

*Facultad
de
Ciencias*

**COLAPSO GRAVITATORIO: TEOREMAS
DE SINGULARIDAD, AGUJEROS NEGROS
Y SOLUCIONES ALTERNATIVAS A SU
FORMACIÓN**

**(Gravitational collapse: singularity theorems,
black holes and alternative solutions to their
formation)**

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al

GRADO EN FÍSICA

Autor: Pablo Revuelta Aja

Director: Diego Herranz Muñoz

Septiembre - 2024

Agradecimientos

En primer lugar, me gustaría agradecer de una forma especial el apoyo y la atención a mi tutor durante este trabajo, Diego Herranz. A lo largo de mi paso por este grado has sido un referente para mi en cuanto a pedagogía, dedicación y cercanía con los alumnos. Creo a todos tus alumnos nos has inculcado lo emocionante que puede ser la física y toda la humanidad que tiene detrás. Respecto a este trabajo, tu paciencia y apoyo han sido infinitos y tus palabras de ánimo me han ayudado en todo momento. A continuación, quería dar las gracias a los cuatro pilares que han aguantado para mi este último curso:

A mi familia: papá, mamá, Huguito. Gracias por el infinito apoyo que me habéis dado, no solo durante el proceso de este trabajo, si no, a lo largo de todos estos años en la Facultad e incluso antes. Gracias por confiar en mí a pesar de que había veces que ni yo lo hacía. No hay nada más importante para mi que vuestro amor incondicional, que he recibido desde que tengo recuerdo.

A mi maravilloso equipo de balonmano: a mis jugadoras y a mis compañeros, Fernando y Gema. Gracias por la confianza y el cariño. Podéis pensar que no habéis hecho mucho, porque no tiene que ver nada con este trabajo. Pero, realmente, la ilusión que he compartido con vosotras ha sido capaz de hacerme llegar hasta aquí.

A mi maravillosa familia de San Martín y de Salesianos en general. A mis chavales, a mis compañeros animadores y a todos los salesianos que han pasado por mi este curso. Habéis llenado de felicidad y de paz mi corazón, siendo un hogar en el que tenía la certeza de que siempre tendría un gesto de cariño y un abrazo.

Y a Leire, que caíste como por casualidad en mi vida, hace casi ya un año y solo has hecho que sea más y más feliz cada día. Porque hemos vivido este proceso juntos, apoyándonos, ayudándonos y queriéndonos. Y eso ha hecho que sea infinitamente más sencillo.

Gracias a todos.

Índice general

Introducción	1
1. Bases teóricas	5
1.1. Variedades, sistemas de referencia, vectores, tensores y cambios de sistemas	5
1.2. Tensor métrico	6
1.3. Partículas en el espacio-tiempo	9
1.4. Curvatura del espacio-tiempo, ecuación de Einstein	9
1.5. Tensor de energía-momento	10
1.6. Soluciones generales de métricas	11
1.7. Introducción histórica al problema del colapso y a los agujeros negros	13
2. Estudio del artículo de “On Continued Gravitational Contraction”, de Oppenheimer y Snyder	17
2.1. Métrica de Tolman	17
2.2. Cambio de sistema de coordenadas, métrica de Oppenheimer-Snyder . . .	20
2.3. Resultados del artículo	24
3. Estudio de “Gravitational collapse without black holes” y otros artículos, de T. W. Marshall	27
3.1. Planteamientos en contra de la solución de Oppenheimer y Snyder	28
3.2. Métrica de Marshall	29
3.3. Resultados del artículo	32
3.4. Conclusiones del artículo	34
4. Revisión de la propuesta de T. W. Marshall	37
4.1. Comprobación de la propuesta de Marshall de cambio	37
4.2. Estado final de estrella congelada como fruto del sistema de coordenadas . .	39
4.3. Comprobaciones observacionales	40
4.4. Conclusiones	41
Bibliografía	43

Introducción

El problema de la muerte estelar y la formación de agujeros negros ha sido un punto central de la teoría de la relatividad desde sus inicios. Grandes nombres de la física han hecho sus aportaciones al campo: el mismo Albert Einstein, Oppenheimer, Schwarzschild, Eddington, Penrose o Hawking, entre muchos otros. La fascinación que nos produce el final de la vida de los cuerpos más masivos de nuestro universo es innegable. Y, todavía más, si esto va ligado a la formación de agujeros negros: regiones de la geometría del espacio-tiempo de las que ni siquiera la luz puede escapar, y de singularidades espacio-temporales: puntos del espacio-tiempo que la Relatividad General parece no ser suficiente para entender.

Actualmente los agujeros negros siguen en el centro del panorama científico por varias razones: la posibilidad de que conformen parte de la materia oscura, su relación con la formación de galaxias y la estudio de la cuantización del espacio-tiempo, que se espera que ayude a entender sus singularidades.

La relación de éstos con la muerte estelar parte de los trabajos de Subrahmanyan Chandrasekhar, Robert Oppenheimer, George Volkoff y Hartland Sweet Snyder, que demuestran que los estados finales de enana blanca o estrella de neutrones para una estrella masiva tienen un límite de masa y que, pasado ese límite, la presión gravitatoria del astro será tal que colapsará indefinidamente hacia su centro, traspasando su radio de Schwarzschild formando un agujero negro con una singularidad en su centro.

Sin embargo, en todo este proceso, han surgido propuestas alternativas a la formación de agujeros negros, motivadas por las conclusiones poco intuitivas de estos modelos: puntos de ruptura del espacio-tiempo, pérdida de la causalidad, intercambio de carácter temporal en el espacio... En ese contexto se enmarca la solución propuesta por T. W. Marshall en [2], que surge como una alternativa a la formación de agujeros negros por el colapso de cuerpos masivos inertes. Plantea que el estado final de éstos no es la singularidad, si no el de una estrella congelada eternamente en entorno a su radio de Schwarzschild.

El estudio de esta propuesta será el objeto del trabajo que aquí presentamos. Si bien, es una propuesta alternativa que se sale del consenso de la comunidad de la existencia de agujeros negros, hemos creído que sería interesante estudiarla por varios motivos: por ser un ejercicio interesante de trabajo en el campo, por salirse fuera de lo común que se podría ver en una asignatura de la materia y por considerar que todas las propuestas con sentido, aunque se salgan de lo establecido, merecen ser tenidas en cuenta y valoradas.

Así, comenzamos el trabajo con un capítulo introductorio, dedicado a los conceptos de Relatividad General básicos que serán las herramientas utilizadas en el resto del trabajo. Destacan por su importancia las explicaciones sobre la naturaleza del tensor métrico y sus soluciones para espacios espacialmente simétricos.

En el segundo capítulo se estudia en detalle el artículo [7] de Oppenheimer y Snyder, cuya solución de métrica en colapso estelar es la seguida como modelo de consenso. Presentamos la solución comóvil de Tolman, su conexión con un cuerpo estelar con la solución de Schwarzschild como exterior y las muestras del colapso y la separación causal del cuerpo que produce esta métrica.

En el tercer capítulo se realiza un trabajo similar con el artículo [2] de Marshall. Presentamos sus razonamientos en contra de la solución de Oppenheimer y Snyder y las variacio-

nes en el procedimiento que llevan a su solución alternativa, para estudiar las implicaciones de la misma.

Finalmente, en el cuarto capítulo hacemos una revisión crítica de los procedimientos y resultados expuestos en el capítulo anterior y los comparamos con los de [7]. Tratamos de dar razones que no permitan acercarnos a una u otra solución apoyándonos en las implicaciones teóricas de éstas y en las observaciones astrofísicas de los últimos años.

1. Bases teóricas

En Relatividad General, el espacio-tiempo se modela como:

- una variedad 4–dimensional
- de signatura $(+1, -1, -1, -1)$
- orientable temporalmente
- cuya curvatura y por tanto, métrica, en cada punto depende de la distribución de energía del propio espacio-tiempo

En esta capítulo vamos a tratar de explicar brevemente que significan cada una de estas características (salvo de la la orientación temporal, por su excesiva complejidad ya que no vamos a valernos de ella en el trabajo) a la vez que introducimos los conceptos necesarios para nuestro trabajo.

Este trabajo se centra en el estudio la obtención y el estudio del comportamiento de tensores métricos, de sus propiedades y de las relaciones de cambio de coordenadas ente ellos. Por tanto será necesario introducir conceptos de teoría de variedades como los de: sistemas de referencia inerciales locales, derivadas covariantes y geodésicas o los tensores de curvatura y las ecuaciones de Einstein. De ello se ocuparan las primeras 4 secciones. Hemos tratado de darles un tono matemáticamente riguroso, pero con las menores complicaciones posibles, tratando de que sea una lectura estructurada, con un desarrollo coherente. De esto se ocuparan las 4 primeras secciones.

Posteriormente dedicaremos unas páginas a introducir en tensor de energía-momento y desarrollarlo para dos casos generales que aplicaremos en el trabajo.

En la siguiente sección desarrollaremos las expresiones del tensor métrico para dos casos de especial relevancia: soluciones con simetría esférica espacial y soluciones en sistemas de referencias comóviles.

Finalmente en la última sección haremos una introducción histórica del concepto de agujero negro y de su relación con el colapso y la muerte estelar. También introduciremos la métrica de Schwarzschild.

Los resultados de este capítulo (salvo cita expresa) se recogen de [11], de [1] y de [6].

Nota: En todo el trabajo mantendremos el criterio de unidades $c = 1$.

1.1. Variedades, sistemas de referencia, vectores, tensores y cambios de sistemas

El concepto de variedad tiene cierta complejidad matemática, por lo que, para nosotros, bastará con definirla como un espacio de puntos, denominados **sucesos** para nosotros, que localmente parece plano (se parece a \mathbb{R}^n). La intuición para utilizar las variedades para modelar el espacio-tiempo en Relatividad General surge del Principio de Equivalencia de Einstein: *en regiones del espacio-tiempo suficientemente pequeñas las leyes de la física se*

reducen a las de la *Relatividad Especial* y de entender la gravedad como curvatura del espacio-tiempo.

Que una variedad sea localmente similar a \mathbb{R}^n (para nosotros, \mathbb{R}^4) implica que, para un conjunto de puntos U cercanos entre si, podemos definir una aplicación $x : U \Rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que, dado un punto p , su imagen sea $x(p) = (x^0(p), x^1(p), x^2(p), x^3(p)) \in \mathbb{R}^4$. A dichas aplicaciones las denominamos **sistemas de referencia** y a la imagen del punto p , **coordenadas de p** en el sistemas de referencia x . Dado un suceso con coordenadas x^μ en dicho sistema, denominamos a $t = x_p^0$ como el **tiempo del suceso en el sistema** y $\vec{x} = (x_p^1, x_p^2, x_p^3)$ es la **posición espacial del suceso en el sistema**.

Tenemos además que, un punto p puede recibir coordenadas en dos sistemas de referencia distintos, x e y . Estas coordenadas estarán relacionadas mediante una determinada aplicación de \mathbb{R}^4 a \mathbb{R}^4 , por lo que tendremos $x^\mu = x^\mu(y^\nu)$ y viceversa, $y^\mu = y^\mu(x^\nu)$.

Ahora, sobre los puntos de la variedad podemos definir campos escalares, vectoriales o tensoriales. Éstos, podrán ser expresados mediante sus **componentes** en un sistema de referencia dado y cambiarán entre distintos sistemas. Así, tendremos:

- **Campos vectoriales contravariantes:** cuyas componentes en un sistema de referencia x se escribirán como $v^\mu(p)$. Se caracterizan porque, dadas sus componentes $u^\mu(p)$ en otro sistema de referencia distinto y , ambas se relacionan de la forma:

$$u^\mu = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu} v^\nu$$

- **Campos vectoriales covariantes:** cuyas componentes en un sistema de referencia x se escribirán como $v_\mu(p)$ y se caracterizan porque, dadas sus componentes $u_\mu(p)$ en otro sistema de referencia distinto y , ambas se relacionan de la forma:

$$u^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu} v^\nu$$

- **Campos tensoriales:** un campo tensorial de tipo (n, m) está formado por n componentes covariantes y m contravariantes y sus componentes en un sistema de referencia dado se expresan de la forma $T_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_n}$ y el cambio entre sistemas de referencia combina n formas de cambio covariantes y m formas contravariantes:

$$T_{j_1 \dots j_m}^{k_1 \dots k_n} = \frac{y^{k_1}}{x^{i_1}} \dots \frac{y^{k_n}}{x^{i_n}} \frac{x^{l_1}}{y^{j_1}} \dots \frac{x^{l_m}}{y^{j_m}} T_{l_1 \dots l_m}^{i_1 \dots i_n}$$

1.2. Tensor métrico

El siguiente punto a introducir de la definición de espacio-tiempo que dábamos en la introducción del capítulo es el de signatura y con ella, el de tensor métrico, que va a ser el centro de nuestro trabajo.

Así, un **tensor métrico** definido sobre una variedad es un tensor (que solemos denotar por g) de tipo $(0, 2)$ simétrico y no degenerado.

Este tensor generaliza la noción de producto escalar entre vectores, definiendo un producto entre campos vectoriales en toda la variedad y permite medir distancias entre puntos de la variedad. En un sistema de referencia, dados dos campos vectoriales u^μ y v^μ tenemos que el producto de ambos se calcula de la forma:

$$\langle u, v \rangle = g_{\mu\nu} u^\mu v^\nu$$

A partir de aquí, como en el caso clásico, dado un vector u^μ se define su **módulo** como:

$$|u^\mu| = g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu$$

Se dice que un vector es **espacial** si su módulo es negativo, temporal si es positivo y nulo si es 0. Se dice además que una curva es de tipo espacial/temporal/nula si todos sus vectores tangentes son de ese tipo. En general una curva no tiene por que tener un tipo causal definido.

Ahora, si tenemos una curva $\alpha^\mu(s)$ en nuestro espacio-tiempo que sigue una trayectoria con coordenadas entre los puntos p y q , cuyo campo vectorial tangente es $u^\mu(s)$, tenemos que la longitud de la sección de la curva entre ambos puntos será igual a:

$$L_\alpha(p, q) = \int_{s_0}^{s_1} \sqrt{g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu} ds$$

donde $p = x^\mu(s_0)$ y $q = x^\mu(s_1)$ (y teniendo en cuenta que $g_{\mu\nu}$ y u^μ pueden ser variables a lo largo de la curva). A partir de esto, definimos la **distancia espacio-temporal entre dos puntos** como la longitud mínima de todos los segmentos de curva que los unen.

Nota: Al igual que el resto de tensores, dados dos sistemas de coordenadas x, y tenemos que la relación entre las componentes en ambos es:

$$g^{ij}(x) = \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \frac{\partial x^j}{\partial y^l} g^{kl}(y) \quad (1.1)$$

Subir y bajar índices

Una propiedad importante del tensor métrico es que permite relacionar vectores covariantes y contravariantes, acción que se denomina como **subir y bajar índices**.

Así, dado un campo vectorial contravariante u^μ definimos su **campo vectorial covariante asociado** como:

$$u_\mu = g_{\nu\mu} u^\nu$$

Y de forma contraria, tenemos el **campo vectorial contravariante asociado** a campo vectorial covariante u_μ como:

$$u^\mu = g^{\nu\mu} u_\nu$$

donde $g^{\nu\mu}$ es el **tensor métrico inverso**, que cumple que

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta_\lambda^\mu \Rightarrow [g_{ij}] = [g^{ij}]^{-1} \quad (1.2)$$

Esto lo podemos hacer para cualquier tipo de tensor, subiendo o bajando índices con el tensor métrico y su inverso. Por ejemplo, dado un tensor A_{kl}^{ij} de tipo $(2, 2)$, podemos definir el tensor A_{jkl}^i de tipo $(1, 3)$ cuyas componentes serán $A_{jkl}^i = g_{jm} A_{kl}^{im}$. De forma idéntica con las subidas de índice.

Sistemas de referencia inerciales y signatura del tensor métrico

Dada una variedad con un tensor métrico definido sobre ella y dado un punto p cualquiera en la variedad, se puede demostrar que existe un sistema de referencia en el que la matriz $[g_{ij}]$ formada por las componentes de la métrica es una matriz diagonal y cuyos elementos de la diagonal solo son ± 1 . Al conjunto ordenado de ± 1 se le denomina **signatura de la métrica**.

En Relatividad Especial se pueden definir sistemas de referencia globales (que cubren todo el espacio-tiempo) y en los que el tensor métrico es diagonal en todos los puntos, denominados **Sistemas de Referencia Inerciales**. En dichos sistemas, la matriz del tensor métrico es de la forma:

$$[g_{\mu\nu}] = [\eta_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Así, se trata de una métrica de signatura $(+1, -1, -1, -1)$, como comentábamos.

Nota: La elección de la signatura contraria $(-1, +1, +1, +1)$ también es factible y construye el mismo espacio-tiempo. Sin embargo los signos en algunas de las ecuaciones y definiciones se invierten, por lo que hay que tener especial cuidado al comparar recursos de varios autores que puedan elegirlos de formas distintas.

En contraposición, la existencia de curvatura variable en el espacio-tiempo de la Relatividad General hace que no puedan existir, en general, Sistemas de Referencia Inerciales, en los que la métrica sea globalmente de la forma $\eta_{\mu\nu}$. Sin embargo, si que podemos seguir encontrando, dado un punto p , sistemas de referencia tal que $g_{\mu\nu}(p) = \eta_{\mu\nu}$. Es más, se puede encontrar un sistema de referencia en el que, además, las primeras derivadas del tensor métrico en dicho punto se anulen. Es decir, la métrica localmente parece plana a primer orden (esta es la definición rigurosa del Principio de Equivalencia de Einstein). Este es el denominado **Sistema de Referencia Inercial Local** del punto p .

Derivada covariante y geodésicas

Hemos visto que un campo vectorial/tensorial define un vector/tensor en cada punto del espacio. Para comparar y operar con vectores/tensores definidos en distintos puntos, en el espacio-tiempo plano de la Relatividad Especial podemos trasladar de forma paralela de un punto a otro. Sin embargo, en un espacio curvo, transportar un vector/tensor entre puntos sin que cambie requiere un poco más de cuidado. Para ello, primero hay que definir una forma de valorar como cambia un vector/tensor entre dos puntos.

Así, generalizando el concepto de derivada de un campo vectorial ∂_μ , se define la **derivada covariante** de un campos u^ν como el tensor (1,1):

$$\nabla_\mu u^\nu = \partial_\mu u^\nu + \Gamma_{\mu\sigma}^\nu u^\sigma$$

Esta derivada covariante depende del tensor métrico, a partir de los **símbolos de Christoffel**, que se obtienen de la forma:

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial u^i} \right) \quad (1.3)$$

Nota: La derivada covariante se puede extender a 1-formas, obteniendo un tensor de tipo $(0, 2)$:

$$\nabla_\mu w_\nu = \partial_\mu w_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda w_\lambda$$

y a tensores de cualquier tipo (n, m) , obteniéndolos del tipo $(n+1, m)$. Es fácil ver que en el caso de tensores de tipo $(0, 0)$ (es decir, funciones escalares) se recuperan las derivadas parciales: $\nabla_\mu \phi = \partial_\mu \phi$.

Dada ahora una curva $x^\mu(s)$ sobre el espacio-tiempo y dado un campo u^μ definido sobre ella, podemos definir la **derivada covariante del campo a lo largo de la curva** como:

$$\frac{Du^\nu}{Ds} = \frac{dx^\mu(s)}{ds} \nabla_\mu u_{x(s)}^\nu$$

y se dice que un campo vectorial/tensorial es **paralelo a largo de una curva** si su derivada covariante a lo largo de dicha curva es nula en todos los puntos.

Para concluir, introducimos la generalización de recta en espacios curvos. En espacios planos una curva se denomina recta si su vector tangente no cambia a lo largo de ella. Por tanto, se define una **geodésica** como un curva tal que su campo vectorial tangente es paralelo a lo largo de ella. A partir de la ecuación del transporte paralelo obtenemos que, una curva $x^\mu(s)$ será una geodésica si y solo si:

$$\frac{d^2 x^k(s)}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^k \frac{dx^\mu(s)}{ds} \frac{dx^\nu(s)}{ds} = 0, \quad k = 1, \dots, n \quad (1.4)$$

El carácter causal de una geodésica está definido, es decir, existen geodésicas tipo espacio, tipo tiempo y nulas.

Se tiene además que dados dos puntos p, q de la variedad, existe un único segmento de geodésica con origen en p y final en q y que su longitud es la distancia entre ambos puntos.

1.3. Partículas en el espacio-tiempo

En esta sección vamos a introducir algunas de las propiedades básicas de las partículas en Relatividad General.

- Dada una partícula, tenemos que el conjunto de sucesos que recorre es una curva denominada **línea de mundo** de la partícula. Se trata de una **curva hacia el futuro** (curva tal que el vector tangente en cada punto esta situado en el cono de futuro del espacio tangente en el que se encuentran). Para una partícula material (con masa), su línea de mundo es una **curva temporal** y, para una partícula **tipo luz** (sin masa), su línea de mundo es una curva nula.
- Se dice que una partícula **se mueve en caída libre** si su línea de mundo es una geodésica. En el caso de las partículas tipo luz, al ser una curva nula, sus líneas de mundo siempre son geodésicas, por lo que siempre se mueven en caída libre. En ese caso, podemos definir un sistema de referencia inercial local que se mueva con la partícula, en el que la línea de mundo de la misma es la curva $[x^\mu(s)] = (x^0(s), 0, 0, 0)$
- Dada una **partícula con masa**, siempre se puede obtener una parametrización natural de su línea de mundo. Denominamos **tiempo propio** τ de la partícula al parámetro natural de la misma. En su sistema de referencia inercial propio tenemos que $x_0(\tau) = \tau$. En el caso de una **partícula de tipo luz** no podemos obtener una parametrización natural de su línea de mundo al ser una curva tipo luz.
- Dada una partícula con masa, denominamos **4-velocidad de la partícula** al campo vectorial tangente a cualquier parametrización natural de su línea de mundo. En un sistema referencia tenemos:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

y su SRI propio, $[x^\mu(\tau)] = (\tau, 0, 0, 0)$, por lo que $[u^\mu] = (1, 0, 0, 0)$, por lo que $u^\mu u_\mu = c^2$, que es constante en cualquier sistema de referencia.

- En el caso de una partícula de tipo luz no podemos obtener una parametrización natural de su línea de mundo al ser una curva tipo luz, por lo que no podremos definir un tiempo propio para ella. Por tanto definiremos su **4-velocidad** como el vector tangente u^μ a cualquier parametrización de su línea de mundo. Se trata siempre de un vector tipo luz, por lo que $u^\mu u_\mu = 0$.

1.4. Curvatura del espacio-tiempo, ecuación de Einstein

La curvatura del espacio-tiempo viene definida en cada punto por el **Tensor de Curvatura o de Riemann**, que se define como el tensor de tipo (1,3) cuyas componentes en un sistema de referencia dado, siguen la expresión:

$$R^l_{ijk} = \Gamma^m_{jk}\Gamma^l_{im} - \Gamma^m_{ik}\Gamma^l_{jm} + \partial_i\Gamma^l_{jk} - \partial_j\Gamma^l_{ik} \quad (1.5)$$

Como vemos, sus componentes se calculan a partir de la derivada covariante y como ésta lo hace de la métrica, viene define por completo esta última.

Se puede ver que si R_{ijk}^l es idénticamente nulo, para todo punto del espacio-tiempo existe un sistema de referencia en el que se recupera una métrica diagonal. Un espacio-tiempo cuyo tensor de curvatura es nulo en todos los puntos se denomina **plano**. Por eso se dice que el espacio-tiempo de Minkowsky de la Relatividad Especial es plano.

Las simetrías del tensor producen que de sus n^4 componentes, solo $\frac{1}{12}n^2(n^1 - 1)$ sean independientes. En un espacio-tiempo de 4 dimensiones, hace un total de 20, que son precisamente los 20 grados de libertad de las derivadas segundas de la métrica los sistemas inerciales locales.

A partir del tensor de Riemann se define el **tensor de Ricci** como el tensor de tipo $(0, 2)$ que surge de la siguiente contracción con la métrica:

$$R_{ij} = R_{ijk}^k$$

Se trata de la única contracción no nula del tensor de Riemann (por las simetrías de éste). Se trata de un tensor simétrico $R_{ij} = R_{ji}$ y tiene 10 componentes independientes.

También se define el **campo de curvatura escalar** como el campo escalar:

$$R = g^{ij} R_{ij} = R_i^i$$

Finalmente se llega a la **ecuación de Einstein**, que da sentido a la cuarta propiedad con la que definíamos el espacio-tiempo y que es el centro de la Teoría de la Relatividad General: la relación entre la curvatura del espacio-tiempo y el contenido del mismo. Así se tiene que:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (1.6)$$

donde $T_{\mu\nu}$ es el **tensor de energía-momento**, que se introduce brevemente en la sección siguiente.

1.5. Tensor de energía-momento

En las ecuaciones de Einstein (1.6) se introduce el **tensor de energía-momento**, que contiene toda la información del sistema acerca magnitudes como su densidad de energía o de momento, presión o tensiones internas... Aunque dicho sistema este compuesto por múltiples partículas individuales, cada una con sus velocidades y posiciones, se tomarán como un fluido continuo, caracterizado por cantidades macroscópicas como su densidad, presión, viscosidad, entropía, entre otras. Se trata, como se aprecia en (1.6) de un tensor de tipo $(0, 2)$.

Para definirlo rigurosamente, se comienza tomando un único campo de 4-velocidad del fluido U^μ . Así, se tiene que $T^{\mu\nu}$ se define como el flujo de la coordenada P^μ del 4-momento a través de las superficies de x^ν constante.

A partir de aquí, se considera un volumen infinitesimal de fluido en su propio sistema en reposo. Se tiene entonces que T^{00} es el flujo de p^0 a través de $x^0 = cte$. Es decir, la densidad de energía del volumen en su sistema de referencia propio. De la misma forma $T^{i0} = T^{0i}$ se corresponden con las densidades de momento de dicho volumen en la dirección x^i . Las componentes cruzadas T^{ij} se corresponden con el flujo de momento, o tensión: las fuerzas entre elementos infinitesimales adyacentes. Los de fuera de la diagonal son términos de cizalla, como los debidos a la viscosidad, mientras que los diagonales T^{ii} son la componente i -ésima de la presión ejercida en la dirección x^i , lo que denominamos, presión.

El caso sencillo más general es el de un sistema que se denomina, dentro del contexto de la astrofísica y la cosmología, de **polvo**: un conjunto de partículas localmente en reposo relativo que interaccionan entre ellas solamente mediante la gravedad. En su sistema de referencia inercial local, si cada partícula una tiene masa m , la densidad de energía en el

sistema de referencia local será $\rho = mn$, donde n es la densidad de partículas en el sistema de referencia propio.

Ahora, para llevarlo a una ecuación covariante, definimos el flujo de partículas $N^\mu = nU^\mu$, donde U^μ es la 4-velocidad, que será constante. Se tiene que N^0 es la densidad de partículas y N^i es el flujo de estas en la dirección x^i . Y se puede ver que ρ es el la coordenada 00 del tensor construido $p^\mu N^\nu$ en el sistema de referencia inercial del polvo. Por tanto, tiene sentido definir el tensor de energía momento del sistema como:

$$T^{\mu\nu} = p^\mu N^\nu = \rho U^\mu U^\nu$$

Una versión más generalizada del polvo es un sistema denominado **fluido perfecto**, un sistema continuo que puede ser caracterizado por dos cantidades: ρ , su densidad de energía en reposo y p , su presión isotrópa en reposo. Debido a ser un fluido isótropo, su tensor será diagonal en su sistema de referencia en reposo. Así, siguiendo las definiciones de cada componente dadas anteriormente tendremos:

$$T^{00} = \rho \quad T^{ii} = p_i \quad T^{ij} = 0, i \neq j \quad (1.7)$$

Siguiendo un procedimiento similar al del caso anterior se llega a la ecuación general para cualquier sistema de referencia:

$$T^{\mu\nu} = (p + \rho)U^\mu U^\nu + pg^{\mu\nu}$$

Generalmente, el tensor de energía-momento de un fluido perfecto va acompañado de una ecuación de estado de la forma $p = p(\rho)$. Aquí se puede ver que el polvo es un caso especial en el que $p = 0$, pero existen otros muchos.

Aparte de las simetrías inherente al tensor, el tensor cumple las siguientes ecuaciones de conservación:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu}$$

que expresan la conservación de la energía, $\nu = 0$, y de las 3 componentes del momento $\nu = i$.

1.6. Soluciones generales de métricas

Las soluciones de Einstein no pueden ser resultados de forma analítica para la mayoría de sistemas, solo en aquellos con una alta simetría es posible obtener soluciones métricas. Estas condiciones de simetría se plantean en la forma de la métrica, que queda generalmente definida por un conjunto de parámetros, que luego se obtienen resolviendo las ecuaciones con el tensor de energía-momento propio. En esta sección se presentan las formas más generales de métricas con soluciones analíticas, que serán utilizadas a lo largo del trabajo.

Elemento de línea general para métricas con simetría esférica espacial

Comenzamos planteando un sistema cuya métrica tenga simetría esférica espacial. Tomando coordenadas esféricas (t, r, θ, φ) , la simetría esférica implica que la parte angular tiene que seguir la métrica de una esfera de radio r , que tiene la forma $ds^2 = r^2 d\Omega^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$. Multiplicando esta métrica esférica por un factor de escala radial y temporal y añadiendo las componentes radiales y temporales propias, se plantea un elemento de línea de la forma:

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 + 2adr dt - e^\mu r^2 d\Omega^2 \quad (1.8)$$

donde $\nu = \nu(r, t)$, $\lambda = \lambda(r, t)$, $\mu = \mu(r, t)$ $a = a(r, t)$ son funciones generales de r y t .

Nota: La notación con exponenciales de las componentes diagonales es utilizada para mantener la signatura de la métrica. Así, como una función exponencial siempre es positiva, la componente temporal se mantiene positiva y las espaciales, al añadirles un $-$, negativas. Respecto a la componente transversal su expresión proveniente de la métrica sería $2g^{rt}drdt$, por eso se utiliza esa expresión.

Además, esta expresión se puede simplificar todavía más, aplicando algunos cambios de coordenadas.

Comenzamos definiendo la variable:

$$\bar{r}^2 = e^\mu r^2$$

Sustituyéndola en la expresión de la métrica, renombrando $\bar{r} \rightarrow r$ y manteniendo las funciones con los mismos nombres, se obtiene una primera

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 + 2adr dt - r^2 d\Omega^2 \quad (1.9)$$

Una simplificación más se puede añadir para eliminar el producto cruzado de las componentes espacial y temporal, introduciendo una nueva variable t' definida a partir de la expresión:

$$dt' = \eta(adr + e^\nu dt)$$

donde η es un factor de integración para hacer la parte derecha una diferencial perfecta. Se puede demostrar que esta nueva variable mantiene la causalidad temporal de t . Tras este cambio y renombrando como en el caso anterior, se obtiene finalmente:

$$ds^2 = e^{\nu(r,t)} dt^2 - e^{\lambda(r,t)} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (1.10)$$

Ahora, solo resta obtener las expresiones de λ y ν para el sistema material concreto. Para ello, se calculan los símbolos de Christoffel, según la ecuación (1.3) y se introducen en las ecuaciones de Einstein (1.6), junto con las componentes del tensor de energía-momento que definen el sistema. Sin especificar dichas componentes, se obtienen las siguientes ecuaciones de campo:

$$\begin{aligned} -8\pi T_1^1 &= e^{-\lambda}(\nu'/r + 1/r^2) - 1/r^2 \\ 8\pi T_4^4 &= e^{-\lambda}(\lambda'/r - 1/r^2) + 1/r^2 \\ -8\pi T_2^2 &= -8\pi T_3^3 = e^{-\lambda}[\nu''/2 + \nu'^2/4 - \nu'\lambda'/4 + (\nu' - \lambda')/2r] \\ &\quad - e^{-\nu}(\ddot{\lambda}/2 + \dot{\lambda}^2/4 - \dot{\lambda}\dot{\nu}/4) \\ 8\pi T_4^1 &= 8\pi e^{\nu-\lambda} T_1^4 = e^{-\lambda} \dot{\lambda}/r \end{aligned} \quad (1.11)$$

siendo las primas derivadas respecto de r y los puntos, respecto de t .

Elemento de línea con simetría esférica en coordenadas comóviles

En este trabajo, al igual que en cualquier estudio relacionado con agujeros negros, es imprescindible utilizar los sistemas de referencia inerciales de las partículas que componen el cuerpo material, para poder trabajar con el tiempo propio de las mismas. Por ello utilizaremos un sistema de referencia, que denominaremos **comóvil**, cuyas coordenadas espaciales se definen en una maya que conecta partículas adyacentes y que se mueve con ellas, manteniendo constantes las posiciones de las partículas en caída libre. Esto se expresa en que las coordenadas espaciales x^i deben cumplir:

$$\frac{dx^i}{ds} = 0$$

Para empezar, como en el caso anterior, tomamos un elemento de línea con la forma más general posible que mantenga la simetría esférica espacial:

$$ds^2 = e^{\nu(R,t)} dt^2 - e^{\bar{\omega}(R,t)} dr^2 + 2a(R,t) dRdt - e^{\omega(R,t)} d\Omega^2$$

Para simplificar este elemento de línea solo podemos hacer transformaciones que respeten la condición de comovilidad anterior. Realizando la misma transformación que en la sección anterior se elimina el término espacio-temporal cruzado, obteniendo:

$$ds^2 = e^{\nu(R,t)} dt^2 - e^{\bar{\omega}(R,t)} dr^2 - e^{\omega(R,t)} d\Omega^2$$

Supongamos ahora una partícula en caída libre en nuestro sistema de coordenadas. Se tiene que sus geodésicas son ecuaciones con r, θ, φ constantes, por lo que, a partir de las ecuaciones (1.4) se tiene:

$$\frac{d^2 R}{ds^2} = -\Gamma_1^{44} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 \quad \frac{d^2 \theta}{ds^2} = -\Gamma_2^{44} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 \quad \frac{d^2 \varphi}{ds^2} = -\Gamma_3^{44} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2$$

Ahora, debido a la condición de isotropía las aceleraciones de la parte izquierda de las ecuaciones tienen que ser nulas, por lo que los tres símbolos de Christoffel también lo son necesariamente.

A partir de esto, según la expresión (1.3) se puede demostrar que la función ν es únicamente dependiente de la coordenada temporal, es decir, $\nu = \nu(t)$. Esto permite introducir una nueva coordenada temporal:

$$\tau = \int e^{\nu/2} dt$$

y expresar la métrica de la forma:

$$ds^2 = d\tau^2 - e^{\bar{\omega}(R,\tau)} dR^2 - e^{\omega(R,\tau)} d\Omega^2 \tag{1.12}$$

Se puede ver que la coordenada temporal τ es el tiempo propio medido por un observador inercial local en reposo con respecto a la materia en caída libre y

$$e^{\lambda/2} dr \quad e^{\mu/2} r d\theta \quad e^{\mu/2} r \sin(\theta) d\varphi$$

son las distancias propias entre las partículas medidas por dicho observador.

1.7. Introducción histórica al problema del colapso y a los agujeros negros

La idea de un cuerpo tan masivo que ni siquiera la luz pudiera escapar de él, no es propio de la Relatividad General, si no que es propuesta por primera vez por un astrónomo aficionado llamado John Michell, en 1784. Calcula que un cuerpo con el mismo radio que el sol, pero una densidad 500 veces mayor, tendría una velocidad de escape superior a la de la luz. Así, si la luz fuera una partícula, no podría escapar de dicho objeto, resultando invisible. Sin embargo, con el descubrimiento de las propiedades ondulatorias de la luz en el siglo 19, esta idea se descarta, al no plantear que esta pudiera ser atraída por la gravedad.

Con la llegada de la Teoría de la Relatividad General en 1915, Einstein propuso que la luz también era afectada por la gravedad, reavivando de nuevo la posibilidad de la existencia de estos cuerpos.

Así, unos meses después Karl Schwarzschild encuentra una solución para las Ecuaciones de Einstein que describe el campo creado por un cuerpo esférico centrado en el origen de coordenadas. Dicha solución muestra dos puntos en los que la métrica se vuelve infinita

(dos singularidades): en $r = 0$ y en $r = r_S = 2GM/c^2$, el radio de Schwarzschild. Sin embargo, se creía que estas singularidades tenían su origen en la existencia de demasiadas simetrías en dichas soluciones matemáticas y no que fueran soluciones físicas. En el caso de la solución de Schwarzschild se plantea que solo puede ser válida para describir un campo gravitacional físico para $r > r_S$, lo cual era válido para el exterior de todos los cuerpos masivos planteados hasta la fecha. Sin embargo, en 1924, Arthur Eddington encuentra un cambio de variable que elimina la singularidad del radio de Schwarzschild, en 1933, Georges Lemaître plantea que esto muestra que dicha singularidad no sería física, si no solo un producto de las coordenadas. Así se hipotetiza la existencia de una estrella con su masa totalmente contenida dentro de su radio de Schwarzschild.

Contemporáneamente, en 1931 Subrahmanyan Chandrasekhar demostró que existe un límite máximo para la masa de una enana blanca en equilibrio, incluso si se tienen en cuenta efectos cuánticos y propuso que, un cuerpo que superara dicha masa crítica colapsaría por su propia gravedad, superando incluso el principio de exclusión de Pauli. Posteriormente, en 1939 Oppenheimer y Volkoff [8], mostraron que también existe esta masa límite para una estrella de neutrones en equilibrio.

Esto nos hace llegar al artículo de Oppenheimer y Snyder [7] que, en ese mismo año, concluyeron que una estrella de neutrones de mayor masa que el límite de Oppenheimer y Volkoff no podría soportar la presión gravitacional con lo que sufriría una contracción continua, un colapso gravitacional; en tiempo finito para un observador comóvil con la materia de la estrella aparecería una singularidad. Su solución matemática predecía que la contracción pasaría por r_S sin ningún efecto físico observable y continuaría hasta alcanzar una singularidad de densidad en $r = 0$, donde toda la materia de la estrella se concentraría en un punto de densidad infinita. Sin embargo, todos estos artículos están apoyados en modelos altamente simétricos y el colapso podría ser debido a esto.

Para contrarrestar estos argumentos en 1955, Amal Kumar Raychaudhuri prueba el primer teorema de singularidad. Bajo ciertas hipótesis, una distribución de polvo irrotacional aparece un efecto de enfoque de las geodésicas que lleva a que se alcance una densidad infinita en el futuro. Con la ayuda de Arthur Komar y Raychaudhuri generalizaron dicho resultado para un fluido ideal con. Sin embargo, este trabajo no ofrecía un teorema de singularidad definitivo; había una vía de escape, la rotación de las partículas. Así, en 1965 surgen las dos ideas que faltaban: la idea de superficie cerrada atrapada y la idea de incompletitud para las geodésicas, de la mano de Roger Penrose que, en 1965 presenta su teorema de singularidad. Afirma que en todo espacio-tiempo con una serie de hipótesis que presente una superficie cerrada atrapada de tipo futuro, si se cumple la condición fuerte para la energía, entonces existen geodésicas nulas incompletas en el futuro. Esto elimina cualquier necesidad de simetría de la solución de la métrica, concluyendo con el problema.

Métricas externa de Schwarzschild

La métrica de Schwarzschildes, sin duda, la solución a las ecuaciones de Einstein más conocida. Se trata de la única solución esféricamente simétrica de vacío de las ecuaciones. Es además, estática (sin introducir conceptos de campos vectoriales de Killing, tomaremos como estática aquella métrica cuyas componentes no dependan de la coordenada temporal y que sea invariante frente a simetrías temporales), por lo que demuestra que no existen soluciones no estáticas con estas propiedades.

Para dar una breve demostración, tomamos el elemento de línea (1.10) e imponemos la condición de que las componentes de la métrica no dependan de la coordenada temporal:

$$ds^2 = e^{\nu(r)} dt^2 - e^{\lambda(r)} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (1.13)$$

Como se trata de una solución de vacío, las ecuaciones (1.6) se pueden simplificar a las

Ecuaciones de Vacío de Einstein:

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma_{\nu\mu}^{\rho}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial \Gamma_{\rho\mu}^{\nu}}{\partial x^{\rho}} + \Gamma_{\rho\lambda}^{\rho} \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho} \Gamma_{\rho\mu}^{\lambda} = 0 \quad (1.14)$$

Así, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} e^{(\nu-\lambda)}(\nu''/4 + \nu'^2/4 - \nu'\lambda'/4 + 2\nu'/2r) &= 0 \\ -\nu''/4 - \nu'^2/4 + \nu'\lambda'/4 + 2\nu'/2r &= 0 \\ e^{-\lambda}[r(\lambda'/2 - \nu'/2) - 1] + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando la primera ecuación por $e^{(\lambda-\nu)}$ y sumándola a la primera, se obtiene $\frac{1}{2r}(\nu' + \lambda') = 0 \rightarrow \nu = -\lambda + C$, pudiendo eliminar la constante reescalando la coordenada temporal, obteniendo:

$$\nu = -\lambda$$

Sustituyendo ahora en la tercera ecuación, se obtiene $e^{\nu}[r\nu' + 1] + 1 = 0 \Rightarrow \frac{d}{dr}(e^{\nu}r) = 1$, cuya solución es:

$$e^{\nu} = 1 - \frac{C}{r}$$

donde C es una constante indeterminada. Se obtiene así la expresión:

$$ds^2 = \frac{r-C}{r} dt^2 - \frac{r}{r-C} dr^2 - r^2 d\Omega^2$$

Ahora, supongamos que esta métrica es causada por una esfera de masa M situada centrada en el origen de coordenadas. Tenemos entonces que, en el límite campo débil, se cumple $g_{tt} = -(1 - 2GM/r)$, por lo que tenemos la identificación

$$C = 2GM = r_S$$

valor al que se denomina **Radio de Schwarzschild**. Así, se obtiene la ecuación para la métrica, denominada **métrica exterior de Schwarzschild**:

$$ds^2 = \frac{r-r_S}{r} dt^2 - \frac{r}{r-r_S} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 d(\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (1.15)$$

Nota: Al trabajar con esta métrica es común tomar el radio de Schwarzschild como unidad de referencia para las distancias radiales, haciendo $r_S = 1$. Mantendremos este criterio, salvo que se especifique lo contrario, a lo largo del resto del trabajo.

2. Estudio del artículo de “On Continued Gravitational Contraction”, de Oppenheimer y Snyder

En el proceso histórico que de entender la muerte estelar y el colapso gravitatorio fruto de ésta, un punto de inflexión fue el artículo [8], en el que Oppenheimer y Volkoff muestran que no hay soluciones estáticas para la métrica producida por una distribución esférica de neutrones fríos con una masa mayor a $0,7M_{\odot}$ (cálculos posteriores lo situaron entre $1,5M_{\odot}$ y $3M_{\odot}$ y observaciones de fusiones de estrellas de neutrones lo sitúan en $\sim 2,1M_{\odot}$).

A partir de este resultado, Oppenheimer y Snyder en [7] estudian el comportamiento de soluciones no-estáticas, lo que les lleva a encontrar una solución para la métrica en coordenadas comóviles y un cambio de coordenadas que permite encajar la solución interna con la métrica externa de Schwarzschild. A partir de estas soluciones estudian el comportamiento de la métrica cuando $t \rightarrow \infty$ y observan la desconexión causal del interior del cuerpo estelar con el espacio-tiempo exterior.

En esta sección sección del trabajo hemos desarrollado con todo el detalle los procedimientos empleados en [7] y expuesto con exactitud los resultados obtenidos en este, a fin de poder compararlos con los propuestos por Marshall en [2], cosa que haremos en las secciones posteriores.

Así, en la primera parte de la sección estudiamos la solución en coordenadas comóviles, que parte del trabajo de Richard Tolman para métricas cosmológicas y es adaptado por Oppenheimer y Snyder a su caso de estudio. Para ello, modelan un cuerpo estelar como un fluido perfecto, esféricamente simétrico y cuyas partículas se mueven únicamente en dirección radial. Para poder resolver las ecuaciones analíticamente se toma adicionalmente la presión interna como nula y sus resultados se extrapolan cualitativamente al caso general.

En la segunda, estudiamos el cambio de variable propuesto por Oppenheimer y Snyder para trasladar la solución en dichas coordenadas comóviles a un sistema de coordenadas en el que la parte externa sea la métrica de Schwarzschildy conecte de forma continua con la parte interna en una hipersuperficie de $t = cte$.

Finalmente, en la tercera parte, explicamos los resultados obtenidos a partir de sus soluciones de la métrica y las conclusiones a las que llegan acerca del colapso estelar.

2.1. Métrica de Tolman

En la primera parte de su artículo, Oppenheimer y Snyder plantean modelizar un cuerpo estelar en el que se han acabado todas las fuentes de energía como un fluido perfecto esférico y tratan de encontrar una solución para la métrica en las coordenadas de un observador externo. Sin embargo, encuentran que las ecuaciones no son resolubles analíticamente y solo pueden obtener resultados cualitativos del comportamiento asintótico de la métrica, que serán explicados en la tercera parte de esta sección del trabajo

Entonces plantean encontrar una solución con la condición adicional para el fluido de tener presión nula (una esfera de polvo, como la introducida en la sección 1.5). Para ello, en

la segunda parte de su artículo comienzan proponiendo un sistema de coordenadas comóviles con la materia introducido en [10], cuyo elemento de línea general sigue la expresión (1.12):

$$ds^2 = d\tau^2 - e^{\bar{\omega}} dR^2 - e^{\omega} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

con $\bar{\omega} = \bar{\omega}(r, t)$ y $\omega = \omega(r, t)$ siendo funciones arbitrarias de sus variables. Recordar que la comovilidad de este sistema de coordenadas implica que las trayectorias de partículas en caída libre son las de $R = cte$ y τ es el tiempo propio de las mismas.

Nota: En esta sección tomaremos la referencia de distancia radial como el radio del cuerpo estelar R_e , haciendo $R_e = 1$.

Considerar el cuerpo estelar como un fluido perfecto con presión nula y en coordenadas comóviles (coordenadas locales en reposo) implica que el tensor energía-momento tiene la forma (1.7) con $p_i = 0$, es decir:

$$T_4^4 = \rho \quad T_\nu^\mu = 0, \quad \mu \neq 4 \text{ o } \nu \neq 4 \quad (2.1)$$

Ahora, se calculan los los símbolos de Christoffel de la conexión, siguiendo (1.3) y, a partir de estos, las componentes del tensor de Riemann, según (1.5). Así, introduciendo sus componentes junto con la expresión del tensor de energía-momento a (1.6) se obtienen las ecuaciones de campo del sistema:

$$8\pi T_1^1 = 0 = e^{-\omega} - e^{-\bar{\omega}} \omega'^2/4 + \ddot{\omega} - \frac{3}{4} \dot{\omega}^2 \quad (2.2)$$

$$8\pi T_2^2 = 8\pi T_3^3 = -e^{-\bar{\omega}} (\omega''/2 + \omega'^2/4 - \bar{\omega}' \omega'/4) + \ddot{\bar{\omega}}/2 + \dot{\bar{\omega}}^2/4 + \ddot{\omega}/2 + \dot{\omega}^2/4 + \dot{\bar{\omega}} \dot{\omega}/4 \quad (2.3)$$

$$8\pi T_4^4 = 8\pi \rho = e^{-\omega} - e^{\bar{\omega}} (\omega'' + \frac{3}{4} \omega'^2 - \dot{\bar{\omega}} \dot{\omega}/2) + \dot{\omega}^2/4 + \dot{\bar{\omega}} \dot{\omega}^2/2 \quad (2.4)$$

$$8\pi e^{\bar{\omega}} T_4^1 = -8\pi T_1^4 = 0 = \omega' \dot{\omega}/2 - \omega' \dot{\bar{\omega}}/2 + \dot{\omega}' \quad (2.5)$$

siendo las primas derivadas respecto de R y los puntos, respecto de τ .

Para resolver estas ecuaciones, comenzamos integrando (2.5) obtenemos:

$$e^{\bar{\omega}} = e^{\omega} \omega'^2/4 f(R) \quad (2.6)$$

Aquí termina el desarrollo de [10], seguido de forma idéntica por [7]. Para continuar resolviendo la métrica, los autores entienden que, si bien la función $f(R)$ puede ser arbitraria, pueden tomar $f^2(R) = 1$ y aún así mantener la suficiente libertad en las ecuaciones para que existe una solución correcta y, al mismo tiempo, simplificar el problema para permitir encontrar dicha solución.

Sustituyendo ésta en (2.2) y resolviendo se obtiene:

$$e^{\omega} = [F(R)\tau + G(R)]^{4/3} \quad (2.7)$$

donde F y G son funciones arbitrarias de R . Esto es equivalente a lo que se obtendría sustituyendo en (2.3).

En este momento se toma la solución particular para G de:

$$G(R) = R^{3/2} \quad (2.8)$$

A partir de (2.4), sustituyendo (2.6) y (2.7) obtenemos la siguiente ecuación para la densidad:

$$8\pi \rho(R, \tau) = \frac{4}{3} (\tau + G/F)^{-1} (\tau + G'/F')^{-1}$$

y, para un tiempo $\tau = 0$, se obtiene

$$FF' = 9\pi R^2 \rho_0(R)$$

con una solución particular de la forma:

$$F = \begin{cases} -\frac{3}{2}R^{3/2} & \text{si } R < 1 \\ -\frac{3}{2} & \text{si } R > 1 \end{cases} \quad (2.9)$$

Cálculo de las componentes de la métrica

A partir de (2.7), sustituyendo las expresiones de (2.8) y (2.9) obtenemos:

$$e^\omega = \begin{cases} \left(-\frac{3}{2}R^{3/2}\tau + R^{3/2}\right)^{4/3} = R^2 \left(1 - \frac{3}{2}\tau\right)^{4/3} & \text{si } R < 1 \\ \left(R^{3/2} - \frac{3}{2}\tau\right)^{4/3} & \text{si } R > 1 \end{cases} \quad (2.10)$$

y a partir de esta:

$$\omega = \begin{cases} \ln \left[\left(-\frac{3}{2}R^{3/2}\tau + R^{3/2}\right)^{4/3} \right] = 2 \ln(R) + \frac{4}{3} \ln \left(1 - \frac{3}{2}\tau\right) & \text{si } R < 1 \\ \ln \left[\left(R^{3/2} - \frac{3}{2}\tau\right)^{4/3} \right] = \frac{4}{3} \ln \left(R^{3/2} - \frac{3}{2}\tau\right) & \text{si } R > 1 \end{cases}$$

Derivando con respecto a R , obtenemos:

$$\omega' = \begin{cases} \frac{2}{R} & \text{si } R < 1 \\ 2R^{1/2} \left(R^{3/2} - \frac{3}{2}\tau\right)^{-1} & \text{si } R > 1 \end{cases} \quad (2.11)$$

Ahora, sustituyendo los resultados de (2.10) y (2.11) en (2.6) y simplificando, se obtiene:

$$e^\omega = \begin{cases} \frac{R}{2} \left(1 - \frac{3}{2}\tau\right)^{4/3} & \text{si } R < 1 \\ \frac{R^{1/2}}{2} \left(R^{3/2} - \frac{3}{2}\tau\right)^{1/3} & \text{si } R > 1 \end{cases} \quad (2.12)$$

Así, sustituyendo (2.10) y (2.12) en (1.12) se obtiene la siguiente expresión para la métrica de un fluido perfecto de presión nula esféricamente simétrico en coordenadas comóviles, que denominaremos **métrica de Tolman**:

$$ds^2 = \begin{cases} d\tau^2 - \frac{R}{2} \left(1 - \frac{3}{2}\tau\right)^{4/3} dR^2 - R^2 \left(1 - \frac{3}{2}\tau\right)^{4/3} d\Omega^2 & \text{si } R < 1 \\ d\tau^2 - \frac{R^{1/2}}{2} \left(R^{3/2} - \frac{3}{2}\tau\right)^{1/3} dR^2 - \left(R^{3/2} - \frac{3}{2}\tau\right)^{4/3} d\Omega^2 & \text{si } R > 1 \end{cases} \quad (2.13)$$

2.2. Cambio de sistema de coordenadas, métrica de Oppenheimer-Snyder

Nota: En esta sección vamos a trabajar con dos sistemas de referencia distintos, cuyas referencias radiales son $r_S = 1$ para las coordenadas (r, t) y $R_e = 1$ para las coordenadas (R, τ) . Si bien esta claro que no se podrían tomar ambos criterios a la vez, por la comodidad en el manejo de ecuaciones así se ha realizado. Además, la introducción de estas constante en las ecuaciones no cambia los resultados obtenidos ni el análisis de los mismos.

Una vez conseguida la solución de la métrica de (2.13), en Oppenheimer y Snyder buscan un cambio de sistema de coordenadas que transforme la parte externa de la métrica en la la métrica de Schwarzschild y conecte de forma continua con la parte interna en las hipersuperficies de $t = cte$. Esto es necesario hace para poder estudiar las geodésicas de las partículas cruzando el radio del cuerpo estelar y estudiar su colapso.

Para ello comienzan sobre la base del elemento de línea con simetría espacial esférica para ambas partes, que, según (1.10), sigue la expresión:

$$ds^2 = e^{\nu(r,t)} dt^2 - e^{\lambda(r,t)} dr^2 - r^2 d\Omega^2$$

y buscan las relaciones $r = r(R, \tau)$ y $t = t(R, \tau)$ y los valores de $\lambda(r, t)$ y $\nu(r, t)$.

Del elemento de línea propuesto se pueden obtener las dos primeras restricciones para el cambio de variable:

1. $g_{rt}(r, t) = 0$ (esta condición será el punto principal de la crítica de Marshall al procedimiento seguido por Oppenheimer y Snyder)
2. Mismas coordenadas angulares que (2.13) fijando en r^2 la función que multiplica al elemento de línea angular esférico

Como las coordenadas angulares no cambian y las coordenadas radiales y temporales no dependen de estas, obtenemos la primera ecuación que relaciona nuestras variables:

$$e^{\omega/2} = (F\tau + G)^{3/2} = r \Rightarrow r = r(R, \tau) = \begin{cases} R(1 - \frac{3}{2}\tau)^{2/3} & \text{si } R < 1 \\ (R^{3/2} - \frac{3}{2}\tau)^{2/3} & \text{si } R > 1 \end{cases} \quad (2.14)$$

obteniendo la expresión de $r = r(R, \tau)$.

Para obtener ahora la expresión de t , vamos a estudiar el cambio de las componentes del tensor métrico de las coordenadas espaciales y temporales. Siguiendo (1.1), obtenemos:

$$g^{tt}(r, t) = \left(\frac{\partial t}{\partial R}\right)^2 g^{RR}(R, \tau) + \left(\frac{\partial t}{\partial \tau}\right)^2 g^{\tau\tau}(R, \tau) = t'^2 g^{RR}(R, \tau) + \dot{t}^2 g^{\tau\tau}(R, \tau) \quad (2.15)$$

$$g^{rr}(r, t) = \left(\frac{\partial r}{\partial R}\right)^2 g^{RR}(R, \tau) + \left(\frac{\partial r}{\partial \tau}\right)^2 g^{\tau\tau}(R, \tau) = r'^2 g^{RR}(R, \tau) + \dot{r}^2 g^{\tau\tau}(R, \tau) \quad (2.16)$$

$$g^{tr}(r, t) = \frac{\partial t}{\partial R} \frac{\partial r}{\partial R} g^{RR}(R, \tau) + \frac{\partial t}{\partial \tau} \frac{\partial r}{\partial \tau} g^{\tau\tau}(R, \tau) = t' r' g^{RR}(R, \tau) + \dot{t} \dot{r} g^{\tau\tau}(R, \tau) \quad (2.17)$$

que quedan ampliamente simplificadas debido a que los términos cruzados se anulan, ya que $g^{ij}(R, \tau)$ es diagonal (recordamos que las primas son derivadas respecto de R y los puntos, respecto de τ). Sustituyendo las expresiones de (1.10) y (2.13) obtenemos:

$$e^{-\nu} = \dot{t}^2 - t'^2 e^{-\bar{w}} = \dot{t}^2 - t'^2 / r'^2 \quad (2.18)$$

$$-e^{-\lambda} = \dot{r}^2 - r'^2 e^{-\bar{w}} = \dot{r}^2 - 1 \quad (2.19)$$

$$0 = \dot{t}\dot{r} - t'r'e^{-\bar{w}} = \dot{t}\dot{r} - t'/r' \quad (2.20)$$

donde la segunda igualdad en todas las ecuaciones se debe a que, a partir de (2.12) y (2.14) obtenemos que $e^{-\bar{w}} = 1/r'^2$.

Aquí comenzamos a usar como referencia el desarrollo propuesto en [12] porque nos ha parecido más visual.

Parte externa

Para la parte externa, según (2.14), tenemos que:

$$r(R, \tau) = \left(R^{3/2} - \frac{3}{2}\tau \right)^{2/3}$$

de la que obtenemos:

$$\dot{r} = \frac{1}{r^{1/2}} \quad r' = -\frac{R^{1/2}}{r^{1/2}}$$

y, aplicado a (2.20) obtenemos:

$$t'/\dot{t} = \dot{r}r' = -\frac{R^{1/2}}{r} = -R^{1/2} \left(R^{3/2} - \frac{3}{2}\tau \right)^{-2/3} \quad (2.21)$$

de la que obtenemos como solución general:

$$t = L(x)$$

siendo M una función arbitraria de la variable x , con:

$$x = \frac{3}{2}(R^{3/2} - r^{3/2}) - 2r^{1/2} + \ln \frac{r^{1/2} + 1}{r^{1/2} - 1} \quad (2.22)$$

Ahora, para encontrar la forma de la función M queremos que, en la zona $R > 1$, nuestra métrica esférica (1.10) sea la (1.15). Por tanto, aquí tenemos nuestras tercera y cuartas condiciones:

$$3. \quad e^\lambda = \frac{r-1}{r} \text{ en } R > 1$$

$$4. \quad e^\nu = e^{-\lambda} = \frac{r}{r-1} \text{ en } R > 1$$

y, con las que, sustituyendo en (2.18) y (2.19), obtenemos:

$$\frac{1}{r} - 1 = \dot{r}^2 - 1 \Rightarrow \dot{r}^2 = \frac{1}{r} \quad -\frac{r}{r-1} = \dot{t}^2 - t'^2/r'^2$$

Se puede ver que las ecuaciones son equivalentes y que, para que mantengan su forma se tiene que cumplir que:

$$M(x) = x$$

obteniendo:

$$t = L(x) = x = \frac{2}{3}(R^{3/2} - r^{3/2}) - 2r^{1/2} + \ln \frac{r^{1/2} + 1}{r^{1/2} - 1}, \quad R > 1 \quad (2.23)$$

Parte interna

Para la parte interna, de la misma forma que en la externa, según (2.14), tenemos que:

$$r(R, \tau) = R \left(1 - \frac{3}{2}\tau\right)^{2/3}$$

de la que obtenemos:

$$\dot{r} = -\frac{R^{3/2}}{r^{1/2}} \quad r' = \frac{r}{R}$$

y, aplicado a (2.20) obtenemos:

$$t'/\dot{t} = \dot{r}r' = -R^{1/2}r^{1/2} = -R \left(1 - \frac{3}{2}\tau\right)^{1/3} \quad (2.24)$$

de la que obtenemos como solución general:

$$t = L(y)$$

con L una función arbitraria e y una variable con la forma:

$$y = \frac{1}{2}(R^2 - 1) + \frac{r}{R} \quad (2.25)$$

Nota: Vamos a expandir la solución de la EDP (2.24).

Se puede reescribir la ecuación de la forma

$$\frac{\partial t}{\partial R} = -R \left(1 - \frac{3}{2}\tau\right)^{1/3} \frac{\partial t}{\partial \tau} \Rightarrow \frac{\partial t}{\partial R} + R \left(1 - \frac{3}{2}\tau\right)^{1/3} \frac{\partial t}{\partial \tau} = 0$$

Así expresada se puede ver que es una EDP de la forma:

$$\sum_i u^i(x) \frac{\partial F(x)}{\partial x^i} = 0$$

donde $F(x)$ es la función a resolver, $x = (x^1, \dots, x^n)$ son las coordenadas de la misma y $u^i(x)$ son funciones en dichas coordenadas. Esto nos dice que t es constante en las líneas de campo del campo vectorial $\vec{V} = (u^1(x), \dots, u^n(x))$.

En nuestro caso concreto tenemos que $F(R, \tau) = t$, $u^R(R, \tau) = 1$ y $u^\tau(R, \tau) = R \left(1 - \frac{3}{2}\tau\right)^{1/3}$ y la solución será una función en las líneas de campo del campo vectorial $\vec{V} = (1, R \left(1 - \frac{3}{2}\tau\right)^{1/3})$. Para calcular dichas líneas debemos de resolver el sistema de ecuaciones:

$$\frac{dR}{ds} = 1 \quad \frac{d\tau}{ds} = R \left(1 - \frac{3}{2}\tau\right)^{1/3}$$

De la primera ecuación obtenemos $dR = ds$, por lo que, sustituyendo en la segunda, obtenemos:

$$RdR = \left(1 - \frac{3}{2}\tau\right)^{1/3} d\tau$$

cuya solución son las líneas de campo buscadas, que siguen la expresión:

$$\frac{R^2}{2} + \left(1 - \frac{3}{2}\tau\right)^{2/3} = cte$$

Por tanto, obtenemos como solución de la EDP la función:

$$t = M(y) \quad y = \frac{R^2}{2} + \left(1 - \frac{3}{2}\tau\right)^{2/3} + C = \frac{R^2}{2} + \frac{r}{R} - \frac{1}{2}$$

donde hemos tomado la constante igual a $-1/2$ para obtener la solución de Oppenheimer y Snyder. \square

Por último, para encontrar la forma de M , imponemos la última condición:

5. En el borde del cuerpo estelar, $R = 1$, las soluciones externa e interna de la métrica tienen que unirse de forma continua.

Esto implica que $t_{ext}(1, \tau) = t_{int}(1, \tau)$, que llevado a las ecuaciones:

$$L(R = 1, r) = M(y(R = 1, r)) \Rightarrow \frac{2}{3}(1 - r^{3/2}) - 2r^{1/2} + \ln \frac{r^{1/2} + 1}{r^{1/2} - 1} = M(r) \quad (2.26)$$

donde se ha aplicado que $y(1, r) = r$, obteniendo así la forma de M y, por tanto, el cambio de variable en la zona interior:

$$t = \frac{2}{3}(R^{3/2} - y^{3/2}) - 2y^{1/2} + \ln \frac{y^{1/2} + 1}{y^{1/2} - 1}, \quad R \leq 1 \quad (2.27)$$

Cambios completos y métrica de Oppenheimer-Snyder

Juntando la ecuación (2.14) junto con las dos ecuaciones (2.27) y (2.23), obtenemos las ecuaciones completas del cambio:

$$r = r(R, \tau) = \begin{cases} R \left(1 - \frac{3}{2}\tau\right)^{2/3} & \text{si } R < 1 \\ (R^{3/2} - \frac{3}{2}\tau)^{2/3} & \text{si } R > 1 \end{cases} \quad (2.28)$$

$$t = t(R, r) = t(R, r(R, \tau)) = \begin{cases} \frac{2}{3}(R^{3/2} - r^{3/2}) - 2r^{1/2} + \ln \frac{r^{1/2} + 1}{r^{1/2} - 1} & \text{si } R \geq 1 \\ \frac{2}{3}(R^{3/2} - y^{3/2}) - 2y^{1/2} + \ln \frac{y^{1/2} + 1}{y^{1/2} - 1} & \text{si } R \leq 1 \end{cases} \quad (2.29)$$

con

$$y = \frac{1}{2}(R^2 - 1) + \frac{r}{R}$$

Por último, vamos a calcular las componentes de la métrica en la parte interna de las nuevas coordenadas. A partir de las expresiones de $r(R, \tau)$ y $t(R, \tau)$ obtenidas en (2.14) y (2.29) obtenemos, para $R \leq 1$:

$$r' = \frac{r}{R} \quad (2.30)$$

$$\dot{r} = -\frac{R^{3/2}}{r^{1/2}} \quad (2.31)$$

$$t' = -\frac{y^{1/2}y'}{y-1} = -R \frac{y^{3/2}}{y-1} = -R \frac{\left(\frac{R^2}{2} + \frac{r}{R} - \frac{1}{2}\right)^{3/2}}{\frac{R^2}{2} + \frac{r}{R} - \frac{3}{2}} \quad (2.32)$$

$$\dot{t} = -\frac{y^{1/2}\dot{y}}{y-1} = -\left(\frac{R}{r}\right)^{1/2} \frac{y^{3/2}}{y-1} = -\left(\frac{R}{r}\right)^{1/2} \frac{\left(\frac{R^2}{2} + \frac{r}{R} - \frac{1}{2}\right)^{3/2}}{\frac{R^2}{2} + \frac{r}{R} - \frac{3}{2}} \quad (2.33)$$

donde hemos tenido en cuenta que $y' = R$ e $\dot{y} = -\left(\frac{R}{r}\right)^{1/2}$.

Sustituyendo en las ecuaciones (2.18) y (2.19) obtenemos, para $R \leq 1$:

$$e^{\lambda(r,t)} = \left(\frac{r}{r-R^3}\right) \quad (2.34)$$

$$e^{\nu(r,t)} = \frac{r^2 \left(\frac{R^2}{2} + \frac{r}{R} - \frac{3}{2}\right)^2}{R(r-R^3) \left(\frac{R^2}{2} + \frac{r}{R} - \frac{1}{2}\right)^3} \quad (2.35)$$

y, junto con las expresiones para $R \geq 1$ de (1.15), obtenemos la que vamos a denominar **métrica de Oppenheimer-Snyder**:

$$ds^2 = \begin{cases} \frac{r-1}{r} dt^2 - \frac{r}{r-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2 & \text{si } R > 1 \\ \frac{r^2 \left(\frac{R^2}{2} + \frac{r}{R} - \frac{3}{2}\right)^2}{R(r-R^3) \left(\frac{R^2}{2} + \frac{r}{R} - \frac{1}{2}\right)^3} dt^2 - \left(\frac{r}{r-R}\right) dr^2 - r^2 d\Omega^2 & \text{si } R < 1 \end{cases} \quad (2.36)$$

2.3. Resultados del artículo

Primera parte, caso general, resultados cualitativos

Para obtener resultados cualitativos del comportamiento de las componentes de la métrica durante el colapso del caso de presión no nula, Oppenheimer y Snyder trabajan el caso más general de un fluido perfecto con simetría esférica espacial y presión no nula en las coordenadas no comóviles, planteando una ecuación para la métrica con la forma (1.10):

$$ds^2 = e^{\nu(r,t)} dt^2 - e^{\lambda(r,t)} dr^2 - r^2 d\Omega^2$$

y cuyas ecuaciones de campo son de la forma (1.11):

$$\begin{aligned} -8\pi T_1^1 &= e^{-\lambda}(\nu'/r + 1/r^2) - 1/r^2 \\ 8\pi T_4^4 &= e^{-\lambda}(\lambda'/r - 1/r^2) + 1/r^2 \\ -8\pi T_2^2 &= -8\pi T_3^3 = e^{-\lambda}[\nu''/2 + \nu'^2/4 - \nu'\lambda'/4 + (\nu' - \lambda')/2r] \\ &\quad - e^{-\nu}(\ddot{\lambda}/2 + \dot{\lambda}^2/4 - \dot{\lambda}\dot{\nu}/4) \\ 8\pi T_4^1 &= 8\pi e^{\nu-\lambda} T_1^4 = e^{-\lambda} \dot{\lambda}/r \end{aligned}$$

De la primera y segunda ecuaciones de se puede ver que $\lambda = \lambda(r, t)$ tiene que decrecer con r tan rápido como r^2 o las componentes T_1^1 y T_4^4 del tensor de energía momento se volverían singulares en el origen (lo cual no tiene sentido en ningún instante previo al colapso estelar final). Por tanto, se tiene que cumplir que $\lambda(0, t) = 0$. Entonces, integrando la segunda ecuación y con la condición anterior, se obtiene que

$$\lambda(r, t) \geq 0$$

para todo r y t .

A partir de este resultado se obtiene, de la primera ecuación, que $\nu'(r, t) \geq 0$. Como queremos que cuando $r \rightarrow \infty$ el tiempo se aproxime al tiempo del observador, se tiene que cumplir que $\nu(\infty, t) = 0$. Sumando ambas condiciones obtenemos que

$$\nu(r, t) \leq 0$$

para todo r y t .

Sumando la segunda y la tercera ecuaciones se puede ver que $\lambda' + \nu' \geq 0$. Añadiendo ahora que, como el espacio tiene que ser plano conforme $r \rightarrow \infty$, se tiene que cumplir que $\lambda(\infty, t) = 0$ y las condición de contorno de ν anterior, se obtiene:

$$\lambda + \nu \leq 0$$

Por último, por la cuarta ecuación se sabemos que $\dot{\lambda} \geq 0$. Esto plantea, a primera vista, dos alternativas: que llegue de forma uniforme a un valor asintótico como función de r o que crezca de forma indefinida. El primer caso queda descartado a partir de los resultados de [8], que demuestran que este problema no tiene soluciones estacionarias. Respecto al segundo. El segundo también, ya que se puede ver que el volumen de la estrella sigue la expresión:

$$V = \int_0^{r_e} e^{\lambda/2} r^2 dr$$

donde r_e es el radio estelar, y crecería indefinidamente con el tiempo. Al mantenerse la masa constante, la densidad de la estrella tendería a cero, lo cual consideramos que no puede ser correcto.

En la siguiente sección se verá que la solución métrica obtenida para el caso de presión nula cumple que para todos los radios, λ tiende a un valor asintótico, salvo para r_S , en cuyo caso, crece indefinidamente.

Segunda parte, caso de presión nula, resultados analíticos

A partir de la solución de la métrica (2.36), Oppenheimer y Snyder calculan los valores asintóticos de de las componentes de la métrica cuando $t \rightarrow \infty$, para estudiar cual es el estado final del cuerpo estelar.

Para t suficientemente grandes, el término logarítmico domina en la expresión (2.27). Sustituyendo y por la expresión de (2.25) y r por la de (2.14) se obtiene la siguiente expresión para el valor asintótico de $t(R, \tau)$:

$$t \sim -\ln \left[\frac{(R^2 - 3)}{2} + \left(1 - \frac{3}{2}\tau\right)^{2/3} \right] \quad (2.37)$$

Esta expresión muestra que, para todo valor de R , conforme t se va a infinito, τ se aproxima a un valor límite, que aumenta el valor fijado de R .

Esto tiene una enorme implicación: **el cierre causal del cuerpo estelar**. Conforme el tiempo propio avanza, el tiempo medido por un observador en el infinito se ralentiza. Eso implica que un observador comóvil con la materia no podrá mandar una señal que llegue al infinito, porque, pasado el momento del colapso, tardaría un tiempo infinito en llegar. Es decir, la materia de la estrella se desconectaría causalmente del universo que la rodea, no pudiendo enviar información fuera del r_S .

Aplicando la expresión (2.37) a las ecuaciones (2.34) y (2.35) obtenemos los valores asintóticos para las componentes de la métrica en el interior del cuerpo, que son:

$$e^{-\lambda} \sim 1 - R^2 \left[e^{-t} + \frac{(3 - R^2)}{2} \right]^{-1}$$

$$e^{\nu} \sim e^{\lambda - 2t} \left[e^{-t} + \frac{1}{2}(3 - R^2) \right]$$

Se puede ver que para $R < 1$, conforme $t \rightarrow \infty$, e^{λ} tiende a un valor límite, mientras que, para $R = 1$ tienda a infinito (como comentábamos que pasaría en el apartado anterior).

Por el contrario e'' , en ambos casos tiende a 0. Estos resultados concuerdan coherentemente con los obtenidos en el estudio cualitativo de los valores asintóticos de λ y ν en el apartado anterior.

Como se ha comentado, este resultado marca un antes y un después en el problema de la muerte estelar y la hipótesis de los agujeros negros. Sabemos que las estrellas de gran masa del universo, en los procesos finales de su vida se comprimen hasta formar enanas blancas o, si sus masas son mayores, estrellas de neutrones. En [8] se muestra que esto tiene un límite, no habiendo estados estables de estrellas de neutrones para masas mayores de un cierto límite. Y en este artículo plantea que, una vez el estado estable no es posible, el colapso del cuerpo estelar termina desconectándolo del resto del universo que le rodea, formando de un **horizonte de eventos**.

También recalcar que este resultado solo estudia el caso de un sistema modelado como una nube de polvo sin presión con simetría espacial esférica (aunque mostrando que sus resultados son cualitativamente extrapolables al caso con presión no nula). No será hasta 1965 cuando Roger Penrose publique [9], dando solución al caso general.

3. Estudio de "Gravitational collapse without black holes" y otros artículos, de T. W. Marshall

Si bien, la solución obtenida por Oppenheimer y Snyder para la métrica de un cuerpo estelar en colapso es ampliamente aceptada dentro de la comunidad y ha sido construir modelos más generales y probar otros modelos en sus casos límites, desde su publicación muchos autores han mostrado interés en encontrar soluciones alternativas. Esto es debido en gran parte a los resultados aparentemente contra intuitivos que aparecen: singularidades espacio-temporales, separación causal de eventos, inversión de coordenadas espaciales y temporales, entre otros.

Entre esas soluciones alternativas se enmarca la propuesta por T. W. Marshall en [2]. En varios artículos plantea objeciones a tomar la métrica de Oppenheimer y Snyder como una correcta descripción del interior de un cuerpo estelar en sus procesos finales y objeciones técnicas al proceso que les lleva a la solución propuesta. Por ello, eliminando una de las condiciones exigidas a la métrica en [7], encuentra una propuesta de solución sin superficies atrapadas, lo cual, según el Teorema de Penrose [9], elimina la necesidad de la existencia de una singularidad y, por tanto, del colapso. Además, plantea que su propuesta lleva a un final diferente al cuerpo estelar: una solución estática de materia concentrada alrededor del radio de Schwarzschild, con su exterior cayendo asintóticamente hacia este sin nunca traspasarlo.

Si bien, es una propuesta alternativa que se sale del consenso de la comunidad de la existencia de agujeros negros, hemos creído que sería interesante estudiarla por varios motivos: por ser un ejercicio interesante de trabajo en el campo, por salirse fuera de lo común que se podría ver en una asignatura de la materia y por considerar que todas las propuestas con sentido, aunque se salgan de lo establecido, merecen ser tenidas en cuenta y valoradas.

Así, en la primera sección presentamos las motivaciones que le llevan a Marshall a plantear una propuesta alternativa a la de Oppenheimer y Snyder. Se comentan varios de sus artículos que llevan al artículo principal.

En la segunda, se sigue el desarrollo de [2], poniendo atención al punto de ruptura con la solución de [7] y terminando con el desarrollo de su métrica alternativa.

En la tercera se exponen las dos consecuencias de esta solución: la no existencia de superficies atrapadas y el estado final estático.

Y por último, en la cuarta sección se incluye algunos comentarios que surgen de la valoración de estas consecuencias.

No entraremos en este capítulo a hacer una valoración de sus propuestas, pues ese será el objetivo de la cuarta y última parte de este trabajo. Lo hemos planteado, al igual que el capítulo anterior como una exposición lo más clara y detalla posible de sus propuestas y resultados, a fin de poder de tener la mayor claridad posible para valorar la validez o no de sus argumentos y desarrollos.

3.1. Planteamientos en contra de la solución de Oppenheimer y Snyder

En varios de sus artículos: [3], [4], [5] y [2], Marshall plantea razones en contra de la solución obtenida por Oppenheimer y Snyder en [7] para la métrica de nube de polvo con simetría esférica en colapso, tanto por detalles del procedimiento seguido para su obtención, como por las implicaciones en el proceso de muerte estelar. Vamos a comentar los más relevantes que motivan el trabajo posterior.

En [3] se plantea que la solución de (2.36) no muestra que la nube de gas y polvo colapse hacia el centro hasta formar un agujero negro. Dada una partícula del interior del cuerpo estelar se puede ver que:

1. Al igual que en [7] se muestra que, según la ecuación (2.29), conforme τ aumenta, también lo hace t . Despejando de la ecuación se encuentra que el valor límite de τ en función de la posición radial comóvil de la partícula es:

$$\tau_{\infty}(R) = \frac{2}{3} - \left(-\frac{R^2 - 3}{2} \right)^{2/3} \quad (3.1)$$

2. Sustituyendo este valor en la ecuación (2.14), se muestra que la partícula tiende a una posición radial asintótica, que depende del radio comóvil, con un valor de:

$$r_{\infty}(R) = r(\tau_{\infty}, R) = \frac{3}{2}R - \frac{1}{2}R^3 \quad (3.2)$$

Es decir, la nube no colapsa hacia una singularidad central, si no que todas las partículas tienden a una posición final asintótica en $r_{\infty}(R)$, en función de sus coordenadas radiales comóviles, formando un estado estacionario final. De hecho, se puede ver además que la densidad de materia tiende a aumentar entorno al radio de Schwarzschild, haciéndose infinita en dicho límite y que el valor infinito que encuentran Oppenheimer y Snyder para g^{rr} es consecuencia de esta concentración de masa.

Concluye que esta densidad de materia produce un campo gravitatorio tan intenso que todos los procesos se detienen, incluido el colapso. Es decir, que, efectivamente, el tiempo se congela para las partículas en caída.

En [4] y [5] plantea que la elección de la solución particular de la función $F(R)$ en (2.9) no es adecuada, al menos para la parte interna. Para que la métrica fuera continua en $R = 1$ debería de cumplirse que $F(1^-) = -\frac{3}{2}$ y $F'(1^-) = 0$, pero esta última condición no se mantiene, ya que $F'(R) = -\frac{9}{4}R^{1/2} \Rightarrow F'(1^-) = -\frac{9}{4}$. Esto implica la no continuidad en la componentes g^{RR} de la métrica de Tolman (2.13) en $R = 1$, entre las partes interna y externa.

Nota: Este planteamiento es abandonado en [2] al ver que la discontinuidad no es tal.

Finalmente, en el artículo en el que se centra este trabajo, [2], comienza razonando en contra de las conclusiones de [7]. Plantea que sus resultados no muestran el colapso del cuerpo estelar y que se podría haber visto sencillamente al calcular las órbitas de las partículas individuales. De hecho, comenta que Oppenheimer y Snyder solamente hablan del colapso al proponer que su métrica confirma la conclusión de [8] y que han sido los autores posteriores los que han mantenido que este artículo establece la inevitabilidad de la formación de agujeros negros.

Plantea que lo que muestra la métrica de (2.36) es la existencia de regiones del espacio de las que la luz no puede escapar, lo que guió a Penrose a la noción de superficie atrapada y a su teorema de singularidad. Y, si bien esta noción puede ser correcta, el desarrollo de la métrica [7] no lo es. Añade que la solución de (2.36) es solo una de las muchas posibilidades

de solución y que queda fijada al añadir una condición, en su consideración, innecesaria (en la sección posterior veremos de que condición se trata y cual es la argumentación). Para terminar, encuentra que en la variedad de soluciones que existen al relajar dicha hipótesis, algunas no presentan superficies atrapadas y, por tanto, singularidades, y que no tendría motivaciones para decantarse por unas u otras.

3.2. Métrica de Marshall

En [2], Marshall comienza trabajando a partir de la siguiente métrica:

$$ds^2 = (\sqrt{R}dR - \sqrt{r}dr)^2 - (R/r)dR^2 - d\Omega^2 = \left(R - \frac{R}{r}\right) dR^2 + r dr^2 - 2\sqrt{r}\sqrt{R}dRdr - d\Omega^2, \quad R > 1 \quad (3.3)$$

$$ds^2 = (r/R)^3(dR/R - dr/r)^2 - (r/R)^2 dR^2 - d\Omega^2 = \left(\frac{r^3}{R^5} - \frac{r^2}{R^2}\right) dR^2 + \frac{r}{R^3} dr^2 - \frac{2r^2}{R^4} drdR - d\Omega^2, \quad RC1 \quad (3.4)$$

siendo R la coordenada radial comóvil con la materia y r es la coordenada radial cuya en la que, la parte exterior, coincide con de la métrica de Schwarzschild. Destacar, que, como en el resto del trabajo, R está en unidades de R_e y r en unidades de $r_S = 2M$.

Como esta no se trata de ninguna de las expresiones para la métrica presentadas anteriormente en el trabajo, vamos a ver como se relaciona con éstas. Para ello, comenzamos con la expresión de la métrica de Tolman (2.13):

$$ds^2 = \begin{cases} d\tau^2 - \frac{R}{2} \left(1 - \frac{3}{2}\tau\right)^{4/3} dR^2 - R^2 \left(1 - \frac{3}{2}\tau\right)^{4/3} d\Omega^2 & \text{si } R < 1 \\ d\tau^2 - \frac{R^{1/2}}{2} \left(R^{3/2} - \frac{3}{2}\tau\right)^{1/3} dR^2 - \left(R^{3/2} - \frac{3}{2}\tau\right)^{4/3} d\Omega^2 & \text{si } R > 1 \end{cases}$$

y vamos a seguir el cambio de variable que se propone en [7] para cambiar entre (2.13) y (2.36), pero solo intercambiando las coordenadas r y τ , que se relacionan entre ellas mediante la ecuación(2.14):

$$r = e^{\omega/2} = [F(R)\tau + R^{3/2}]^{2/3} \Rightarrow \tau = \frac{r^{3/2} - R^{3/2}}{F(R)}$$

Así, calculamos los cambios en las componentes del tensor métrico:

$$g_{RR}(R, r) = \left(\frac{\partial R}{\partial R}\right)^2 g_{RR}(R, \tau) + \left(\frac{\partial \tau}{\partial R}\right)^2 g_{\tau\tau}(R, \tau) = g_{RR}(R, \tau) + \left(\frac{\partial \tau}{\partial R}\right)^2 = \begin{cases} \frac{r^3}{R^5} - \frac{r^2}{R^2} & \text{si } R < 1 \\ R - \frac{R}{r} & \text{si } R > 1 \end{cases} \quad (3.5)$$

$$g_{rr}(R, r) = \left(\frac{\partial R}{\partial r}\right)^2 g_{RR}(R, \tau) + \left(\frac{\partial \tau}{\partial r}\right)^2 g_{\tau\tau}(R, \tau) = \left(\frac{\partial \tau}{\partial r}\right)^2 = \begin{cases} \frac{r}{R^3} & \text{si } R < 1 \\ r & \text{si } R > 1 \end{cases} \quad (3.6)$$

$$g_{Rr}(R, r) = \frac{\partial R}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial r} g_{RR}(R, \tau) + \frac{\partial \tau}{\partial R} \frac{\partial \tau}{\partial r} g_{\tau\tau}(R, \tau) =$$

$$= \frac{\partial \tau}{\partial R} \frac{\partial \tau}{\partial r} = \begin{cases} -\frac{r^2}{R^4} & \text{si } R < 1 \\ -\sqrt{r}\sqrt{R} & \text{si } R > 1 \end{cases} \quad (3.7)$$

a partir de los cuales podemos ver que se obtienen las expresiones para la métrica de (3.4) y (3.3).

Partiendo de esta métrica, Marshall plantea el cambio de variable $(r, R) \Rightarrow (r, t)$ para llegar a la métrica de Oppenheimer-Snyder. En la parte externa concuerda en utilizar la expresión (2.23) que termina de conectar la métrica (3.3) con (1.15), para $R > 1$, de forma idéntica a lo propuesto en [7].

Para la parte interna, comenta que el cambio de coordenadas (2.23) con el valor de y de (2.25) obtenido por Oppenheimer y Snyder se basa en varias condiciones:

1. **Esfericidad espacial de la métrica:** Marshall mantiene la parte angular de una métrica espacialmente esférica, siendo r^2 la función que multiplica a dicha parte angular, en las expresiones de (3.4) y (3.3).
2. **Continuidad en la métrica:** Marshall propone que la expresión de (2.23), la condiciones $y(1, R) = r$ y el valor de $\frac{\partial y}{\partial R}$ en $R = 1$ se fijan de tal forma que la métrica sea continua en el encuentro de las dos partes, $R = 1$. Esto es:

$$g_{tt} = \frac{r-1}{r} \quad g_{tr} = 0 \quad g_{rr} = -\frac{r}{r-1} \text{ en } R = 1$$

3. **Diagonalidad de la métrica:** Marshall comenta que la condición

$$g_{tr} = 0 \text{ en } R < 1$$

es la que termina de fijar de forma única el valor de y en (2.25).

Marshall plantea que la condición de diagonalidad no sería necesaria y que no habría justificación para imponerla a la métrica interna en las coordenadas (r, t) . Plantea por tanto dejar libre el valor de g^{rt} sustituyendo la expresión de (1.10) para la parte interna por la de (1.9):

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 + 2adr dt - d\Omega^2$$

una métrica con simetría esférica espacial no diagonal.

Nota: Comentábamos en la sección 1.6 que para toda métrica con simetría espacial esférica existe un sistema de referencia que la diagonaliza, no siendo este un caso distinto. Lo que se plantea en este artículo es que, como la métrica total se hace uniendo la parte externa de Schwarzschild con la parte interna, puede que el sistema de referencia que diagonaliza la parte externa no sea el mismo que diagonaliza la interna, pudiendo ser una parte diagonal y la otra no en el mismo sistema.

A continuación, para el cambio de coordenadas temporal entre ambas expresiones de la métrica, plantea mantener la expresión (2.27):

$$t = \frac{2}{3}(R^{3/2} - y^{3/2}) - 2y^{1/2} + \ln \frac{y^{1/2} + 1}{y^{1/2} - 1}$$

con la diferencia de que, al eliminar la condición de diagonalidad del métrica interna $g^{rt} = 0$ la expresión de $y(R, r)$ no queda definida de forma única. Dentro de las opciones que se encuentran disponibles escoge una de la forma:

$$y = \frac{r}{R} - \frac{5}{4} + \frac{3}{2}R - \frac{1}{4}R^2 \quad (3.8)$$

Se explica que esta elección de y produce una métrica en la que no existen superficies atrapadas y por tanto, no necesariamente existe una singularidad espacio-temporal. En la siguiente sección demostraremos esto.

A partir de esta elección de y se puede observar que $y(R = 1, r) = r$ por lo que las expresiones del cambio de coordenadas temporal (2.23) y (2.27) siguen coincidiendo en $R = 1$, manteniendo ambas el valor:

$$t(R = 1, r) = \frac{2}{3}(1 - r^{3/2}) - 2r^{1/2} + \ln \frac{r^{1/2} + 1}{r^{1/2} - 1}$$

Para comprobar que se mantiene la condición (2) de continuidad en la métrica entre ambas regiones, calculamos de nuevo el cambio de coordenadas de las componentes de la métrica, según la expresión (1.1), apoyándonos en los resultados (2.18), (2.19) y (2.20):

$$\begin{aligned} g^{rr}(r, t) &= \dot{t}^2 - t'^2/r'^2 \\ g^{tt}(r, t) &= \dot{r}^2 - 1 \\ g^{rt}(r, t) &= \dot{t}\dot{r} - t'/r' \end{aligned} \quad (3.9)$$

Al igual que en el cambio interno de Oppenheimer y Snyder tenemos que:

$$t' = -\frac{y^{3/2}y'}{y-1} \quad \dot{t} = -\frac{y^{3/2}\dot{y}}{y-1}$$

pero en este caso se tiene que:

$$y' = \frac{3-R}{2} \quad \dot{y} = -\frac{R^{1/2}}{r^{1/2}}$$

Las expresiones de r' y \dot{r} se mantienen como en (2.30) y (2.31).

Por lo tanto, sustituyendo en las ecuaciones (3.9) obtenemos:

$$\begin{aligned} g^{tt}(r, t) &= \frac{y^3}{(y-1)^2} \frac{R}{r} - \frac{y^3}{(y-1)^2} \left(\frac{R-3}{2} \right)^2 \left(\frac{r}{R} \right)^{-2} = \frac{y^3}{(y-1)^2} \frac{R}{r} \left[1 - \frac{(R-3)^2 R}{4r} \right] \\ g^{tt}(r, t) &= \frac{R^3}{r} - 1 = -\frac{r-R^3}{r} \\ g^{rt}(r, t) &= -\frac{y^{3/2}}{y-1} \frac{R^{1/2}}{r^{1/2}} \frac{R^{3/2}}{r^{1/2}} - \frac{y^{3/2}}{y-1} \frac{R-3}{2} \frac{R}{r} = -\frac{y^{3/2}}{y-1} \frac{R}{r} \left[R + \frac{R-3}{2} \right] \end{aligned} \quad (3.10)$$

Por tanto, podemos ver que, con $R = 1$, se obtiene:

$$g^{tt}(R = 1, r) = \frac{r^3}{(r-1)^2} \frac{1}{r} \left[1 - \frac{4}{4r} \right] = \frac{r}{r-1}$$

$$g^{rr}(R = 1, r) = -\frac{r-1}{r}$$

$$g^{rt}(R = 1, r) = -\frac{r^3}{(r-1)^2} \frac{1}{r} \left[1 + \frac{1-3}{2} \right] = 0$$

que se corresponden exactamente con las expresiones de (1.15), como buscábamos.

Para concluir, a partir de las expresiones de (3.10) vamos a calcular el elemento de línea de la métrica interna. Siguiendo (1.2), tenemos que:

$$[g^{\mu\nu}(r, t)] = \begin{pmatrix} \frac{y^3 R [4r - R(R-3)^2]}{4(y-1)^2 r^2} & -\frac{3y^{3/2} R (R-1)}{2(y-1)r} & 0 & 0 \\ -\frac{3y^{3/2} R (R-1)}{2(y-1)r} & -\frac{r-R^3}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/(r^2 \sin^2 \theta) \end{pmatrix}$$

por lo que:

$$[g_{\mu\nu}(r, t)] = [g_{\mu\nu}(r, t)]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4(y-1)^2}{(2r+R^3-3R^2)^2} \begin{pmatrix} \frac{r^2(r-R^3)}{Ry^3} & \frac{(1-R)r^2}{y^{3/2}(y-1)} \\ \frac{(1-R)r^2}{y^{3/2}(y-1)} & -\frac{Rr}{(y-1)} \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

y se obtiene los siguientes valores para la métrica interna:

$$ds^2 = \frac{4(y-1)^2}{(2r+R^3-3R^2)^2} \left[\frac{r^2(r-R^3)}{Ry^3} dt^2 - \frac{rR}{y-1} dr^2 + \frac{r^2(1-R)}{y^{3/2}(y-1)} dr dt \right] - r^2 d\Omega^2 \quad (3.11)$$

3.3. Resultados del artículo

Geodésicas nulas salientes

En el artículo se expone que la elección de y en (3.8) se debe a que, en la solución métrica resultante no se producen superficies atrapadas en el espacio-tiempo en la evolución del cuerpo estelar. En [9] se demuestra, bajo una serie de condiciones previas, que la existencia de superficies espacio-temporales atrapadas en una métrica implica la existencia de geodésicas nulas incompletas en el futuro y, por lo tanto, una singularidad de la métrica. Así, una **superficie atrapada** es definida como una superficie compacta y sin borde (cerrada), tal que las dos familias de rayos de luz (geodésicas nulas) que emergen de forma ortogonal de dicha superficie convergen en el futuro están atrapadas.

Nota: Comentar brevemente que los dos conceptos que se introducen en [9]: la noción de superficie atrapada y el uso de las geodésicas nulas incompletas en vez de singularidades son independiente de las coordenadas. Esto era un problema ya que, como las singularidades no pertenecen al espacio-tiempo su definición es complicada. Por ejemplo, definir las como los lugares donde la curvatura se vuelve infinita tiene el problema de que los tensores de curvatura dependen del sistema de coordenadas y si solo se usan invariantes de curvatura aparece el problema de que pueden ser nulos en ciertas singularidades.

Para demostrar la no existencia de superficies atrapadas, en [2], se obtiene la existencia de geodésicas nulas que pasan por cualquier suceso dado (r, t) del interior o exterior del cuerpo estelar, partiendo de $r = 0$, en un intervalo finito de tiempo.

Así, comienza partiendo de la expresión (3.4) para calcular la ecuación de una geodésica nula radial saliente. Haciendo $d\theta = d\varphi = 0$ (ya que se trata de una geodésica radial) y teniendo en cuenta que el elemento de línea de una partícula de tipo luz cumple que $ds^2 = 0$ se obtiene:

$$0 = \left(\frac{r}{R}\right)^3 \left(\frac{dR}{R} - \frac{dr}{r}\right)^2 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 dR^2 \Rightarrow \frac{dR}{R} - \frac{dr}{r} = \left(\frac{R}{r}\right)^{1/2} dR$$

$$\left(\frac{1}{R} - \frac{R^{1/2}}{r^{1/2}}\right) dR = \frac{1}{r} dr \Rightarrow \frac{dr}{dR} = r \left(\frac{1}{R} - \frac{R^{1/2}}{r^{1/2}}\right) = \frac{r}{R} - R^{1/2} r^{1/2}$$

Esta última ecuación es una EDO que tiene la forma de una Ecuación de Bernoulli, cuya solución es de la forma:

$$r(R) = \frac{1}{4}(4c^2 R - 4cR^2 + R^3)$$

donde c es una constante que se fija con las condiciones de contorno.

Ahora, supone que el rayo de luz pasa por el punto $(R, r) = (1, r_1)$ y, sustituyendo, obtenemos:

$$r(1) = r_1 = c^2 - c + 4 = y_1 \Rightarrow c = y_1 \Rightarrow c = \sqrt{r_1} + \frac{1}{2}$$

y sustituyendo y simplificando:

$$r(R) = R \left(\sqrt{r_1} + \frac{1-R}{2} \right)^2 \quad (3.12)$$

Esta ecuación nos da la posición radial r de una partícula situada en un radio comóvil R en el instante en que el radio $R = 1$ se encuentra en la posición radial $r = r_1$. Ahora, tenemos que en $R = 1$, la relación entre t y $r = r_1$ es de la forma (2.23), que es monótonamente creciente como r_1 en función de t . Por tanto, la parte interna de la geodésicas es una función monótona creciente de r respecto de t .

Como la parte externa e interna de la métrica coinciden de forma continua, esta geodésica tendrá que unirse de forma continua con una externa.

Partiendo de la expresión (1.15), siguiendo el mismo proceso obtenemos:

$$\frac{r-1}{r} dt^2 - \frac{r}{r-1} dr^2 = 0 \Rightarrow \frac{dr^2}{dt^2} = \frac{(r-1)^2}{r^2} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{r-1}{r}$$

que tiene como solución:

$$t(r) = r + \ln(r-1) + c$$

Para obtener el valor de la constante c la hacemos pasar por el mismo punto $(R, r) = (1, r_1)$ y con la expresión de (2.23) obtenemos:

$$\begin{cases} t(r_1) = r_1 + \ln(r_1 - 1) + c \\ t(r_1) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}r_1^{3/2} - 2r_1^{1/2} + \ln \frac{r_1^{1/2}+1}{r_1^{1/2}-1} \end{cases}$$

de donde:

$$c = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}r_1^{3/2} - 2r_1^{1/2} + \ln \frac{r_1^{1/2}+1}{r_1^{1/2}-1} - r_1 - \ln(r_1 - 1)$$

y, sustituyendo:

$$t(r) = r + -r_1 + \ln \frac{r-1}{r_1-1} + \frac{2}{3} - \frac{2}{3}r_1^{3/2} - 2r_1^{1/2} + \ln \frac{r_1^{1/2}+1}{r_1^{1/2}-1}$$

Marshall concluye que estas geodésicas conectan causalmente todos los eventos del interior y exterior estelar y que todo evento exterior puede ser alcanzado por un rayo de luz saliendo de $r = 0$ en un intervalo temporal finito. Sin embargo, un detalle a tener en cuenta es que conforme $t \Rightarrow \infty$ la métrica se vuelve infinita entorno a $r = 1$ (se explica en la sección posterior), ralentizando el tiempo y haciendo que la luz saliente presente un redshift cada vez mayor.

Estado finales no colapsado

Una vez obtenida (3.4) para la métrica interna en las coordenadas (r, T) , en el artículo se obtienen las trayectorias de las partículas del interior de la nube durante el colapso.

En la expresión de t en (2.37) se puede ver que, para todo valor de R $t \rightarrow \infty$ conforme aumenta y , hasta llegar al valor asintótico $y \rightarrow 1$. Sustituyendo entonces en la expresión (3.8) se tiene que:

$$1 = \frac{r}{R} - \frac{5}{4} + \frac{3}{2}R - \frac{1}{4}R^2$$

y despejando r :

$$\frac{r}{R} = 1 + \frac{5}{4} - \frac{3}{2}R + \frac{1}{4}R^2 \Rightarrow r = R\left(1 + \frac{5}{4} - \frac{3}{2}R + \frac{1}{4}R^2\right) = \frac{R}{4}(9 - 6R + R^2) = \frac{R}{4}(R - 3)^2$$

Es decir, se plantea que, para una partícula en una posición radial comóvil R , cuando $t \rightarrow \infty$, una partícula en un radio comóvil R tiende a una posición radial r :

$$r_\infty(R) = \frac{R}{4}(R - 3)^2 \quad (3.13)$$

en vez de colapsar hacia $r = 0$. Se puede ver que

$$r_\infty(0) = 0 \quad r_\infty(1) = 1$$

$$0 < r_\infty(R) < 1 \text{ para } 0 < R < 1$$

Esto presuntamente muestra que, asintóticamente, las capas exteriores del cuerpo estelar van encogiéndose, cayendo hasta llegar al r_s y ralentizando progresivamente su caída, hasta su posición radial límite. La capa exterior de $R = 1$ nunca llegará a cruzar R_s en un tiempo t finito, cayendo eternamente hasta dicho límite.

Se propone además que este resultado no solo prueba que no existe el colapso, si no que muestra la acumulación del material del cuerpo estelar entorno al radio de Schwarzschild, $r = 1$. Para ver esto, se toma un radio $R = 2^{-1/3} \sim 0,8$, cuya su posición final sería de $r_\infty \sim 0,97$. Esto, sumado a que la posición final del radio de la nube $R = 1$ sería $r_\infty(1) = 1$ muestra que la mitad de la masa de la nube se deposita en una cáscara entre ambos radios, muy próxima al radio de Schwarzschild.

3.4. Conclusiones del artículo

En las conclusiones del artículo se plantea argumentos para decantarse por alguna de las dos opciones: la solución de Oppenheimer y Snyder o la propuesta en su caso. En su opinión, ambas opciones tienen factores "anti-intuitivos" que podrían llevar, por lógica, a descartarlas.

Por un lado, la solución de Oppenheimer y Snyder plantean problemas como la pérdida de causalidad y la existencia de efectos que preceden a sus causas (cita a Thorne 1994, pags. 414-418).

Por otro, plantea que su solución muestra que se produce una alta concentración de materia entorno al r_s . Por lo tanto, debe haber alguna fuerza que la empuje allí. Como no se ha tenido en cuenta nada fuera del marco gravitatorio, tiene que ser la gravedad. Es decir, este resultado muestra que la gravedad a suficientes altas densidades actúa de forma repulsiva, lo cual también es contra-intuitivo dentro del marco de la Relatividad General.

Se plantea entonces que ambas soluciones carecen de sentido y se necesita un planteamiento alternativo. Si la gravedad fuera un campo, como el electromagnético, en vez de una modificación de la curvatura del espacio tiempo, tendría asociado un tensor de energía-momento cuya densidad de energía podría ser negativa, pudiendo causar la repulsión comentada a altas densidades de materia.

La propuesta alternativa de Marshall es la denominada Teoría Relativista de la Gravitación (RTC). Se trata de una teoría **bimétrica** en la que es el espacio-tiempo está modelado como un espacio-tiempo de Minkowski sobre el que se construye un tensor métrico como un campo tensorial por encima del mismo. En esta teoría, a diferencia de la Relatividad General, existe un sistema de referencia privilegiado, eliminando la ambigüedad de las soluciones al problema.

Para finalizar el artículo se plantea que el cuerpo estelar súper masivo del centro de nuestra galaxia, Sagitario A^* , podría ser un excelente candidato en el que verificar cual de las dos propuestas de soluciones es la correcta. Se propone que el EHT, Event Horizon Telescope, al obtener imagen de una región tan cercana al horizonte como el anillo de fotones, podría detectar rayos de luz salientes de la cascara de masa formada entorno al radio de Schwarzschild del cuerpo.

4. Revisión de la propuesta de T. W. Marshall

En esta última parte del trabajo vamos a hacer una revisión crítica completa del capítulo anterior: planteamientos en contra de la solución de Oppenheimer y Snyder, proceso de obtención de la métrica de Marshall, resultados del artículo y conclusiones.

Así, respecto al desarrollo, en la primera sección planteamos que, si bien, la solución de Marshall es correcta, en tanto cumple las condiciones exigidas en el proceso, no hay ningún argumento técnico que lleve a decantarse por ella frente a la solución de Oppenheimer y Snyder. Además, parece estar construida tratando de hacer la más sencilla modificación de ésta última para permitir la no existencia de superficies atrapadas.

En la segunda sección planteamos que la principal crítica al modelo de Oppenheimer y Snyder, que es la mala interpretación de su resultado y la formación de una estrella congelada en vez de un colapso estelar, se mantiene en su modelo. Sin embargo, defendemos que esto es solo fruto de la elección de coordenadas y que en las coordenadas propias locales de las partículas del cuerpo estelar, el colapso no se detiene en el radio de Schwarzschild.

Por último, exponemos las últimas observaciones de ondas gravitacionales de las colaboraciones LIGO-Virgo-KAGRA y del EHT, para que sirvan como arbitros de las soluciones propuestas.

Para esta sección nos hemos apoyado en el artículo [12].

4.1. Comprobación de la propuesta de Marshall de cambio

A la hora de modificar la solución de Oppenheimer y Snyder, en [2] se plantea cuales son las condiciones que se imponen a la métrica para llegar a dicha solución y de que forma la condicionan cada una de ellas. Así plantea que la forma de la coordenada t de (2.23) y las condiciones de $y(R=1, r) = 1$ y el valor de $\partial y / \partial R$ en $R=1$ quedan fijadas al imponer las condiciones de continuidad a la métrica entre las partes interna y externa y que es la condición adicional de $g^{rt} = 0$ para $R < 1$ termina de fijar la expresión de y en (2.25).

Sin embargo, en el desarrollo seguido en la sección 2.2 muestra lo siguiente:

1. La condición $g_{tr} = 0$ en $R < 1$ se puede ver claramente como la condición (1) que se impone a la métrica, al hacerla diagonal, siguiendo (1.10). Luego se ve aplicada en (2.20) y de esta nos lleva en ambas partes a la ecuación diferencial de la que se obtiene la expresión de $t = M(y)$ y que fija la forma de $y = y(R, r)$, como se puede ver en (2.21) y (2.24). Creemos que esto fija directamente el valor de $y(1, r)$ y $\frac{\partial y}{\partial R}$ en $R=1$, y no la necesidad de la continuidad de las componentes de la métrica, como plantea Marshall.
2. La condición de continuidad en la métrica se aplica en dos pasos:
 - En la obtención de la expresión (2.23) se utilizan los valores de (1.15).

- Para obtener la forma de L en (2.27) se obliga a que las dos expresiones temporales coincidan en $R = 1$. Esto es equivalente a decir que la expresión de $t(R, r)$ en el interior tiene que ser tal que haga continuas las componentes de la métrica.

Es decir, creemos que el planteamiento de como afecta cada condición a la obtención del resultado no sería correcto. Para comprobarlo, hemos tratado de obtener la forma de (2.23) y de (3.8) siguiendo el mismo procedimiento que en la sección 2.2 para la obtención de la métrica de Oppenheimer y Snyder.

En dicha sección, se utiliza la ecuación (2.20) para llegar a la EDP (2.24) de la que obtiene que la solución sigue la expresión $t = L(y)$, con L una función arbitraria e y siguiendo (2.25). Posteriormente L termina fijándose al hacerlo coincidir con (2.23) en $R = 1$.

Así, tomamos la tercera ecuación de (3.9) y sustituimos las expresiones de r' y \dot{r} de (2.30) y (2.31), obteniendo:

$$g^{rt}(r, t) = -\frac{R^{3/2}}{r^{1/2}}\dot{t} - \frac{R}{r}t' = -R\left(1 - \frac{3}{2}\tau\right)^{-1/3}\frac{\partial t}{\partial R} - \left(1 - \frac{3}{2}\tau\right)^{-2/3}\frac{\partial t}{\partial \tau} \quad (4.1)$$

Así expresada, se puede ver que es una ecuación de la forma:

$$\sum_i u^i(x) \frac{\partial F(x)}{\partial x^i} = f(R, \tau)$$

siendo:

$$F(R, \tau) = t(R, \tau) \quad u^R(R, \tau) = -R\left(1 - \frac{3}{2}\tau\right)^{-1/3} \quad u^\tau(R, \tau) = -\left(1 - \frac{3}{2}\tau\right)^{-2/3}$$

$$f(R, \tau) = g^{rt}(r(R, \tau), t(R, \tau))$$

Por tanto, al igual que con la ecuación (2.24) hemos tratado de resolver por el método de las características.

Así, la solución se obtendrá resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\frac{dR}{d\lambda} = -R\left(1 - \frac{3}{2}\tau\right)^{-1/3} \quad (4.2)$$

$$\frac{d\tau}{d\lambda} = -\left(1 - \frac{3}{2}\tau\right)^{-2/3} \quad (4.3)$$

$$\frac{dt}{d\lambda} = g^{rt}(r, t) = f(R, \tau) \quad (4.4)$$

Juntando (4.2) y (4.3) obtenemos:

$$\frac{dR}{d\tau} = \frac{-R(1 - \frac{3}{2}\tau)^{-1/3}}{-(1 - \frac{3}{2}\tau)^{-2/3}} = R(1 - \frac{3}{2}\tau)^{1/3}$$

que, es la misma ecuación a la que llegamos en (2.24), por lo que la solución es:

$$\frac{R^2}{2} + \left(1 - \frac{3}{2}\tau\right)^{2/3} = C \quad (4.5)$$

donde, al igual que en el caso anterior, tomamos $C = 1/2$.

Ahora, a partir de las ecuaciones (4.3) y (4.4) obtenemos:

$$\frac{dt}{dR} = -f(R, \tau)R\left(1 - \frac{3}{2}\tau\right)^{1/3} \quad (4.6)$$

Despejando de la ecuación (4.5) se obtiene:

$$\left(1 - \frac{3}{2}\tau\right)^{2/3} = \frac{1 - R^2}{2} \Rightarrow R = \left[1 - 2\left(1 - \frac{3}{2}\tau\right)^{2/3}\right]^{1/2}$$

y, sustituyendo en la (4.6):

$$\frac{dt}{d\tau} = -f(R, (\tau(R))) \frac{1 - R^2}{2}$$

convirtiendo la ecuación en una EDO separable, que se puede integrar de la forma:

$$\begin{aligned} \int_t^{t_1} dt &= - \int_R^1 f(R, (\tau(R))) \frac{1 - R^2}{2} dR \\ t(R, r) &= t(R = 1, r) + \int_R^1 f(R, (\tau(R))) \frac{1 - R^2}{2} dR = \\ &= t(1, r) + \frac{1}{2} \int_R^1 f(R, (\tau(R))) dR - \frac{1}{2} \int_R^1 f(R, (\tau(R))) R^2 dR \end{aligned}$$

donde $t_0 = t(R = 0, r)$ y $t_1 = t(R = 1, r)$

Así que, mientras que en [2] se propone que eliminar la condición de diagonalidad de la métrica interna permite obtener una solución que mantiene la forma de (2.27) pero dando mayor libertad para escoger el valor de y , que queda fijado en el desarrollo de Oppenheimer y Snyder, se puede ver que se obtiene una expresión para la función $t(r, \tau)$, dependiendo del valor de g^{rt} que no tiene, en principio, grandes similitudes con la de (2.37).

Sin embargo, en [2] se propone mantener la forma de esta última y realizar un pequeño cambio en la función $y(R, r)$. Si bien, se puede ver que esta última propuesta es una solución de la ecuación (4.1), que cumple las condiciones que se buscaban y que permite obtener una métrica con la forma (3.11) no encontramos mayores indicios para llevar a ésta más que tratar de hacer una la más pequeña modificación posible a la solución de de Oppenheimer y Snyder que no presente superficies atrapadas.

De hecho, la solución planteada en [7] que produce una métrica diagonal es una solución igualmente válida de (4.1) y no habría ningún punto del procedimiento seguido en [2] que permitiera decantarse por una o por otra, más que la mera elección personal para la búsqueda de una conclusión satisfactoria.

De hecho, un principio muy extendido en física es el de la navaja de Ockham, que plantea que "*en igualdad de condiciones, la solución más simple suele ser la más probable*". Si se observan las dos métricas obtenidas: (2.36) y (3.11) se puede ver una clara diferencia de simplicidad de la primera frente a la segunda. Así que, en principio, no encontraríamos ningún motivo técnico para decantar una frente a la otra, favoreciendo la primera por su mayor simplicidad.

4.2. Estado final de estrella congelada como fruto del sistema de coordenadas

El primer planteamiento en contra del artículo de [7] no es en contra de la solución obtenida para la métrica (2.36), sino de las conclusiones que se derivan de ella. Así, como hemos comentado al inicio del capítulo (3), en [3] se plantea que la solución de (2.36) no muestra que el cuerpo estelar colapse hasta la formación de un agujero negro, sino que todas las partículas tienden a una posición radial asintótica en (3.2), formando un estado estacionario final, en el que la densidad de materia tiende a aumentar entorno al radio de Schwarzschild.

De hecho, su solución métrica (3.11) presenta una conclusión idéntica, salvo que la posición radial asintótica de las partículas es (3.13).

Sin embargo, nosotros planteamos, apoyándonos en [12], que dicha acumulación de materia no es tal y que las posiciones radiales asintóticas solo son un efecto de la elección de coordenadas.

El estudio del colapso en las coordenadas (r, t) , muestra lo que observaría un observador alejado del cuerpo estelar (ya que t tiende asintóticamente al tiempo del observador y el espacio asintóticamente a ser plano). Y esto es que al describirlo en el tiempo t exterior, la superficie se congela cayendo de forma asintótica justo en el r_S para un observador externo y objeto colapsado se presenta como una estrella congelada. Es decir, el sistema de coordenadas (r, t) no es un sistema completo de coordenadas que cubra toda la variedad (a diferencia de las coordenadas de Kruskal–Szekeres, que conforman una extensión máxima de la métrica de Schwarzschild) y no es apropiado para estudiar la trayectoria de las partículas, que tienen que serlo en su tiempo propio.

Por otro lado, en [2] se plantea que las posiciones radiales asintóticas de las partículas se acumulan entorno a $r = 1$, a la posición del radio de Schwarzschild. Sin embargo, observando las geodésicas radiales seguidas por las partículas del interior se puede ver que las asíntotas de las capas interiores son prácticamente equidistantes, ya que $r_\infty(R) \sim R$ en la mayoría de la región central. Solo las capas inicialmente cercanas a la superficie se vuelven más densas, pero eso es debido su congelación más tardía y a su mayor contracción espacial. En coordenadas comóviles, sin embargo, la caída libre se mantiene de forma homogénea.

Otro punto clave para nosotros es que la métrica de Oppenheimer y Snyder si presenta superficies atrapadas y, por tanto, según el Teorema de Penrose, existe una singularidad. Pero, al mismo tiempo, en las coordenadas (r, t) muestra un "presunto" estado final de estrella congelada. Si bien, la solución de Marshall, al no presentar las superficies atrapadas, podría no tener singularidad y el estado final de estrella congelada sería plausible, consideremos que no tiene sentido en el primer caso. Como la existencia de las superficies atrapadas no depende del sistema de coordenadas escogido, esto refuerza nuevamente que el estado final de estrella congelada es solo un artificio del sistema de coordenadas escogido.

4.3. Comprobaciones observacionales

En la conclusión de [2] se plantea que el cuerpo supermasivo del centro de nuestra galaxia, Sagitario A^* podría ser un buen test para evaluar esta propuesta de solución y cualquier otro modelo de agujero negro planteado hasta la fecha. Se propone que el EHT (Event Horizon Telescope), tendría visión de las capas exteriores más cercanas al radio de Schwarzschild del objeto, teniendo visión de su esfera de fotones por lo, por lo que se podrían ver potenciales rayos de luz que salgan del mismo.

Hasta la fecha de publicación de este artículo, no se habían obtenido detecciones directas de cuerpos masivos compatibles con los modelos de agujeros negros, no encontrando confirmaciones experimentales que apoyaran o descartaran las teorías anteriores. Sin embargo, el 11 de febrero de 2016, la Colaboración LIGO y Virgo anunciaron la primera de detección de una onda gravitacional compatible con la fusión de dos agujeros negros, cuyo desarrollo se puede ver en la Figura 4.1.

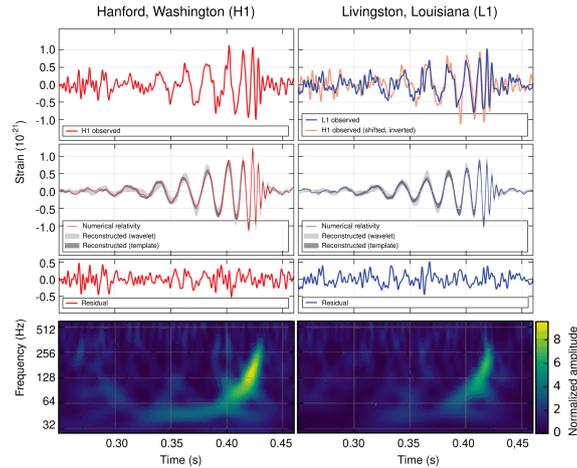


Figura 4.1: De B. P. Abbott et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration) <http://physics.aps.org/featured-article-pdf/10.1103/PhysRevLett.116.061102> .

Además, el 10 de abril de 2019, el Event Horizon Telescope (EHT) obtuvo una imagen del cuerpo masivo que ocupa el centro de la galaxia Messier 87, que se puede ver en la primera imagen de la Figura 4.2.



Figura 4.2: Creditos a la EHT Collaboration <https://eventhorizontelescope.org/press-release-april-10-2019-astronomers-capture-first-image-black-hole> y <https://eventhorizontelescope.org/blog/astronomers-image-magnetic-fields-edge-m87s-black-h>

Estas observaciones solo fueron las iniciales. La colaboración LIGO-Virgo-KAGRA de interferómetros ha detectado hasta la fecha más de 80 ondas gravitacionales compatibles con la fusión de dos agujeros negros. Además, el EHT ha obtenido imágenes de Sagitario A^* , el cuerpo supermasivo del centro de nuestra galaxia, que son compatibles con un agujero negro supermasivo. Es decir, cada vez más observaciones de cuerpos compatibles con los modelos de agujeros negros son obtenidas, robusteciendo sus respectivas soluciones teóricas.

4.4. Conclusiones

Tras el estudio detallado de los artículos [7] y [2] planteamos las siguientes conclusiones:

- Con respecto a la acumulación de materia, ambas soluciones muestran el mismo comportamiento de estrella congelada en las coordenadas (r, t) . Pero creemos, si bien, esta es la imagen que un observador distante apreciaría, es fruto de la elección del sistema de coordenadas. Así, un observador local atravesaría el radio de Schwarzschilden un tiempo propio finito y caería libremente hasta el centro del cuerpo estelar.
- Con respecto a la solución de Marshall no encontramos razonamientos plausibles que lleven a ella más que la búsqueda de la no obtención de superficies atrapadas. Y para ello, se obtiene una solución métrica con una complejidad muy superior a la de Oppenheimer y Snyder.
- Con respecto a las comprobaciones observacionales,

Si bien creemos que las propuestas alternativas y rupturistas con el status-quo asentado en un campo son necesarias para el avance de la ciencia y que deben ser tenidas en consideración y estudiadas, creemos que la propuesta de Marshall se apoya en problemas de la teoría para los que ya han sido planteadas soluciones.

Además, la solución de Oppenheimer y Snyder para una estrella de polvo esférica y homogénea se ha usado para testar los casos límites de modelos más realistas. Hay muchas publicaciones analizándola y aplicándola y varias generalizaciones a casos no tan simétricos. Por tanto, valiéndonos de la expresión de Carl Sagan: "afirmaciones extraordinarias requieren evidencias extraordinarias", para que una propuesta rupturista frente a una teoría tan asentada como la anterior, tiene que poder apoyarse de forma firme y creemos que esta no lo hace.

Además, también creemos que la propuesta de Marshall tiene el problema de estar construida ad hoc, para poder plantear argumentos que sustenten su defensa de la Teoría Relativista de la Gravitación. Así, si bien puede plantear dudas razonables, creemos que elecciones están sesgadas en ese sentido, dándonos algo menos de peso para decantarnos por ellas.

Por último, cada día más, las observaciones se muestran compatibles con los modelos propuestos para la existencia de agujeros negro, siendo éstas las juezas finales de toda teoría física.

Bibliografía

- [1] Carroll, S. *Spacetime and Geometry, An Introduction to General Relativity*. Addison Wesley, 2004.
- [2] Marshall, T. W. «Gravitational Collapse Without Black Holes». En: *Astrophysics and Space Science* 342 (2012), págs. 329-332.
- [3] Marshall, T. W. «Gravitational Waves versus Black Holes». En: *arXiv* (2007).
- [4] Marshall, T. W. «The Gravitational Collapse of a Dust Ball». En: *arXiv* (2009).
- [5] Marshall, T. W. y Wallis, M. K. «Stellar Collapse in Field Theories of Gravitation». En: *Journal of Cosmology* 6 (2010), págs. 1473-1484.
- [6] O’Neill, B. *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*. Academic Press, 21983.
- [7] Oppenheimer, J. R. y Snyder, H. «On Continued Gravitational Contraction». En: *Physical Review* 56.455 (1939).
- [8] Oppenheimer, J. R. y Volkoff, G. M. «On Massive Neutron Cores». En: *Physical Review* 55.374 (1939).
- [9] Penrose, R. «Gravitational Collapse and Space-Time Singularities». En: *Physical Review Letters* 14.3 (1965), págs. 57-59.
- [10] Tolman, R. C. «Effect of Inhomogeneity on Cosmological Models». En: *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 20.3 (1934), págs. 169-176.
- [11] Tolman, R. C. *Relativity, Thermodynamics and Cosmology*. Oxford University Press, 1934.
- [12] Zakir, Z. «On the Consistency of the Oppenheimer-Snyder Solution for a Dust Star. Reply to Marshall’s Criticism». En: *Astrophys and Space Science* 363.30 (2018), págs. 1473-1484.