\Gamma_\mu - \partial_\mu\Gamma_\nu = \frac{1}{2}(\partial_\mu\partial_\nu h + \Box^2 h_{\mu\nu} - \partial_\nu\partial_\rho h^\rho_\mu - \partial_\rho\partial_\mu h^\rho_\nu) \tag{32}$$

- **Escalar de Ricci:**

$$R = R^\mu_\mu = \Box^2 h - \partial_\rho\partial_\mu h^{\rho\mu} \tag{33}$$

donde $\Box^2$ es conocido como operador d'Alembertiano o simplemente d'Alembertiano ($\Box$). Es una generalización del operador laplaciano en el espacio-tiempo, que incluye tanto derivadas espaciales como temporales. En un espacio-tiempo de 4 dimensiones, el operador d'Alembertiano se define como:

$$\Box^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \tag{34}$$

En la notación relativista se expresa como:

$$\Box^2 = \partial_\mu \partial^\mu \tag{35}$$

Introduciendo el tensor de Ricci y el escalar de Ricci obtenidos, en la ecuación de Einstein, se obtiene lo siguiente:

$$\partial_\nu \partial_\mu h + \Box^2 h_{\mu\nu} - \partial_\nu \partial_\sigma h^\rho_\mu - \partial_\rho \partial_\mu h^\rho_\nu - \eta_{\mu\nu}(\Box^2 h - \partial_\rho \partial_\sigma h^{\sigma\rho}) = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{36}$$

Si se considera la forma de traza revertida de $h_{\mu\nu}$, esta última ecuación adquiere una forma más simplificada. La traza revertida de $h_{\mu\nu}$ se define de la siguiente manera:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} h \tag{37}$$

Y por lo tanto la Eq. (24) quedaría de la siguiente manera:

$$\Box \bar{h}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \partial_\rho \partial_\sigma \bar{h}^{\rho\sigma} - \partial_\nu \partial_\rho \bar{h}^\rho_\mu - \partial_\mu \partial_\rho \bar{h}^\rho_\nu = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{38}$$

Por otro lado, se va a considerar una transformación de *gauge* de la forma de la (29), que expresada en forma de traza revertida tiene la siguiente forma:

$$\partial_\rho \bar{h}'^{\mu\rho} = \partial_\rho \bar{h}^{\mu\rho} - \Box^2 \xi^\mu \tag{39}$$

Cabe resaltar que este tipo de transformaciones no cambian la física, en este caso la curvatura.

Por otro lado se van a elegir las funciones ξ de manera que las ecuaciones se simplifiquen lo máximo posible, una posible elección sería la siguiente:

$$\Box^2 \xi^\mu = \partial_\rho \bar{h}^{\mu\rho} \tag{40}$$

De manera que tres términos de la Eq.(36) se anulan, llegando así a las siguientes expresiones.[19]

$$\Box^2 \bar{h}^{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T^{\mu\nu} \tag{41}$$

$$\partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} = 0 \tag{42}$$

Obteniendose así la primera ecuación que corresponde a la ecuación de campo y la segunda que especifica el *gauge*, teniendo esta el nombre de *gauge* de Lorenz. [20, 15].

4.4. Solución en el vacío

Una vez obtenidas estas expresiones, se va a considerar el ejemplo de las ecuaciones de Einstein linealizadas en el vacío, donde el tensor energía-momento es cero y por lo tanto esta expresiones Eq.(41) y Eq. (42) quedarían de la siguiente manera:

$$\Box^2 \bar{h}^{\mu\nu} = 0 \tag{43}$$

$$\partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} = 0 \tag{44}$$

Siendo esta expresión una ecuación de ondas, cuya posible solución es una ecuación de onda plana de la siguiente forma:

$$\bar{h}^{\mu\nu} = A^{\mu\nu} e^{ik_\rho x^\rho}, \tag{45}$$

donde $A^{\mu\nu}$ son las componentes constantes de un tensor simétrico y $k_\rho = (\omega/c, \vec{k})$ corresponde con el vector de onda 4-dimensional[19].

Al sustituir la expresión de la ecuación de onda plana Eq.(45) en la Eq.(43) y considerar la siguiente relación $\partial_\rho \bar{h}^{\mu\nu} = k_\rho \bar{h}^{\mu\nu}$ se encuentra lo siguiente:

$$\Box^2 \bar{h}^{\mu\nu} = \eta^{\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma \bar{h}^{\mu\nu} = \eta^{\rho\sigma} k_\rho k_\sigma \bar{h}^{\mu\nu} = 0 \tag{46}$$

Esta ecuación solo puede satisfacerse si se cumple la siguiente expresión:

$$\eta^{\rho\sigma} k_\rho k_\sigma = k^\sigma k_\sigma = 0 \tag{47}$$

Lo que demuestra que cuadrivector k^ρ es de tipo nulo. Esto es importante ya que para que esta onda gravitacional represente una perturbación física real, el cuadrivector de onda k^ρ debe ser un cuadrivector nulo. Además, a partir de esta expresión se obtiene la relación de dispersión:

$$k^\sigma k_\sigma = \omega^2 - c^2 |\vec{k}|^2 = 0 \to \omega = c|\vec{k}| \tag{48}$$

La relación de dispersión para ondas gravitacionales es crucial para entender cómo estas ondas se propagan a través del espacio-tiempo y confirma que su comportamiento es similar al de otras formas de radiación que viajan a la velocidad de la luz.[21]

Por otro lado, utilizando esta vez la condición de *gauge* Eq.(42) se obtiene de manera sencilla la siguiente expresión:

$$A^{\mu\nu} k_\nu = 0 \tag{49}$$

Esta indica que la amplitud $A^{\mu\nu}$ de la onda es perpendicular a la dirección de propagación (dirección de k_ν), lo que demuestra la propiedad de transversalidad [21].

En cuanto al tensor amplitud, su simetría reduce sus componentes complejas independientes de 16 a 10. Sin embargo, debido a las cuatro condiciones de *gauge* de Lorenz, el número de componentes independientes se reduce a seis.

Por simplicidad se va a considerar una onda gravitacional plana propagándose en la dirección en la dirección de x^3, de esta manera las componentes del cuadrivector k^ρ quedarían de la siguiente manera:

$$[k^\rho] = (\omega/c, 0, 0, k) = (k, 0, 0, k), \tag{50}$$

lo que junto a la condición de *gauge* de Lorentz Eq.(42) permite obtener $A^{\mu 3} = A^{\mu 0}$. Por lo tanto, el tensor $A^{\mu\nu}$ adopta la siguiente forma:

$$[A^{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} A^{00} & A^{01} & A^{02} & A^{00} \\ A^{01} & A^{11} & A^{12} & A^{01} \\ A^{02} & A^{12} & A^{22} & A^{02} \\ A^{00} & A^{01} & A^{02} & A^{00} \end{pmatrix} \tag{51}$$

A continuación se va a aplicar la condición *trasverse-traceless*(TT), esta se utiliza para simplificar las ecuaciones de Einstein. La condición de *gauge* TT tiene dos partes principales indicadas por su propio nombre, la condición transversal (*transverse*) y la condición de traza nula (*traceless*).

1. **Condición Transversal:** Esta condición requiere que las perturbaciones métricas sean ortogonales a la dirección de propagación de la onda. Matemáticamente, si la onda gravitacional se propaga en la dirección z, la perturbación $h_{\mu\nu}$ debe cumplir que $h_{0\mu} = 0$ y $h_{z\mu} = 0$ para $\mu = 0, 1, 2, 3$. Esto significa que los componentes de la perturbación métrica en la dirección de propagación (z) y la componente temporal son nulos [20].

2. **Condición de Traza Nula:** Esta condición requiere que la traza de la perturbación métrica sea cero, es decir, $g^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = 0$. Esta condición asegura que la perturbación no cause un cambio en el volumen localmente, manteniendo solo las deformaciones de cizalla sin cambios volumétricos [22].

Además de estas dos condiciones principales, la *gauge* TT también incluye la condición de divergencia nula, que se expresa como $\partial^\mu h_{\mu\nu} = 0$. Esta condición asegura que la divergencia de la perturbación métrica sea cero, lo que contribuye a simplificar las ecuaciones y a describir adecuadamente las ondas gravitacionales [23].

La aplicación de la condición *trasverse-traceless*(TT) se impone dentro del marco del *gauge* de Lorentz y ocurre en el proceso de elegir las cuatro funciones $\xi^\mu(x)$, de manera que cumplan $\nabla^2 \xi^\mu = 0$. Esta elección reduce las componentes independientes de $A^{\mu\nu}$ a dos. Estas dos componentes se corresponden con los dos estados de polarización previamente mencionados.

Se van a elegir las siguientes funciones $\xi^\mu(x)$:

$$\xi^\mu = \epsilon^\mu e^{ik_\rho x^\rho}, \tag{52}$$

donde ϵ^μ son constantes, se tratan de las amplitudes de las funciones ξ^μ y son elegidas por conveniencia.[21]

Por otro lado la Eq. (37) muestra cómo se transforman las componentes de la traza revertida. Esta ecuación también puede expresarse de la siguiente manera:

$$\bar{h}^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu} h = \bar{h}^{\mu\nu} - \partial^\mu \xi^\nu - \partial^\nu \xi^\mu + \eta^{\mu\nu} \partial_\rho \xi^\rho \tag{53}$$

Si se toma como ξ^μ como la ecuación Eq.(52) y $\bar{h}^{\mu\nu}$ como la solución en el vacío dada por la ecuación Eq(45), se encuentra que el tensor amplitud se transforma de la siguiente manera:

$$A'^{\mu\nu} = A^{\mu\nu} - i\epsilon^\mu k^\nu - i\epsilon^\nu k^\mu + i\eta^{\mu\nu} \epsilon^\rho k_\rho \tag{54}$$

Usando la expresión del cuadrivector k^ρ Eq. (50), se obtiene:

$$A'^{00} = A^{00} - ik(\epsilon^0 + \epsilon^3)$$

$$A'^{01} = A^{01} - ik\epsilon^1$$
$$A'^{02} = A^{02} - -ik\epsilon^2$$
$$A'^{11} = A^{11} - ik(\epsilon^0 - \epsilon^3)$$
$$A'^{12} = A^{12}$$
$$A'^{22} = A^{22} - ik(\epsilon^0 - \epsilon^3)$$

Conviene elegir las constantes ϵ de la siguiente manera:

$$\epsilon^0 = -i(2A^{00} + A^{11} + A^{22})/(4k)$$
$$\epsilon^1 = -iA^{01}/k$$
$$\epsilon^2 = -iA^{02}/k$$
$$\epsilon^3 = -i(2A^{00} - A^{11} - A^{22})/(4k)$$

De modo que se obtiene:

$$A'^{00} = A'^{01} = A'^{02} = 0$$
$$A'^{11} = -A'^{22}$$

Por lo que quedarían tres componentes distintas de cero, de las cuales solo dos son independientes. Si se toman $A^{11} = a$ y $A^{12} = b$ estas serían las componentes del tensor amplitud en el nuevo *guage* para una onda viajando en la dirección de x^3:

$$[A^{\mu\nu}_{TT}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{55}$$

Conviene introducir dos tensores lineares de polarización $e_1^{\mu\nu}$ y $e_2^{\mu\nu}$, las componentes que se obtienen al fijar $a = 1, b = 0$ y $a = 0, b = 1$, respectivamente. De manera que la forma general del tensor amplitud en el *gauge* TT para una onda viajando en la dirección de x^3 se escribe como:

$$A^{\mu\nu}_{TT} = ae_1^{\mu\nu} + be_2^{\mu\nu} \tag{56}$$

Todas las posibles polarizaciones se pueden obtener superponiendo solo dos polarizaciones con amplitudes arbitrarias y fases relativas.[21]

Las onda gravitacional puede tener dos polarizaciones independientes: *plus* (+) y *cross* (×). Estas polarizaciones corresponden a los dos tensores de polarización $e_1^{\mu\nu}$ y $e_2^{\mu\nu}$ que se han introducido anteriormente. El efecto de estas polarizaciones en un anillo de partículas puede visualizarse como sigue:

- **Polarización Plus (+):** La polarización $e_1^{\mu\nu}$ (con $a = 1$) produce un estiramiento y compresión de las partículas en direcciones perpendiculares, como se muestra en la Fig. 1.

- **Polarización Cross (×):** La polarización $e_2^{\mu\nu}$ (con $a = 0$ y $b = 1$) genera un efecto similar, pero rotado 45°, como se ilustra en la Fig. 2.

- **Combinación de Polarizaciones:** Una combinación de ambas polarizaciones produce un patrón de deformación más complejo, que resulta de la superposición de los efectos *plus* y *cross*. Esto se puede observar en la Fig. 3.

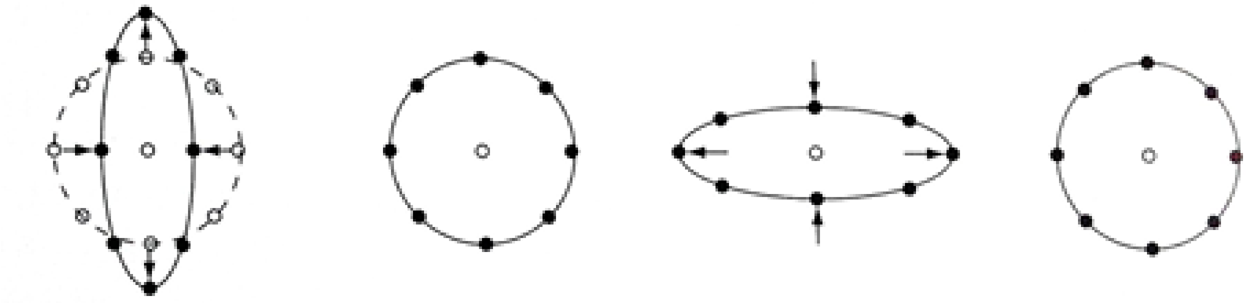

Figura 1: Muestra el efecto de una onda gravitacional con polarización *plus* sobre un anillo de partículas, causando que el anillo se deforme en las direcciones x e y alternadamente[21].

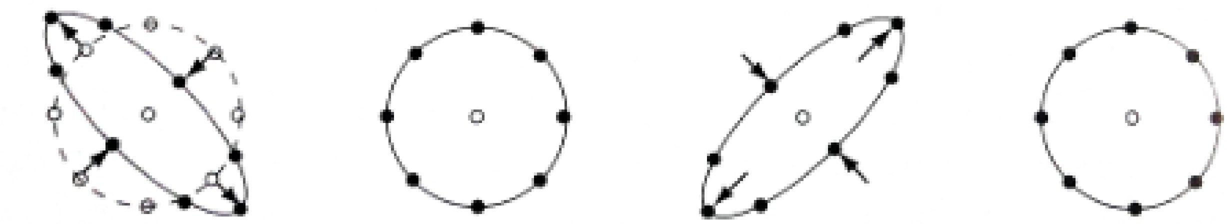

Figura 2: Ilustra el efecto de una onda gravitacional con polarización *cross*, rotando el efecto de la Fig. 1 en 45°[21].

4.5. Solución general

Una vez obtenida la ecuación de la onda en el vacío se busca encontrar la solución general, que va a tener forma de ecuación de onda inhomogénea. Para encontrar esta solución se va a utilizar la función de Green.

Se empieza considerando la solución de la ecuación de ondas inhomogénea cuando la fuente es una función δ ubicada en un evento preciso en el espacio-tiempo con coordenada y^σ. Por lo que se busca resolver la siguiente ecuación:

$$\Box_x^2 G(x^\sigma - y^\sigma) = \delta^{(4)}(x^\sigma - y^\sigma), \tag{57}$$

donde la x de $\Box_x^2$ hace referencia a que el operador d'Alemberiano se obtiene respecto a las coordenadas x^σ y $G(x^\sigma - y^\sigma)$ es la función de Green, que en la ausencia de bordes debe ir en función solo de la diferencia $x^\sigma - y^\sigma$.[21]

La solución general se construye añadiendo otras fuentes tipo delta, localizadas en diferentes puntos del espacio-tiempo, ya que las ecuaciones de Eintein linealizadas son, como su propio nombre indica, lineales. Se puede escribir como:

$$\bar{h}^{\mu\nu}(x^\rho) = \bar{h}^{\mu\nu}_{(0)}(x^\rho) + \frac{16\pi G}{c^2}\int G(x^\sigma - y^\sigma)T^{\mu\nu}(y^\sigma)d^4y \tag{58}$$

Dentro de esta solución se añade la solución de la ecuación homogénea $\bar{h}^{\mu\nu}_{(0)}(x^\rho)$ (solución en el vacío), aunque en esta caso se va a considerar $\bar{h}^{\mu\nu}_{(0)}(x^\rho) = 0$ por simplicidad.

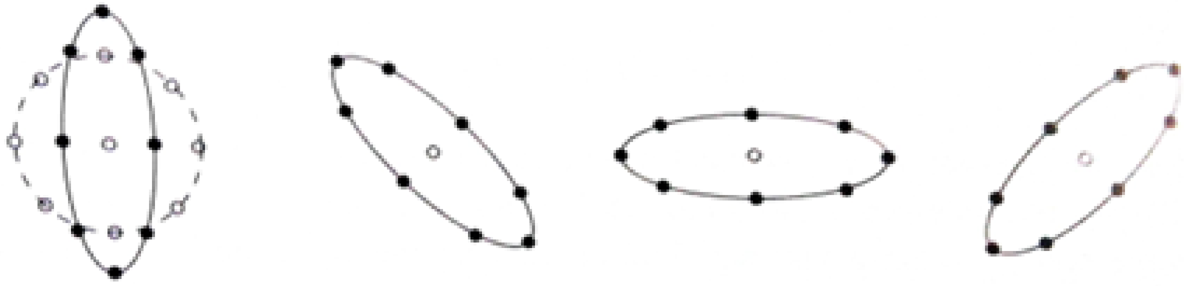

Figura 3: Presenta la deformación resultante de una mezcla de ambas polarizaciones, mostrando un patrón más complejo[21].

La solución de esta ecuación se puede obtener de muchas maneras, en este caso se va a comenzar poniendo la fuente (función δ) en el origen, por lo que la Eq.(57) se puede reescribir como:

$$\partial_\mu \partial^\mu G(x^\sigma) = \delta^{(4)}(x^\sigma) \tag{59}$$

Se comienza integrando esta ecuación sobre un hipervolumen V de cuatro dimensiones. Se elige este hipervolumen como una esfera de radio r en sus dimensiones espaciales (por la simetría esférica espacial) y se integra en t de $-\infty$ a ∞.

$$\int_V \partial_\mu \partial^\mu G(x^\sigma) d^4x = \int_S [\partial^\mu G(x^\sigma)] n^\mu dS = 1 \tag{60}$$

Se ha aplicado el teorema de la divergencia y S es la superficie de la hiperesfera, con norma unitaria n^μ. Al estar trabajando en una métrica con signatura $(+,-,-,-)$ n^μ se elige de manera que apunta hacia fuera en el tiempo y hacia dentro en el espacio.

Teniendo en cuenta que variaciones de campo gravitatorio viajan a la velocidad de la luz c, los únicos puntos del espacio que van a verse influenciados por la función δ de la fuente serán aquellos que se encuentren en parte orientada hacia el futuro de un cono de luz L, de manera que solo en esos puntos $G(x^\sigma)$ será distinto de cero:

$$G(x^\sigma) = \begin{cases} f(r)\delta(ct-r) & \text{para } ct \geq 0 \\ 0 & \text{para } ct < 0, \end{cases} \tag{61}$$

donde $f(r)$ es una función arbitraria.

La intersección de cono de luz con la superficie S es una esfera de radio r situada en la hipersuperficie $ct = r$. Por lo que esta esfera va a ser la única contribución a la integral de superficie en Eq.(60). De manera que integrando sobre esta, se obtiene:

$$-4\pi r^2 c \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta G(x^\sigma)}{\delta r} dt = 1 \tag{62}$$

Se ha llegado a esta solución considerando que $dS = cdtd\Omega$ (con $d\Omega$ el ángulo sólido) y $n^\mu \delta_\mu = -\delta_r$. Además es importante recordar que la única contribución a la integral ocurre en $ct = r$. Si ahora se introduce la Eq. (61) en esta expresión se obtiene:

$$4\pi r^2 f(r) c \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(ct-r) dt - 4\pi r^2 c \frac{df(r)}{dr} \int_0^{\infty} \delta(ct-r) dt = 1, \tag{63}$$

donde $\delta'(ct-r)$ denota la derivada de la función delta con respecto a su argumento[21].

Mediante integración por partes se obtiene de manera sencilla que la primera integral es igual a cero, de manera que se obtiene:

$$-4\pi r^2 c\frac{df(r)}{dr}\int_0^\infty \delta(ct-r)dt = 1, \tag{64}$$

por lo que se requiere que $-4\pi r^2\frac{df}{dr} = 0$, es decir, $f(r) = \frac{1}{4\pi r} = 0$, donde las constantes de integración desaparecen ya que la función de Green debe ser cero en el infinito espacial. Por lo tanto, la función de Green resultante tiene la siguiente forma:

$$G(x^\sigma) = \frac{\delta(x^0-|\vec{x}|)}{4\pi|\vec{x}|}\theta(x^0), \tag{65}$$

donde $\theta(x^0)$ es la función de Heaviside (si $x^0 < 0$ es igual a cero y si $x^0 \geq 0$ es igual a uno). Sustituyendo esta expresión en la Eq. (58) se obtiene que la solución general de la ecuación de onda quedará de la siguiente manera:

$$\bar{h}^{\mu\nu}(ct,\vec{x}) = -\frac{4G}{c^4}\int\frac{T^{\mu\nu}(ct-|\vec{x}-\vec{y}|,\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|}d^3\vec{y} \tag{66}$$

Considerando que $[x^\rho] = (ct, x)$, donde y representa las coordenadas espaciales de un punto de la fuente, x las coordenadas espaciales donde se determina $\bar{h}^{\mu\nu}(ct,x)$ y $ct_r = ct - |x-y|$ es el tiempo de retardo. Este tiempo indica que los cambios en el campo gravitatorio (debido a variaciones en la distribución de masa y energía) se propagan a la velocidad de la luz. Esto significa que si una fuente de gravedad cambia, su efecto en otro punto del espacio-tiempo no se percibe instantáneamente sino después de un intervalo de tiempo.

En el Apéndice A se verificar que la solución satisface la ecuación de *gauge* Lorenz $\partial_\mu\tilde{h}^{\mu\nu} = 0$.

4.6. Expansión multipolar de la solución general

Como norma general las fuentes involucradas son dinámicas y pueden tener distribuciones espaciales complejas o extensiones comparables con la distancia al punto donde se desea calcular ese campo. En este caso es de gran ayuda utilizar la expansión multipolar, esta expansión caracteriza la fuente en función de sus momentos multipolares.

En primer lugar se realiza una expansión de Taylor del término $\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}$:

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} = \frac{1}{r} - y^i\partial_i\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{2!}y^iy^j\partial_i\partial_j\left(\frac{1}{r}\right) + ... = \frac{1}{r} - y^i\frac{x_i}{r^3} + y^iy^j\left(\frac{3x_ix_j - r^2\delta_{ij}}{r^5}\right) + ... \tag{67}$$

Donde $r = |\vec{x}|$ y las derivadas parciales se hacen con respecto a x_i. Utilizando esta expansión, la solución general tiene la siguiente forma:

$$\bar{h}^{\mu\nu}(ct,\vec{x}) = -\frac{4G}{c^4}\left[\frac{1}{r}\int T^{\mu\nu}(ct_r,\vec{y})d^3\vec{y} + \frac{x_i}{r^3}\int T^{\mu\nu}(ct_r,y)y^id^3\vec{y} + \frac{3x_ix_j - r^2\delta_{ij}}{r^5}\int T^{\mu\nu}(ct_r,\vec{y})y^iy^jd^3\vec{y} + ...\right] \tag{68}$$

Considerando que los momentos multipolares para un tiempo t viene dados por:

$$M^{\mu\nu i_1 i_2 ... i_\ell}(ct) = \int T^{\mu\nu}(ct,y)y^{i_1}y^{i_2}...y^{i_\ell}d^3\vec{y}, \tag{69}$$

la solución general quedaría de la siguiente manera:

$$\bar{h}^{\mu\nu}(ct,\vec{x}) = -\frac{4G}{c^4}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(-1)^\ell}{\ell!}M^{\mu\nu i_1 i_2 \dots i_\ell}(ct_r)\partial_{i_1}\partial_{i_2}\dots\partial_{i_\ell}\left(\frac{1}{r}\right) \tag{70}$$

De esta expresión bastan los primeros términos para obtener una buena aproximación, ya que estos contienen la mayor contribución al campo. Para órdenes cada vez mayores la contribución se vuelve despreciable para fuente cada vez más lejanas, ya que el ℓ-momento es proporcional a $1/r^{l+1}$ [21].

4.7. Generación de ondas gravitacionales

Hasta ahora, se han estudiado las ondas gravitacionales como una consecuencia directa de las ecuaciones de campo de Einstein. Sin embargo en ningún momento se ha hablado de su origen físico o de las fuentes que las emiten. Para ello es importante estudiar el tensor energía-momento $T^{\mu\nu}$, que actúa como la fuente del campo gravitacional. Además de la solución general de la ecuación de ondas (117), que conecta directamente la fuente del campo gravitacional con los efectos observables.

Antes de proceder con el análisis, se debe realizar una aproximación denominada aproximación de fuente compacta. Se supone una fuente con una distribución de masa localizada cerca del origen O del sistema de coordenadas elegido. Si tomamos el punto donde se mide el campo $\vec{x}$ a una distancia r del punto O lo suficientemente grande, comparada con la extensión de la fuente, se puede tener en cuenta solo el primer término de la expansión multipolar (68).

A continuación se muestra la solución con la aproximación de fuente compacta:

$$\bar{h}^{\mu\nu}(ct,\vec{x}) = -\frac{4G}{c^4 r}\int T^{\mu\nu}(ct',\vec{y})d^3\vec{y} \tag{71}$$

Esta ecuación indica que el cálculo del campo gravitatorio se ha reducido a integrar $T_{\alpha\beta}$ sobre la fuente a un tiempo retardado $ct' = ct - r$.

En este punto, es relevante analizar los componentes del tensor $T_{\alpha\beta}$ en la integral [21].

$$\int T^{00}d^3\vec{y} = E = Mc^2 \rightarrow \text{energía total de la fuente}$$

$$\int T^{0i}d^3\vec{y} = P^i c \rightarrow \text{componente i-ésima del momento total de la fuente.}$$

$$\int T^{ij}d^3\vec{y} = \text{energía interna total de la fuente.}$$

En una fuente aislada, tanto la masa (o energía) como el momento se mantienen constantes (se puede demostrar fácilmente utilizando la ecuación de conservación $\partial_\mu t^{\mu\nu} = 0$). Esta información permite obtener directamente la siguiente expresión:

$$\bar{h}^{00}(t,x^i) = \bar{h}^{tt}(t,x^i) = -\frac{4G}{c^4 r}\int T^{00}d^3\vec{y} = -\frac{4GM}{c^2 r} = \text{constante} \tag{72}$$

Este resultado representa el primer término en la expansión multipolar, correspondiente a la Ec.(68) . Las demás componentes vienen dadas por la siguiente ecuación:

$$\bar{h}^{ij}(t,x^i) = -\frac{4G}{c^4 r}\left[\int T^{ij}(ct',\vec{y})d^3\vec{y}\right]_r \tag{73}$$

Esta integral es muy difícil de trabajar directamente, por lo que se van a realizar unos pasos previos que facilitan el camino. [21]

En primer lugar, se va a utilizar la siguiente notación: $\partial_0 = \partial/\partial(ct')$ y $\partial_k = \partial/\partial y^k$. En segundo lugar, se van a elegir las coordenadas espaciales de manera que se corresponda con las del centro de momento lineal, en donde $P^i = 0$, lo que implica:

$$\int_{\text{vol}} T^{\mu\nu} d^3x = P^{\mu} = 0 \to P^i = 0,$$

y por lo tanto: $\bar{h}^{0i} = \bar{h}^{0i} = 0$, lo que junto a $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ y Eq. (72) permite obtener lo siguiente:

$$\begin{aligned} \partial_0 T^{00} + \partial_k T^{0k} &= 0 \\ \partial_0 T^{i0} + \partial_k T^{ik} &= 0 \end{aligned} \tag{74}$$

Por otro lado se va a considerar la siguiente integral:

$$\int \partial_k (T^{ik} y^j) d^3\vec{y} = \int (\partial_k T^{ik}) y^j d^3\vec{y} + \int T^{ij} d^3\vec{y}, \tag{75}$$

donde se toma la integral sobre una región del espacio que encierre en su interior a la fuente, de manera que la superficie se cumpla que $T^{\mu\nu} = 0$. Haciendo uso del teorema de Gauss la integral de la izquierda se convierte en una integral sobre la superficie, por lo que da como resultado cero. De manera que usando la ecuación Eq.(74) se obtiene:

$$\int T^{ij} d^3\vec{y} = -\int (\partial_k T^{ik}) y^j d^3\vec{y} = \int (\partial_0 T^{i0}) y^j d^3\vec{y} = \frac{1}{c}\frac{1}{dt'} \int T^{i0} y^j d^3\vec{y} \tag{76}$$

Por conveniencia, para cálculos posteriores, se va a reescribir como:

$$\int T^{ij} d^3\vec{y} = \frac{1}{2c}\frac{d}{dy^0} \int (T^{i0} y^j + T^{j0} y^i) d^3\vec{y} \tag{77}$$

Por otro lado se va a considerar la siguiente integral:

$$\int \partial_k (T^{0k} y^i y^j) d^3\vec{y} = \int (\partial_k T^{0k}) y^i y^j d^3\vec{y} + \int (T^{0i} y^j T^{0j} y^i) d^3\vec{y}, \tag{78}$$

donde, de nuevo se va a aplicar el teorema de Gauss a la integral de la izquierda, volviendo a dar como resultado cero. De manera que usando (74) se obtiene:

$$\int (T^{i0} y^j + T^{j0} y^i) d^3\vec{y} = \frac{1}{2c}\frac{d}{dt'} \int T^{00} y^i y^j d^3\vec{y} \tag{79}$$

De modo que combinando las dos ecuaciones Eq.(77) y Eq.(79), se obtiene:

$$\int T^{ij} d^3\vec{y} = \frac{1}{2c^2}\frac{d}{dt'} \int T^{00} y^i y^j d^3\vec{y} \tag{80}$$

Por lo que la Eq. (73) quedaría de la siguiente manera:

$$\bar{h}^{ij}(ct, \vec{x}) = \frac{2G}{c^6 r} \left[\frac{d^2 I^{ij}(ct')}{dt'^2} \right]_r, \tag{81}$$

donde $[]_r$ indica que la expresión dentro de los corchetes se evaluada en $ct_r = ct - r$ y I^{ij} es el tensor momento cuadrupolar de la fuente, cuya expresión matemática es la siguiente:

$$I^{ij}(ct) = \int T^{00}(ct, \vec{y})y^i y^j d^3\vec{y} \tag{82}$$

La solución encontrada muestra que la radiación gravitacional se origina en la segunda derivada temporal del momento cuadrupolar. Esta descripción sugiere que la dirección de las perturbaciones coincide con la dirección de propagación de la onda, lo cual no es completamente exacto, ya que las ondas gravitacionales dependen de las componentes transversales del denominado *tensor cuadrupolar sin traza* o momento cuadrupolar reducido S^{ij}:

$$S^{ij} = I^{ij} - \frac{1}{3}\delta^{ij} I_k^k \tag{83}$$

Aquí, δ_{ij} representa la delta de Kronecker, e I_k^k es la traza del tensor de momento cuadrupolar. Este ajuste explica por qué los momentos con simetría esférica o cilíndrica no generan ondas gravitacionales, ya que los únicos tensores esféricamente simétricos que permanecen inalterados bajo rotaciones ortogonales son aquellos proporcionales a la matriz identidad δ_{ij}. Si I^{ij} es proporcional a δ_{ij}, S^{ij} se anula y no habría emisión de radiación.

5. Astrofísica

La astrofísica es la rama de la astronomía que estudia la física y la dinámica de los objetos celestes y los fenómenos cósmicos. Explora desde la formación y evolución de estrellas y galaxias, hasta los procesos extremos como las supernovas y los agujeros negros. Esta disciplina utiliza tanto observaciones astronómicas como modelos teóricos para entender la naturaleza y el comportamiento del universo a escalas que van desde lo microscópico hasta lo macroscópico. En esta sección, se exploraran algunos de los fenómenos más fascinantes y cruciales dentro del entorno de las ondas gravitacionales.

5.1. Fenómenos astrofísicos relevantes

La vida de una estrella es un proceso complejo que comienza con su formación en nebulosas y termina con su muerte, ya sea como una estrella de neutrones, una enana blanca, o un agujero negro [24].

Como se ha dicho, el ciclo de vida de una estrella comienza en nebulosas, enormes nubes de gas y polvo. Este gas y polvo comienza a colapsar bajo la influencia de la gravedad, formando lo que se denomina una protoestrella. Cuando la temperatura y la presión en el núcleo de la protoestrella aumentan lo suficiente, se inician las reacciones nucleares que marcan el comienzo de la segunda fase, la fase de secuencia principal.

Durante la fase de secuencia principal, que es la más duradera y estable de la vida de una estrella, el hidrógeno en el núcleo se fusiona en helio, liberando una enorme cantidad de energía. Esta fase puede durar miles de millones de años [24].

Con la fusión de todo el hidrógeno disponible en la estrella, da comienzo la tercera fase, fase de gigante roja. En esta fase las capas externas de la estrella se expanden y enfrían, mientras que el núcleo se contrae y calienta. Esto se ve reflejado como un aumento de tamaño y un color rojizo.

En este punto pueden ocurrir dos procesos diferentes dependiendo de su masa. Las estrellas de baja masa, expulsan sus capas exteriores y se convierten en enanas blancas. Las enanas blancas se caracterizan por ser muy calientes y densas y pueden mantener su forma durante miles de millones de años. Durante la fase de gigante roja, estas estrellas también pueden fusionar helio en elementos más pesados, como carbono, oxígeno y otros elementos más pesados, antes de perder sus capas exteriores [25].

En segundo lugar y el más interesante en el contexto de ondas gravitacionales, las estrellas masivas ($M > 8\,M_{\odot}$). El proceso continúa con la fusión del helio en carbono y oxígeno. Una vez agotado el helio, el núcleo comienza a contraerse y a calentarse aún más, permitiendo la fusión del carbono en neón, magnesio y sodio. Este proceso sigue avanzando con la fusión de oxígeno en elementos más pesados como el silicio y el azufre. La fusión ocurre en diferentes capas, como en una cebolla, cada capa fusiona un elemento diferente. El núcleo fusiona elementos más pesados, mientras que las capas exteriores fusionan elementos más ligeros [24].

La última etapa importante es la de fusión del silicio en hierro y níquel. A diferencia de los elementos más ligeros, la fusión del hierro no libera energía, la consume. A medida que se fusiona el hierro, el núcleo se vuelve más inestable. La presión de radiación que antes contrarrestaba la gravedad disminuye porque la fusión del hierro no genera energía adicional. Sin la presión de radiación para sostenerlo, el núcleo de hierro comienza a colapsar bajo su propia gravedad. Este colapso es increíblemente rápido, comprimiendo el núcleo en cuestión de segundos, lo que se conoce como supernova. Esta explosión es una de las más poderosas del universo [24].

El colapso del núcleo y la explosión de la supernova dejan detrás un remanente compacto: una estrella de neutrones o un agujero negro, dependiendo de la masa del núcleo colapsado. Si el núcleo restante después de la supernova tiene una masa entre 1,4 y 2,5 veces la masa del Sol, se formará una estrella de neutrones. Si la masa del núcleo colapsado es mayor que aproximadamente 2,5 masas solares, el colapso gravitacional continuará hasta formar un agujero negro [25].

5.1.1. Estrellas de neutrones

Las estrellas de neutrones son objetos astronómicos que, como se acaba de explicar, se forman como resultado de una explosión conocida como supernova. Durante esta supernova se produce un proceso de fusión de protones y electrones en neutrones, dando como resultado una masa densa y compacta de neutrones [25].

Las estrellas de neutrones se caracterizan por tener una masa varias veces mayor que la del Sol y diámetros de unos pocos kilómetros. Algunas presentan también campos magnéticos muy elevados y rotaciones rápidas debido a la conservación del momento angular durante el colapso del núcleo estelar. Un caso especial de estrellas de neutrones son los púlsares, estos objetos emiten haces de radiación electromagnética de manera periódica, lo que es detectado como señales pulsantes a intervalos regulares [26].

5.1.2. Agujeros negros

De manera muy resumida, un agujero negro es un objeto astronómico extremadamente denso y compacto que tiene una gravedad tan fuerte que ni siquiera la luz puede escapar de su campo gravitatorio. Esto se debe a que la gravedad de un agujero negro es tan intensa que la curvatura del espacio-tiempo es tan pronunciada que cualquier objeto que se acerque demasiado al centro del agujero negro es atraído hacia él y se vuelve invisible para el observador exterior. Al igual que la estrella de neutrones (definida en el apartado anterior) este objeto se considera un objeto compacto por su alta densidad y la concentración extrema de su masa en un espacio muy pequeño [25].

5.1.3. Sistemas binarios

Un sistema binario es un conjunto de dos cuerpos astronómicos que orbitan alrededor de un centro de masa común debido a su atracción gravitacional mutua. En estos sistemas pueden producirse varios fenómenos de interés, como la acreción [27].

La acreción es un proceso que tiene lugar en los sistemas binarios. Se produce cuando una de las estrellas que forman dicho sistema pierde parte de su materia mediante procesos como desbordamiento del lóbulo de Roche o vientos estelares. El lóbulo de Roche es una región en el espacio que rodea a cada uno de los dos cuerpos en un sistema binario, dentro de la cual el material está gravitacionalmente ligado a ese cuerpo en particular.

Específicamente, el lóbulo de Roche define el límite en el cual la gravedad de un cuerpo es lo suficientemente fuerte como para retener el material en contra de la influencia gravitacional del otro cuerpo en el sistema. En el punto donde los lóbulos de Roche de los dos cuerpos del sistema binario se tocan, se encuentra un punto de equilibrio llamado el punto de Lagrange L1. En este punto, la gravedad de los dos cuerpos se equilibra, y si el material de una estrella (como gas o plasma) cruza este punto, puede ser transferido al otro cuerpo en el sistema. La materia perdida cae hacia la estrella compacta y puede formar un disco de acreción, es decir, un disco giratorio de material altamente ionizado y caliente que gira rápidamente alrededor de la estrella compacta antes de ser absorbido [27].

5.2. Fuentes Astrofísicas de Ondas Gravitacionales

Técnicamente hablando, cualquier objeto físico acelerado con un término cuadrupolar que cambie con el tiempo en su distribución de masa puede ser fuente de ondas gravitacionales, el problema llega a la hora de detectar dichas ondas. Los instrumentos de los que se disponen (interferómetros LIGO y Virgo) necesitan objetos muy masivos que sufren rápidas aceleraciones para que las ondas gravitacionales producidas sean lo suficientemente grandes como para ser detectadas. Por ello los astrónomos han definido cuatro categorías que engloban las principales fuentes de dichas ondas en función de las características del objeto o sistema que las produce, estas son: continua, binaria compacta $inspiral$, estocástica y en ráfaga[28].

5.2.1. Ondas Gravitacionales Continuas

Este tipo de onda tiene la característica de tener una única frecuencia (monocromáticas), o un rango muy pequeño de frecuencias cuya intensidad se mantiene más o menos constante durante largos periodos de tiempo. Pueden ser emitidas por objetos asimétricos rotantes o sistemas binarios ausentes de simetría respecto al eje de rotación [29].

Un ejemplo de fuente de ondas gravitacionales continuas son las estrellas de neutrones. La emisión de ondas gravitacionales de este tipo de fuentes se produce, como ya se ha comentado, debido a asimetrías respecto al eje de rotación. Una estrella de neutrones con una distribución no uniforme de masa o campo magnético en rotación produciría una distorsión del espacio-tiempo, lo que provocaría la formación de ondas gravitacionales que se propagan a través del espacio-tiempo.

Existe otra fuente de asimetrías en este tipo de estrellas, estas se producen a causa de los denominados modos r. En el interior de las estrellas de neutrones pueden surgir modos de oscilación no radiales que implican movimientos relativos de las capas internas y externas de la estrella, dichos movimientos no se tratan solo de expansiones y contracciones, sino que suponen movimientos con posibles componentes de torsión y deformación o movimientos toroidales [30]. Estas deformaciones, si son lo suficientemente grandes y no se ven amortiguadas por efectos viscosos, pueden llevar a la emisión continua de ondas gravitacionales.

Por último, la acreción es un proceso que tiene lugar en los sistemas binarios. Si esta no es perfectamente simétrica, puede inducir deformaciones o asimetrías en la estrella compacta, lo que es una fuente potencial de ondas gravitacionales. Además, la acreción de material puede excitar también modos r.

Desgraciadamente, hasta la fecha no se han podido detectar este tipo de ondas gravitacionales. Su detección supondría la oportunidad de avanzar en los estudios de la estructura interna y la composición de las estrellas de neutrones, así como probar las predicciones de la teoría de la relatividad general de Einstein en condiciones de alta densidad y fuertes campos gravitatorios.

5.2.2. Ondas Gravitacionales Estocásticas

Las ondas gravitacionales estocásticas son señales débiles y aleatorias que surgen de la superposición de eventos cósmicos distantes, como fusiones de estrellas de neutrones, rotación de agujeros negros, supernovas, o incluso el eco del Big Bang. Aunque el estudio de estas ondas es desafiante debido a su naturaleza impredecible, las herramientas de análisis de datos actuales, como las del observatorio LIGO, son capaces de identificar patrones en estas señales no modeladas, aunque hasta la fecha, no han tenido éxito [28].

5.2.3. Ondas Gravitacionales *Burst*

Las ondas gravitacionales tipo *brust*se espera que provengan de fenómenos explosivos como supernovas o el colapso de estrellas masivas en agujeros negros o estrellas de neutrones. Estas señales, de corta duración y con una mezcla de frecuencias, son difíciles de predecir y, por tanto, de detectar. Las simulaciones indican que la detección de tales ondas, con frecuencias de cientos de hertzios, es viable solo para eventos dentro de nuestra galaxia, lo que destaca la necesidad de detectores más avanzados y del desarrollo de nuevos patrones teóricos para mejorar la identificación de estos fenómenos astronómicos [28].

5.2.4. Ondas gravitacionales *inspiral*

Las ondas gravitacionales *inspiral* son aquellas que se emiten en el proceso de fusión de los dos cuerpos que forman el sistema binario (coalescencia de un sistema binario) [31].

La potencia radiada en forma de ondas gravitacionales es muy pequeña, por lo que este efecto es irrelevante salvo cuando las masas y las energías potencial y cinética involucradas son muy grandes. Este puede ser el caso de dos agujeros negros (o también estrellas de neutrones) girando en torno a su centro de masas en órbita muy cercana. Su alta densidad y concentración de masa en un espacio pequeño hacen de ellos fuentes de ondas gravitacionales lo suficientemente intensas como para ser detectadas.

Existen tres clases de sistemas binarios de interés: aquellos que están formados por dos estrellas de neutrones (BNS), dos agujeros negros (BBH) y una estrella de neutrones y un agujero negro (NSBH). Cada una de las subclases de sistemas binarios compactos crea un patrón único que depende de diversos factores como: las masas de cada objeto, la orientación de sus órbitas con respecto a la Tierra o la distancia a la que están. Sin embargo, la generación de las ondas es común a los tres; los dos objetos compactos y densos giran uno alrededor del otro mientras irradian ondas gravitacionales, dichas ondas se llevan parte de la energía orbital del sistema, lo que provoca que los objetos compactos se acerquen y aumenten su velocidad de rotación. A esta fase se le llama *inspiral*. Cuanto más rápido orbiten, más fuertes serán las ondas gravitacionales que irradien, entrando en un bucle que finaliza con la coalescencia del sistema binario.

El momento en el que se fusionan los dos objetos corresponde con el punto donde se libera más energía en forma de ondas gravitacionales; esta fase se denomina *merge*. Posteriormente, el objeto fusionado oscila hasta encontrar un equilibrio (fase *ringdown*).

Las tres fases que se han mencionado (*inspiral*, *merge* y *ringdown*) tienen una duración conjunta de décimas de segundo y son las únicas capaces de emitir ondas gravitacionales lo suficientemente intensas como para poder ser detectadas.

Durante la primera fase, la frecuencia y amplitud de la onda aumentan; dicho aumento es llamado *chirp* (chirrido, gorjeo) ya que esta característica se encuentra también en el gorjeo de un pájaro.

Las ondas gravitacionales *inspiral* son las únicas que se han podido detectar hasta la fecha; estas tienen una gran importancia ya que proporcionan información valiosa sobre la dinámica y la evolución de tales sistemas binarios de objetos compactos como agujeros negros y estrellas de neutrones, así como de las propiedades de la materia en condiciones extremas [28].

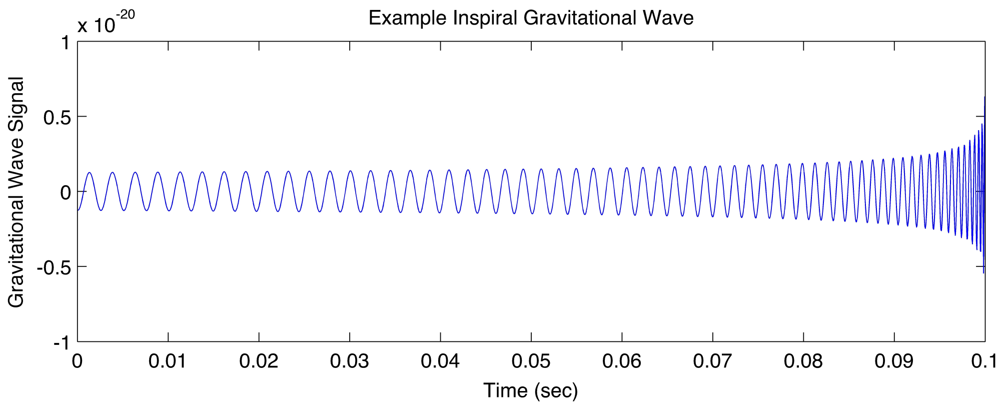

Figura 4: Ejemplo de señal de una fuente de ondas gravitacionales *inspiral* [28]

6. Detección de ondas gravitacionales

El pensamiento sobre las ondas gravitacionales ha experimentado muchas variaciones a lo largo del tiempo. Hasta mediados del siglo XX, una amplia mayoría de científicos consideraba este fenómeno como un artefacto de transformaciones de coordenadas o *gauge*, es decir, manipulaciones matemáticas de las ecuaciones. Cuando se demostró que se podía extraer energía de estas ondas, se abrió la posibilidad de construir un detector, lo que permitió avanzar hacia la demostración experimental de las ondas gravitacionales [32].

Los primeros detectores de ondas gravitacionales se basaban en la idea de que si dos masas conectadas por un resorte eran momentáneamente estiradas y luego comprimidas por una onda gravitacional, se impartía energía potencial al resorte. De esta manera, si la frecuencia característica de la onda estaba cerca de la frecuencia de resonancia del sistema mecánico, la respuesta se amplificaba y podía ser medida con sensores piezoeléctricos, que transforman las vibraciones mecánicas en impulsos eléctricos. Los primeros detectores de ondas gravitacionales fueron simples cilindros de metal, donde la energía se convertía en oscilaciones longitudinales de la barra. Este tipo de detectores pretendían buscar excitaciones de los modos normales de vibración de la corteza terrestre. Joe Weber, de la Universidad de Maryland, fue un pionero en este enfoque y reportó anomalías atribuidas a ondas gravitacionales, aunque posteriormente fueron descartadas [33]. A pesar de los avances tanto en el sistema mecánico, entre ellas la introducción de detectores criogénicos para reducir el ruido térmico, como en las técnicas de análisis de datos, este tipo de detectores no ha sido capaz de obtener resultados exitosos, en su mayoría debido a lo dominante que es el ruido en la señal.

Los interferómetros aportaron un enfoque diferente al de las barras resonantes. Para entender cómo funcionan los interferómetros en la detección de ondas gravitacionales, es esencial comprender el funcionamiento básico de un interferómetro de Michelson.

Este instrumento óptico consiste en una fuente de luz (como un láser) que se hace pasar por un divisor de haz, generalmente un espejo semirreflectante. Cada haz se dirige hacia un espejo diferente (ambos espejos están sujetos en posición, pero se ajustan con precisión) y luego se refleja de vuelta al divisor, donde se recombinan y crean un patrón de interferencia en forma de anillos en una pantalla de detección [34].

La interferencia constructiva ocurre cuando la diferencia de camino óptico entre los dos haces es un múltiplo entero de la longitud de onda de la luz, resultando en puntos brillantes en el patrón de interferencia. Por el contrario, la interferencia destructiva se produce cuando la diferencia de camino es un múltiplo semientero de la longitud de onda, resultando en áreas oscuras.

¿Cómo se relaciona esto con la detección de ondas gravitacionales? Si se imagina un interferómetro configurado para que, en el centro de la pantalla de interferencia, haya una condición de interferencia destructiva (oscuridad). Si una onda gravitacional pasase, alteraría la posición de los espejos, cambiando la diferencia de camino óptico. Esto rompería la condición de interferencia destructiva, y aparecería luz en la pantalla. Esta perturbación puede medirse para inferir la presencia de una onda gravitacional.

En 1962, Gertsenshtein y Pustovoit propusieron este método de detección. El grupo de Joe Weber desarrolló la idea y construyó el primer prototipo de interferómetro para ondas gravitacionales [35]. Se descubrió rápidamente que estos interferómetros eran mucho más sensibles que los detectores de barras resonantes. A partir de ahí, se desarrollaron muchas mejoras tecnológicas.

6.1. Primera generación de Interferómetros

La primera generación de interferómetros no está completamente definida, ya que hubo diferentes prototipos que fueron evolucionando, con mejoras tanto en la parte tecnológica como en el análisis de datos. Todos estos prototipos formaron las bases que llevaron al diseño y construcción de 5 interferómetros principales: LIGO (con un total de dos interferómetros), Virgo, GEO 600 y TAMA.

6.1.1. LIGO Inicial

La versión inicial de LIGO (LIGO-I) consiste en dos interferómetros idénticos ubicados en Hanford, Washington, y en Livingston, Louisiana. La fuente de luz utilizada era un láser de Nd que emitía 10 W a 1064 nm, los espejos eran de sílice fundida con recubrimientos dieléctricos de baja dispersión y absorción, y cada brazo tiene una longitud de cuatro kilómetros (H1, L1) y dos kilómetros (H2), y están dispuestos de forma perpendicular.

Funciona en condiciones de vacío extremo ($10^{-8} - 10^{-9}$ Torr) con el objetivo de tratar de eliminar las fluctuaciones de fase producidas por la dispersión de la luz en el aire. Con respecto a los espejos, estos están suspendidos como péndulos, con una frecuencia natural de 0,76 Hz. De esta manera, la transmisión de vibraciones ambientales, como el ruido sísmico, se reduce [36].

Se hace uso también de la cavidad Fabry-Perot, la cual es un sistema óptico constituido por dos espejos reflectantes paralelos. Dentro de ellos, se puede dar un fenómeno conocido como resonancia de la luz. La luz entra en la cavidad y se refleja múltiples veces en los espejos. Para ciertas longitudes de onda, el camino óptico dentro de la cavidad será un múltiplo entero de la longitud de onda, lo que se conoce como condición de resonancia ($2L = m\lambda$, donde L es la distancia entre los dos espejos, m un número entero y λ la longitud de onda). Si se cumple esta condición, la intensidad de la luz resultante se amplifica significativamente.

Este instrumento se relaciona con el interferómetro ya que las ondas gravitacionales producen minúsculas distorsiones en los brazos. Para que estas sean detectadas, los brazos deben ser extremadamente largos. Colocando cavidades Fabry-Perot en cada brazo del interferómetro, la luz sufre múltiples reflexiones antes de recombinarse, lo que aumenta efectivamente la longitud del brazo de la interferencia sin necesidad de aumentar físicamente la longitud del brazo.

El uso de este tipo de instrumentos aumenta enormemente la sensibilidad, ya que el cambio en la longitud del brazo que produce el paso de la onda gravitacional provoca un cambio amplificado en la fase de la luz que sale de las cavidades.

Otro componente importante en el interferómetro es el espejo de reciclaje de potencia. Este se usa para aumentar la potencia efectiva. Su función principal es reflejar la luz láser de vuelta al interferómetro después de cada pasada, aumentando así la potencia de la luz disponible para la detección. Los espejos se sitúan entre el divisor de haz y la fuente emisora de luz[37].

La longitud de los brazos debe ajustarse de manera que el centro del patrón de interferencia sea destructivo. De esta forma se minimiza el ruido procedente del detector. La longitud de los brazos y la alineación de los espejos se controlan mediante señales PDH (Pound-Drever-Hall). Este método consiste en enviar luz láser a través del interferómetro y comparar la fase de la luz reflejada con una referencia estable, de manera que una mínima variación de la longitud del brazo produce un cambio de fase en la luz del láser. Los sistemas de servo-control ajustan continuamente la posición de los espejos aplicando las correcciones basadas en las señales PDH. Su función es mantener una adecuada alineación y posición de los espejos, evitando así interferencias no deseadas.

En la siguiente figura se muestra un esquema de la configuración del interferómetro LIGO.

6.1.2. Virgo, GEO 600 y TAMA

El interferómetro Virgo se encuentra en Italia y, aunque tiene un diseño muy similar al de LIGO, presenta varias diferencias clave. En primer lugar, la longitud de sus brazos es de tres

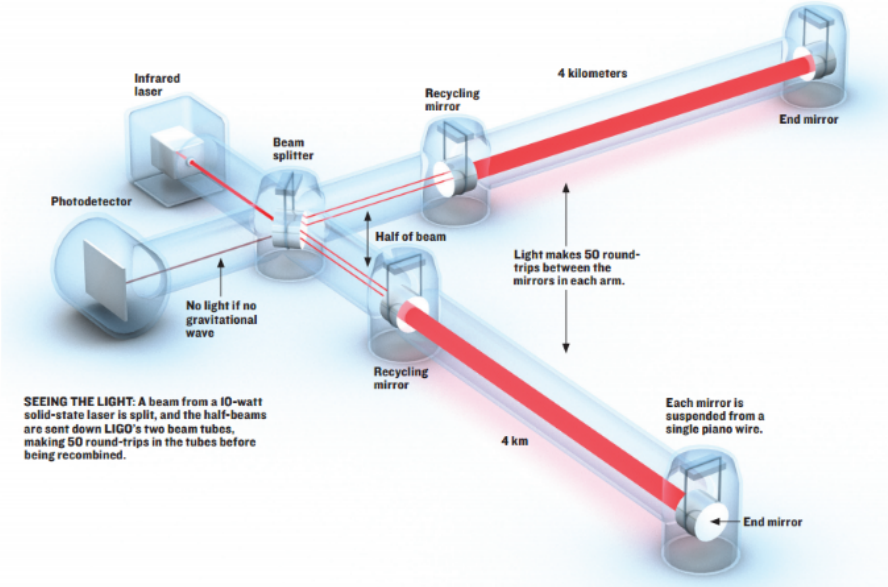

Figura 5: Esquema del interferómetro LIGO. [36].

kilómetros, comparado con los cuatro kilómetros de LIGO. Con respecto a la potencia del láser, es de 17 W, mientras que el de LIGO es de 10 W. Virgo fue construido entre 1996 y 2003, y durante sus primeras observaciones (2007-2011), colaboró con LIGO en la búsqueda de ondas gravitacionales [38].

El interferómetro GEO 600, ubicado en Alemania, tiene dos funciones principales: monitorear la galaxia cercana cuando LIGO y Virgo no están operativos y servir como banco de pruebas para tecnología avanzada. Con una longitud de brazo más corta (600 m), no se esperaba que GEO 600 detectara ondas gravitacionales, pero ha sido pionero en técnicas como el *squeezing*, que reduce el ruido cuántico en la señal [39].

El interferómetro TAMA, construido en Japón, tiene una longitud de 300 m en cada brazo. Su objetivo principal fue probar las tecnologías que se utilizarían en detectores más grandes y sensibles, como KAGRA, el sucesor de TAMA [40].

6.2. Segunda Generación de Interferómetros

La segunda generación de interferómetros, particularmente LIGO (LIGO-II), incluye varias mejoras significativas. En primer lugar, se ha incrementado la potencia del láser hasta 180 W mediante un láser de varilla, desarrollado en colaboración con el equipo de GEO. Este avance ha permitido una mayor intensidad del haz de luz, reduciendo así el ruido de disparo. Otra mejora importante se ha realizado en las suspensiones de los espejos. Se han implementado suspensiones cuádruples en los péndulos, lo que disminuye el ruido sísmico. Además, se ha aumentado la masa y la calidad de los espejos para reducir el ruido térmico y mitigar el ruido de presión de radiación, que ha aumentado debido a la mayor potencia del láser [41].

En cuanto a la tercera generación de interferómetros, ya se han iniciado estudios para su desarrollo. Un consorcio europeo está en las fases de diseño conceptual para un trío de interferómetros subterráneos de 10 km denominado Telescopio Einstein. Este proyecto utilizará un láser de 500 W y una compresión agresiva, lo que permitirá alcanzar una sensibilidad de diseño que se espera sea un orden de magnitud superior a la de los detectores avanzados de segunda generación actualmente en construcción. Con esta capacidad mejorada, se anticipa el inicio de una nueva era en la astronomía y cosmología de precisión mediante ondas gravitacionales [42]. Otro proyecto ambicioso es la implementación de interferómetros espaciales, propuesto por la NASA y la ESA bajo el nombre de LISA (*Laser Interferometer Space Antenna*). Este proyecto contempla una configuración triangular aproximadamente equilátera, con lados de 6×10^6 km, formada por tres satélites. Cada satélite enviará un láser a los otros dos y recibirá láseres de cada uno de ellos, estableciendo un sistema de doble cuasi-interferómetro con seis láseres bloqueados en fase [43].

7. Técnicas de Análisis de Datos

Una de las partes más importantes dentro de la detección y caracterización ondas gravitacionales provenientes de eventos astrofísicos, es el análisis de la señal resultante. En esta sección, se exploraran algunas de las técnicas más utilizadas en este campo, como la limpieza y filtrado de datos y el cálculo de parámetros.

La salida (*output*) de un detector de ondas gravitacionales es el desplazamiento de fase de la luz recombinada después de viajar por los dos brazos de un interferómetro, expresado en función del tiempo. Idealmente, esta señal está compuesta por la propia onda gravitacional y el ruido asociado.

La señal recibida por un detector (*input*) es una cantidad escalar $h(t)$, mientras que la señal de la onda gravitacional se describe mediante un tensor h_{ij}. En general, estas dos cantidades están relacionadas por la siguiente ecuación:

$$h(t) = D^{ij} h_{ij}, \tag{84}$$

donde D^{ij} es el tensor del detector, un tensor constante que depende de la geometría del detector.

Aunque la señal de entrada $h(t)$ se encuentra en el dominio temporal, el análisis de los datos se realiza en el dominio de las frecuencias. Este enfoque permite manejar el ruido de forma más efectiva y mejora la identificación de patrones. En el dominio temporal, el ruido y la señal están mezclados, mientras que en el dominio de frecuencias pueden ocupar diferentes bandas, facilitando la separación de señales complejas en sus componentes de frecuencia mediante la Transformada de Fourier [44].

En el contexto de las ondas gravitacionales, el análisis se complica debido a la presencia de ruido en la señal detectada, por lo que la expresión más completa sería:

$$s_{out}(t) = h_{out}(t) + n_{out}(t), \tag{85}$$

o

$$s(t) = h(t) + n(t), \tag{86}$$

Expresado de esta manera da la sensación de que el análisis de la señal es muy sencillo, parece como que “solo”se tienen que identificar que parte es de una onda gravitacional y que parte es de ruido. El problema es que diferenciar estas dos contribuciones es muy complicado. Una de las razones es la naturaleza estocástica del ruido, lo que significa que, aunque se puedan modelar sus estadísticas, cada realización específica del ruido es impredecible. Esto añade un nivel significativo de dificultad al análisis de los datos de ondas gravitacionales.

7.1. Fuentes de Ruido del Interferómetro

La detección de ondas gravitacionales requiere de instrumentos extremadamente sensibles. Un aspecto crucial del análisis de datos es comprender las fuentes de ruido que afectan significativamente a la calidad de la señal resultante. A continuación, se describen las fuentes de ruido más importantes en los interferómetros como LIGO.

7.1.1. Ruido Sísmico

El ruido sísmico proviene de las vibraciones de la Tierra, tales como movimientos tectónicos, actividad humana y fenómenos naturales. Este tipo de ruido también puede originarse en el movimiento de estructuras cercanas al detector, y es especialmente relevante a bajas frecuencias.

Para mitigar el ruido sísmico, los detectores se ubican en sitios remotos y emplean sistemas avanzados de aislamiento sísmico. Un ejemplo de aislamiento sísmico es el uso de soportes y amortiguadores que reducen la transmisión de vibraciones no deseadas hacia los espejos del interferómetro [45].

7.1.2. Ruido Térmico

El ruido térmico nace en las vibraciones térmicas aleatorias de los átomos en los materiales de los espejos y las suspensiones del interferómetro. Estas fluctuaciones son inevitables debido a la temperatura ambiente. Para minimizar este tipo de ruido, se utilizan materiales de alta calidad con bajas pérdidas mecánicas y, en algunos casos, los componentes críticos se enfrían a temperaturas criogénicas [45].

7.1.3. Ruido Cuántico

El ruido cuántico proviene de las fluctuaciones del campo electromagnético, según los principios de la mecánica cuántica. Las fluctuaciones en la potencia del láser pueden introducir ruido en la señal del interferómetro. Estas variaciones en la intensidad del láser afectan la interferencia y, por lo tanto, la precisión de la detección.

Este ruido incluye dos componentes principales. El ruido de disparo, que domina a altas frecuencias y se debe a las fluctuaciones en el número de fotones detectados; y el ruido de presión de radiación, que afecta a bajas frecuencias y resulta de las fluctuaciones en la fuerza ejercida por los fotones sobre los espejos.

Para reducir el ruido cuántico, se pueden emplear técnicas avanzadas como la compresión de estados cuánticos (*squeezing*) y el uso de potentes fuentes láser. La compresión de estados cuánticos, o *squeezing*, es una técnica en física cuántica que reduce la incertidumbre en una variable cuántica (como la posición o la fase de un campo electromagnético) a costa de aumentar la incertidumbre en la variable conjugada (como el momento o la amplitud). [45].

7.1.4. Ruido Electrónico

El ruido electrónico proviene de los circuitos electrónicos utilizados para la detección y procesamiento de señales. Incluye el ruido térmico en los circuitos y el ruido de Johnson-Nyquist.

El ruido de Johnson-Nyquist es un tipo de ruido eléctrico generado por la agitación térmica de los electrones en un conductor. Este ruido es inevitable y depende de la temperatura y la resistencia del material, pero no del voltaje aplicado. Se manifiesta como un ruido blanco y está presente en cualquier componente eléctrico que tenga resistencia. Diseñar circuitos de bajo ruido y utilizar componentes electrónicos de alta calidad es esencial para minimizar este tipo de ruido[45].

Como se muestra en la Figura 6, el ruido del detector varía en función de la frecuencia. Es crucial entender cómo diferentes fuentes de ruido afectan distintas bandas de frecuencia para mejorar la sensibilidad del interferómetro y optimizar la detección de ondas gravitacionales. Esta visualización facilita la identificación de las frecuencias donde cada tipo de ruido domina, permitiendo desarrollar estrategias de mitigación más efectivas.

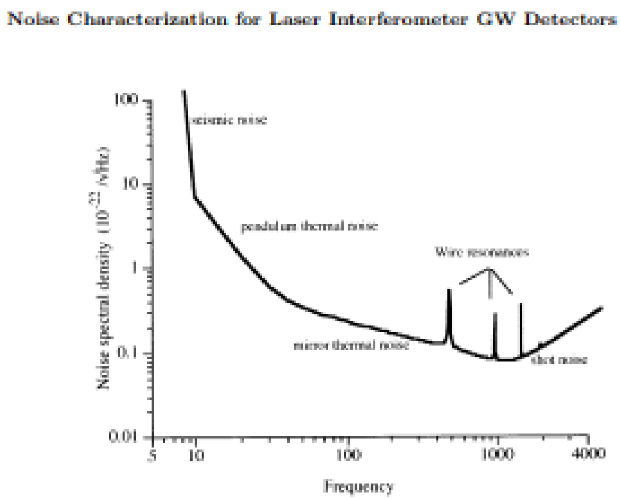

Figura 6: Límites fundamentales de ruido para un interferómetro láser (incluyendo los efectos de las resonancias de los cables de soporte).[45].

7.2. Filtrado Adaptado

El proceso de extracción o mitigación del ruido de la señal se conoce como limpieza o filtrado de datos y es uno de los pasos más importantes en el análisis de datos. Existen una infinidad de técnicas, entre ellas el filtro adaptado.

Como se ha visto, la salida del detector tiene la forma general $s(t) = h(t) + n(t)$. Cuando el ruido es mucho mayor, es decir, cuando $|h(t)| \ll |n(t)|$, se pueden detectar valores de $h(t)$ mucho menores que el ruido si se conoce, al menos con cierto nivel de precisión, la forma de $h(t)$. Sin embargo, dado que no se conocen las características exactas de la fuente que genera la onda gravitacional, no se conoce la forma de $h(t)$, lo que convierte el proceso en un ciclo del que no se obtiene una respuesta definitiva.

Para comenzar, se realiza una versión simplificada del procedimiento de filtrado asumiendo que se conoce la forma de la señal de onda gravitacional $h(t)$. En este caso, para extraer la señal, se multiplica la salida del detector $s(t)$ por la forma conocida de la señal en cada punto del tiempo. Luego, se integra esta cantidad sobre un intervalo de tiempo T. La integral suma las contribuciones de $s(t)h(t)$ durante todo el tiempo de observación:

$$\int_0^T s(t)h(t)\,dt, \tag{87}$$

Finalmente, se promedia sobre el intervalo de tiempo dividiendo esta integral por el intervalo de tiempo T:

$$\frac{1}{T}\int_0^T s(t)h(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T h^2(t)\,dt + \frac{1}{T}\int_0^T n(t)h(t)\,dt \tag{88}$$

La primera integral en el lado derecho es positiva y está asociada a la señal $h(t)$. Al promediar, esta contribución aumenta linealmente con T. La segunda parte está compuesta por el ruido y la señal, y dado que son independientes, su producto oscila aleatoriamente. Esta parte va a crecer como la raíz cuadrada de T. De manera que la primer va a tener una contribución mucho mayor, para T cada vez más grandes, por lo que la contribución del ruido se promedia a cero [44].

En la práctica, no se puede observar por un tiempo infinito. Sin embargo, si se observa la señal durante un tiempo T suficientemente largo, se puede reducir el efecto del ruido mediante promedios, permitiendo que la señal destaque. Este tiempo viene dado por la siguiente relación:

$$h_0 > (\tau_0/T)^{1/2} n_0, \tag{89}$$

donde τ_0 representa la escala de tiempo típica de la señal. El factor $(\tau_0/T)^{1/2}$ describe cómo se reduce el ruido en comparación con la señal a medida que aumenta el tiempo de observación T. Aquí, h_0 y n_0 se refieren a las amplitudes características de la señal de onda gravitacional $h(t)$ y del ruido $n(t)$, respectivamente, y cumplen $\frac{1}{T}\int_0^T dt\, h^2(t) \sim h_0^2$ y $\frac{1}{T}\int_0^T dt\, n(t)h(t) \sim \left(\frac{\tau_0}{T}\right)^{1/2} n_0 h_0$.

Para optimizar la detección, se incluirá una función de filtro $K(t)$. Se define:

$$\hat{s} = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)K(t)\,dt \tag{90}$$

donde se busca encontrar cuál es la función de filtro que maximiza la relación señal-ruido (SNR) para una señal dada [44].

La relación señal-ruido (SNR) se define como S/N, donde S es el valor esperado de $\hat{s}$ cuando la señal está presente, y N es el valor RMS de $\hat{s}$ cuando la señal está ausente. Dado que $\langle n(t)\rangle = 0$, se tiene:

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} \langle s(t)\rangle K(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)K(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(f)\tilde{K}^*(f)\,df \tag{91}$$

Mientras que:

$$N^2 = \left[\langle \hat{s}^2(t)\rangle - \langle \hat{s}(t)\rangle^2\right]_{h=0} = \langle \hat{s}^2(t)\rangle_{h=0} = \int_{-\infty}^{\infty} K(t)K(t')\langle n(t)n(t')\rangle\,dtdt'$$

$$N^2 = \int_{-\infty}^{\infty} K(t)K(t')\,dtdt' \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i f t - 2\pi i f' t'} \langle \tilde{n}^*(f)\tilde{n}(f')\rangle\,df df' \tag{92}$$

Para el caso de ruido estacionario, las diferentes componentes de Fourier no están correlacionadas, por lo que el promedio conjunto de las componentes de Fourier del ruido tiene la forma:

$$\langle \tilde{n}^*(f)\tilde{n}(f')\rangle = \delta(f-f')\frac{1}{2}S_n(f), \tag{93}$$

de manera que:

$$N^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}S_n(f)|\tilde{K}(f)|^2\,df, \tag{94}$$

y por lo tanto:

$$\frac{S}{N} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(f)\tilde{K}^*(f)\,df}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}S_n(f)|\tilde{K}(f)|^2\,df\right]^{1/2}}, \tag{95}$$

donde $S_n(f)$ es la densidad espectral de potencia (PSD) del ruido [44].

La SNR mide la relación entre la potencia de la señal que se desea detectar y la potencia del ruido dentro de una banda de frecuencia específica. Una SNR alta indica que la señal se distingue claramente del ruido, mientras que una SNR baja sugiere que la señal está oculta por el ruido o no se puede identificar con claridad.

Por otro lado, la PSD proporciona una medida de la potencia (cantidad de energía) que una señal (o ruido) tiene en un intervalo de tiempo específico por unidad de frecuencia. Es esencial para identificar las características del ruido que podrían persistir después del filtrado. En el contexto de la detección de ondas gravitacionales, la PSD permite identificar las bandas de frecuencia donde el ruido es predominante y, por lo tanto, evaluar la sensibilidad del detector a las señales gravitacionales en diferentes rangos de frecuencia [46].

En la práctica, la PSD se estima utilizando técnicas como el promedio de periodogramas o el método de Welch, y se representa en un gráfico que permite visualizar las características del ruido a lo largo del espectro de frecuencias.

Método del Periodograma

Uno de los métodos más comunes para estimar la Densidad de Potencia Espectral es el periodograma. Este método es particularmente útil para analizar la distribución de potencia en señales y se basa en la transformada de Fourier. A continuación, se describe el proceso y cómo funciona [47]:

Se comienza aplicando la transformada de Fourier a la señal temporal $h(t)$ para obtener su representación en el dominio de la frecuencia $\tilde{h}(f)$. Esta transformación convierte la señal en una serie de componentes de frecuencia. El periodograma $P(f)$ se estima calculando el cuadrado de la magnitud de la transformada de Fourier de la señal.

Para obtener una estimación más robusta de la PSD, el periodograma se calcula sobre segmentos de datos superpuestos que se promedian. Este enfoque reduce la varianza del estimador y proporciona una estimación más precisa de la densidad de potencia [48].

Método de Welch

El método de Welch es una técnica más avanzada que busca mejorar la estimación del periodograma mediante la reducción de la varianza. Se basa en dividir la señal en múltiples segmentos, aplicar una ventana a cada segmento, calcular el periodograma para cada uno, y luego promedia estos periodogramas para obtener una estimación suavizada de la PSD [49].

Las ventanas se utilizan para minimizar los efectos de discontinuidades en los bordes de los segmentos de datos, lo que puede provocar fuga espectral. La fuga espectral ocurre cuando la energía de una frecuencia se dispersa a otras frecuencias debido a las discontinuidades. Aplicar una ventana a cada segmento suaviza estos bordes, ayudando a obtener una estimación más precis. Una de las ventanas más usadas es la ventana de Hanning, también conocida como ventana de coseno elevado al cuadrado, esta ventana reduce el efecto de las discontinuidades en los bordes de los segmentos al aplicar una función de ventana que decae hacia cero en los extremos.

Volviendo a lo anterior, el siguiente paso es encontrar el filtro $K(t)$ que maximiza S/N, para una señal $h(t)$ dada. Para ello se define el producto escalar entre dos funciones $A(t)$ y $B(t)$, de manera que este producto permita cuantificar qué tan similares o alineadas están estas dos funciones. El producto escalar se define de la siguiente manera:

$$\langle A|B\rangle = \mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{\infty} df\, \frac{\tilde{A}^*(f)\tilde{B}(f)}{(1/2)S_n(f)}\right] = 4\,\mathrm{Re}\left[\int_{0}^{\infty} df\, \frac{\tilde{A}^*(f)\tilde{B}(f)}{S_n(f)}\right], \tag{96}$$

donde $\tilde{A}(f)$ y $\tilde{B}(f)$ son las transformadas de Fourier de las funciones $A(t)$ y $B(t)$; $\tilde{A}^*(f)$ es el conjugado de $\tilde{A}(f)$ y cumple que $\tilde{A}^*(f) = \tilde{A}(-f)$, se toman $A(t)$ y $B(t)$ funciones reales; $S_n(f)$ es la densidad espectral de potencia del ruido, que cumple $S_n(f) = S_n(-f)$; y Re denota la parte real de la expresión. Este producto escalar está ponderado por $1/S_n(f)$ lo que significa que las frecuencias donde el ruido es mayor tendrán menos peso en el cálculo [44].

De esta manera la Eq. (95) se puede escribir como:

$$\frac{S}{N} = \frac{\langle u|h\rangle}{\langle u|u\rangle^{1/2}},, \tag{97}$$

donde $u(f)$ es:

$$\tilde{u}(f) = \frac{1}{2}S_n(f)\tilde{K}(f) \tag{98}$$

De esta forma, la solución es clara. Se busca el "vector" de norma unitaria $\hat{n} = u/(u|u)^{1/2}$, tal que su producto escalar con el "vector" h sea máximo. Esto se obtiene eligiendo $\hat{n}$ y h paralelos, es decir, $\tilde{u}(f)$ proporcional a $\tilde{h}(f)$, por lo que se obtiene:

$$\tilde{K}(f) = \text{const.}\cdot \frac{\tilde{h}(f)}{S_n(f)} \tag{99}$$

Como la constate no afecta la relación señal-ruido final se puede ajustar según sea conveniente.

Al insertar la solución Eq.(99) en la Eq.(98), se obtiene que $u(f) = \text{const.}\cdot\tilde{h}(f)$. Sustituyendo esto en la Eq.(97), la constante se cancela y se obtiene el valor óptimo de S/N,

$$\left(\frac{S}{N}\right) = \langle h|h\rangle^{1/2}, \tag{100}$$

es decir,

$$\left(\frac{S}{N}\right)^2 = 4\int_0^{\infty} df\, \frac{|\tilde{h}(f)|^2}{S_n(f)} \tag{101}$$

Estas ecuaciones son completamente generales e independientes de la forma de $\tilde{h}(f)$.

Esta técnica de filtrado adaptado proporciona una forma de optimizar la relación señal-ruido, asumiendo que una señal dada está presente en el flujo de datos. Sin embargo, como ya se ha comentado, el problema es que no se sabe a priori si una señal de onda gravitacional está presente o no dentro de los datos a analizar, y menos aún se conoce su forma de onda. Por lo que, se puede aplicar la técnica de filtrado adaptado repitiéndola con muchos filtros diferentes posibles, por ejemplo, diferentes tiempos de inicio para la señal supuesta, parámetros que describen una familia de formas de onda, etc, y de manera correspondiente se extrae del flujo de datos un número de "eventos", con varios valores de la relación señal-ruido (S/N). El problema es que, en principio, aplicando solo esto no se va a saber en qué momento se puede afirmar con certeza que se ha detectado una onda o la fiabilidad de los resultados obtenidos. Para ello se deben utilizar razonamientos probabilísticos.

Es necesario comenzar explicando que hay dos enfoques principales para la probabilidad, el frecuentista (también llamado clásico) y el bayesiano. En la interpretación frecuentista; $A, B, \dots$ (subconjuntos de un conjunto S) son los resultados de un experimento repetible, y la probabilidad $P(A)$ se define como la frecuencia de ocurrencia de A, en el límite de un número infinito de repeticiones. En esta interpretación, las probabilidades de obtener algunos datos están bien definidas, y también tiene sentido considerar la probabilidad condicional de obtener algunos datos, dada una hipótesis (o dada una teoría, o dado el valor de los parámetros en una teoría) [44].

Sin embargo, uno nunca puede hablar de la probabilidad de que los parámetros tomen un valor dado, ni de la probabilidad de que una hipótesis, o una teoría, sea correcta. Las hipótesis, o teorías, no son el resultado de un experimento repetible. Estas son correctas o incorrectas, y de manera similar, el valor de un parámetro en una teoría es lo que es, y no está sujetos a análisis probabilístico.

Sin embargo el enfoque bayesiano permite considerar la probabilidad de una hipótesis, o de una teoría, o la probabilidad de que un parámetro dentro de una teoría tome un cierto valor. Para definir estas probabilidades, se parte de las identidades $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$ y $P(B \cap A) = P(B|A)P(A)$, que siguen de la definición de probabilidad condicional $P(A|B) = P(B \cap A)/P(B)$. Por otro lado, $A \cap B = B \cap A$, por lo tanto,

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}, \tag{102}$$

que es el teorema de Bayes. Además, $P(B)$ se puede escribir de la siguiente manera:

$$P(B) = \sum_i P(B|A_i)P(A_i), \tag{103}$$

para cualquier B y para A_i disjuntos y tales que $\cup_i A_i = S$. Por lo tanto, la ecuación (102) se puede reescribir como:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{\sum_i P(B|A_i)P(A_i)}, \tag{104}$$

por lo que el denominador es solo un factor de normalización. En el enfoque bayesiano, uno aplica esto a $A =$ hipótesis (o parámetros, o teoría) y $B =$ datos. Luego se encuentra que:

$$P(\text{hipótesis}|\text{datos}) \propto P(\text{datos}|\text{hipótesis})P(\text{hipótesis}). \tag{105}$$

donde $P(\text{hipótesis}|\text{datos})$ es la probabilidad posterior, que representa el grado de creencia en una hipótesis dada la evidencia observada, es decir, después de haber analizado los datos. La probabilidad posterior es proporcional al producto de dos factores. El primero, $P(\text{datos}|\text{hipótesis})$, es la probabilidad de observar los datos bajo la suposición de que la hipótesis es verdadera. Este término mide cómo de bien la hipótesis explica los datos observados y se denomina verosimilitud. El segundo, $P(\text{hipótesis})$, es la probabilidad inicial o previa de la hipótesis, antes de observar los datos. Representa el "grado de creencia" en la hipótesis antes de considerar la nueva evidencia y se llama probabilidad previa. Esta última no puede determinarse simplemente realizando pruebas idénticas (por lo que no tiene sentido para un frecuentista) y, en el enfoque bayesiano, se deben hacer suposiciones para determinarlo. De hecho, esta probabilidad previa, en general, puede incluso depender de factores subjetivos, y del estado de conocimiento de la persona que realiza el análisis [44].

Explicado esto, se retrocede al principio de la sección, donde se suponía el conocimiento de la forma de $h(t)$. Sin embargo, en la práctica, la señal $h(t)$ no es conocida de antemano, sino que dependerá necesariamente de una serie de parámetros libres, entre ellos el tiempo de entrada en el ancho de banda del interferómetro, la distancia a la fuente, las masas de las estrellas, etc.

Debido a estos parámetros libres, no se puede usar una única forma de onda, sino que se van a considerar una familia de formas de onda posibles, o plantillas, $h(t;\theta)$, donde $\theta = \{\theta_1, \ldots, \theta_N\}$ es una colección de parámetros. Para cada posible forma de onda $h(t;\theta)$ existe un filtro óptimo correspondiente $K(t;\theta)$, determinado a través de la ecuación , $\tilde{K}(f;\theta) \sim \tilde{h}(f;\theta)/S_n(f)$. En la práctica, no es posible probar todas las combinaciones de θ, por ello se discretiza el espacio de parámetros, es decir, se seleccionan un conjunto de valores discretos para cada parámetro θ, y se realizan las pruebas para cada combinación posible de estos valores discretos para encontrar la mejor coincidencia con la señal observada.

Suponiendo que se ha detectado efectivamente una señal de onda gravitacional, lo que significa que para alguna plantilla $h(t;\theta)$ el valor de S/N ha superado un umbral predeterminado, y la señal satisface otros criterios como coincidencias entre diferentes detectores. El siguiente desafío es estimar los parámetros físicos de la fuente que generó la señal. Este proceso comienza determinando los valores más probables de los parámetros θ que describen la forma de la onda gravitacional. Para ello, se utiliza la probabilidad posterior, que combina la función de verosimilitud (la probabilidad de los datos dados los parámetros) y la probabilidad previa (el conocimiento previo sobre los parámetros).

Para calcular la función de verosimilitud, se va a asumir que el ruido $n(t)$ es estacionario (su estadística no cambia con el tiempo) y gaussiano (su distribución es normal). En este contexto, la varianza del ruido con frecuencia f es proporcional al espectro de densidad de potencia del ruido como $(1/2)S_n(f)$ [44].

En la siguiente ecuación se describe cómo se calcula la probabilidad de observar una cierta realización del ruido n_0 (ruido específico):

$$p(n_0) = N \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tilde{n}_0(f)|^2}{(1/2)S_n(f)}\, df\right\}, \tag{106}$$

donde N es una constante de normalización. Dado que $n(t)$ es gaussiano, la probabilidad de una realización particular del ruido n_0 viene dada por una función gaussiana en el dominio de Fourier. Esta se puede reescribir de manera muy simple en términos del producto escalar (96):

$$p(n_0) = N \exp\{-\frac{\langle n_0|n_0\rangle}{2}\}. \tag{107}$$

Se asume que la salida del detector es de la forma $s(t) = h(t;\theta_t) + n_0(t)$, donde $n_0(t)$ es la realización específica del ruido que corresponde a este evento, y θ_t es el (desconocido) valor verdadero de los parámetros θ. De manera que la función de verosimilitud para la salida observada $s(t)$, dada la hipótesis de que hay una señal correspondiente a los parámetros θ_t, se obtiene sustituyendo $n_0 = s - h(\theta_t)$ en la ecuación (107):

$$\Lambda(s|\theta_t) = p(n_0) = p(s - h(\theta_t)) = N \exp\left\{ -\frac{1}{2}\langle s - h(\theta_t) | s - h(\theta_t)\rangle \right\}, \tag{108}$$

lo que introduciendo la notación abreviada $h_t \equiv h(\theta_t)$, se convierte es;

$$\Lambda(s|\theta_t) = N \exp\left\{ \langle h_t|s\rangle - \frac{1}{2}\langle h_t|h_t\rangle - \frac{1}{2}\langle s|s\rangle \right\} \tag{109}$$

La verosimilitud $\Lambda(s \mid \theta_t)$ puede expresarse, desarrollando el producto escalar y en escala logarítmica, como:

$$\log \Lambda \propto -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tilde{s}(f)|^2}{\frac{1}{2}S_n(f)}\, df - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tilde{h}(f;\theta_t)|^2}{\frac{1}{2}S_n(f)}\, df + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{h}^*(f;\theta_t)\tilde{s}(f)}{\frac{1}{2}S_n(f)}\, df, \tag{110}$$

donde:

1. El primer término, $-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tilde{s}(f)|^2}{\frac{1}{2}S_n(f)}\, df$, es constante.
2. El segundo término, $-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tilde{h}(f;\theta_t)|^2}{\frac{1}{2}S_n(f)}\, df$, mide el "coste" de la complejidad del modelo.
3. El tercer término, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{s}(f)\tilde{h}^*(f;\theta_t)}{\frac{1}{2}S_n(f)}\, df$, se desglosa a continuación.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{h}^*(f)\tilde{s}(f)}{S_n(f)}\, df = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{h}^*(f)\left(\tilde{h}(f) + \tilde{n}(f)\right)}{S_n(f)}\, df = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{h}^*(f)\tilde{h}(f)}{S_n(f)}\, df + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{h}^*(f)\tilde{n}(f)}{S_n(f)}\, df \tag{111}$$

donde $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{h}(f)\tilde{h}^*(f)}{S_n(f)}\, df$ se corresponde con la señal pura sin ruido. Dado que $\tilde{h}(f)\tilde{h}^*(f) = |\tilde{h}(f)|^2$, el primer término se puede reescribir como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tilde{h}(f)|^2}{S_n(f)}\, df$$

Dado que $|\tilde{h}(f)|^2$ es una función real y par (simétrica respecto al origen), se reescribe la integral desde 0 hasta ∞, y multiplicarla por dos:

$$2\int_{0}^{\infty} \frac{|\tilde{h}(f)|^2}{S_n(f)}\, df$$

Sin embargo, si se consideran únicamente frecuencias positivas (que es común en análisis de señales debido a la naturaleza de la transformada de Fourier), se puede reescribir como:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{|\tilde{h}(f)|^2}{S_n(f)}\, df$$

Comparando este resultado con la Eq.(101), se observa que este término no es más que el valor de la relación señal-ruido (SNR) optimizada.

El segundo término, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{h}^*(f)\tilde{n}(f)}{S_n(f)}\, df$, corresponde a la contribución del ruido. Sin embargo, dado que la SNR óptima se enfoca en maximizar la señal y minimizar el efecto del ruido, este término se promedia a cero bajo la suposición de que el ruido $\tilde{n}(f)$ tiene media cero y es independiente de $\tilde{h}(f)$. Por lo tanto, este término no contribuye significativamente.

Volviendo a la verosimilitud en la Eq.(110), el primer término es constante, por lo que no afecta a la optimización, y el tercer término se corresponde con el valor máximo del filtro adaptado. Sin la existencia del segundo término, se podría optimizar los parámetros que intervienen en la verosimilitud simplemente buscando el valor máximo del filtro adaptado. Por lo tanto, la pregunta es: ¿cuándo sería posible eliminar este término? Esta suposición es válida si este segundo término permanece más o menos constante a lo largo del espacio de parámetros.

$$\log \Lambda \propto \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{h}^*(f;\theta_t)\tilde{s}(f)}{\frac{1}{2}S_n(f)}\, df = \langle h_t|s\rangle, \tag{112}$$

Por otro lado, también se considera la probabilidad a priori representada por $p^{(0)}(\theta_t)$, que encapsula la información sobre los parámetros antes de contar con los datos específicos [44].

De manera que la distribución de probabilidad posterior para el valor verdadero θ_t, dada la salida observada s se escribe como:

$$p(\theta_t|s) = Np^{(0)}(\theta_t)\exp\{\langle h_t|s\rangle\}, \tag{113}$$

donde, se considera $p(\theta_t|s)$ como una distribución en θ_t para una salida fija s y se ha reabsorbido en el factor de normalización N los demás términos de la Eq. (109) . Esta ecuación proporciona una descripción completa de cómo se distribuyen los valores de los parámetros, esta distribución se define en el espacio de parámetros θ, que puede ser multidimensional y complicado.

Cuando el espacio de parámetros tiene muchas dimensiones (como en el caso de una binaria en coalescencia que tiene hasta 15 parámetros), la distribución posterior puede ser difícil de manejar directamente. Para simplificar el análisis, se quiere extraer información más manejable y práctica de la distribución posterior. Principalmente son de interés: el valor más probable de los parámetros, que se denota como $\hat{\theta}$, este es el valor que maximiza la distribución posterior $p(\theta_t|s)$ (puede hallarse utilizando métodos de optimización o técnicas numérica); y los errores o incertidumbres en estas estimaciones, estos se pueden cuantificar mediante intervalos de credibilidad, que indican el rango de valores en el que se espera que los parámetros se encuentren con una cierta probabilidad (puede obtenersee calculando la variabilidad o incertidumbre de $\hat{\theta}$ analizando la forma de la distribución posterior alrededor del máximo) [44].

7.3. Método Monte Carlo Markov Chain (MCMC)

A lo largo del tiempo, se han desarrollado varios métodos ingeniosos para construir y muestrear a partir de distribuciones posteriores que pueden ser arbitrarias. Uno de estos métodos es la simulación de cadenas de Markov, también conocida como MCMC (Monte Carlo con cadenas de Markov). Este enfoque general consiste en generar valores de θ usando distribuciones aproximadas y luego ajustar estas muestras para acercarse cada vez más a la distribución posterior objetivo, $p(\theta \mid s)$ [50].

En MCMC, el proceso de muestreo es secuencial, lo que significa que la distribución de cada muestra depende de la última muestra obtenida, estas muestras forman lo que se conoce como una cadena de Markov. Una cadena de Markov es una secuencia de variables aleatorias $\theta_1, \theta_2, \ldots$, en la que, para cualquier instante t, la distribución de θ_t, solo depende del valor anterior θ_{t-1}.

El éxito de MCMC no se basa únicamente en la propiedad de Markov, sino más bien en el hecho de que las distribuciones aproximadas se van refinando con cada iteración, permitiendo que la simulación se acerque progresivamente a la distribución objetivo.

En las aplicaciones prácticas de MCMC, se generan múltiples secuencias independientes. Cada una de estas secuencias $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots$ comienza en un punto inicial θ_0 y, en cada paso t, se extrae un valor θ_t a partir de una distribución de transición $T_t(\theta_t \mid \theta_{t-1})$, la cual depende del valor de la muestra previa θ_{t-1}. A menudo, es útil que esta distribución de transición varíe con el número de iteración, lo que se denota con la notación T_t. Estas distribuciones de transición deben diseñarse de manera que la cadena de Markov alcance una distribución estacionaria única, que coincida con la distribución posterior $p(\theta \mid s)$.

La simulación de cadenas de Markov es especialmente valiosa en situaciones donde extraer θ directamente de $p(\theta \mid s)$ no es viable o eficiente en términos computacionales. En su lugar, el muestreo iterativo permite que, en cada paso, se extraigan valores de una distribución que progresivamente se aproxima más a $p(\theta \mid s)$ [50].

7.3.1. Muestreado de Gibbs

Un algoritmo particular de cadenas de Markov es el **muestrador de Gibbs**. En este algoritmo el vector de parámetros θ se divide en d componentes o subvectores, $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_d)$ [50].

El muestrador de Gibbs trabaja de manera iterativa. En cada iteración t el algoritmo actualiza cada componente del vector θ uno por uno. Para ello, selecciona un componente θ_j (donde j puede ser $1, 2, ..., d$) y muestrea su nuevo valor a partir de su distribución condicional, dada por todos los demás componentes de θ:

$$p(\theta_j \mid \theta_{-j}^{t-1}, s), \tag{114}$$

Cuando se habla de distribuciones condicionales $p(\theta_j \mid \theta_{-j}, s)$ se refiere la probabilidad de un parámetro θ_j dado el resto de los parámetros del modelo θ_{-j} (donde θ_{-j} representa todos los parámetros excepto θ_j) y los datos observados s:

$$\theta_{-j}^{t-1} = (\theta_1^t, \ldots, \theta_{j-1}^t, \theta_{j+1}^{t-1}, \ldots, \theta_d^{t-1}). \tag{115}$$

Cada componente del vector θ se actualiza de forma secuencial durante la iteración. Primero se actualiza θ_1, luego θ_2, y así sucesivamente hasta θ_d. Al final de una iteración completa, todos los componentes de θ habrán sido actualizados una vez.

En muchos modelos estadísticos (especialmente los jerárquicos, que permiten la incorporación de múltiples niveles de variabilidad o estructuras de dependencia en los datos), es posible que las distribuciones condicionales $p(\theta_j \mid \theta_{-j}, s)$ sean conjugadas. En estadística bayesiana, una distribución condicional $p(\theta_j \mid \theta_{-j}, s)$ se dice que es conjugada cuando, al combinarla con la distribución previa, la distribución posterior resultante tiene la misma forma que la distribución previa. Esto permite utilizar el muestrador de Gibbs para obtener muestras de la distribución posterior de forma más sencilla y eficiente[50].

7.3.2. El algoritmo de Metropolis

El algoritmo de Metropolis es una adaptación de una caminata aleatoria con una regla de aceptación/rechazo para converger a la distribución objetivo especificada. A continuación se explica su funcionamiento.

En primer lugar se debe seleccionar un punto de partida, punto inicial θ_0, para el cual $p(\theta_0 \mid s) > 0$. La elección de este punto puede ser de manera aleatoria o basándote en alguna estimación previa de la distribución [50].

El algoritmo avanza mediante iteraciones. En cada iteración desde el punto actual θ_{t-1} se genera una nueva propuesta θ^* usando una distribución de salto J_t. Esta distribución de salto define cómo se generan las nuevas propuestas y, para el algoritmo de Metropolis (pero no para el algoritmo de Metropolis-Hastings), debe ser simétrica, satisfaciendo la condición $J_t(\theta_a \mid \theta_b) = J_t(\theta_b \mid \theta_a)$ para todos θ_a, θ_b, y t.

Posteriormente se calcula la razón entre las densidades de la distribución objetivo evaluadas en θ^* y θ_{t-1}:

$$r = \frac{p(\theta^* \mid s)}{p(\theta_{t-1} \mid s)} \tag{116}$$

Se decide si aceptar θ^* como la nueva muestra θ_t en función de la razón r. De manera que si $r > 1$, siempre se acepta θ^*, y por lo tanto, $\theta_t = \theta^*$. Mientras que para el caso de $r \leq 1$, se acepta θ^* con una probabilidad igual a r si $u \leq r$ (siendo u un número aleatorio uniformemente distribuido en el intervalo $[0, 1]$), si de lo contrario $(u > r)$, se rechaza θ^* y se mantiene el valor actual θ_{t-1} como θ_t [50].

De manera que dado el valor actual θ_{t-1}, la distribución de transición $T_t(\theta_t \mid \theta_{t-1})$ de la cadena de Markov es una mezcla de dos componentes. En primer lugar la masa puntual en $\theta_t = \theta_{t-1}$, esta representa la probabilidad de que el valor θ_t se mantenga igual que el valor anterior θ_{t-1} y tiene una probabilidad igual a la tasa de rechazo, que se expresa como $1 - \text{mín}(r, 1)$. En segundo lugar, la distribución de salto ponderada $J_t(\theta_t \mid \theta_{t-1})$, hay una probabilidad igual a $\text{mín}(r, 1)$ de que el nuevo valor θ_t se tome de la distribución de salto $J_t(\theta_t \mid \theta_{t-1})$.

7.3.3. El Algoritmo de Metropolis-Hastings

El algoritmo de Metropolis-Hastings generaliza el algoritmo básico de Metropolis de dos maneras. Primero, las reglas de salto J_t ya no necesitan ser simétricas; es decir, no se requiere que $J_t(\theta_a \mid \theta_b) \equiv J_t(\theta_b \mid \theta_a)$. En segundo lugar, para corregir esta asimetría, la razón r se calcula como:

$$r = \frac{p(\theta^* \mid s)/J_t(\theta^* \mid \theta_{t-1})}{p(\theta_{t-1} \mid s)/J_t(\theta_{t-1} \mid \theta^*)}. \tag{11.2}$$

donde $p(\theta^* \mid s)$ es la densidad posterior en el punto propuesto θ^*, $J_t(\theta^* \mid \theta_{t-1})$ es la probabilidad de proponer θ^* dado el estado actual θ_{t-1}, $p(\theta_{t-1} \mid s)$ es la densidad posterior en el estado actual θ_{t-1} y $J_t(\theta_{t-1} \mid \theta^*)$ es la probabilidad de proponer el estado actual θ_{t-1} dado el punto propuesto θ^* [50]. Permitir reglas de salto asimétricas puede ser útil para aumentar la velocidad de la caminata aleatoria.

El algoritmo de Gibbs y el algoritmo de Metropolis pueden ser utilizados en diversas combinaciones para muestrear distribuciones complicadas. El muestreador de Gibbs es el más simple de los algoritmos de simulación de cadenas de Markov y es la primera opción para modelos condicionalmente conjugados, donde se pueden muestrear directamente de cada distribución posterior condicional. El algoritmo de Metropolis puede ser utilizado para modelos que no son condicionalmente conjugados [50].

8. Método

Esta sección tiene como objetivo explicar el programa principal que se ha elaborado con el objetivo de aplicar los conocimientos adquiridos de ondas gravitacionales y de su análisis, este analiza una señal dada y obtiene una estimación de los parámetros de la onda gravitacional escondida entre el ruido. Además se añade un programa secundario en donde se muestra una comparación visual de la plantilla obtenida mediante el anterior programa y la señal filtrada, para el caso de la primera detección directa.

8.1. Programa de estimación de parámetros

El programa se muestra en el Apéndice C. Este comienza importando diversas bibliotecas esenciales para procesar, manipular y analizar datos de ondas gravitacionales.

Posteriormente se obtiene una lista de eventos (señales que contienen una onda gravitacional). De esta lista de eventos se elige uno y se procede a su análisis. El ejemplo se centra en el evento `GW150914`.

Elegido el evento se obtiene su tiempo GPS (es un sistema de tiempo estándar que se basa en los satélites del *Global Positioning System Time*), que marca el inicio del evento. Se usa la función `TimeSeries.fetch_open_data` para descargar los datos de la señal de deformación del detector H1 (Hanford) para el evento especificado. Los datos se descargan en un intervalo de 32 segundos alrededor del tiempo GPS del evento. Posteriormente se extraer el intervalo de tiempo y los valores de la señal deformación. Por último, se convierten los valores de la señal en un objeto `PycbcTimeSeries`, que es adecuado para el análisis de ondas gravitacionales en `PyCBC`.

A estos datos se les aplica un filtro de pasa alto, este elimina las componentes de frecuencia bajas por debajo de 15 Hz. En las detecciones de ondas gravitacionales, las frecuencias bajas (por debajo de 15 Hz) suelen estar dominadas por ruido instrumental, como el ruido sísmico y otros factores ambientales que afectan a los detectores. Estos ruidos pueden enmascarar la señal real de las ondas gravitacionales.

A continuación se remuestrea la señal, es decir, se ajusta la frecuencia de muestreo cambiando cuántas muestras por segundo se tienen. En este caso, se ajusta para que la señal tenga 2048 muestras por segundo. Las señales originales captadas por los detectores LIGO suelen tener una frecuencia de muestreo muy alta, lo que puede ser innecesario para ciertos análisis, por lo que remuestrear tienen varias ventajas. En primer lugar, la reducción de la cantidad de datos, de manera que el análisis posterior se vuelve más rápido y menos exigente en términos de memoria y procesamiento. En segundo lugar, en las ondas gravitacionales de eventos como GW150914, la mayor parte de la información útil está contenida en frecuencias por encima de 20 Hz y por debajo de 1000 Hz. Una frecuencia de muestreo de 2048 Hz es suficiente para capturar estas frecuencias de interés sin perder detalle, ya que sigue cumpliendo con el teorema de muestreo de Nyquist, que establece que la frecuencia de muestreo debe ser al menos el doble de la frecuencia máxima de la señal.

Posteriormente, se recorta la señal eliminando dos segundos de información, tanto al inicio como al final de la señal registrada. Este recorte se realiza para eliminar posibles artefactos no deseados y efectos de borde que puedan haber sido introducidos durante el proceso de adquisición de la señal o en el procesamiento previo, como la aplicación de filtros.

Se elige el valor de dos segundos ya que es suficientemente largo para recortar artefactos significativos y al mismo tiempo lo suficientemente corto para no perder una parte importante de la señal real de la onda gravitacional. El uso de un recorte de dos segundos es una práctica relativamente estándar en la comunidad cuando se trabaja con datos de ondas gravitacionales.

La PSD describe cómo la potencia de una señal se distribuye en frecuencia. Es fundamental para caracterizar el ruido en la señal y es crucial en la detección de ondas gravitacionales para distinguir la señal del ruido, para obtenerla se hace uso de la función `psd` de `Merge`. Se calcula usando el método de Welch, donde se divide la señal en segmentos de cuatro segundos, se calcula la PSD para cada segmento, y luego se promedian estos resultados.

Después de calcular la PSD, se interpola para que coincida con la resolución en frecuencia (delta_f) de los datos. Esto asegura que la PSD y los datos tengan la misma discretización en frecuencia, lo cual es necesario para las operaciones de filtrado que siguen.

Posteriormente se trunca el espectro inverso de la PSD. Esto significa que se limita la longitud efectiva del filtro 1/PSD para evitar que componentes de muy baja frecuencia (que pueden estar muy afectadas por el ruido) dominen el filtrado. En este caso: `int(4 * conditioned.sample_rate)`: Establece la longitud efectiva del filtro a 4 segundos. Mientras que `low_frequency_cutoff=15`, indica que se ignorarán las frecuencias por debajo de 15 Hz, ya que estas frecuencias fueron filtradas previamente y pueden no ser fiables.

A continuación se pretende busca la mejor coincidencia entre una plantilla de onda gravitacional simulada y los datos reales medidos por un detector, variando ciertos parámetros de la onda gravitacional como las masas de los objetos que la generaron y la distancia de luminosidad (medida utilizada en astrofísica y cosmología para conectar la luminosidad intrínseca de un objeto astronómico con su distancia a la Tierra). Para ello para cada trío de parámetros se crea una plantilla de onda gravitacional.

Para la generación de las plantillas se hace uso de `get_td_waveform`, dentro de esta se usa el aproximante `SEOBNRv4_opt`. Para explicar esta elección es crucial primero definir la palabra aproximante. Un aproximante de forma de onda es un modelo teórico que describe la evolución de las ondas gravitacionales emitidas por sistemas astrofísicos, como la coalescencia de dos agujeros negros o estrellas de neutrones. Estos modelos están basados en soluciones de las ecuaciones de Einstein de la relatividad general y se ajustan a los datos observacionales. `SEOBNRv4_opt` es una versión optimizada del modelo de "Effective-One-Body Numerical Relativity"(`SEOBNR`). Este modelo está diseñado específicamente para describir la fusión de agujeros negros binarios. La versión `v4` es la cuarta versión del modelo, que incorpora mejoras significativas basadas en simulaciones numéricas y ajustes a los datos observacionales. La a versión `opt` (optimizada) está diseñada para ser más eficiente en términos de cálculo. Esto es particularmente importante en análisis que requieren generar muchas formas de onda.

Generada la plantilla se van a realizar unas pequeñas modificaciones necesarias. En primer lugar, esta se va a redimensionar usando la instrucción `resize`. De esta manera la plantilla de onda gravitacional va a tener la misma longitud que los datos observacionales filtrados. Esto es esencial para poder realizar comparaciones y operaciones matemáticas entre ambos.

En segundo lugar se va realizar un desplazamiento cíclico en el tiempo, es decir, se mueve los datos en el tiempo, pero en lugar de descartar los datos que "se salen" al final, los lleva al principio. Se puede visualizar como si la forma de onda estuviera en un bucle, En el contexto del análisis de ondas gravitacionales, especialmente en el filtrado adaptado (*matched filtering*), es importante alinear la forma de onda de la plantilla con el pico de la señal en los datos.

Realizadas las modificaciones se va a hacer uso del método `matched_filter` (método de filtrado adaptado), esta es una herramienta fundamental en el análisis de datos de ondas gravitacionales y en la detección de señales en presencia de ruido. La función `matched_filter` correlaciona la señal observada con la plantilla en el dominio del tiempo. Esto significa que, para cada instante en el tiempo, se evalúa qué tan bien la plantilla se alinea con los datos observados. Cuando la señal observada tiene una forma similar a la plantilla, la correlación (y por lo tanto, la SNR) es alta.

En este método se introduce la forma de onda teórica que se genera a partir de modelos físicos; la señal real captada por los detectores, ya procesada (filtrada y remuestreada) para mejorar la relación señal-ruido; la psd, es crucial porque el filtrado adaptado tiene en cuenta cómo está distribuido el ruido a través de diferentes frecuencias; y una frecuencia umbral por debajo de la cual las frecuencias no se consideran, ya que el ruido en estas bandas es generalmente muy alto.

El resultado del filtrado adaptado es una serie temporal del cociente señal-ruido. Este valor indica la fuerza relativa de la señal en comparación con el ruido. La parte real de la SNR refleja la coincidencia directa entre la señal y la plantilla, mientras que la parte imaginaria refleja la coincidencia con una versión de la plantilla desfasada 90 grados. Al aplicar el filtrado adaptado, el código desplaza la plantilla a lo largo de los datos en el tiempo. Esto permite encontrar el momento exacto en que la señal observada mejor coincide con la plantilla.

Es necesario hacer un recorte de la señal SNR para mitigar los artefactos en los bordes que pueden surgir tras aplicar el filtrado adaptado. Estos artefactos son consecuencia de varios factores, como la alineación de la plantilla con los datos y el uso de márgenes en el proceso de filtrado. Cuando se aplica el filtro, especialmente si la plantilla es más larga que los datos disponibles, se añaden márgenes para manejar la diferencia de tamaño entre la plantilla y los datos. Estos márgenes pueden introducir efectos no deseados en las regiones cercanas a los bordes de la señal SNR, distorsionando la evaluación de la verdadera fuerza de la señal. Además, la ventana de tiempo utilizada en el cálculo del filtro puede causar efectos de borde, que a menudo resultan en una SNR artificialmente elevada o distorsionada cerca del inicio y el final de la señal. Para evitar que estos artefactos afecten la interpretación de los resultados, se eliminan cuatro segundos adicionales al principio y al final de la señal SNR. Este recorte asegura que solo se conserve el segmento central de la señal, que es menos propenso a los efectos indeseables y proporciona una representación más precisa de la señal de interés.

Obtenida la SNR se encuentra su valor máximo y se almacena. Se realiza el bucle para los diferentes valores de masas y distancia de luminosidad y se guarda el *template*, los parámetros, y el máximo de la SRN, de la plantilla que mejor coincide, aquella que tiene el máximo SRN. Este método permite obtener de manera sencilla una estimación de los parámetros.

Para la estimación más precisa, en primer lugar se define una función de probabilidad `log_probability(params)` que evalúa la probabilidad a *posteriori* de un conjunto de parámetros astrofísicos $(mass_1, mass_2, luminosity_distance)$. Primero, impone restricciones físicas sobre los parámetros, descartando aquellos que no cumplen con las condiciones especificadas, de manera que se asegura que la masa de uno de los objetos (generalmente el más masivo) sea mayor que la del otro, se limita la relación de masas para evitar la consideración de sistemas binarios con una diferencia de masa extremadamente grande, se asegura que las masas de los objetos se encuentren dentro de un rango realista para las fuentes astrofísicas de ondas gravitacionales detectables, como fusiones de agujeros negros y estrellas de neutrones y, por último. la distancia de luminosidad se restringe a un rango donde la señal de ondas gravitacionales es detectable pero no tan distante que se vuelva indetectable o demasiado débil. Se asumen unas distribuciones a *priori* planas (uniformes), lo que significa que considera que todos los valores posibles dentro de ciertos límites son igualmente probables antes de observar los datos.

Luego, utilizando estos parámetros, se genera una plantilla de onda gravitacional mediante `get_td_waveform`, que se redimensiona y desplaza temporalmente. A continuación, calcula la Relación Señal-Ruido (SNR) utilizando `matched_filter` y devuelve el valor absoluto del pico de SNR como la probabilidad logarítmica. Si se encuentran parámetros fuera de las restricciones o si ocurre un error específico en la generación de la plantilla, la función devuelve $-\infty$ para indicar una probabilidad nula.

Definida la función se inicializan las variables necesarias para realizar un proceso de inferencia bayesiana utilizando el método de Monte Carlo con cadenas de Markov (MCMC) para estimar los parámetros astrofísicos de un evento de ondas gravitacionales.

Primero, se definen los valores iniciales para la búsqueda de los parámetros. Estos valores iniciales se toman de la estimación previa. En lugar de utilizar los valores exactos, se añade un pequeño ruido gaussiano de 10^{-4} para generar diferentes posiciones iniciales para cada *walker* del MCMC. Esto permite una mejor exploración del espacio de parámetros. En este caso, se configuran 32 *walker*(`nwalkers = 32`) en un espacio de tres dimensiones (`ndim = 3`), que corresponden a los parámetros: la masa del primer objeto (*mass_1*), la masa del segundo objeto (*mass_2*) y la distancia de luminosidad.

El número de *walkers* es un parámetro que influye en la calidad y la eficiencia del muestreo en el espacio de parámetros. Elegir el número adecuado es esencial para asegurar que el algoritmo explore el espacio de parámetros de manera efectiva y genere una cadena de muestras representativa de la distribución posterior.

En el código presentado, se elige un total de 32 (`nwalkers = 32`). Un mayor número de caminantes puede ayudar a evitar que la cadena se quede atrapada en mínimos locales y asegura una exploración más completa del espacio de parámetros. Sin embargo, debe ser equilibrado con los recursos computacionales disponibles. En este caso, el espacio de parámetros es de tres dimensiones (`ndim = 3`), lo que implica que no necesita ser excesivamente alta. Un número alrededor de 32 es generalmente suficiente para explorar espacios de dimensiones bajas de manera efectiva, es una elección que proporciona un buen compromiso entre exploración efectiva y eficiencia computacional.

A continuación, se inicializa el *sampler* MCMC utilizando la función `log_probability`, que calcula la probabilidad de los parámetros dados basándose en su capacidad para generar una onda gravitacional consistente con los datos observados. Como ya se explicó en la teoría, hay un término de la verosimilitud que se está eliminando, por lo que posteriormente en la discusión de los resultados se debe tener en cuenta. El *sampler* es una herramienta que utiliza el método MCMC para explorar el espacio de parámetros del modelo.

El siguiente paso es ejecutar el *sampler* MCMC mediante el método `run_mcmc`, usando 5000 pasos. Durante la ejecución , cada *walker* explora el espacio de parámetros y genera una cadena de muestras que representan la distribución posterior de los parámetros de interés. La opción `progress=True` permite visualizar el progreso de la ejecución.

Elegir un número adecuado de pasos es fundamental para garantizar que la cadena converja a la distribución posterior deseada y para obtener una estimación precisa de los parámetros.

La elección de 5000 pasos en el método MCMC busca garantizar que la cadena tenga suficiente tiempo para explorar el espacio de parámetros y converger a la distribución posterior, proporcionando muestras que permitan una estimación precisa y confiable de los parámetros. Este número es una práctica común que equilibra la necesidad de exploración adecuada con la eficiencia computacional.

Una vez completado el muestreo, se obtienen las cadenas de muestras. Para obtener estimaciones más precisas, se descartan los primeros 100 pasos (fase de *burn-in*), se toman muestras más espaciadas en intervalos de 15 pasos (para reducir la correlación entre muestras) y se aplanan las cadenas de todos los *walkers*. A partir de estas muestras, se calculan los valores de los parámetros que maximizan la distribución posterior, así como sus incertidumbres. Esto se realiza utilizando los percentiles 16, 50 y 84, que proporcionan el valor mediano y los intervalos de credibilidad del 68 % para los parámetros.

En el proceso de MCMC, como ya se ha dicho, se descartan los primeros pasos de la cadena, típicamente llamados la fase de *burn-in* o quemado, es una estrategia para asegurar que las muestras utilizadas para la inferencia sean representativas de la distribución posterior, reduciendo el sesgo y la influencia de los valores iniciales, y mejorando la calidad y precisión de las estimaciones obtenidas.

Finalmente, se imprimen los mejores valores estimados para las masas (*mass_1* y *mass_2*) y la distancia de luminosidad, junto con sus respectivos intervalos de incertidumbre.

8.2. Programa de comparación de plantilla y selñal filtrada para `GW150914`

En el pequeño programa que se muestra al final del apéndice C, se compara la plantilla obtenida mediante el programa anterior con la señal filtrada para `GW150914`.

En primer lugar, se crea un objeto del tipo `Merge` para `GW150914`. `Merge` es una clase de `pycbc.catalog` que sirve para facilitar la carga de datos de detección de ondas gravitacionales desde archivos o bases de datos públicas; proporciona métodos para filtrar las señales, eliminar ruido, y preparar los datos para análisis posteriores ofrecer funciones para visualizar la señal detectada y otros parámetros importantes.

A continuación se representa la señal antes de ser manipulada, para después realizar el mismo filtrado que en el programa anterior (filtro de pasa alto, remuestreo y recorte). Posteriormente se calcula la SNR, para el caso de la plantilla con los parámetros obtenidos. Se realiza un recorte de la señal SNR para mitigar los artefactos, se encuentra su valor máximo y se almacena.

La plantilla asociada con la mejor coincidencia se ajusta en el tiempo para alinearse con el pico de la señal detectada. El ajuste se realiza mediante un desplazamiento cíclico de la plantilla, donde dt es la diferencia entre el tiempo del pico de la señal y el inicio de los datos condicionados. Alinear la plantilla con el pico de la señal facilita la comparación visual entre la plantilla y los datos. Esto permite una interpretación más clara de cómo bien la plantilla modela el evento observado y ayuda a evaluar la calidad del ajuste.

Por otro lado, la plantilla se escala para que su amplitud y fase coincidan con la SNR máxima encontrada. La plantilla original, que es una representación teórica de la señal, puede no tener la misma amplitud que la señal detectada en los datos. Multiplicando la plantilla por el valor máximo de SNR (snrp), ajustas la amplitud de la plantilla para que coincida con la magnitud de la señal detectada. Esto asegura que la plantilla se ajuste adecuadamente a la señal real observada.

Los datos condicionados se transforman en una serie temporal blanqueada. Primero, se divide por la raíz cuadrada del PSD para ajustar la escala de frecuencia. Luego, se aplican filtros pasa banda para eliminar frecuencias no deseadas y ajustar el rango de frecuencia de los datos.

Se selecciona un intervalo de tiempo alrededor del evento de fusión para centrarse en la región de interés. Tanto los datos blanqueados como la plantilla alineada se normalizan para que su amplitud máxima sea 1, lo que facilita la comparación visual.

Finalmente, se crea una figura y se grafican los datos blanqueados y la plantilla alineada en el mismo gráfico. La visualización permite comparar la plantilla con los datos detectados y evaluar la calidad del ajuste.

9. Resultados y Discusión

En esta sección se presentan los resultados obtenidos de las simulaciones realizadas para diferentes eventos de ondas gravitacionales detectados por LIGO. La tabla 1 muestra los parámetros astrofísicos clave, como las masas de los agujeros negros componentes y la distancia de luminosidad a la fuente, para varios eventos, junto con los resultados obtenidos mediante el uso del programa descrito en la sección anterior.

Se observa que, aunque los valores obtenidos se alejan en algunos casos de los reportados originalmente por LIGO/Virgo, los amplios márgenes de error permiten, en su mayoría una compatibilidad general. La comparación entre los valores originales y los resultados obtenidos revela una tendencia a predecir masas más altas para los agujeros negros, especialmente para el agujero negro primario (Masa 1). Esto podría sugerir la influencia de factores adicionales en el entorno de la fusión, como efectos de espín o inhomogeneidades en el medio circundante, que no se consideraron en los análisis originales.

En cuanto a las distancias a los eventos, el nuevo modelo tiende a predecir distancias menores en comparación con las estimaciones originales. Además, se observa que los valores de los errores son bastante amplios, sin embargo, es importante notar que los errores reportados por LIGO también presentan márgenes grandes, lo que indica una incertidumbre inherente en las mediciones iniciales. Esto sugiere que tanto los resultados originales como los nuevos datos deben interpretarse dentro del contexto de estas incertidumbres.

Uno de los hitos más significativos en la astrofísica de ondas gravitacionales es la primera detección directa de una colisión de agujeros negros, registrada como GW150914, situada en la primera fila de la tabla 1. Este evento, como ya se ha comentado, marcó un avance crucial en la confirmación de la existencia de ondas gravitacionales, predichas por la teoría de la relatividad general de Einstein. La detección de GW150914 no solo proporcionó evidencia directa de las ondas gravitacionales, sino que también permitió a los científicos medir por primera vez las propiedades de un par de agujeros negros binarios y el fenómeno de su fusión.

A continuación, se presenta una figura que ilustra la señal filtrada de GW150914 junto con el *template* teórico que ha sido ajustado para coincidir con la señal detectada (se ha usado el segundo programa explicado en el apartado anterior). Esta visualización es crucial para entender cómo los datos experimentales se comparan con los modelos teóricos y para validar la precisión de los análisis realizados.

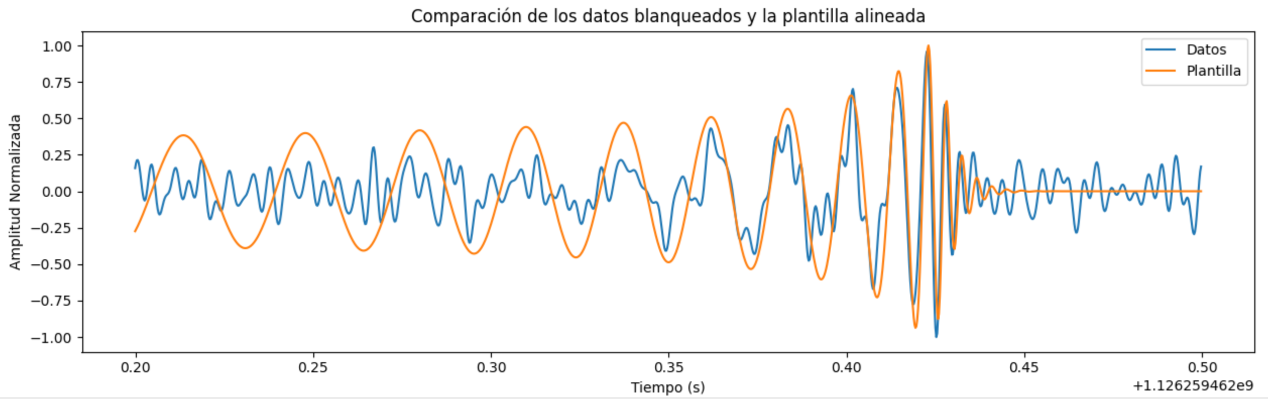

Figura 7: Comparación entre la señal filtrada detectada de GW150914 (línea azul) y el *template* teórico ajustado (línea naranja). La figura muestra cómo el modelo teórico se alinea con la señal observada, confirmando la naturaleza de la colisión de agujeros negros.

La figura 7 muestra una clara coincidencia entre la señal observada y el *template* teórico. El valor teórico es el modelo que mejor ajusta los datos observacionales, lo que significa que se espera que refleje de manera precisa las características físicas del evento que generó la onda gravitacional.

En el análisis realizado, se obtuvieron estimaciones de los parámetros físicos del sistema utilizando una combinación de filtrado adaptado y MCMC. Estas estimaciones se comparan con las obtenidas por el equipo de LIGO, quienes aplican métodos avanzados y más complejos para ajustar los modelos teóricos a las señales observadas.

Es importante tener en cuenta que la estimación, obtenida mediante filtrado adaptado y MCMC, podría estar sesgada. Una razón de esto es que en el análisis se omite un término de la función de verosimilitud, que puede influir en la precisión de las estimaciones. Este sesgo podría llevar a una desviación sistemática en los valores estimados, afectando la exactitud de la interpretación de los datos.

En resumen, aunque la coincidencia entre la señal observada y el *template* teórico es buena, y en general los resultados obtenidos son compatibles, la discrepancia en el valor de la masa podría ser una indicación de sesgo en nuestra estimación, lo que subraya la importancia de considerar todos los términos relevantes en la función de verosimilitud para obtener resultados más precisos.

10. Conclusión

En conclusión, el estudio de las ondas gravitacionales es un campo fascinante que ha permitido explorar el universo de maneras completamente nuevas. A través de una comprensión más profunda de los principios de la relatividad general y de las técnicas de análisis de datos, se ha podido entender algunos de los fenómenos que ocurren en el universo distante, como las colisiones de sistemas binarios de agujeros negros. Estos avances no solo amplían el conocimiento científico, sino que también ofrecen una herramienta única para entender mejor la estructura y la dinámica del cosmos. En definitiva, la investigación en ondas gravitacionales sigue siendo una de las áreas más prometedoras de la astrofísica moderna, con el potencial de descubrir fenómenos que antes eran completamente inaccesibles para la observación.

Por otro lado, en cuanto a los resultados obtenidos, estos son prometedores y sugieren que el enfoque propuesto podría ofrecer una alternativa más sencilla para la interpretación de señales de ondas gravitacionales. No obstante, será necesario realizar estudios adicionales para confirmar estos hallazgos y comprender plenamente las implicaciones de las discrepancias observadas. La validación continua y la incorporación de datos adicionales serán esenciales para mejorar la precisión de los modelos y afianzar las conclusiones derivadas de esta investigación.

11. Apéndice A: Demostración

Demostración de que la solución general de las ecuaciones de campo de Einstein:

$$\bar{h}^{\mu\nu}(ct,\vec{x}) = -\frac{4G}{c^4}\int \frac{T^{\mu\nu}(ct-|\vec{x}-\vec{y}|,\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|}d^3\vec{y}, \tag{117}$$

satisface el *gauge* Lorenz $\partial_\mu \tilde{h}^{\mu\nu} = 0$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{h}^{\mu\nu}(x^0,\vec{x})}{\partial x^\mu} &= -\frac{4G}{c^4}\int\left[\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}\frac{\partial T^{0\nu}(x^0_r,\vec{y})}{\partial x^0} + \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{T^{i\nu}(x^0_r,\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|}\right)\right]d^3\vec{y},\\ &= -\frac{4G}{c^4}\int\left[\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}\frac{\partial T^{\mu\nu}(x^0_r,\vec{y})}{\partial x^\mu} + T^{i\nu}(x^0_r,\vec{y})\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}\right)\right]d^3\vec{y}\end{aligned} \tag{118}$$

Fijando $x^0_r = ct_r = x^0 + |\vec{x}-\vec{y}|$ para cualquier función f se cumple lo siguiente:

$$\frac{\partial f(x^0_r,\vec{y})}{\partial x^\mu} = \left[\frac{\partial f(y^0,\vec{y})}{\partial y^0}\right]_r \frac{\partial x^0_r}{\partial x^\mu}, \tag{119}$$

$$\frac{\partial f(x^0_r,\vec{y})}{\partial y^0} = \left[\frac{\partial f(y^0,\vec{y})}{\partial y^i}\right]_r + \left[\frac{\partial f(y^0,\vec{y})}{\partial y^0}\right]_r \frac{\partial x^0_r}{\partial y^i}, \tag{120}$$

donde $[]_r$ indica que la expresión dentro de los corchetes se evaluada en $ct_r = ct - r$. Para $f \to T^{\mu\nu}$ se obtiene:

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}(x^0_r,\vec{y})}{\partial x^\mu} = \left[\frac{\partial T^{\mu\nu}(y^0,\vec{y})}{\partial y^0}\right]_r \frac{\partial x^0_r}{\partial x^\mu} = \left[\frac{\partial T^{0\nu}(y^0,\vec{y})}{\partial y^0}\right]_r - \left[\frac{\partial T^{i\nu}(y^0,\vec{y})}{\partial y^0}\right]_r \frac{\partial x^0_r}{\partial y^i}, \tag{121}$$

teniendo en cuenta que $\frac{\partial x^0_r}{\partial x^i} = -\frac{\partial x^0_r}{\partial y^i}$. Esto permite integrar por partes en la Eq. (118):

$$\frac{\partial \bar{h}^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = -\frac{4G}{c^4}\int\left\{\left[\frac{\partial T^{0\nu}(y^0,\vec{y})}{\partial y^0}\right]_r - \left[\frac{\partial T^{i\nu}(y^0,\vec{y})}{\partial y^0}\right]_r\frac{\partial x^0_r}{\partial y^i} + \frac{\partial T^{i\nu}(x^0_r,\vec{y})}{\partial y^i}\right\}\frac{d^3\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|}, \tag{122}$$

Haciendo uso de la siguiente expresión:

$$\int T^{i\nu}(x^0_r,\vec{y})\frac{\partial}{\partial y^i}\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}\right)d^3\vec{y} = \int_S \frac{T^{i\nu}(x^0_r,\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|}n_i\,dS - \int\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}\frac{\partial T^{i\nu}(x^0_r,\vec{y})}{\partial y^i}d^3\vec{y}, \tag{123}$$

se obtiene:

$$\frac{\partial \bar{h}^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = -\frac{4G}{c^4}\int\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}\left[\frac{\partial T^{\mu\nu}(y^0,\vec{y})}{\partial y^\mu}\right]_r d^3\vec{y} \tag{124}$$

En la teoría lineal el tensor energía-momento obedece la siguiente relación $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ por lo que la integral desaparece y se demuestra que la solución que se ha hallado cumple la condición $\partial_\mu \tilde{h}^{\mu\nu} = 0$ [21].

12. Apéndice B: Tabla de resultados

Nombre de evento	Masa 1($M_\odot$)	Masa 2($M_\odot$)	Distancia de Luminosidad(Mpc)
$\mathrm{GW150914}_{\mathrm{LIGO}}$	$35,6^{+4,7}_{-3,1}$	$30,6^{+3,0}_{-4,4}$	440^{+150}_{-170}
GW150914 resultado	$42,9^{+4,6}_{-4,5}$	$31,0^{+4,2}_{-4,7}$	550^{+310}_{-310}
$\mathrm{GW151012}_{\mathrm{LIGO}}$	$23,2^{+14,9}_{-5,5}$	$13,6^{+4,1}_{-4,8}$	1080^{+550}_{-490}
GW151012 resultado	$40,1^{+13,2}_{-15,2}$	$18,3^{+15,4}_{-8,9}$	690^{+420}_{-410}
$\mathrm{GW151226}_{\mathrm{LIGO}}$	$13,7^{+8,8}_{-3,2}$	$7,7^{+2,2}_{-2,5}$	450^{+180}_{-119}
GW151226 resultado	$27,4^{+12,8}_{-16,4}$	$16,1^{+10,0}_{-8,4}$	588^{+309}_{-319}
$\mathrm{GW170104}_{\mathrm{LIGO}}$	$30,8^{+7,3}_{-5,6}$	$20,0^{+4,9}_{-4,6}$	690^{+420}_{-410}
GW170104 resultado	$44,1^{+10,2}_{-9,7}$	$22,5^{+9,8}_{-8,6}$	672^{+420}_{-390}
$\mathrm{GW170608}_{\mathrm{LIGO}}$	$11,0^{+5,5}_{-1,4}$	$7,6^{+1,4}_{-2,2}$	320^{+120}_{-110}
GW170608 resultados	$22,2^{+12,7}_{-15,8}$	$18,2^{+10,8}_{-10,6}$	520^{+330}_{-390}
$\mathrm{GW170809}_{\mathrm{LIGO}}$	$35,0^{+8,3}_{-5,9}$	$23,8^{+5,1}_{-5,2}$	1030^{+320}_{-390}
GW170809 resultado	$45,2^{+9,5}_{-11,3}$	$22,9^{+10,1}_{-9,8}$	780^{+410}_{-423}
$\mathrm{GW170814}_{\mathrm{LIGO}}$	$30,6^{+5,6}_{-3,0}$	$25,2^{+2,8}_{-4,0}$	600^{+150}_{-220}
GW170814 resultado	$40,6^{+10,4}_{-10,9}$	$22,2^{+10,0}_{-9,0}$	690^{+390}_{-420}
$\mathrm{GW170818}_{\mathrm{LIGO}}$	$35{,}4^{+7,5}_{-4,7}$	$26,7^{+4,5}_{-5,2}$	1060^{+420}_{-380}
GW170818 resultado	$50{,}4^{+4,8}_{-8,7}$	$37,7^{+10,9}_{-12,9}$	700^{+410}_{-400}
$\mathrm{GW190412}_{\mathrm{LIGO}}$	$27,7^{+6,0}_{-6,0}$	$9,0^{+2,0}_{-1,1}$	720^{+240}_{-220}
GW190412 resultado	$43,3^{+12,0}_{-17,4}$	$20,0^{+10,5}_{-11,9}$	720^{+240}_{-220}
$\mathrm{GW190503\_185404}_{\mathrm{LIGO}}$	$41,3^{+10,3}_{-15,7}$	$28,3^{+7,5}_{-9,2}$	1520^{+630}_{-600}
GW190503_185404 resultado	$40,0^{+13,6}_{-,7}$	$18,8^{+15,8}_{-9,4}$	820^{+410}_{-400}
$\mathrm{GW190512\_180714}_{\mathrm{LIGO}}$	$23,2^{+5,6}_{-5,6}$	$12,5^{+3,5}_{-2,6}$	1460^{+510}_{-590}
GW190512_180714 resultado	$34,8^{+11,0}_{-15,7}$	$22,1^{+13,9}_{-11,4}$	1460^{+510}_{-590}
$\mathrm{GW190517\_055101}_{\mathrm{LIGO}}$	$39,2^{+13,9}_{-9,2}$	$24,0^{+7,4}_{-7,3}$	1790^{+1750}_{-880}
GW190517_055101 resultado	$41,8^{+13,1}_{-17,0}$	$18,7^{+14,1}_{-9,6}$	810^{+400}_{-410}
$\mathrm{GW190521\_074359}_{\mathrm{LIGO}}$	$43,4^{+5,8}_{-33,4}$	$33,4^{+5,2}_{-6,8}$	1080^{+580}_{-530}
GW190521_074359 resultado	$42,4^{+12,0}_{-15,4}$	$20,8^{+15,5}_{-10,8}$	710^{+400}_{-420}
$\mathrm{GW190630\_185205}_{\mathrm{LIGO}}$	$35,1^{+6,5}_{-5,5}$	$24,0^{+5,5}_{-5,2}$	870^{+530}_{-360}
GW190630_185205 resultado	$46,6^{+9,6}_{-15,6}$	$24,0^{+15,7}_{-12,7}$	690^{+410}_{-410}
$\mathrm{GW190707\_093326}_{\mathrm{LIGO}}$	$12,1^{+2,6}_{-2,0}$	$7,9^{+1,6}_{-1,3}$	850^{+340}_{-400}
GW190707_093326 resultado	$21,7^{+15,5}_{-11,6}$	$17,9^{+11,4}_{-10,3}$	700^{+410}_{-410}
$\mathrm{GW190708\_232457}_{\mathrm{LIGO}}$	$19,8^{+4,3}_{-4,3}$	$11,6^{+3,1}_{-2,0}$	930^{+310}_{-390}
GW190708_232457 resultado	$32,5^{+11,8}_{-18,4}$	$21,9^{+16,3}_{-12,2}$	701^{+410}_{-410}
$\mathrm{GW190720\_000836}_{\mathrm{LIGO}}$	$14,2^{+5,6}_{-3,3}$	$7,5^{+2,2}_{-1,8}$	770^{+650}_{-260}
GW190720_00083 resultado	$33,5^{+12,5}_{-17,3}$	$16,8^{+11,9}_{-10,7}$	683^{+420}_{-400}

Cuadro 1: Comparación de los parámetros de masa y distancia de luminosidad de los agujeros negros binarios en diferentes eventos de ondas gravitacionales. Los valores presentados corresponden tanto a los reportados originalmente por LIGO como a los resultados del programa creado.

13. Apéndice C: Programas

13.1. Programa de estimación de parámetros

```

import emcee
import lal
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from pycbc.filter import resample_to_delta_t, highpass
from pycbc.psd import interpolate, inverse_spectrum_truncation
from pycbc.waveform import get_td_waveform
from pycbc.filter import matched_filter, sigma
from pycbc.types import TimeSeries as PycbcTimeSeries
from pycbc.types import FrequencySeries as PycbcFrequencySeries
from gwosc import datasets
from gwpy.timeseries import TimeSeries
from gwpy.frequencyseries import FrequencySeries

# Redirigir la salida est ndar para suprimir mensajes no deseados
lal.swig_redirect_standard_output_error(False)

# Lista de cat logos de eventos de ondas gravitacionales
catalogos = ['GWTC-1-confident', 'GWTC-2.1-confident', 'GWTC-3-confident', 'O3_Discovery_Papers', 'O4_Discovery_Papers']

# Inicializaci n de listas para almacenar los eventos detectados
eventos = []

# Se buscan los eventos en cada cat logo
for catalogo in catalogos:
    eventos_catalogo = datasets.find_datasets(type="event", catalog=catalogo)
    for evento in eventos_catalogo:
        eventos.append(evento)


# Se carga el evento GW150914, que es el primero
gps = datasets.event_gps(eventos[0])
print(gps)
data = TimeSeries.fetch_open_data('H1', gps, gps+32)

# Extracci n del tiempo inicial, el intervalo de tiempo y los valores de la se al de deformaci n
t0 = data.t0
dt = data.dt
strain_values = data.value

# Asegura que dt y t0 sean valores simples (en lugar de objetos m s complejos)
dt = dt.value if hasattr(dt, 'value') else dt
t0 = t0.value if hasattr(t0, 'value') else t0

# Convertir los valores de la se al en un objeto TimeSeries de PyCBC
Data_strain = PycbcTimeSeries(strain_values, delta_t=dt)


# ################################################################################
#
```

```
    #                                FILTRADO, REMUESTREO Y RECORTE DE LA SE AL DE DEFORMACI N
    #
    # ################################################################################

    # Aplicar filtro paso alto
    strain = highpass(Data_strain, 15.0)

    new_sample_rate = 2048  # Nueva frecuencia de muestreo

    # Remuestrear la se al
    Data_strain = resample_to_delta_t(Data_strain, 1.0/new_sample_rate)

    # Recortar la se al
    conditioned = strain.crop(2, 2)


    # ################################################################################
    #
    #                                ESTIMACI N DE LA DENSIDAD ESPECTRAL DE POTENCIA
    #
    # ################################################################################




    # Estimaci n de la densidad espectral de potencia (PSD) utilizando el m todo de Welch con muestras de 4 segundos
    psd = conditioned.psd(4)

    # Interpolaci n de la PSD para que coincida con los datos y limitaci n de la longitud del filtro de 1/PSD
    psd = interpolate(psd, conditioned.delta_f)

    # Ajuste de la PSD para actuar como un filtro con una longitud efectiva de 4 segundos
    # Se informa a la funci n que no incluya frecuencias por debajo de 15 Hz
    psd = inverse_spectrum_truncation(psd, int(4 * conditioned.sample_rate), low_frequency_cutoff=15)



    # ################################################################################
    #
    #                                PRIMERA ESTIMACI N DE LOS PAR METROS DE LA ONDA GRAVITACIONAL
    #
    # ################################################################################
```

```
    # Definici n de rangos para los par metros de la plantilla de onda gravitacional
    mass_1_values = np.arange(10, 60, 5)  # Valores de masa 1 de 10 a 55 con paso de 5
    mass_2_values = np.arange(10, 60, 5)  # Valores de masa 2 de 10 a 55 con paso de 5
    luminosity_distance_values = np.arange(100, 1200, 100)  # Valores de distancia de 100 a 1100 con paso de 100

    # Variables para almacenar la m xima se al a ruido (SNR) encontrada
    max_snrs = []
    max_snrs_value = 0


    # B squeda de la mejor coincidencia de la plantilla con los datos, variando los par metros definidos
    for mass_1 in mass_1_values:
        for mass_2 in mass_2_values:
            if mass_1 < mass_2:
                continue  # Ignorar combinaciones donde mass_1 < mass_2
            for luminosity_distance in luminosity_distance_values:

                # Se genera la plantilla de la onda gravitacional utilizando los par metros actuales
                hp, hc = get_td_waveform(approximant="SEOBNRv4_opt",
                                         mass1=mass_1,
                                         mass2=mass_2,
                                         luminosity_distance=luminosity_distance,
                                         delta_t=conditioned.delta_t,
                                         f_lower=20)
                parameters = [mass_1, mass_2, luminosity_distance]

                # Redimensiona la plantilla para que coincida con la longitud de los datos
                hp.resize(len(conditioned))

                # Desplaza la plantilla en el tiempo para alinearla con los datos
                template = hp.cyclic_time_shift(hp.start_time)

                # Calcula la se al a ruido (SNR) para la coincidencia entre la plantilla y los datos condicionados
                snr = matched_filter(template, conditioned, psd=psd, low_frequency_cutoff=20)

                # Recorta la SNR para eliminar los bordes que podr an contener artefactos
                snr = snr.crop(4 + 4, 4)
                peak = abs(snr).numpy().argmax()  # Obtener el  ndice  del valor m ximo de SNR
                snrp = snr[peak]  # Valor m ximo de SNR
                time = snr.sample_times[peak]  # Tiempo correspondiente al valor m ximo de SNR


                # Guardar la SNR y sus par metros de la mejor coincidencia
                if snrp > max_snrs_value:
                     max_snrs_value = snrp
```

```
                max_snrs = [snrp, time, snr, template, parameters]




# ################################################################################
#
#                             ESTIMACI N FINAL DE LOS PAR METROS DE LA ONDA GRAVITACIONAL
#
# ################################################################################

# Definici n de la funci n de probabilidad para la estimaci n de par metros usando MCMC
def log_probability(params):
    mass_1, mass_2, luminosity_distance = params

    # Restricciones de par metros
    if mass_1 <= mass_2 or mass_1 / mass_2 > 100 or mass_1 <= 5 or mass_2 <= 5 or mass_1 >=60 or mass_2 >= 60 or luminosity_distance <= 100 or luminosity_distance >= 1300:
        return -np.inf  # Devolver -infinito para valores fuera del rango permitido

    try:
        # Generar la plantilla de la onda gravitacional
        hp, hc = get_td_waveform(approximant="SEOBNRv4_opt",
                                 mass1=mass_1,
                                 mass2=mass_2,
                                 luminosity_distance=luminosity_distance,
                                 delta_t=conditioned.delta_t,
                                 f_lower=20)

        # Redimensionar la plantilla
        hp.resize(len(conditioned))

        # Desplazar la plantilla en el tiempo
        template = hp.cyclic_time_shift(hp.start_time)

        # Calcular la SNR usando el filtro de coincidencia
        snr = matched_filter(template, conditioned, psd=psd, low_frequency_cutoff=20)
        snr = snr.crop(4 + 4, 4)
        peak = abs(snr).numpy().argmax()
        snr_peak = snr[peak]

        # Devolver el valor negativo de la SNR porque queremos maximizar la probabilidad
        return abs(snr_peak)

    except RuntimeError as e:
        if "Starting frequency is above ringdown frequency" in str(e):
            return -np.inf  # Devolver -infinito si ocurre este error espec fico
        elif "Internal function call failed" in str(e):
```

```
                return -np.inf  # Devolver -infinito si ocurre este error espec fico
            else:
                raise e  # Re-lanzar otros errores

    # Valores iniciales de b squeda , se toman los par metros de la mejor coincidencia encontrada anteriormente
    parametros_maxsnr = max_snrs[4]
    initial_values = [parametros_maxsnr[0], parametros_maxsnr[1], parametros_maxsnr[2]]



    # Configurar el sampler MCMC
    nwalkers = 32
    ndim = 3
    pos = initial_values + 1e-4 * np.random.randn(nwalkers, ndim)

    sampler = emcee.EnsembleSampler(nwalkers, ndim, log_probability)

    # Ejecutar el sampler
    sampler.run_mcmc(pos, 5000, progress=True)

    # Obtener los resultados
    samples = sampler.get_chain(discard=100, thin=15, flat=True)
    mass_1_mcmc, mass_2_mcmc, luminosity_distance_mcmc = map(lambda v: (v[1], v[2]-v[1], v[1]-v[0]), zip(*np.percentile(samples, [16, 50, 84], axis=0)))


    print(f"Mejores par metros estimados para {eventos[0]}:")
    print(f"mass_1: {mass_1_mcmc[0]} +{mass_1_mcmc[1]} -{mass_1_mcmc[2]}")
    print(f"mass_2: {mass_2_mcmc[0]} +{mass_2_mcmc[1]} -{mass_2_mcmc[2]}")
    print(f"luminosity_distance: {luminosity_distance_mcmc[0]} +{luminosity_distance_mcmc[1]} -{luminosity_distance_mcmc[2]}")
```

13.2. Programa de comparación de plantilla y señal filtrada para GW150914

```

    import matplotlib.pyplot as plt
    from pycbc.catalog import Merger
    from pycbc.filter import resample_to_delta_t, highpass
    from pycbc.psd import interpolate, inverse_spectrum_truncation
    from pycbc.waveform import get_td_waveform
    from pycbc.filter import matched_filter, sigma
    import numpy as np


    # Carga los datos de la fusi n GW150914 desde el cat logo de eventos de PyCBC
    Data_GW150914 = Merger('GW150914-v3')

    # Extrae los datos de la se al de deformaci n (strain) captada por el detector H1
    strain_GW150914_H1 = Data_GW150914.strain('H1')

    # Representaci n gr fica de la se al de deformaci n original
    plt.figure(figsize=(10, 6))
```

```python
    plt.plot(strain_GW150914_H1.sample_times, strain_GW150914_H1)
    plt.xlabel('Tiempo (s)')
    plt.ylabel('Amplitud')
    plt.title('Datos de deformaci n de GW150914 del detector H1')
    plt.show()

    # Aplica un filtro paso alto a la se al de deformaci n para eliminar frecuencias bajas por debajo de 15 Hz
    strain = highpass(strain_GW150914_H1, 15.0)

    # Remuestrea la se al de deformaci n, cambiando la frecuencia de muestreo a 2048 Hz
    strain_GW150914_H1 = resample_to_delta_t(strain_GW150914_H1, 1.0/2048)

    # Elimina 2 segundos de datos tanto al inicio como al final de la se al
    conditioned = strain.crop(2, 2)


    # Estimaci n de la densidad espectral de potencia (PSD) utilizando el m todo de Welch con muestras de 4 segundos
    psd = conditioned.psd(4)

    # Interpolaci n de la PSD para que coincida con los datos y limitaci n de la longitud del filtro de 1/PSD
    psd = interpolate(psd, conditioned.delta_f)

    # Ajuste de la PSD para actuar como un filtro con una longitud efectiva de 4 segundos
    # Se informa a la funci n que no incluya frecuencias por debajo de 15 Hz
    psd = inverse_spectrum_truncation(psd, int(4 * conditioned.sample_rate), low_frequency_cutoff=15)


    # Genera la forma de onda te rica (plantilla) utilizando un modelo de fusi n de agujeros negros
    hp, hc = get_td_waveform(approximant="SEOBNRv4_opt",
                             mass1=42.9,
                             mass2=31.0,
                             luminosity_distance=550,
                             delta_t=conditioned.delta_t,
                             f_lower=20)

    # Ajusta la longitud de la plantilla para que coincida con los datos
    hp.resize(len(conditioned))
    template = hp.cyclic_time_shift(hp.start_time)

    # Calcula la relaci n se al-ruido (SNR) al comparar la plantilla con los datos
    snr = matched_filter(template, conditioned, psd=psd, low_frequency_cutoff=20)
    snr = snr.crop(4 + 4, 4)  # Recorta 4 segundos al inicio y al final para eliminar bordes

    # Obtener el  ndice  del valor m ximo de la SNR
    peak = abs(snr).numpy().argmax()
    snrp = snr[peak]  # SNR en el pico
    time = snr.sample_times[peak]  # Tiempo del pico

    # Desplaza la plantilla al tiempo del pico
    dt = time - conditioned.start_time
```

```
    aligned = template.cyclic_time_shift(dt)

    # Escala la plantilla para que tenga una SNR de 1 en estos datos
    aligned /= sigma(aligned, psd=psd, low_frequency_cutoff=20.0)

    # Escala la amplitud y la fase de la plantilla al valor m ximo
    aligned = (aligned.to_frequencyseries() * snrp).to_timeseries()
    aligned.start_time = conditioned.start_time


    # Blanquea los datos de deformaci n dividi ndolos por la ra z cuadrada de la PSD
    white_data = (conditioned.to_frequencyseries() / psd**0.5).to_timeseries()

    # Aplica un filtro paso alto de 30 Hz y un filtro paso bajo de 300 Hz
    white_data = white_data.highpass_fir(30., 512).lowpass_fir(300, 512)

    # Selecciona el tiempo alrededor de la fusi n para la representaci n gr fica
    white_data = white_data.time_slice(Data_GW150914.time-.2, Data_GW150914.time+.1)
    aligned = aligned.time_slice(Data_GW150914.time-.2, Data_GW150914.time+.1)

    #Normaliza los datos y la plantilla para que tengan una amplitud m xima de 1
    white_data /= max(abs(white_data))
    aligned /= max(abs(aligned))



    # Representaci n gr fica de los datos blanqueados y la plantilla alineada
    plt.figure(figsize=[15, 3])
    plt.plot(white_data.sample_times, white_data, label="Datos")
    plt.plot(aligned.sample_times, aligned, label="Plantilla")
    plt.title("Comparaci n de los datos blanqueados y la plantilla alineada")
    plt.xlabel("Tiempo (s)")
    plt.ylabel("Amplitud Normalizada")
    plt.legend()
    plt.show()
```

Referencias

[1] Bernard Schutz. *Gravity from the Ground Up*. Cambridge University Press, 2003.

[2] James B. Hartle. *General Relativity: An Introduction for Physicists*. Addison-Wesley, 2003.

[3] W. K. Clifford. “On the Space-Theory of Matter”. En: *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 7 (1870).

[4] O. Heaviside. “A Gravitational and Electromagnetic Analogy”. En: *The Electrician* 31 (1893), pág. 281.

[5] H. Poincaré. “Sur la dynamique de l’électron”. En: *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences* 140 (1905).

[6] A. Einstein. “Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation”. En: *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften* (1916).

[7] Jorge L. Salvador Galindo y George F. *A Brief History of Gravitational Waves*. Editorial Ejemplo, 2024.

[8] Arthur Stanley Eddington. *The Mathematical Theory of Relativity*. Cambridge: Cambridge University Press, 1922.

[9] A. Einstein y N. Rosen. “Do gravitational waves exist?” En: *Physical Review* 49 (1936).

[10] A. Einstein y L. Infeld. “On gravitational waves”. En: *Physical Review* 49 (1936).

[11] H. Bondi. “Plane gravitational waves in general relativity”. En: *Nature* 179 (1957).

[12] I. Robinson, F. A. E. Pirani y H. Bondi. “Gravitational waves in general relativity III: Exact plane waves”. En: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* 251.1267 (1958).

[13] J. H. Taylor y R. A. Hulse. “Binary Pulsar PSR 1913+16: Gravitational Wave Evidence”. En: *Astrophysical Journal* 195 (1974), págs. L51-L54.

[14] B. P. Abbott et al. “Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger”. En: *Physical Review Letters* 116.6 (2016).

[15] Steven Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley & Sons, 1972.

[16] John David Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, 1999.

[17] L.D. Landau y E.M. Lifshitz. *Theoretical Physics, Vol. 2: The Classical Theory of Fields*. Pergamon Press, 1975.

[18] Élie Cartan. “Sur les systèmes de coordonnées dans les espaces de Riemann”. En: *Annales Scientifiques de l’École Normale Supérieure* 40 (1923).

[19] D. Herranz. *Relatividad General, Grado en Física*. Notas de clase, curso 2023-2024. Unican, 2023.

[20] Charles W. Misner, Kip S. Thorne y John Archibald Wheeler. *Gravitation*. Princeton University Press, 1973.

[21] Michael P. Hobson, George Efstathiou y Anthony N. Lasenby. *General Relativity: An Introduction for Physicists*. Cambridge: Cambridge University Press, 2006.

[22] S. M. Carroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Addison-Wesley, 2004.

[23] Robert M. Wald. *General Relativity*. University of Chicago Press, 1984.

[24] Rudolf Kippenhahn y Alfred Weigert. *Stellar Structure and Evolution*. Springer, 1990.

[25] S. L. Shapiro y S. A. Teukolsky. *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects*. Wiley, 1983.

[26] A. Hewish et al. “Observations of a rapidly pulsating radio source”. En: *Nature* 217 (1968).

[27] R. P. Fender. “The role of accretion in the formation of high-energy astrophysical phenomena”. En: *New Astronomy Reviews* 48 (2004).

[28] LIGO Scientific Collaboration. *Introduction to LIGO Gravitational Waves*. Accessed: 2024-07-01. 2024. URL: `https://www.ligo.org/science/GW-Sources.php`.

[29] B. P. Abbott y et al. “Searches for continuous gravitational waves from nine young supernova remnants”. En: *The Astrophysical Journal* 875.2 (2017).

[30] N. Andersson. “A new class of unstable modes of rotating relativistic stars”. En: *The Astrophysical Journal* 502.2 (1998).

[31] L. Blanchet. “Gravitational radiation from post-Newtonian sources and inspiralling compact binaries”. En: *Living Reviews in Relativity* 9.1 (2006).

[32] Kip S. Thorne. *Gravitational Radiation*. Princeton University Press, 1987.

[33] J. Weber. “Detection and Generation of Gravitational Waves”. En: *Physical Review* 117.1 (1960).

[34] Eugene Hecht. *Optics*. Addison Wesley, 2002.

[35] M. E. Gertsenshtein. “Wave Resonance of Light and Gravitational Waves”. En: *Soviet Physics JETP* 14.1 (1962).

[36] LIGO Scientific Collaboration. “LIGO: The Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory”. En: *Reports on Progress in Physics* 78.9 (2015).

[37] Éanna É. Flanagan y S. A. Hughes. “The basics of gravitational-wave physics”. En: *Annals of Physics* 319 (2005).

[38] The Virgo Collaboration. “The Virgo detector for gravitational waves”. En: *Classical and Quantum Gravity* 30 (2013).

[39] The GEO Collaboration. “Squeezing and advanced techniques in GEO 600”. En: *Journal of Physics: Conference Series* 120 (2018).

[40] TAMA Collaboration. “The TAMA 300 gravitational wave detector”. En: *Classical and Quantum Gravity* 25 (2008).

[41] LIGO Scientific Collaboration. “LIGO’s Second Generation Enhancements”. En: *Physical Review D* 102.6 (2020).

[42] Einstein Telescope Collaboration. “The Einstein Telescope: A next-generation gravitational-wave detector”. En: *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2024.01 (2024).

[43] LISA Collaboration. “The Laser Interferometer Space Antenna: A concept”. En: *Space Science Reviews* 211 (2025).

[44] Michele Maggiore. *Gravitational Waves Volume 1: Theory and Experiments*. Oxford University Press, 2007.

[45] B. F. Whiting et al. “Noise Characterization for Laser Interferometer Gravitational Wave Detectors”. En: *Classical and Quantum Gravity* 18.6 (2001).

[46] B. F. Schutz. *A First Course in General Relativity*. 2nd. Cambridge University Press, 2009.

[47] M. B. Priestley. *Spectral Analysis and Time Series*. London: Academic Press, 1981.

[48] C. W. Helstrom. *Statistical Theory of Signal Detection*. Oxford: Pergamon Press, 1968.

[49] P. D. Welch. “The use of fast Fourier transform for the estimation of power spectra: A method based on time averaging over short, modified periodograms”. En: *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics* 15.2 (1967).

[50] Andrew Gelman et al. *Bayesian Data Analysis*. Third. with errors fixed as of 15 February 2021. Chapman y Hall/CRC, 2021.