



Sobre el teorema de singularidad de Penrose
(About Penrose singularity theorem)

Javier García Arias

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al
Grado en Física
FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Director: Diego Herranz Muñoz
Codirector: Pablo Gómez Nicolás
Septiembre - 2024

ABSTRACT. This final degree project aims to review and analyze the theory of singularities in space-time, focusing on the detailed study of Penrose's singularity theorem. It will begin with a review of the fundamental concepts and results of differential geometry in the context of general relativity, necessary to understand curvature and singularities. Subsequently, a detailed demonstration of Penrose's theorem will be addressed, exploring in depth the conditions under which the formation of singularities is inevitable during gravitational collapse. Through the analysis of various situations, the appearance of these singularities will be mathematically verified. Finally, the theorem will be contextualized in relation to Penrose's first publication in 1965, highlighting its impact on the modern understanding of general relativity and astrophysics.

Key words: singularity theorem, geodesic completeness, strong energy condition, Cauchy hypersurface, achronal sets.

RESUMEN. Este trabajo de fin de grado tiene como objetivo revisar y analizar la teoría de las singularidades en el espacio-tiempo, centrándose en el estudio detallado del teorema de singularidad de Penrose. Se iniciará con una revisión de los conceptos y resultados fundamentales de geometría diferencial en el contexto de la relatividad general, necesarios para comprender la curvatura y las singularidades. Posteriormente, se abordará una demostración detallada del teorema de Penrose, explorando en profundidad las condiciones bajo las cuales la formación de singularidades es inevitable durante el colapso gravitatorio. A través del análisis de diversas situaciones, se comprobará matemáticamente la aparición de estas singularidades. Finalmente, se contextualizará el teorema en relación con la primera publicación de Penrose en 1965, subrayando su impacto en la comprensión moderna de la relatividad general y la astrofísica.

Palabras clave: teorema de singularidad, completitud geodésica, condición de energía fuerte, hipersuperficie de Cauchy, conjuntos acronales.

AGRADECIMIENTOS. Gracias a Luis Miguel Pardo por permitirme utilizar su tan característica plantilla de LaTeX.

Índice

Capítulo 1. Introducción y resumen de contenidos	1
Capítulo 2. Variedades diferenciables semi-Riemannianas	5
2.1. Variedades diferenciables, funciones y aplicaciones diferenciables	6
2.2. Espacio tangente y aplicación diferencial	7
2.3. Curvas en variedades	9
2.4. Campos vectoriales, 1-formas y tensores	9
2.5. Curvas integrales y completitud	10
2.6. El tensor métrico	12
2.7. Conexiones, geodésicas y transporte paralelo	13
2.8. La aplicación exponencial	15
2.9. Curvatura	16
2.10. Geometría de Lorentz	18
2.10.1. Carácter causal en variedades de Lorentz	18
2.10.2. Conos y orientabilidad temporal	19
2.10.3. Longitud de arco en variedades de Lorentz	20
2.10.4. Geometría local en variedades de Lorentz	21
2.10.5. Completitud en variedades de Lorentz	21
2.11. Condición fuerte sobre la energía	21
Capítulo 3. Causalidad en variedades de Lorentz	23
3.1. Relaciones de causalidad en una variedad	23
3.2. Quasi-límite de curvas causales	27
3.3. Condiciones de causalidad	28
3.4. Separación temporal	31
3.5. Conjuntos acronales	34
3.6. Hipersuperficies de Cauchy	37
3.7. Desarrollos de Cauchy	39
3.8. Teorema de singularidad de Penrose	42
Capítulo 4. Discusión y conclusiones	47
4.1. Discusión	47
4.2. Conclusiones	49
Bibliografía	51
Apéndice A. Prueba de algún resultado auxiliar	53

Introducción y resumen de contenidos

En el año 1965, la relatividad general experimentó un gran resurgimiento debido a dos hitos significativos. Por una parte, el descubrimiento de la radiación cósmica de fondo por A. Penzias y R. W. Wilson ([[PenzWil, 1965](#)]) y, por otra, la publicación del teorema de singularidad de R. Penrose ([[Penrose, 1965](#)]), donde quedaría probada la posibilidad de formación de agujeros negros en estrellas no idealizadas. Aunque anteriormente ya se habían publicado otros teoremas de singularidad, fue el de Penrose el que estableció definitivamente las bases y herramientas matemáticas fundamentales en el estudio de estos fenómenos, conduciendo más adelante a importantes consecuencias físicas en relación con el origen del Universo y el colapso de estrellas masivas. Su relevancia fue tal que su autor, Roger Penrose, fue galardonado con el Premio Nobel de Física en el año 2020. Pongamos en contexto la aparición de dicho resultado siguiendo como referencia [[Senovilla, 2015](#)]

Antes de la década de los cincuenta, ya se advirtió la existencia de singularidades en las soluciones a las ecuaciones de Einstein. No obstante, la asunción de demasiadas simetrías para la obtención de dichas soluciones provocaba un rechazo generalizado a asumir la existencia física de singularidades. Un ejemplo es la solución matemática de Schwarzschild ([[Schwarzschild, 1916](#)]) en distribuciones de masa esférica, la cual presentaba singularidades para $r = 0$ y para el radio de Schwarzschild, $r_s = 2GM/c^2$. Aunque algunos trabajos ya indicaban que la singularidad en r_s podía ser evitada mediante un cambio de coordenadas (véase [[Eddington, 1924](#)] y [[Lemaître, 1933](#)]), no ocurría lo mismo para la singularidad en $r = 0$. Este hecho llevó a los físicos de entonces a preguntarse qué es lo que verdaderamente era una singularidad desde el punto de vista matemático y cuál era su interpretación física.

Por otra parte, alrededor de la década de los treinta, gracias al desarrollo de la mecánica cuántica y su aplicación a los gases, se sabía que una estrella de cierta masa y radio que había agotado su combustible nuclear iba reduciendo su tamaño progresivamente manteniendo la masa relativamente constante. Por aquel entonces, se conocía que había dos configuraciones posibles en función de la masa de la estrella al inicio del colapso. Una de ellas era que se formara una enana blanca, para lo cual S. Chandrasekhar ([[Chan, 1931](#)]) estableció un límite de 1,44 veces la masa del Sol para la masa de la estrella. La otra era que se originase una estrella de neutrones estable, para lo cual J. R. Oppenheimer y G. M. Volkoff ([[OppenVolkoff, 1939](#)]) hallaron un límite entonces en torno a las 0,7 masas solares. En el año 1939, J. R. Oppenheimer y H. S. Snyder concluyeron en su publicación [[OppenSnyder, 1939](#)] que para estrellas de neutrones de mayor masa la presión gravitacional terminaba por producir un colapso gravitacional. La solución matemática a la que llegaron dejaba entrever que la contracción se mantenía, sin ninguna consecuencia al pasar por r_s , hasta llegar a una singularidad en $r = 0$. En este punto la densidad se hacía infinita y en él quedaba concentrada toda la materia de la estrella.

A pesar de los resultados, entre los físicos seguía habiendo mucha controversia en cuanto a la credibilidad de las ecuaciones debido a la presencia de infinitos. Un grupo de investigadores llegó incluso a defender la idea de que la relatividad general fallaba dentro de estos puntos problemáticos y que era la mecánica cuántica la que impedía que la densidad se hiciera infinita dentro del agujero negro. Otro grupo, consideraban que las idealizaciones extremas del modelo de Oppenheimer-Snyder (entre ellas, que la estrella fuera esférica, sin rotación y que no hubiese materia expulsada ni radiación emitida), eran las causantes

de que se formase la singularidad.

No obstante, en el año 1955 A. K. Raychaudhuri ([[Raychad, 1955](#)]) obtuvo un primer teorema de singularidad cuya hipótesis clave sería la condición fuerte para la energía sobre el tensor de curvatura y con la que concluía, para una distribución de polvo irrotacional, que la densidad tendía a infinito nuevamente. Aunque Raychaudhuri ([[Raychad, 1957](#)]) junto con A. Komar ([[Komar, 1956](#)]) generalizaron el teorema al caso de un fluido ideal, no consiguieron probar la existencia de singularidad en $r = 0$ en la geometría de Schwarzschild. Se pensaba que una solución con rotación para una estrella podría ser suficiente para eludir la formación de singularidades y, de hecho, R. P. Kerr ([[Kerr, 1963](#)]) obtendría en 1963 una solución exacta de las ecuaciones de campo de Einstein para una distribución de masa esférica en rotación.

Como las singularidades no pertenecen al espacio-tiempo, su definición era complicada, pues si se establecían como aquellos puntos en que el tensor de curvatura de Riemann se vuelve infinito, el problema aparece con la dependencia de dicho tensor respecto del sistema de referencia elegido; y si, por otro lado, solo se consideran invariantes de curvatura, resultaba que estos eran nulos en según qué singularidades. La idea genial de Penrose en 1965 fue evitar la definición formal de singularidad recurriendo a geodésicas incompletas hacia el futuro, las cuales son geodésicas que no se prolongan de forma indefinida, sino que llega un punto en que acaban de forma abrupta. Esto se interpretaría con el hecho de haber alcanzado una singularidad del espacio-tiempo.

Uno de los conceptos más novedosos en el teorema de Penrose es el de superficie cerrada atrapada en el futuro, sustituyendo así los horizontes de sucesos, es decir, aquellos donde la velocidad de escape newtoniana coincide con la velocidad de la luz en el vacío. Aunque se definirán con rigor más adelante, las superficies atrapadas serán aquellas regiones tal que las dos familias de rayos de luz que emergen de forma ortogonal de dicha superficie convergen en el futuro, es decir, en cierto modo están “atrapadas”. La principal fortaleza que supone trabajar con superficies atrapadas es que son independientes de las coordenadas y de la existencia de simetrías (como pueden ser la simetría esférica en la solución de Schwarzschild o la simetría axial en la solución de Kerr). Por contrapartida, la gran desventaja de los teoremas de singularidad vendrá del hecho que ofrecen poca información sobre la naturaleza de las singularidades. A pesar de ello, el teorema de singularidad de Penrose tuvo una enorme repercusión entre la comunidad de físicos trabajando en relatividad general. Ya en el año 1966, dicho teorema llevó a S. W. Hawking a probar la existencia de singularidades en cosmología (véase los tres artículos [[Hawking, 1966\(1\)](#)], [[Hawking, 1966\(2\)](#)] y [[Hawking, 1967](#)]), estableciendo junto con el teorema de Penrose el marco teórico esencial del que partirían los trabajos sobre singularidades posteriores.

El objetivo de este TFG será ofrecer una prueba rigurosa del teorema de singularidad de Penrose lo más autocontenida posible y haciendo uso de herramientas que nos proporcionan la geometría diferencial y topología. Aunque se darán por sabidas muchas nociones previas de estas dos ramas de las matemáticas, se buscará, en la medida de lo posible, la completitud del trabajo mediante notas a pie de página y otras explicaciones para cubrir cualquier laguna que pudiera tener el lector. Por tanto, parte del propósito del trabajo pasa por hacer accesible a un graduado en Física o Matemáticas, una demostración detallada del teorema de Penrose.

El trabajo se ha dividido en tres capítulos unido al presente capítulo introductorio. En primer lugar, en el Capítulo 2 se establecen los resultados y conceptos fundamentales en geometría diferencial enmarcadas en el contexto de la relatividad general. Se comienza dando una definición detallada de la noción de variedad diferencial y, a partir de aquí, como es habitual en estos casos, se introducen los conceptos de campos vectoriales, tensores, conexiones, curvaturas, etc. Al final del capítulo, y en aras de enfocarnos hacia el teorema de singularidad de Penrose, se ofrece una discusión sobre los principales resultados en

variedades de Lorentz, los cuales nos permitirán más tarde trabajar con espacios-tiempos. Más en concreto, se tratarán el carácter causal y la orientabilidad temporal características de este tipo de variedades así como la completitud geodésica, de gran importancia para trabajar luego el concepto de singularidad. El capítulo concluirá con una breve interpretación física de la condición de energía fuerte sobre el tensor de Ricci.

El Capítulo 3 será la piedra angular del proyecto. Primero y para poder realizar las pruebas posteriores, se comienza por establecer la estructura topológica causal de las variedades de Lorentz y el quasi-límite de curvas (Secciones 3.1 y 3.2). Posteriormente, se definirán distintas condiciones de causalidad en variedades (Sección 3.3) y cómo se relacionan dichas condiciones con la separación temporal (Sección 3.4). Aparecerá entonces la propiedad de ser globalmente hiperbólico para una variedad o un subconjunto de esta. Por otra parte, se definen y caracterizan en la Sección 3.5 los conjuntos acronales. Se terminará viendo (Secciones 3.6 y 3.7) que un caso particular de conjuntos acronales, las hipersuperficies de Cauchy, hacen que el espacio-tiempo que las contiene sea globalmente hiperbólico. Esto tendrá especial relevancia en la prueba final del teorema de Penrose (Sección 3.8).

Finalmente, en el Capítulo 4 de Discusión y conclusiones se aplicará el teorema a un caso sencillo, se interpretará el diagrama del artículo original de Penrose y se comentarán brevemente las implicaciones del mismo. Se cerrará el capítulo y el trabajo con una conclusión concisa.

Aunque la demostración del teorema de singularidad de Penrose que se presenta en este trabajo se basa en resultados y metodologías ampliamente documentados en la literatura, el desarrollo aquí realizado es íntegramente original. Se han completado los detalles que suelen omitirse en los textos convencionales y se he llevado a cabo una comparación entre múltiples referencias, destacando [O'Neill, 1983]. Esto ha permitido ofrecer una presentación más exhaustiva y clara del teorema, aportando una perspectiva única y enfatizando aspectos que el autor considera cruciales para su comprensión completa. Cabe mencionar que todas las figuras que aparecen en el texto son de elaboración propia, a no ser que se especifique lo contrario.

Variedades diferenciables semi-Riemannianas

Índice

2.1.	Variedades diferenciables, funciones y aplicaciones diferenciables	6
2.2.	Espacio tangente y aplicación diferencial	7
2.3.	Curvas en variedades	9
2.4.	Campos vectoriales, 1-formas y tensores	9
2.5.	Curvas integrales y completitud	10
2.6.	El tensor métrico	12
2.7.	Conexiones, geodésicas y transporte paralelo	13
2.8.	La aplicación exponencial	15
2.9.	Curvatura	16
2.10.	Geometría de Lorentz	18
2.10.1.	Carácter causal en variedades de Lorentz	18
2.10.2.	Conos y orientabilidad temporal	19
2.10.3.	Longitud de arco en variedades de Lorentz	20
2.10.4.	Geometría local en variedades de Lorentz	21
2.10.5.	Completitud en variedades de Lorentz	21
2.11.	Condición fuerte sobre la energía	21

En el año 1905, Einstein había formulado la relatividad especial y, a pesar del éxito en la explicación de fenómenos electromagnéticos y dinámicos a velocidades cercanas a las de la luz, presentaba serias limitaciones a la hora de conciliarla con la teoría de la gravitación de Newton. La formulación de Newton de la gravedad como una fuerza atractiva entre dos cuerpos implica que esta fuerza actúa de manera instantánea, sin ningún retraso temporal, independientemente de la distancia que separe a los dos cuerpos. Ello entraba en conflicto rotundo con uno de los postulados fundamentales de la relatividad especial que establecía que ninguna señal, fuerza o influencia puede propagarse más rápido que la velocidad de la luz en el vacío. De esta manera, en su intento por dar cabida a la gravitación dentro de la relatividad, Einstein se topa con una idea clave que desembocaría en el nacimiento de la Relatividad General: el Principio de Equivalencia. Este principio establecía que los efectos de la aceleración y los efectos de un campo gravitacional uniforme son localmente indistinguibles. Sin embargo, no sucedía lo mismo globalmente.

Este hecho llevó a que Einstein comprendiera que la gravedad podría no ser una fuerza en el sentido tradicional, sino un efecto de la curvatura del espacio-tiempo. Para describir matemáticamente esta visión del espacio se utilizó el concepto de variedad diferenciable. Esta noción matemática, objeto de estudio de la geometría diferencial, fue ampliamente desarrollada por Bernhard Riemann, cuyo trabajo permitió describir la noción curvatura de forma intrínseca en un espacio de múltiples dimensiones.

Más adelante, la credibilidad relatividad general y, en particular, la geometría diferencial se vería reforzada la explicación satisfactoria que daba a fenómenos que no eran explicados adecuadamente con la física clásica. Un ejemplo es el problema de la precesión anómala del perihelio de Mercurio o la predicción de la desviación de la luz por la gravedad. Más aún, y en beneficio de este trabajo, este marco matemático proporcionó las herramientas necesarias para explorar el concepto de singularidad y los agujeros negros.

Por ello, no es de extrañar que comencemos este TFG introduciendo una carga significativa de conceptos relativos a esta rama de las matemáticas. Y es que es gracias a esta formulación, que se ha llegado a resultados profundos sobre la comprensión del universo, los cuales hubiesen sido imposibles de alcanzar partiendo únicamente de “intuiciones físicas”. Tal es el caso del teorema de singularidad de Penrose.

El estilo seguido en esta parte del trabajo consistirá en una exposición, sin prueba, de una serie de resultados teóricos esenciales en geometría semi-riemanniana. Se sigue, en la medida de lo posible, un hilo conductor que nos permita, primero, entender de forma más o menos intuitiva los conceptos abstractos subyacentes y, segundo, trabajar posteriormente y con más detalle otros resultados que incidirán directamente en la prueba del teorema de singularidad de Penrose. Para la confección del presente capítulo se han seguido múltiples referencias entre las que se encuentran: [O’Neill, 1983], [Hobson, 2006], [Etayo, 2024], [Rivera, 2020] y [Munkres, 2002].

2.1. Variedades diferenciables, funciones y aplicaciones diferenciables

A grandes rasgos, una variedad diferenciable es un espacio u objeto en el que, al acercarnos y fijarnos en las cercanías de un único punto, se parece al espacio euclídeo \mathbb{R}^n pero que al observarlo en conjunto, de forma global, dicho parecido se pierde. Además, la característica de ser diferenciable es la que nos va a permitir extender todo el cálculo que usualmente se realiza en el espacio euclídeo a nuestra variedad. Ahora bien, para poder trabajar con variedades será preciso introducir una serie de conceptos previos.

Tomemos como punto de partida un espacio topológico¹ M y dotémoslo de estructura de variedad diferenciable. En primer lugar, una *carta* o *sistema de coordenadas* en M será un homeomorfismo² ξ desde un conjunto abierto $U \subseteq M$ a un abierto $\xi(U)$ de \mathbb{R}^n ,

$$\begin{aligned} \xi : U &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ p &\longmapsto \xi(p) := (x^1(p), \dots, x^n(p)), \end{aligned}$$

donde las funciones componente $x^i : U \rightarrow \mathbb{R}$ se denominan *funciones coordenadas de ξ* . Llamaremos dimensión del sistema de coordenadas ξ al número n , y si denotamos por $u^i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a las funciones coordenadas de \mathbb{R}^n (esto es, $u^i(p_1, \dots, p_n) = p_i$) se tiene naturalmente $u^i \circ \xi = x^i$.

Dados dos sistemas de coordenadas en M de dimensión n , $\xi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\eta : V \rightarrow \mathbb{R}^n$, tales que sus dominios U y V tienen intersección no vacía, se dice que ξ y η son *compatibles* si

$$\xi \circ \eta^{-1} : \eta(U \cap V) \longrightarrow \xi(U \cap V), \quad \eta \circ \xi^{-1} : \xi(U \cap V) \longrightarrow \eta(U \cap V),$$

son aplicaciones diferenciables entre abiertos $\xi(U \cap V)$ y $\eta(U \cap V)$ del espacio euclídeo \mathbb{R}^n . A este fenómeno se lo conoce comúnmente como *cambio de coordenadas*. Se llama atlas sobre M de dimensión n a una colección de sistemas de coordenadas, $\mathcal{A} = \{\xi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n\}_{i \in I}$, de forma que cualquier punto p de M esté en algún dominio U_i y para cualesquiera $i, j \in I$ con $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, los sistemas de coordenadas ξ_i y ξ_j sean compatibles. Aun así, para un mismo espacio topológico M pueden existir diversas estructuras de variedad diferenciable, según el atlas utilizado. Por ello, es importante comentar, aunque sin probarse, que todo atlas \mathcal{A} estará contenido en un único atlas completo o maximal, $\overline{\mathcal{A}}$, es decir, uno que no se puede incluir en otro mayor con un número mayor de cartas. Por lo tanto, será este atlas completo el

¹Un *espacio topológico* es una estructura matemática que generaliza la idea de proximidad o continuidad. Consiste en un conjunto de puntos, junto con una colección de subconjuntos llamados *abiertos*, que cumplen ciertas propiedades que nos permitirán definir los conceptos de continuidad y convergencia entre otros. Sea X un espacio topológico y U uno de estos subconjuntos abiertos, si $p \in U$ se dice que U es un *entorno abierto* de p . Una propiedad de los abiertos es que para todo $p \in U$, existe otro abierto $V \subseteq U$ tal que $p \in V$. Además, para todo punto de X existirá algún abierto que lo contiene. Los complementarios de los subconjuntos abiertos se denominan *cerrados*, es decir, si U es abierto, $F = X \setminus U$ es un conjunto cerrado. El ejemplo habitual de espacio topológico es \mathbb{R} donde los conjuntos abiertos serán los intervalos del tipo (a, b) con $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

²Sean X e Y espacios topológicos, una aplicación $f : X \rightarrow Y$ se dice que es *continua* si para cada subconjunto abierto V de Y , $f^{-1}(V)$ es abierto en X . Se dirá que f es un *homeomorfismo* si, además, f es biyectiva y la aplicación inversa f^{-1} es continua.

que determine la estructura diferenciable sobre M . En este punto, podemos dar la siguiente definición de variedad diferenciable:

DEFINICIÓN 2.1.1 (Variedad diferenciable). Una *variedad diferenciable* M es un espacio topológico dotado de un atlas maximal.

La dimensión de la variedad M será la del atlas maximal $\overline{\mathcal{A}}$ del que está provisto y un sistema de coordenadas en M es cualquiera que pertenezca a $\overline{\mathcal{A}}$. Si un punto p de M está en U , dominio de un sistema de coordenadas ξ , diremos que U es *entorno coordinado de p* . Además, para cualquier abierto $V \subseteq U$ tendremos que $\xi|_V$ es también un sistema coordinado de M . Es por este último hecho que para cualquier abierto U de M , si consideramos el atlas \mathcal{A}' formado por las restricciones a U de las cartas de \mathcal{A} en M , U tendrá estructura de variedad y lo denominaremos subvariedad abierta de M . No obstante, tendremos que esperar algunas páginas más para definir con detalle el concepto de subvariedad.

Para establecer el aparato técnico necesario que hace posible el cálculo en variedades se extienden las nociones usuales ya establecidas en el espacio euclídeo a M usando los sistemas de coordenadas. Comencemos viendo el caso de funciones f de una variedad diferenciable M en \mathbb{R} . Para un sistema coordinado ξ , tendremos que la expresión coordinada de f en términos de ξ , esto es,

$$f \circ \xi^{-1} : \xi(U) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},$$

es una función de un abierto de \mathbb{R}^n en \mathbb{R} . Diremos, por tanto, que la función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ es *diferenciable en un punto p* de M si para cualquier entorno coordinado U de p , la expresión coordinada $f \circ \xi^{-1}$ es diferenciable en $\xi(p)$ en el sentido usual de \mathbb{R}^n . Así pues, f es *diferenciable* si lo es para todo punto de la variedad. Al conjunto de las funciones reales sobre una variedad diferenciable M lo denotaremos por $\mathfrak{F}(M)$.

De forma similar, podremos definir la diferenciable de aplicaciones entre variedades usando la misma idea de “descender” por medio de los sistemas de coordenadas al espacio euclídeo correspondiente. Así pues, sean dos variedades diferenciables M y N , de dimensiones m y n , respectivamente. Una aplicación $\phi : M \rightarrow N$ es *diferenciable en un punto p* de M si para cualesquiera sistemas coordinados ξ de M y η de N , cuyos dominios U y V contengan a p y $\phi(p)$, respectivamente, la siguiente aplicación

$$\eta \circ \phi \circ \xi^{-1} : \xi(U) \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \eta(V) \subseteq \mathbb{R}^n,$$

es una aplicación diferenciable en el punto $\xi(p) \in \mathbb{R}^m$.

En particular, aquellas aplicaciones diferenciables $\phi : M \rightarrow N$ entre variedades que sean biyectivas y posean inversa ϕ^{-1} también diferenciable se conocen, como se puede intuir, con el nombre de *difeomorfismo*, extendiendo nuevamente dicha noción que ya existía en el sentido de espacios euclídeos. La teoría de variedades diferenciables se encarga de estudiar aquellas propiedades de las variedades que permanecen invariantes por difeomorfismos por lo que, desde este punto de vista, variedades difeomorfas serán idénticas. No obstante, destacar que en otras ramas que “hilan más fino”, como la geometría riemanniana, no tendremos esta equivalencia.

2.2. Espacio tangente y aplicación diferencial

Un paso crucial en la generalización del cálculo desde \mathbb{R}^n a una variedad arbitraria es la siguiente definición, que en cierta manera generaliza el concepto de derivada direccional que teníamos para aplicaciones entre espacios euclídeos.

DEFINICIÓN 2.2.1 (Vector tangente). Sea p un punto de una variedad diferenciable M . Un *vector tangente* de M en p es una función real $v : \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ verificando:

- i) Es \mathbb{R} -lineal, es decir, $v(af + bg) = av(f) + bv(g)$ para cualesquiera $f, g \in \mathfrak{F}(M)$, $a, b \in \mathbb{R}$.
- ii) Cumple la ley de Leibniz: $v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$ para cualesquiera $f, g \in \mathfrak{F}(M)$.

Al conjunto de vectores tangentes a M en p lo llamaremos *espacio tangente* de M en p y lo denotaremos por T_pM . Las operaciones usuales de adición de vectores y de multiplicación por un escalar, es decir,

$$(2.2.1) \quad \begin{aligned} (v+w)(f) &= v(f) + w(f), \\ (\lambda v)(f) &= \lambda v(f), \end{aligned}$$

hacen de T_pM un espacio vectorial sobre \mathbb{R} . También se puede considerar el conjunto formado por la unión de todos los espacios tangentes a M , $TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$ denominado *fibrado tangente* de la variedad. El fibrado TM también tendrá estructura de variedad diferenciable con dimensión el doble de la de M .

Siguiendo la tónica general de la sección definimos ahora las derivadas parciales de una función real f definida sobre una variedad M bajando a través de las cartas al espacio euclídeo:

DEFINICIÓN 2.2.2. Sea $\xi = (x^1, \dots, x^n)$ un sistema de coordenadas de M con dominio U . Si $f \in \mathfrak{F}(U)$, se llama *derivada parcial* $\partial/\partial x^i$ al operador

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^i} : \mathfrak{F}(U) &\longrightarrow \mathfrak{F}(U) \\ f &\longmapsto \frac{\partial f}{\partial x^i}, \end{aligned}$$

donde $\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)(p) = \left(\frac{\partial(f \circ \xi^{-1})}{\partial u^i}\right)(\xi(p))$ para cada $p \in U$, donde (u^1, \dots, u^n) son las coordenadas de \mathbb{R}^n .

Por lo tanto, de la definición anterior es posible deducir que la aplicación

$$\partial_i|_p := \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p : \mathfrak{F}(M) \longrightarrow \mathbb{R},$$

que envía cada $f \in \mathfrak{F}(M)$ a $\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)(p) \in \mathbb{R}$ es un vector tangente a M en p .

Así como el espacio tangente de una variedad M en un punto p constituye una aproximación lineal de la variedad en las cercanías del punto, es posible realizar una aproximación similar para una aplicación diferenciable $\phi : M \rightarrow N$ entre variedades. Para ello, se construye una aplicación del espacio tangente a M en p al espacio tangente a N en $\phi(p)$ teniendo en cuenta el siguiente hecho. Dado $v \in T_pM$, la función

$$\begin{aligned} v_\phi : \mathfrak{F}(N) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ g &\longmapsto v(g \circ \phi), \end{aligned}$$

es un vector tangente a N en $\phi(p)$. En estos términos, tenemos la siguiente definición.

DEFINICIÓN 2.2.3. Sea $\phi : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable. Dado $p \in M$, la aplicación

$$d\phi_p : T_pM \longrightarrow T_{\phi(p)}N,$$

que envía v a v_ϕ , tal y como se definió anteriormente, se llama *diferencial* de ϕ en p .

En definitiva, la diferencial en $p \in M$ viene caracterizada por

$$d\phi_p(v)(g) = v(g \circ \phi),$$

para cada $v \in T_pM$ y $g \in \mathfrak{F}(N)$, por lo que de las identidades 2.2.1 se deduce que $d\phi_p$ es una aplicación lineal de espacios vectoriales reales.

Con la noción de diferencial ya establecida podremos introducir la definición de subvariedad. A grandes rasgos, una subvariedad P de una variedad M es un subconjunto de M que hereda la estructura de variedad de M . En particular, P tendrá la topología de M y para todo abierto V de P existe un abierto \tilde{V} en M tal que $\tilde{V} \cap P = V$.

DEFINICIÓN 2.2.4 (**Subvariedad**). Una variedad P es una *subvariedad* de una variedad diferenciable M si verifica:

- i) P es un subespacio topológico de M .
- ii) La inclusión $j : P \hookrightarrow M$ es una aplicación diferenciable y en cada $p \in P$ la diferencial dj_p es inyectiva.

De la definición anterior observamos que si $\phi : M \rightarrow N$ es diferenciable, $\phi \circ j$ también lo será y, en particular, si $f \in \mathfrak{F}(M)$, $f|_P \in \mathfrak{F}(P)$. También, como $dj_p : T_pP \rightarrow T_pM$ es inyectiva, es habitual considerar el espacio tangente T_pP como un subespacio vectorial de T_pM .

2.3. Curvas en variedades

Dado que las trayectorias de cuerpos o partículas en el espacio-tiempo así como las transiciones de un evento a otro en el tiempo se modelan a través de curvas es clara la importancia que tendrán a lo largo del trabajo. Una curva sobre una variedad diferenciable M es una aplicación diferenciable $\alpha : I = (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$, donde $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Dado que \mathbb{R} es una variedad en sí misma, tomando la identidad u como sistema de coordenadas en I , tendremos $\left(\frac{d}{du}\right)_t \in T_t\mathbb{R}$ y podemos definir la velocidad de una curva α de la forma siguiente.

DEFINICIÓN 2.3.1. Sea $\alpha : I \rightarrow M$ una curva. Llamaremos *vector velocidad* de α en $t \in I$ a

$$\alpha'(t) = d\alpha \left(\left(\frac{d}{du} \right)_t \right) \in T_{\alpha(t)}M.$$

De forma intuitiva, se puede interpretar $\alpha'(t)$ como el vector ritmo de cambio de α en t . Al ser un vector tangente a M en $\alpha(t)$ y tal y como está definida, para $f \in \mathfrak{F}(M)$ actúa de la forma siguiente,

$$\alpha'(t)(f) = \frac{d(f \circ \alpha)}{du}(t).$$

Si $h : I \rightarrow J$ es una función derivable entre intervalos reales, la curva $\beta = \alpha \circ h : J \rightarrow M$ se llama reparametrización de α y su velocidad vendrá dada por la regla de la cadena:

$$\beta'(s) = \frac{dh}{du}(s)\alpha'(h(s)) \quad \forall s \in J.$$

Nótese que considerando la función $h(s) = s - c$, siempre podremos suponer que el origen $0 \in \mathbb{R}$ se encuentra en el dominio de definición de las curvas con las que trabajemos.

Una curva $\alpha : I \rightarrow M$ es *regular* si $\alpha'(t) \neq 0$ para cualquier $t \in I$. Si $[a, b]$ es un intervalo cerrado en \mathbb{R} llamaremos *segmento de curva* a una aplicación $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ que se puede extender de forma diferenciable a un intervalo abierto incluyendo a $[a, b]$. Por lo tanto, $\alpha'(t)$ estará bien definido incluso en los extremos a y b . Una aplicación $\beta : [a, b] \rightarrow M$ se dice *segmento de curva diferenciable a trozos* si existe una partición del intervalo $[a, b]$, esto es $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{k+1} = b$, tal que para cada i , $\beta|_{[t_i, t_{i+1}]}$ es un segmento de curva. En los vértices o puntos de ruptura t_i la curva podría presentar una velocidad de entrada y otra de salida. Para el caso de un intervalo abierto $I \subseteq \mathbb{R}$, $\beta : I \rightarrow M$ es diferenciable a trozos si para todos $a, b \in I$ con $a < b$, $\alpha|_{[a, b]}$ es un segmento de curva.

2.4. Campos vectoriales, 1-formas y tensores

Un *campo vectorial* V en una variedad M es una aplicación que a cada punto p asocia un vector V_p tangente a M en p . Podremos ver un campo vectorial como una colección de vectores en que cada uno de ellos es tangente a un único punto de M . Si V es un campo vectorial sobre una variedad M y $f \in \mathfrak{F}(M)$ una función diferenciable, podremos definir una función real Vf de la forma siguiente:

$$Vf(p) := V_p(f) \in \mathbb{R}.$$

Diremos que el campo vectorial V es *diferenciable* si la función anterior es diferenciable para cualquier $f \in \mathfrak{F}(M)$. Denotaremos por $\mathfrak{X}(M)$ al conjunto de campos vectoriales diferenciables sobre M . Será posible realizar operaciones de adición de campos vectoriales en $\mathfrak{X}(M)$ así como de multiplicación por una función $f \in \mathfrak{F}(M)$ haciendo de $\mathfrak{X}(M)$ un módulo sobre $\mathfrak{F}(M)$.

Será interesante conocer para lo que sigue un tipo especial de operación por la que se obtiene un campo a partir de otros dos:

DEFINICIÓN 2.4.1 (**Corchete de Lie**). Dados dos campos vectoriales $V, W \in \mathfrak{X}(M)$, se define el *corchete de Lie* $[V, W]$, como el campo vectorial que a cada $p \in M$ asocia $[V, W]_p$ actuando como

$$[V, W]_p(f) = V_p(Wf) - W_p(Vf),$$

para cada $f \in \mathfrak{F}(M)$.

Hay un tipo especial de campos vectoriales no necesariamente definidos en toda la variedad y que introducimos debido a que cobrarán relevancia en secciones posteriores. Son aquellos definidos únicamente alrededor de una curva $\alpha : I \rightarrow M$ de modo que Z asigna diferenciablemente para cada $t \in I$ un vector tangente a M en $\alpha(t)$. Un ejemplo es el campo vectorial $\alpha'(t)$ o cualquier $V \in \mathfrak{X}(M)$ restringido a la curva α . Al conjunto de los campos vectoriales sobre una curva α lo denotaremos por $\mathfrak{X}(\alpha)$ y es un módulo sobre $\mathfrak{F}(I)$.

Estrechamente relacionadas con los campos vectoriales se encuentran las 1-formas. Dado p un punto de una variedad diferenciable M , y T_pM el espacio vectorial tangente a M en p , el espacio dual de T_pM es el conjunto de aplicaciones lineales de T_pM en \mathbb{R} . Dicho conjunto es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} isomorfo a T_pM que llamaremos *espacio cotangente* y a sus elementos *covectores*, lo denotaremos por T_pM^* . Las 1-formas serán el dual de los campos: una 1-forma θ sobre una variedad diferenciable M es una función que a cada $p \in M$ asigna un covector $\theta_p \in T_pM^*$.

Si θ es una 1-forma sobre una variedad M y X un campo vectorial sobre M , sea θX la función real que a cada punto $p \in M$ asigna el valor $\theta_p(X_p) \in \mathbb{R}$. Diremos que θ es *diferenciable* si lo es la función θX para cualquier $X \in \mathfrak{X}(M)$. Denotaremos por $\Lambda^1(M)$ al conjunto de 1-formas diferenciables sobre M e, igual que con los campos, las operaciones de suma y producto por funciones hacen de $\Lambda^1(M)$ un módulo sobre $\mathfrak{F}(M)$.

A partir de cada función $f \in \mathfrak{F}(M)$ será posible hallar una 1-forma asociada df que se conoce con el nombre de *diferencial de f* . A cada $p \in M$, df asigna el covector df_p caracterizado por $(df)_p(v) = v_p(f)$. Así para $V \in \mathfrak{X}(M)$, $df(V) = V(f) \in \mathfrak{F}(M)$.

La noción de campo tensorial en una variedad, que introducimos a continuación, expande las nociones de función real, campo vectorial y 1-forma. Además, constituyen el instrumento matemático principal en la descripción de propiedades geométricas más complicadas en una variedad. La característica fundamental de los tensores va ser su carácter multilineal. Sean V_1, \dots, V_s espacios vectoriales reales, una aplicación $K : V_1 \times \dots \times V_s \rightarrow \mathbb{R}$ es multilineal si cada componente de K es lineal, es decir, para todo i con $1 \leq i \leq s$, fijados v_j tal que $j \neq i$, la función

$$v \mapsto A(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_s),$$

es \mathbb{R} -lineal. Ahora, sabiendo que para un punto p de M , T_pM y T_pM^* son espacios vectoriales reales, podemos dar la siguiente definición de tensor.

DEFINICIÓN 2.4.2. Dados dos números naturales $r, s \geq 0$ no ambos nulos, un *tensor de tipo (r, s)* es una aplicación multilineal $A_p : (T_pM^*)^r \times (T_pM)^s \rightarrow \mathbb{R}$.

De forma similar, un *campo tensorial A de tipo (r, s)* sobre una variedad M es una aplicación multilineal

$$A : \Lambda^1(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \rightarrow \mathfrak{F}(M),$$

como módulos sobre $\mathfrak{F}(M)$, recordando que $\Lambda^1(M) = \mathfrak{X}(M)^*$. Por tanto, dicho campo tensorial A se podrá ver como una aplicación que a cada punto p de M lo asocia un tensor de tipo (r, s) . Al conjunto de los tensores de tipo (r, s) lo denotaremos por $\mathfrak{T}_s^r(M)$. Por convenio, se tomará $\mathfrak{T}_0^0(M) = \mathfrak{F}(M)$.

2.5. Curvas integrales y completitud

DEFINICIÓN 2.5.1 (**Curva integral**). Una curva $\alpha : I \rightarrow M$ es una *curva integral* de $V \in \mathfrak{X}(M)$ siempre que se verifique $\alpha'(t) = V_{\alpha(t)}$ para todo $t \in I$.

Esto significa que si α es una curva integral de un campo V , la velocidad de la curva en cada punto viene dada por el valor del campo en dicho p . Esto nos permite interpretar las curvas integrales como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Es el teorema de existencia y unicidad de tales sistemas (ver por ejemplo [Coddington, 1955]) el que conduce al siguiente resultado y su corolario.

PROPOSICIÓN 2.5.2. *Si $V \in \mathfrak{X}(M)$ entonces para cada $p \in M$ hay un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ con $0 \in I$ y una única curva integral $\alpha : I \rightarrow M$ de V tal que $\alpha(0) = p$.*

COROLARIO 2.5.3. *Si $\alpha, \beta : I \rightarrow M$ son curvas integrales de V con $\alpha(a) = \beta(a)$ para algún $a \in I$ entonces $\alpha = \beta$.*

Consideremos el conjunto de todas las curvas integrales $\alpha : I_\alpha \rightarrow M$ de un campo vectorial V que comienzan en p , es decir, con $\alpha(0) = p$. Para cualesquiera dos curvas integrales α y β el Corolario 2.5.3 nos permite afirmar que $\alpha = \beta$ en el intervalo $I_\alpha \cap I_\beta$. Es por ello que podremos pegar las distintas curvas hasta conseguir una curva integral $\alpha_p : I_p \rightarrow M$ donde $I_p = \bigcup_\alpha I_\alpha$ que llamaremos *curva integral maximal* comenzando en p . Es importante mencionar para lo que viene que dicha curva integral maximal no tendrá por qué estar definida en toda la recta real \mathbb{R} . Diremos, por tanto, que un campo vectorial es *completo* si cada curva integral maximal está definida en todo \mathbb{R} . Para un campo vectorial V , que asumiremos completo, la siguiente aplicación reúne en cierto modo todas sus curvas integrales:

DEFINICIÓN 2.5.4 (Flujo de un campo vectorial). El *flujo de un campo vectorial* V en M es la aplicación $\psi : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ dada por

$$\psi(p, t) = \alpha_p(t),$$

donde α_p es la curva integral maximal de V que empieza en p .

Observamos que si mantenemos p constante, la aplicación $t \mapsto \psi(p, t)$ es simplemente la curva integral $\alpha_p(t)$. Por otro lado, para un t constante la aplicación $p \mapsto \psi(p, t)$ define una función de M en M que podemos interpretar como la situación de p en M al seguir el flujo del campo V al cabo de un tiempo t . De ahí proviene su nombre.

En el caso en que el campo V no sea completo, entonces para cada p de M tendremos flujo local $\psi : U \times I \rightarrow M$ para entornos abiertos U y I , de p en M y de 0 en \mathbb{R} , respectivamente. Uniendo los flujos locales, se puede encontrar un dominio abierto $\mathcal{D} = \{(p, t) : t \in I_p\}$ que sea máximo en que ψ está bien definido y es diferenciable.

Para disquisiciones posteriores del trabajo, será importante estudiar el comportamiento de una curva $\alpha : I \rightarrow M$ en los extremos del intervalo I . Nos centraremos para dicho estudio en el extremo derecho y supondremos $I = [0, B)$, pues por analogía podremos extender las conclusiones al otro extremo. Se usará la notación $b < \infty$ y $B \leq \infty$.

DEFINICIÓN 2.5.5. Una curva diferenciable a trozos $\alpha : [0, B) \rightarrow M$, $B \leq \infty$, se dice *extendible* si existe una curva $\tilde{\alpha} : [0, B] \rightarrow M$ que la extiende.

De forma equivalente, si existe un punto $q \in M$ tal que para cada $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq [0, B)$ con $\lim_n s_n = B$, entonces $\lim_n \alpha(s_n) = q$. Al punto $q = \tilde{\alpha}(B)$ lo llamaremos *extremo final* de α . La extensión de una curva extendible no necesariamente es diferenciable aunque se puede probar el siguiente lema:

LEMA 2.5.6. *Sea $\alpha : [0, b) \rightarrow M$ una curva integral de $V \in \mathfrak{X}(M)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- i) α no es una curva integral maximal, es decir, se puede extender como curva integral maximal de V (y, por tanto, diferenciable) a un intervalo $[0, b + \epsilon)$.
- ii) α es extendible.
- iii) α permanece en un conjunto compacto³ de M .
- iv) Existe una sucesión $\{s_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $\{\alpha(s_i)\}$ es una sucesión convergente.

³Dado X un espacio topológico, una colección de subconjuntos abiertos $\mathcal{C} = \{U_i\}_{i \in I}$ de X se llama *recubrimiento abierto* de X si su unión coincide con X , es decir, $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ y diremos que \mathcal{C} *recubre* X . X será un espacio topológico

2.6. El tensor métrico

La geometría del espacio euclídeo, pongamos el caso de \mathbb{R}^3 , viene caracterizada por el producto escalar estándar (en ocasiones, también llamado producto punto). La razón es que, mediante el isomorfismo natural $T_p\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3$, el producto escalar se puede aplicar a cada espacio tangente permitiendo operaciones geométricas básicas como medir la longitud de un vector tangente o el ángulo entre dos vectores tangentes. La teoría de superficies en \mathbb{R}^3 alcanzó su culminación en el trabajo de Gauss donde demostró que la geometría intrínseca de una superficie S en \mathbb{R}^3 (es decir, la geometría percibida por los habitantes de S) se deriva únicamente del producto escalar aplicado a vectores tangentes a S . El objetivo de Riemann fue entonces generalizar estas dos propiedades e introducir la geometría en una variedad arbitraria de dimensión n , para lo cual su idea genial fue dotar de un producto interno a cada espacio tangente. Esto proporciona, en particular, una medida infinitesimal de la distancia entre dos puntos próximos p y q , la distancia entre ellos es la norma del “vector tangente” apuntando de p a q . Bajo el impulso de la teoría general de la relatividad de Einstein, apareció una generalización técnica adicional de gran alcance: la propiedad del producto escalar de ser definido positivo se debilitó hasta la no degeneración. Antes de introducir el tensor métrico, recordamos antes una serie de conceptos de álgebra lineal.

DEFINICIÓN 2.6.1. Sea V un espacio vectorial real, una *forma bilineal simétrica* o *producto escalar* es una función $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ multilineal (tensor) tal que $b(v, w) = b(w, v)$ para todos $v, w \in V$.

Una forma bilineal simétrica b es:

- i) *Definida positiva (negativa)* si $b(v, v) > 0$ ($<$) para todo $v \in V$.
- ii) *Semidefinida positiva (negativa)* si $b(v, v) \geq 0$ (\leq) para todo $v \in V$.
- iii) *No degenerada* si $b(v, w) = 0$ para todo $w \in V$ implica $v = 0$.

El hecho de que una aplicación $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ sea bilineal simétrica se mantiene al restringirnos a un subespacio vectorial W de V , por lo que también lo será $b|_W$. El *índice* ν de una forma bilineal simétrica b en V se define como el mayor número entero tal que existe un subespacio W de V de dimensión ν siendo $b|_W$ definida negativa. Es claro, por tanto, que $0 \leq \nu \leq \dim V$ y $\nu = 0$ si y solo si b definida positiva.

DEFINICIÓN 2.6.2 (Tensor métrico). Un *tensor métrico* g sobre una variedad diferenciable M es un campo tensorial de tipo $(0, 2)$ simétrico, no degenerado y de índice constante. Dicho de otra forma, un tensor métrico g sobre M asigna a cada punto p de M una forma bilineal g_p simétrica no degenerada cuyo índice es el mismo para todo p .

Una *variedad semi-riemanniana* es una variedad diferenciable dotada con un tensor métrico. El índice común de todas las formas g_p se conoce como índice de la variedad, por ello, $0 \leq \nu \leq n = \dim M$. Si $\nu = 0$ diremos *variedad riemanniana* y si $\nu = 1$, con $n \geq 2$, *variedad de Lorentz*. En particular, nos referiremos con el nombre de *espacio-tiempo* a aquellas variedades de Lorentz que sean conexas y orientables temporalmente, que veremos posteriormente. De ahora en adelante, usaremos indistintamente la notación $\langle \cdot, \cdot \rangle$ para referirnos a la actuación del tensor métrico g , $g_p(v_p, w_p) = \langle v_p, w_p \rangle$.

Si consideramos \mathbb{R}^n como variedad diferenciable en sí misma, el producto escalar estándar en $T_p\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$,

$$\langle v_p, w_p \rangle = v \cdot w = \sum_{i=1}^n v^i w^i,$$

hace de \mathbb{R}^n una variedad riemanniana llamada espacio euclideo n dimensional. No obstante, mayor interés suscita, de acuerdo a los objetivos del trabajo, un cambio de signo en las primeras ν componentes,

$$\langle v_p, w_p \rangle = - \sum_{i=1}^{\nu} v^i w^i + \sum_{i=\nu+1}^n v^i w^i.$$

compacto si todo recubrimiento abierto admite una subcolección finita que también lo recubre. De igual forma, si A es un subconjunto de X diremos que A es compacto si todo recubrimiento de A por abiertos de X admite una subcolección finita que también lo recubre. Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación continua entre espacios topológicos, si K es compacto en X , $f(K)$ es compacto en Y .

La variedad semi-riemanniana de índice ν que resulta al considerar dicha métrica en \mathbb{R}^n , se llama espacio semi-euclideo y lo denotamos por \mathbb{R}_ν^n . El caso particular \mathbb{R}_1^n se denomina *espacio-tiempo de Minkowski* y el convenio de signos empleado será por tanto $(- + ++)$.

El significado geométrico del índice de una variedad se debe a que determina el comportamiento de los vectores tangentes con la métrica.

DEFINICIÓN 2.6.3. Sea v un vector tangente a M .

- i) v es *espacial* si $\langle v, v \rangle > 0$ o $v = 0$.
- ii) v es *nulo* si $\langle v, v \rangle = 0$ y $v \neq 0$.
- iii) v es *temporal* si $\langle v, v \rangle < 0$.

Llamaremos *cono nulo* al conjunto de todos los vectores nulos de T_pM . Cada una de las categorías posibles para un vector tangente en términos de la Definición 2.6.3 se denomina carácter causal. Esta terminología está motivada por la teoría de la relatividad y, en particular, en el caso de variedades de Lorentz, llamaremos indistintamente a los vectores nulos como *vectores luminosos* o *tipo luz*.

2.7. Conexiones, geodésicas y transporte paralelo

Con el tensor métrico hemos añadido, aparte de la estructura topológica de la que ya disponíamos, cierta estructura geométrica en las variedades. Sin embargo, aún quedan por generalizar a estos espacios otras nociones geométricas propias de los espacios euclideos. Uno de estos conceptos surge de la necesidad de comparar vectores que son tangentes en distintos puntos de la variedad.

Por ejemplo, en \mathbb{R}^n , dada su estructura de espacio vectorial afín, para comparar dos vectores situados en puntos distintos basta compararlos en el espacio vectorial asociado, en definitiva como si compartiesen el mismo origen. Sin embargo, si vemos \mathbb{R}^n con su estructura de variedad diferenciable los vectores a comparar se encuentran en espacios tangentes diferentes y dicha comparación no se podrá realizar tan fácilmente. Lo que se pretende es, dotando al espacio de coordenadas cartesianas, trasladar ambos vectores, de forma paralela a los ejes coordenados (manteniendo un ángulo constante), hasta el origen. Pero ello plantea un problema pues si establecemos esta especie de transporte paralelo en función del sistema de coordenadas empleado, de poco servirá la comparación de los vectores estudiados. La conexión va a ser el instrumento que va a permitir fijar una noción inequívoca de paralelismo que no dependa de las coordenadas empleadas. De este modo, “conecta” la geometría local de un punto con la de otro. A raíz de la conexión surge una noción de derivada en el contexto de variedades, conocida como derivada covariante, que nos permitirá hablar de líneas rectas o geodésicas en cualquier variedad.

Otro problema que aparece del proceso anterior es que, incluso eligiendo la noción de paralelismo natural en cartesianas, el camino por el cual se puede elegir transportar a los vectores no es único. En \mathbb{R}^n sucede que para cualquier camino en estos términos la posición relativa de los vectores es el mismo pero esto no sucede para otras variedades en general. Más adelante se introduce un parámetro que medirá dicho cambio en la posición relativa de dichos vectores según el camino que sigamos, será el tensor de curvatura.

Comenzamos viendo cómo, para dos campos vectoriales V y W sobre una variedad semi-riemanniana M , se puede determinar otro campo D_VW sobre M tal que para cada punto p asocia $(D_VW)_p$ el vector tasa de cambio del campo W en dirección V_p :

DEFINICIÓN 2.7.1. Una *conexión* D sobre una variedad diferenciable M es una aplicación $D : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ tal que:

- i) D_VW es $\mathfrak{F}(M)$ -lineal en V : $D_{fX+gY}W = fD_XW + gD_YW$, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $f, g \in \mathfrak{F}(M)$.
- ii) D_VW es \mathbb{R} -lineal en W : $D_V(aX + bY) = aD_VX + bD_VY$, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $a, b \in \mathbb{R}$.
- iii) $D_V(fW) = (Vf)W + fD_VW$ para $f \in \mathfrak{F}(M)$.

El campo D_VW se denomina *derivada covariante* de V respecto de W para la conexión D .

No obstante, la conexión que nos va a interesar para nuestro propósito nos la da el siguiente resultado, de gran trascendencia para la geometría semi-riemanniana.

TEOREMA 2.7.2. *Sea M una variedad semi-riemanniana M . Existe una única conexión D tal que verifica las dos propiedades siguientes para cualesquiera $X, V, W \in \mathfrak{X}(M)$:*

- i) $[V, W] = D_V W - D_W V$.
- ii) $X\langle V, W \rangle = \langle D_X V, W \rangle + \langle V, D_X W \rangle$.

D recibe el nombre de conexión de Levi-Civita sobre M .

Diremos que un campo vectorial V es paralelo siempre que la derivada covariante $D_X V$ se anule para cualquier $X \in \mathfrak{X}(M)$. Retomando ahora el concepto de campo vectorial sobre una curva α , introducido en la Sección 2.4 anterior, es posible definir de forma natural el vector tasa de cambio Z' para un campo vectorial $Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$:

PROPOSICIÓN 2.7.3. *Sea $\alpha : I \rightarrow M$ una curva en una variedad semi-riemanniana M . Entonces, hay una única aplicación $Z \rightarrow Z' := DZ/dt$ de $\mathfrak{X}(\alpha)$ en $\mathfrak{X}(\alpha)$ llamada derivada covariante inducida, tal que:*

- i) $(aZ_1 + bZ_2)' = aZ_1' + bZ_2'$ para $a, b \in \mathbb{R}$.
- ii) $(hZ)' = \left(\frac{dh}{dt}\right)Z + hZ'$ para $h \in \mathfrak{F}(I)$.
- iii) $(V_\alpha)'(t) = D_{\alpha'(t)}V$ para $t \in I$ y $V \in \mathfrak{X}(M)$ donde V_α es la restricción del campo V sobre la curva α .
- iv) $(d/dt)\langle Z_1, Z_2 \rangle = \langle Z_1', Z_2 \rangle + \langle Z_1, Z_2' \rangle$.

Un caso especial y bastante visual es aquel en el que $Z = \alpha'$ y, por lo tanto, $Z' = \alpha''$ viene a ser la aceleración de la curva α . Diremos que un campo Z definido sobre la curva α es *paralelo* cuando $Z' = 0$. Si desarrolláramos en coordenadas la anterior igualdad se obtendría un sistema lineal de ecuaciones diferenciables ordinarias que, gracias al teorema de existencia y unicidad de tales sistemas, conduce al siguiente resultado:

PROPOSICIÓN 2.7.4. *Sea $\alpha : I \rightarrow M$ una curva sobre una variedad M . Si $a \in I$ y $z \in T_{\alpha(a)}M$ existe un único campo vectorial paralelo Z sobre α tal que $Z(a) = z$.*

Esta propiedad nos permitirá establecer la deseada noción de paralelismo de forma rigurosa. Con las notaciones anteriores, si $b \in I$ la función

$$P = P_a^b(\alpha) : T_p M \longrightarrow T_q M$$

que envía cada vector tangente $z \in T_{\alpha(a)}$ a $Z(b) \in T_{\alpha(b)}M$ tal y como se definen en la Proposición 2.7.4. La aplicación P se denomina *transporte paralelo* a lo largo de α desde $p = \alpha(a)$ a $q = \alpha(b)$. Podrá probarse que dicha aplicación es una isometría⁴ de espacios vectoriales reales.

Como anticipábamos, a priori el transporte paralelo de p a q puede que dependa de la curva uniendo dichos puntos. En \mathbb{R}_ν^n , como los campos vectoriales coordenados son paralelos y, por ende, su restricción a cualquier curva, para cualesquiera $p, q \in \mathbb{R}_\mu^n$, el transporte paralelo desde p hasta q es el isomorfismo natural $v_p \rightarrow v_q$. Este fenómeno se llama paralelismo distante.

Ya nos encontramos en condiciones de generalizar la noción euclídea de línea recta a cualquier variedad. Una *geodésica* en una variedad semi-riemanniana M es una curva $\gamma : I \rightarrow M$ cuyo campo vectorial velocidad $\gamma' \in \mathfrak{X}(\gamma)$ es un campo paralelo. Esto es equivalente a decir que la aceleración γ'' es nula. Gracias al teorema de existencia y unicidad de solución de ecuaciones diferenciables ordinarias se tienen una serie de propiedades para estas curvas geodésicas que será importante conocer para lo que sigue.

LEMA 2.7.5. *Sea v tangente a una variedad M en p . Existe un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ con $0 \in I$ y una geodésica $\gamma : I \rightarrow M$ única tal que $\gamma'(0) = v$.*

⁴Sean M y N variedades semi-riemannianas con tensores métricos g_M y g_N , respectivamente. Una *isometría* $\phi : M \rightarrow N$ es un difeomorfismo que preserva los tensores métricos, es decir, $\langle v, w \rangle = \langle d\phi(v), d\phi(w) \rangle$ para todo $v, w \in T_p M$.

Dado $v \in T_p M$, se tiene claramente $\gamma(0) = p$ y nos referiremos a γ como la geodésica que comienza en p con velocidad inicial v . Se puede conseguir cierta unicidad para una geodésica en estas condiciones, es lo que expresa el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 2.7.6. *Dado un vector tangente $v \in T_p M$ existe una única geodésica γ_v en M tal que*

- i) La velocidad inicial de γ_v es v , es decir, $\gamma'_v(0) = v$.*
- ii) El dominio I de γ_v es máximo. En otras palabras, si $\alpha : J \rightarrow M$ es una geodésica con velocidad inicial v , entonces $J \subseteq I$ y $\alpha = \gamma|_J$.*

La propiedad *ii* de la Proposición 2.7.6 nos lleva a calificar la geodésica γ_v como *maximal* o *geodésicamente inextensible*. Una variedad semi-riemanniana M para la cual toda curva geodésica maximal está definida en toda la recta real \mathbb{R} recibe el nombre de *geodésicamente completa* o, simplemente, *completa*. Nótese que el hecho de quitar un punto de una variedad completa M hace que $M - \{p\}$ ya no sea una variedad completa pues las geodésicas que pasaban por p ahora se detendrán y no podrán pasar a través de él.

Diremos que una curva $\alpha : I \rightarrow M$ es *espacial* si para cualquier $t \in I$, $\alpha'(t)$ es un vector tangente a M de tipo espacial, de forma análoga tendremos *curvas temporales* y *nulas* o *luminosas*. Aunque una curva cualquiera α no tiene por qué tener alguno de los caracteres causales anteriores (por no ser el mismo para todo t) esto sí ocurrirá en el caso de que α sea geodésica. Esto ocurre porque α' es paralelo sobre dicha curva y como el transporte paralelo es una isometría, tal y como se señaló anteriormente, el carácter causal de $\alpha'(t)$ es el mismo para cualquier $t \in I$.

Terminamos la sección mostrando el concepto de pregeodésica, el cual viene motivado por el siguiente resultado.

LEMA 2.7.7. *Sea $\gamma : I \rightarrow M$ una curva geodésica no constante. Una reparametrización $\gamma \circ h : J \rightarrow M$ es geodésica si y solo si la función h es de la forma $h(t) = at + b$.*

Por eso, es posible que una curva, a priori, no sea geodésica pero que con la reparametrización adecuada, sí que lo sea. A tales curvas se las denomina *pregeodésicas*.

2.8. La aplicación exponencial

Dado un punto en una variedad, la aplicación exponencial nos permitirá “proyectar” un vector tangente en dicho punto a un punto de la variedad siguiendo la geodésica correspondiente. Esto significa que podemos “extrapolar” la dirección de un vector desde un punto dado y determinar hacia dónde llevaría si se siguiera una trayectoria geodésica. De esta manera, la aplicación exponencial proporciona una conexión crucial entre el espacio tangente y la geometría de la variedad en sí misma. La aplicación exponencial se define como sigue:

DEFINICIÓN 2.8.1. Si $r \in M$, sea U_r el conjunto de vectores tangentes v en $T_r M$ tal que la geodésica γ_v está definida al menos el intervalo $[0, 1]$. La *aplicación exponencial* de M en r es la aplicación

$$\exp_r : U_r \longrightarrow M,$$

tal que $\exp_r(v) = \gamma_v(1)$ para todo $v \in U_r$.

Tal y como se ha definido, es obvio que U_r es el mayor subconjunto de $T_r M$ en el que \exp_r está bien definida. Además, si la variedad es completa, la aplicación \exp_r se podrá definir en todo $T_r M$. Obsérvese que, para un vector tangente $v \in T_r M$ fijo y $t \in \mathbb{R}$, la geodésica $s \mapsto \gamma_v(ts)$ tiene velocidad inicial $t\gamma'(0) = tv$, usando la regla de la cadena. Así, $\gamma_{tv}(s) = \gamma_v(st)$ en aquellos s y t en que ambos lados de la igualdad estén definidos, si $v \in U_r$:

$$\exp_r(tv) = \gamma_{tv}(1) = \gamma_v(t).$$

Lo que significa que \exp_r lleva rectas radiales en el origen $0 \in T_r M$ a geodésicas en M con origen en r , denominadas *geodésicas radiales*. Reuniendo todas las aplicaciones \exp_p para cada $p \in M$, es posible definir una única aplicación exponencial sobre el fibrado tangente $\exp : TM \rightarrow M$. De forma similar, si P

es una subvariedad de M , podemos definir la exponencial sobre el *fibrado normal* $NP = \cup_{p \in P} \{T_p P^\perp \subseteq T_p M\} \subseteq TM$ de forma que $\exp : NP \rightarrow M$ es una restricción de la anterior. A partir de la aplicación exponencial se pueden caracterizar un tipo particular de puntos sobre una curva geodésica, los puntos conjugados.

DEFINICIÓN 2.8.2 (Punto conjugado). Sea $\sigma : [0, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$ una geodésica comenzando en p . Diremos que $\sigma(b)$ es un *punto conjugado* de $p = \sigma(0)$ si la aplicación exponencial \exp_p es singular en $b\sigma'(0)$, esto es, si existe un vector x tangente a $T_p M$ en $b\sigma'(0)$ tal que $d \exp_p(x) = 0$.

Para discusiones posteriores es importante saber que la exponencial verifica las siguientes propiedades.

PROPOSICIÓN 2.8.3. *Para cada punto $r \in M$ existe un entorno \tilde{U} de 0 en $T_r M$ para el que la aplicación exponencial \exp_r es un difeomorfismo en un entorno U de r en M .*

Un subconjunto S de un espacio vectorial es *estrellado* en 0 si para todo $v \in S$ implica $tv \in S$ para cualquier $t \in [0, 1]$. Sean $U \subseteq M$ y $\tilde{U} \subseteq T_r M$ en términos de la Proposición 2.8.3 anterior, diremos que U es un *entorno normal* de $r \in M$ si \tilde{U} es estrellado en $0 \in T_r M$. En este caso, el entorno U en la variedad M tendrá una característica similar a la de ser estrellado en un espacio vectorial:

PROPOSICIÓN 2.8.4. *Si U es un entorno normal de $r \in M$, entonces para cada $p \in U$ existe una geodésica única $\sigma : [0, 1] \rightarrow U$ de r a p en U . Además $\sigma'(0) = \exp_r^{-1}(p) \in \tilde{U}$.*

Relacionados con los entornos normales se encuentran los conjuntos convexos cuyas características, que se exponen en los siguientes resultados, hacen que trabajar con ellos sea particularmente interesante. Diremos que un conjunto abierto \mathcal{C} de una variedad M es *convexo* si es entorno normal de cada uno de sus puntos. Deducimos entonces, de la Proposición 2.8.4, que para cualesquiera $p, q \in \mathcal{C}$ existe un segmento geodésico único $\sigma_{p,q} : [0, 1] \rightarrow M$ desde p hasta q que permanece en \mathcal{C} de forma íntegra. No obstante, puede ocurrir que existan otras geodésicas de p a q que no queden enteramente en \mathcal{C} , aunque no es el caso, por ejemplo, de \mathbb{R}^n , donde toda la variedad es entorno normal de cada punto.

Como para cada punto r de una variedad M será posible hallar un entorno convexo, tendremos el siguiente lema que nos permitirá afirmar que las extensiones de curvas geodésicas extendibles serán geodésicas:

LEMA 2.8.5. *Una geodésica $\gamma : [0, b) \rightarrow M, b < +\infty$, es extendible como geodésica si y solo si es continuamente extendible (es decir, en términos de la Definición 2.5.5).*

Dados $p, q \in \mathcal{C}$ puntos de un abierto convexo \mathcal{C} y $\sigma_{p,q}$ la geodésica en \mathcal{C} de $p = \sigma_{p,q}(0)$ a $q = \sigma_{p,q}(1)$, llamaremos $\vec{p}\vec{q}$ al vector tangente $\sigma'_{p,q}(0)$. En estos términos, será posible probar:

LEMA 2.8.6. *Si \mathcal{C} es un conjunto abierto convexo, la aplicación $\Delta : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$ que a cada par $(p, q) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ asocia el vector $\vec{p}\vec{q} \in T_p M$ es continua.*

Para la prueba de resultados posteriores señalamos que para cualquier recubrimiento por abiertos \mathcal{C} de una variedad diferenciable M , es posible encontrar un subrecubrimiento \mathfrak{R} de \mathcal{C} formado por abiertos convexos y tales que $\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j$ es convexo para cualesquiera $\mathcal{C}_i, \mathcal{C}_j \in \mathfrak{R}$.

2.9. Curvatura

Como se mencionó anteriormente, el transporte paralelo de vectores en \mathbb{R}^n no modifica la posición relativa de los mismos fuera cual fuera la curva por la que realicemos el transporte. Sin embargo, si en vez de \mathbb{R}^n se considera la esfera S^2 , la elección de caminos influirá en el resultado final.

Consideremos un vector tangente a la esfera en el polo norte (vector rojo), es decir, se encuentra en el plano tangente en este punto, y otro en el plano tangente al polo sur. Si se desea comparar ambos vectores, se deben transportar hasta que ambos compartan el mismo origen. Sin embargo, al contrario que en el plano, el resultado es distinto en función del camino elegido para realizar dicho transporte, a pesar de que se tomen caminos siguiendo curvas geodésicas. Este hecho se manifiesta en la Figura 1, donde el hecho de tomar meridianos distintos a la hora de transportar el vector tangente del polo sur

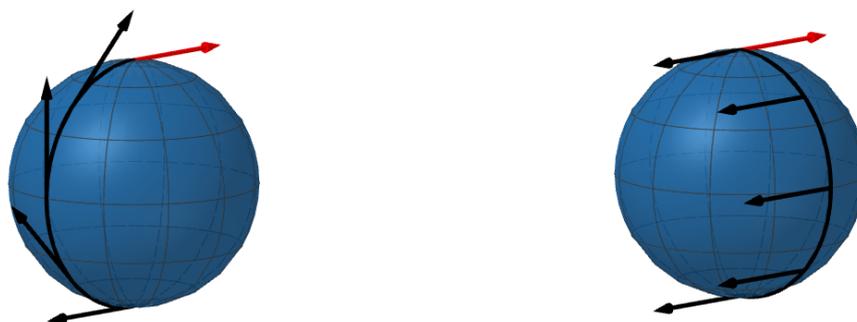


FIGURA 1. Transporte paralelo de un vector tangente a la esfera S^2 desde el polo sur hasta el polo norte.

hasta el polo norte conduce a posiciones relativas distintas. Es a raíz de ello, por lo que aparece la noción de curvatura de una variedad. En definitiva y de forma cualitativa, la curvatura tiene que ver, entonces, con los cambios que sufre un vector tangente al ser transportado a través de una curva geodésica a trozos cerrada. Notar, además, que para un observador externo a la esfera, en el espacio euclídeo tridimensional ambiente, es fácil notar que se curva, pero para un observador sobre la esfera, al igual que cualquier habitante sobre la Tierra, no resulta tan sencillo. Ahora bien, será preciso formalizar esta vaga idea de curvatura, de forma que no sea necesario que la variedad se encuentre inmersa en un espacio euclídeo. Fueron Gauss y Riemann quienes se ocuparon de dicha tarea.

En la teoría de superficies en \mathbb{R}^3 que se desarrolló a fines del siglo XVIII, se definió una noción de curvatura que proporciona una descripción muy razonable de la forma en que se curva la superficie en \mathbb{R}^3 . Fue Gauss quien demostró en su teorema egregio que esta curvatura gaussiana es un invariante isométrico de la superficie e independiente del hecho de que la superficie estuviera en el espacio tridimensional. Este teorema llevó a Riemann a la generalización de la curvatura gaussiana a variedades riemannianas arbitrarias, siendo una pieza clave en la geometría de Riemann y pudiéndose extender a variedades semi-riemannianas.

DEFINICIÓN 2.9.1. Sea M una variedad semi-riemanniana con D su conexión de Levi-Civita. La aplicación $R : \mathfrak{X}(M)^3 \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ dada por

$$R_{XYZ} = D_{[X,Y]}Z - [D_X, D_Y]Z,$$

es un campo tensorial de tipo $(1, 3)$ llamado *tensor de curvatura de Riemann* de M .

Una variedad semi-riemanniana M para la cual el tensor de curvatura R es cero en cada punto se dice que es *plana*. A partir del tensor de curvatura es posible determinar otros invariantes isométricos. Tal es el caso del tensor curvatura de Ricci, de gran relevancia en el trabajo puesto que aparecerá directamente en una de las condiciones del teorema de Penrose. Aunque es usual definirlo a partir de la contracción con la métrica, continuamos con nuestro empeño de trabajar sin coordenadas y damos la definición a partir de una base ortonormal de campos⁵.

DEFINICIÓN 2.9.2. Sea R el tensor curvatura de Riemann de una variedad M . El *tensor curvatura de Ricci* es un tensor de tipo $(0, 2)$ que viene dado respecto de una base ortonormal de campos E_1, \dots, E_n por la expresión

$$\text{Ric}(X, Y) = \sum_m \varepsilon_m \langle R_{XE_m} Y, E_m \rangle,$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, donde $\varepsilon_m = \langle E_m, E_m \rangle$.

⁵En una variedad diferenciable M de dimensión n , una *base ortonormal de campos* (o *marco móvil* en el contexto de la relatividad general) E_1, \dots, E_n es un conjunto de campos vectoriales sobre M que a cada punto $p \in M$ asigna una base ortonormal e_{1p}, \dots, e_{np} del espacio vectorial T_pM . Aunque puede que no exista una base ortonormal definida en toda la variedad M , siempre existen localmente. Por ello, todo campo vectorial se podrá expresar, al menos localmente, en base estos campos como $V = \sum_i \varepsilon_i \langle V, E_i \rangle E_i$ donde $\varepsilon_i = \langle E_i, E_i \rangle$ y, por ende, cualquier tensor utilizando la linealidad.

Si el tensor de Ricci en una variedad M es idénticamente cero, se dice que M es Ricci plana. La reducción en el tensor de curvatura se puede aplicar nuevamente para conseguir otro tensor invariante, esta vez de tipo $(0, 0)$ que denominaremos curvatura escalar.

DEFINICIÓN 2.9.3. La *curvatura escalar* S de una variedad diferenciable M es un tensor de tipo $(0, 0)$ (es decir, una función en $\mathfrak{F}(M)$) obtenida, a partir de una base ortonormal de campos, por la expresión:

$$S = \sum_m \varepsilon_m \langle R_{E_m E_m} E_m, E_m \rangle.$$

Finalmente, introduciremos otra noción de curvatura que tendrá importantes implicaciones posteriormente. Para ello es preciso realizar una discusión previa. Sea \overline{M} una variedad semi-riemanniana, una subvariedad M de \overline{M} es una *subvariedad semi-riemanniana* de \overline{M} si para cada $p \in M$, el espacio tangente $T_p M$ es un subespacio vectorial no degenerado de $T_p \overline{M}$. Por ello, $T_p \overline{M}$ podrá expresarse como la suma directa $T_p \overline{M} = T_p M + T_p M^\perp$.

En estos términos, será posible definir campos vectoriales en \overline{M} restringiéndonos a la subvariedad M , es decir, campos que a cada punto $p \in M$ asignen un vector tangente v_p en $T_p \overline{M}$. Al conjunto de estos campos lo llamaremos $\overline{\mathfrak{X}}(M)$. El vector v_p podrá descomponerse en una componente tangente a M , sea tan $v_p \in T_p M$, y otra normal a M , sea nor $v_p \in T_p M^\perp$. Si $Z \in \overline{\mathfrak{X}}(M)$ es tal que para todo $p \in M$, $Z_p \in T_p M^\perp$ se dirá que Z es un *campo vectorial normal a M* . El conjunto de campos normales a M se denota por $\mathfrak{X}(M)^\perp$ y tendremos la descomposición $\overline{\mathfrak{X}}(M) = \mathfrak{X}(M) + \mathfrak{X}(M)^\perp$.

El quid de la cuestión es que al aplicar la conexión de Levi-Civita \overline{D} de la variedad \overline{M} sobre $V \in \mathfrak{X}(M)$ en la primera componente, y sobre $X \in \overline{\mathfrak{X}}(M)$ en la segunda, resulta que se obtiene un campo $\overline{D}_V X \in \overline{\mathfrak{X}}(M)$. Así pues, para cada punto p de M nos podremos quedar con la proyección normal en $T_p M^\perp$ del vector $(\overline{D}_V X)_p$, esto es nor $(\overline{D}_V X)_p$ y lo denotaremos por $\Pi(V, X)_p \in T_p M^\perp$. La aplicación $\Pi : \mathfrak{X}(M) \times \overline{\mathfrak{X}}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)^\perp$ que para cada $V \in \mathfrak{X}(M)$ y cada $X \in \overline{\mathfrak{X}}(M)$ asigna $\Pi(V, X)$ actuando como antes es un tensor de tipo $(0, 2)$ llamado *tensor de forma* o *segunda forma fundamental*. En este contexto, podremos definir un campo vectorial H , normal a M que a cada punto p de M asigna

$$H_p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \Pi(e_i, e_i),$$

donde $n = \dim M$ y e_1, \dots, e_n es una base ortonormal de $T_p M$. Este campo $H \in \mathfrak{X}(M)^\perp$ se denomina *curvatura media* de $M \subseteq \overline{M}$. En vistas de la expresión anterior, lo que indica el campo H es el promedio en cada punto de lo que se curva la variedad M dentro de \overline{M} al recorrerla en cada dirección coordenada.

2.10. Geometría de Lorentz

Después de establecer las nociones previas sobre variedades diferenciables en general, más en concreto variedades semi-riemannianas, el caso que suscita mayor interés en relación a los objetivos de este TFG es el caso de variedades de Lorentz, definidas anteriormente como aquellas variedades semi-riemannianas cuyo tensor métrico tiene índice $\nu = 1$. Es por ello que el espacio tangente en cada punto de una variedad de Lorentz es linealmente isométrico al espacio de Minkowski \mathbb{R}_1^n así que la geometría local de estas variedades comienza por el estudio causal de los vectores en dicho espacio.

2.10.1. Carácter causal en variedades de Lorentz. Diremos que un espacio vectorial real es de Lorentz si posee un producto escalar de índice $\nu = 1$ siempre que su dimensión sea $n \geq 2$. En estos espacios vectoriales, el carácter causal de vectores, tal y como se vio en la Definición 2.6.3 anterior, se puede generalizar a subespacios de la siguiente manera: sea W un subespacio W de V , espacio vectorial de Lorentz, y g su producto escalar.

- i) Si $g|_W$ es definida positiva, diremos que W es *espacial*.
- ii) Si $g|_W$ es no degenerada de índice 1, W es *temporal*.
- iii) Si $g|_W$ es degenerada, diremos que W es *nulo, luminoso o tipo luz*.

Nos referiremos a cada una de las tres opciones anteriores como el carácter causal de W . Del siguiente resultado, deducimos que W es temporal si y solo si W^\perp es espacial (y, como $W = (W^\perp)^\perp$, también es cierto intercambiando ambos caracteres):

LEMA 2.10.1. *Si z es un vector temporal de un espacio vectorial de Lorentz, entonces z^\perp es un subespacio espacial tal que $V = z\mathbb{R} + z^\perp$, donde denotamos por $z\mathbb{R}$ el subespacio generado por z .*

Sea una subvariedad P de una variedad de Lorentz M . Si para todo punto $p \in P$, el subespacio $T_p P$ de $T_p M$ tiene el mismo carácter causal, dicho carácter se atribuye a la subvariedad P . Por ejemplo, el cono nulo de \mathbb{R}_1^n , conjunto de vectores nulos o luminosos, será una subvariedad luminosa. Por su parte, las subvariedades semi-riemannianas de M únicamente podrán ser temporales o espaciales (pues la restricción $g|_{T_p P}$ es no degenerada). No obstante, no toda subvariedad ha de presentar tales caracteres pues el carácter de cada espacio tangente puede no ser siempre el mismo.

Dada una subvariedad semi-riemanniana P de M , una curva $\alpha : I \rightarrow M$ con $\alpha(0) = p \in P$, es normal a P si para cada $\alpha'(0) \in T_p P^\perp$. Al conjunto de las curvas $\alpha : [0, b]$ que parten de una subvariedad semi-riemanniana P hasta un punto $q \in M$ lo denotamos por $\Omega(P, q)$. Los siguientes resultados técnicos tendrán gran utilidad posteriormente:

TEOREMA 2.10.2. *Sea P una subvariedad espacial de una variedad de Lorentz M . Si $\alpha \in \Omega(P, q)$ es una curva causal, o bien hay una curva temporal arbitrariamente cerca de α en $\Omega(P, q)$ o bien α es una geodésica nula normal a P sin puntos focales⁶ de P antes de llegar a q .*

PROPOSICIÓN 2.10.3. *En una variedad de Lorentz M , si α es una curva causal de p hasta q y no es una pregeodésica luminosa, entonces existe una curva temporal desde p hasta q tan cerca de α como se quiera.*

PROPOSICIÓN 2.10.4. *Sea P una subvariedad espacial con codimensión 2 de una variedad de Lorentz M y H el campo vectorial curvatura media. Sea $\sigma : I \rightarrow M$ una geodésica nula normal a P en $p = \sigma(0)$ tal que:*

- i) $\mathbf{k}(\sigma'(0)) := \langle \sigma'(0), H_p \rangle > 0$.
- ii) $\text{Ric}(\sigma'(t), \sigma'(t)) \geq 0$ para todo $t \in I$.

Entonces, existe un punto focal $\sigma(r)$ de P a lo largo de σ con $0 < r \leq 1/\mathbf{k}(\sigma'(0))$ siempre que σ este definida en dicho intervalo.

Un apunte de notación para lo que sigue: en relatividad, más en particular en el espacio-tiempo de Minkowski con tres dimensiones espaciales y una temporal, muchos autores colocan la dimensión temporal en la cuarta coordenada. Sin embargo, en este texto, con objeto de lidiar más fácilmente con variedades de Lorentz de dimensión n arbitraria, tomaremos la coordenada cero como la temporal. Es decir, si u^0, u^1, \dots, u^{n-1} son las coordenadas naturales de \mathbb{R}_1^n , u^0 será el vector temporal y lo denotaremos por t , como es usual. Aún así, en los diagramas espacio-temporales mostrados posteriormente los ejes temporales se grafican en vertical.

2.10.2. Conos y orientabilidad temporal. Denotaremos por \mathcal{T} al conjunto de vectores temporales sobre un espacio vectorial de Lorentz V . Si $u \in \mathcal{T}$, el conjunto

$$C(u) := \{v \in \mathcal{T} : \langle u, v \rangle < 0\},$$

se llama *cono temporal* de V incluyendo a u . De forma análoga, el *cono temporal opuesto* en V incluyendo a u viene dado por el conjunto

$$C(-u) := \{v \in \mathcal{T} : \langle u, v \rangle > 0\}.$$

⁶Sea P una subvariedad semi-riemanniana de una variedad M y $\sigma : [0, b]$ una geodésica normal a P con $p = \sigma(0)$. Se dice que $\sigma(b)$ es un *punto focal* de P a lo largo de σ si la aplicación exponencial $\exp : NP \rightarrow M$ es singular en $b\sigma(0)$. Esto es, si existe un vector x tangente a $T_p P^\perp$ en $b\sigma'(0)$ tal que $d\exp(x) = 0$.

Del Lema 2.10.1, como u^\perp es espacial, se concluye que \mathcal{T} es la unión disjunta de $C(u)$ y $C(-u)$. De hecho, la elección del vector u no es relevante pues a partir de la definición se tienen las siguientes equivalencias:

$$u \in C(v) \iff v \in C(u) \iff C(u) = C(v).$$

Además, si $v, w \in C(u)$ tendremos que para cualquier $\lambda \in [0, 1]$, se cumple $\lambda v + (1 - \lambda)w \in C(u)$ por lo que los conos temporales serán conjuntos convexos.

Ahora bien, en cada espacio tangente a un punto p de una variedad de Lorentz M hay dos conos temporales y, a priori, no hay forma de distinguir uno de otro. Llamaremos a la elección de uno de estos conos orientar temporalmente $T_p M$ o dar una orientación temporal de $T_p M$. La cuestión global que surge a raíz de este hecho es si podremos orientar temporalmente de forma “continua” cada espacio tangente a medida que recorremos M . Denotemos por τ una aplicación sobre M que a cada p asigna un cono temporal τ_p en $T_p M$. La función τ será diferenciable si para cada $p \in M$ existe un campo vectorial V en algún entorno abierto U de p tal que $V_q \in \tau_q$, para todo $q \in U$. A esta aplicación diferenciable se la denomina *orientación temporal* en M , si M admite una de tales aplicaciones se dirá que es *orientable temporalmente* y al hecho de elegir una de ellas se lo denomina orientar temporalmente M . Al cono temporal escogido lo llamaremos cono temporal futuro y, al no escogido, cono temporal pasado. Serán curvas temporales hacia el futuro aquellas cuyo vector velocidad en todo punto se encuentre en el cono temporal futuro, y de forma análoga tendremos curvas temporales hacia el pasado. El siguiente resultado nos proporciona una forma más sencilla de comprobar si una variedad es orientable temporalmente,

LEMA 2.10.5. *Una variedad de Lorentz M es orientable temporalmente si y solo si existe un campo vectorial temporal $X \in \mathfrak{X}(M)$.*

Un ejemplo sencillo de variedad orientable temporalmente es el espacio de Minkowski \mathbb{R}_1^n , sin más que considerar el campo ∂_0 y el lema anterior.

En un espacio vectorial de Lorentz, llamaremos *vectores causales* a aquellos vectores que no son espaciales. Para un vector temporal v , el conjunto de vectores causales con $\langle v, w \rangle < 0$ lo llamaremos *cono causal* de v y lo denotamos por $\overline{C}(v)$. Así pues, también tendremos curvas causales, aquellas cuya velocidad en cada punto es un vector causal. Aún más, si la variedad es orientable temporalmente y el vector velocidad de una curva causal se encuentra para todo punto en el cono causal futuro, se dirá curva causal hacia el futuro; de forma análoga hacia el pasado.

2.10.3. Longitud de arco en variedades de Lorentz.

DEFINICIÓN 2.10.6 (Longitud de arco). Sea $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ un segmento de curva diferenciable a trozos en una variedad semi-riemanniana M . La *longitud de arco* de α se define como

$$L(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(s)| ds,$$

donde $|\alpha'| = |\langle \alpha', \alpha' \rangle|^{1/2}$.

A diferencia del caso riemanniano, donde el tensor métrico es definido positivo y la expresión anterior define una distancia sobre la variedad, no sucede lo mismo para variedades de Lorentz. De hecho, las curvas luminosas o nulas tendrán longitud cero por lo que habrá que tener especial cuidado al realizar interpretaciones sobre este parámetro. Destacamos el efecto que tiene sobre la longitud de arco un cambio de parametrización: en términos de la Definición 2.10.6, una reparametrización, es decir, una función diferenciable $h : [a, b] \rightarrow [c, d]$, no cambiará la longitud de arco de α si h es monótona, es decir, h' no cambia de signo. Además, si $|\alpha'| < 0$ siempre será posible encontrar una reparametrización h de α de manera que $\beta = \alpha \circ h$ verifique $|\beta'| = 1$. Bajo estas condiciones se dirá que la curva β tiene velocidad unidad o es parámetro arco.

2.10.4. Geometría local en variedades de Lorentz. Nos centramos ahora más en concreto en las curvas temporales sobre una variedad de Lorentz. En primer lugar, para que una curva diferenciable a trozos α sea temporal no basta con que $\alpha'(t)$ sea temporal para cualquier t , sino que ha de verificarse en cada vértice i -ésimo

$$\langle \alpha'(t_i^-), \alpha'(t_{i+1}^+) \rangle < 0.$$

Este hecho obliga a que estas curvas no cambien de cono temporal en los vértices donde se pierde la diferenciabilidad. De forma obvia se extiende la definición al caso de curvas causales diferenciables a trozos exigiendo que no cambien de cono causal en cada uno de sus vértices.

A continuación, se muestran, aunque sin prueba, dos resultados en relación a este tipo de curvas que será importante considerar para pruebas posteriores.

LEMA 2.10.7. *Sea o un punto de una variedad de Lorentz M . Suponiendo que $\beta : [0, b] \rightarrow T_oM$ es una curva diferenciable a trozos comenzando en $0 \in T_oM$ y tal que $\alpha = \exp_0 \circ \beta$ es temporal. Entonces, β permanece en un único cono temporal de T_oM .*

El resultado anterior sigue siendo cierto intercambiando el carácter temporal por el causal.

PROPOSICIÓN 2.10.8. *Sea U un entorno normal de un punto o en una variedad de Lorentz M . Si existe una curva temporal en U de o a q , entonces la curva radial geodésica σ desde o hasta q es la única curva temporal desde o hasta q de longitud máxima.*

En el espacio-tiempo de Minkowski \mathbb{R}_1^n , como toda la variedad es entorno normal de cada uno de sus puntos, lo que la Proposición 2.10.8 afirma es que cualquier segmento temporal geodésico es de longitud máxima uniendo los puntos de sus extremos.

2.10.5. Completitud en variedades de Lorentz. En variedades riemannianas el *Teorema de Hopf-Rinow* (véase [O'Neill, 1983], p.138) afirma que la completitud de una variedad M , tal y como se definió en la Sección 2.5, es equivalente a la completitud de M como espacio métrico, es decir, que toda sucesión de Cauchy converge. Sin embargo, en variedades de Lorentz donde la longitud de arco (Definición 2.10.6) no define una distancia, el resultado no es válido y la noción de completitud no será tan evidente.

Consideremos las geodésicas de la forma $\gamma : [0, b) \rightarrow M$. El Lema 2.8.5 nos permite concluir la inextendibilidad geodésica de γ si existe una sucesión $\{s_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ con $\lim s_i = b$ tal que $\{\gamma(s_i)\}$ no converge. Es preciso, además, distinguir según el carácter causal pues, por ejemplo, para geodésicas $\gamma : [0, b) \rightarrow M$ temporales y espaciales, serán completas si y solo si tienen longitud infinita (para verlo basta tener en cuenta que para una parametrización arco la curva estará definida en $[0, L(\gamma))$) lo que nos ofrece una forma de comprobar la completitud de tales curvas. No obstante, este argumento no servirá para curvas nulas.

Por lo tanto, la completitud en variedades de Lorentz se separa en completitud temporal, completitud espacial y completitud nula o luminosa. Una variedad M que sea completa satisface las tres, pero dichas condiciones son independientes y habrá variedades de Lorentz que verifiquen una sola, dos o incluso ninguna. En [Manchak, 2020] se muestra un ejemplo de superficie completa nula y espacialmente pero incompleta temporalmente.

2.11. Condición fuerte sobre la energía

Una de las condiciones necesarias que establece el teorema de Penrose para que se forme una singularidad en un espacio-tiempo M es $\text{Ric}(v, v) \geq 0$ para todo vector tipo luz tangente a M . La razón de ser de dicha condición es esencialmente geométrico pues es la que conduce a que las geodésicas luminosas converjan hacia el futuro y se formen superficies atrapadas, las cuales serán descritas con detalle más adelante. De este modo se evita que las geodésicas luminosas se extiendan indefinidamente y se forme

así una singularidad.

No obstante, podemos realizar una interpretación de dicha condición observando las ecuaciones de campo de Einstein ($\Lambda = 0$). Con las notaciones anteriores, estas ecuaciones tienen la forma

$$(2.11.1) \quad 8\pi T = \text{Ric} - \frac{1}{2}Sg,$$

donde T es el tensor energía-momento. Esta ecuación establece cómo se curva el espacio-tiempo en un punto en función del flujo de energía y la densidad de materia en dicho punto. Por tanto, si aplicamos en la Ecuación (2.11.1) nuestra condición sobre el tensor de Ricci para un vector v tangente a M tipo luz ($\langle v, v \rangle = 0$) se obtiene:

$$8\pi T(v, v) = \text{Ric}(v, v) \geq 0.$$

Por lo tanto, desde un punto de vista físico, esta condición refleja la idea de que la energía contribuye a la curvatura del espacio-tiempo de forma que la atracción gravitacional es suficientemente fuerte como para inducir una convergencia de las trayectorias de luz o partículas sin masa.

Causalidad en variedades de Lorentz

Índice

3.1. Relaciones de causalidad en una variedad	23
3.2. Quasi-límite de curvas causales	27
3.3. Condiciones de causalidad	28
3.4. Separación temporal	31
3.5. Conjuntos acronales	34
3.6. Hipersuperficies de Cauchy	37
3.7. Desarrollos de Cauchy	39
3.8. Teorema de singularidad de Penrose	42

El propósito del presente capítulo, como ya se especificó anteriormente, será aportar una prueba detallada del teorema de singularidad de Penrose. Para ello, se seguirá el procedimiento expuesto en [O'Neill, 1983]; no obstante, entre otras referencias utilizadas se encuentran: [Beem, 1996], [Hawking & Ellis, 1973] y [Naber, 1988].

En términos de relatividad general un evento o suceso puede ser influenciado por otro cuando existe una curva causal desde este último al primero. Por ello, dada una variedad M con una geometría particular, el estudio de qué puntos pueden ser conectados mediante curvas causales se convierte una cuestión de gran interés, así como la búsqueda de condiciones que nos permitan afirmar, por ejemplo, la existencia de geodésicas causales entre dos puntos o de geodésicas que sean normales a una subvariedad espacial. Todas estas cuestiones que englobamos con el término de *causalidad en una variedad* son de vital importancia en la prueba del teorema de Penrose así que serán abordadas con detalle a lo largo del presente capítulo donde M denotará siempre una variedad de Lorentz orientable temporalmente de dimensión n .

3.1. Relaciones de causalidad en una variedad

Como punto de partida establecemos las siguientes definiciones sobre los distintos tipos de relaciones existentes entre los puntos de una variedad. Dados $p, q \in M$:

- i) Escribiremos $p \ll q$ si existe una curva temporal hacia el futuro en M desde p hasta q .
- ii) Escribiremos $p < q$ si existe una curva causal hacia el futuro en M de p a q .

Claramente $p \ll q$ implica $p < q$ y escribiremos $p \leq q$ si $p = q$ o $p < q$.

DEFINICIÓN 3.1.1. Con estas relaciones, dado un subconjunto $A \subseteq M$ definimos:

$$I^+(A) := \{q \in M : \text{existe } p \in A \text{ tal que } p \ll q\},$$

denominado *futuro cronológico* y

$$J^+(A) := \{q \in M : \text{existe } p \in A \text{ tal que } p \leq q\},$$

que llamaremos *futuro causal*.

Se tiene de forma clara a partir de las definiciones, la inclusión $A \cup I^+(A) \subseteq J^+(A)$ y las igualdades siguientes, que podrán extenderse al caso causal con J :

$$I^+(p) = \{q \in M : p \ll q\}, \quad I^+(A) = \bigcup_{p \in A} I^+(p).$$

De forma análoga, será posible definir el *pasado cronológico* y el *pasado causal* respectivamente del modo siguiente:

$$I^-(A) := \{p \in M : \text{existe } q \in A \text{ tal que } p \ll q\},$$

$$J^-(A) := \{p \in M : \text{existe } q \in A \text{ tal que } p \leq q\}.$$

Aunque los resultados que siguen se mostrarán y probarán usando los conjuntos futuros, serán igualmente válidos para sus análogos pasados sin más que invertir la orientación temporal elegida en la variedad.

Un ejemplo sencillo que nos permite vislumbrar este tipo de conjuntos es el espacio-tiempo de Minkowski, \mathbb{R}_1^n . Para un punto $p \in \mathbb{R}_1^n$ tendremos que el futuro cronológico será el cono temporal futuro, y para el futuro causal, el cono causal futuro junto con el propio p , esto es:

$$I^+(p) = \{q \in \mathbb{R}_1^4 : \vec{pq} \text{ es temporal hacia el futuro}\},$$

$$J^+(p) = \{q \in \mathbb{R}_1^4 : \vec{pq} \text{ es causal hacia el futuro}\} \cup \{p\}.$$

De forma análoga se tendrá para los respectivos pasados causal y cronológico.

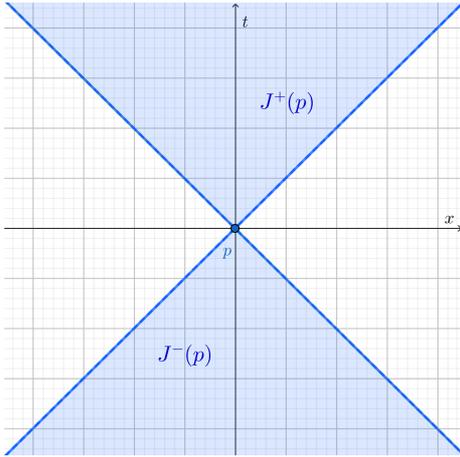


FIGURA 1. Cono causal en el espacio-tiempo de Minkowski con una dimensión espacial, \mathbb{R}_1^2 .

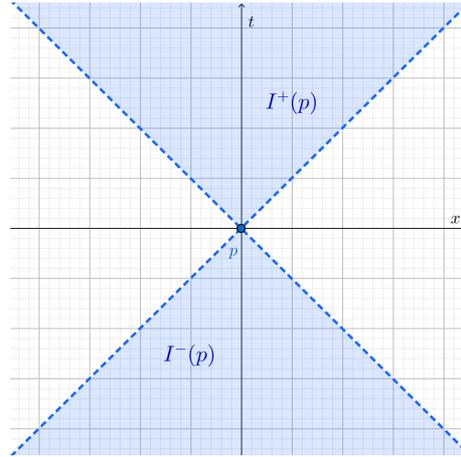


FIGURA 2. Cono cronológico en el espacio-tiempo de Minkowski con una dimensión espacial, \mathbb{R}_1^2 .

La razón de la igualdad entre dichos conjuntos reside en que, como ya se señaló en los preliminares, el espacio-tiempo de Minkowski es un entorno normal de cada uno de sus puntos y se tiene $T_p\mathbb{R}_1^4 \cong \mathbb{R}_1^4$ para cada p . Otro ejemplo de gran sencillez es el cilindro de Lorentz, $S_1^1 \times \mathbb{R}$, donde se tiene la igualdad $J^+(p) = I^+(p) = S_1^1 \times \mathbb{R}$ dado que cualesquiera dos puntos de la variedad se pueden unir mediante una hélice temporal hacia el futuro, tal y como se muestra en la Figura 3. Lo mismo ocurre con el pasado.

Las relaciones definidas anteriormente, tanto “ \ll ” como “ $<$ ”, son transitivas, es decir, si $p_1 \ll (<) p_2$ y $p_2 \ll (<) p_3$, entonces se cumple $p_1 \ll (<) p_3$. Además, presentan cierta propiedad de densidad pues para cualesquiera $p_1, p_2 \in M$ con $p_1 \ll p_2$, existirá $p_3 \in M$ tal que $p_1 \ll p_3 \ll p_2$, e igual para “ $<$ ”. También es cierto lo siguiente:

COROLARIO 3.1.2. *Si bien $p_1 \ll p_2$ y $p_2 \leq p_3$ o bien $p_1 \leq p_2$ y $p_2 \ll p_3$, entonces $p_1 \ll p_3$.*

DEMOSTRACIÓN. Si partimos de $p_1 \ll p_2$ y $p_2 \leq p_3$, uniendo la curva temporal de p_1 a p_2 con la curva causal de p_2 a p_3 tendremos una curva causal de p_1 a p_3 . Ahora, basta aplicar la Proposición 2.10.3 para concluir $p_1 \ll p_3$. El mismo razonamiento es válido para la otra hipótesis. \square

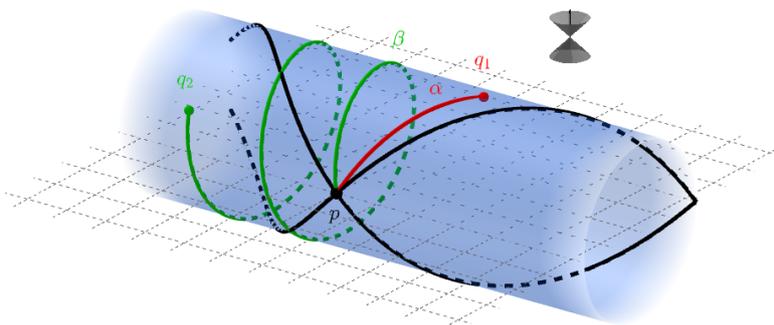


FIGURA 3. Ejemplo gráfico de un cilindro de Lorentz, $S^1 \times \mathbb{R}$, en el que un punto p se conecta con otros dos, q_1 y q_2 , mediante curvas temporales, α y β , respectivamente. Las curvas negras se corresponden con las geodésicas nulas desde p delimitando tanto el futuro como el pasado desde dicho punto. El cono auxiliar indica la orientación del tiempo en la variedad $S^1 \times \mathbb{R}$.

Una consecuencia del resultado anterior junto con la transitividad y densidad, antes mencionadas, es la siguiente cadena de igualdades:

$$I^+(A) = I^+(I^+(A)) = I^+(J^+(A)) = J^+(I^+(A)) \subseteq J^+(J^+(A)) = J^+(A).$$

Ahora, en lugar de considerar la totalidad de la variedad M , dado que cualquier abierto U en M tiene estructura de variedad diferenciable por sí sola, nos podremos restringir a U para definir el futuro cronológico en la subvariedad abierta U ,

$$I^+(A, U) := \{q \in M : \text{existe } p \in A \text{ y } \alpha \text{ curva temporal en } U \text{ de } p \text{ a } q\},$$

y análogamente para el futuro causal en U , $J^+(A, U)$. Claramente, $I^+(A, U) \subseteq U \cap I^+(A)$ lo que cobrará especial relevancia en el caso en que U sea un conjunto convexo tal y como se muestra en el siguiente resultado:

LEMA 3.1.3. *Sea \mathcal{C} un abierto convexo de M , entonces:*

i) Si $p, q \in \mathcal{C}$ con $p \neq q$, se cumple:

$$\begin{aligned} q \in J^+(p, \mathcal{C}) &\iff \vec{pq} \text{ es causal hacia el futuro,} \\ q \in I^+(p, \mathcal{C}) &\iff \vec{pq} \text{ es temporal hacia el futuro.} \end{aligned}$$

ii) $I^+(p, \mathcal{C})$ es un conjunto abierto en \mathcal{C} y, por tanto, también en M .

iii) $J^+(p, \mathcal{C})$ es la clausura¹ de $I^+(p, \mathcal{C})$ en \mathcal{C} .

iv) La relación " \leq " es cerrada en \mathcal{C} , esto es: para cualesquiera sucesiones $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}$, con $\lim_n p_n = p$, $\lim_n q_n = q$ y $q_n \in J^+(p_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se cumple $q \in J^+(p, \mathcal{C})$.

v) Toda curva causal α en un subconjunto compacto² $K \subseteq \mathcal{C}$ es continuamente extendible.

DEMOSTRACIÓN. Para el apartado *i*, de un lado como \vec{pq} es temporal hacia el futuro y la aplicación exponencial en \mathcal{C} es una isometría, tendremos que la geodésica $\sigma_{pq} : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}$ dada por $\sigma_{pq}(t) = (\exp_p \circ \rho)(t)$ donde $\rho(t) := t \vec{pq} \forall t \in [0, 1]$ es una curva temporal hacia el futuro con $\sigma_{pq}(0) = p$ y $\sigma_{pq}(1) = q$ así que $q \in I^+(p, \mathcal{C})$. Para la otra implicación, basta aplicar la Proposición 2.10.8. Para el

¹Dado un subconjunto A de un espacio topológico X , la *clausura* de A se define como la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a A , y el *interior* de A se define como la unión de todos los conjuntos abiertos contenidos en A . La clausura de A se denota por \bar{A} y el interior por $\text{int } A$. \bar{A} será un conjunto cerrado e $\text{int } A$ un conjunto abierto, más aún, $\text{int } A \subseteq A \subseteq \bar{A}$. Si A es cerrado tendremos $A = \bar{A}$ y si es abierto $A = \text{int } A$.

²Aunque ya se definió anteriormente la noción de conjunto compacto en un espacio topológico cualquiera; en variedades, existe otra caracterización de compacidad más operativa y será con la que trabajaremos más adelante. Esta es: un subconjunto K de un espacio topológico es compacto si toda sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en K admite una subsucesión $\{x_m\} \subseteq \{x_n\}$ convergente a un punto de K , es decir, $\lim_m x_m = x \in K$.

caso de $J^+(p, \mathcal{C})$, se aplica el mismo razonamiento intercambiando “temporal” por “causal”.

Para el apartado *ii*, dado $p \in \mathcal{C}$ como \mathcal{C} es, por definición, entorno normal de todos sus puntos consideramos $\tilde{\mathcal{C}} := \exp_p^{-1}(\mathcal{C})$. Por el apartado *i*, $I^+(0, \tilde{\mathcal{C}}) = \{v \in \tilde{\mathcal{C}} \subseteq T_p M : \langle v, v \rangle < 0\}$, es decir, es la contraimagen del intervalo $(-\infty, 0) \subseteq \mathbb{R}$ por la aplicación que a cada $v \in T_p M$ asocia $\langle v, v \rangle$, que es continua. Así, concluimos que $I^+(p, \mathcal{C})$ es abierto. De forma similar, como la aplicación \exp_p es una isometría en $\tilde{\mathcal{C}}$ y $J^+(0, \tilde{\mathcal{C}}) = \overline{I^+(0, \tilde{\mathcal{C}})}$ en $T_p M \cong \mathbb{R}_1^n$ entonces se tiene *iii*.

Para probar *iv*, se emplea *i* y *f*, la siguiente composición de aplicaciones continuas (ver Lema 2.8.6),

$$\begin{aligned} f: \mathcal{C} \times \mathcal{C} &\longrightarrow TM \longrightarrow \mathbb{R} \\ (p, q) &\longmapsto \vec{pq} \longmapsto \langle \vec{pq}, \vec{pq} \rangle. \end{aligned}$$

Por hipótesis, $\lim_n (p_n, q_n) = (p, q)$ y $f(p_n, q_n) \in (-\infty, 0] \forall n \in \mathbb{N}$, por lo que $f(p, q) \in (-\infty, 0]$ o lo que es lo mismo \vec{pq} es causal hacia el futuro.

Finalmente, para el ítem *v* sea una curva causal $\alpha : [0, B) \rightarrow K \subseteq \mathcal{C}$, $B \leq \infty$, y $\{s_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ con $\lim_i s_i = B$. Como K es compacto, se puede tomar una subsucesión $\{s_j\} \subseteq \{s_i\}$ tal que $\lim_j \alpha(s_j) = p \in K$. Habrá que ver que para cualquier $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq [0, B)$ con $\lim_i t_i = B$, $\lim_i \alpha(t_i) = p$. Supongamos que $\lim_i \alpha(t_i) = q \neq p$, como α es causal tendremos que $p \in J^+(q, \mathcal{C})$ y $q \in J^+(p, \mathcal{C})$, es decir, \vec{pq} es causal hacia el futuro y hacia el pasado así que la única posibilidad es $\vec{pq} = 0$ y $p = q$. \square

Aunque los resultados del lema anterior no son necesariamente válidos para cualquier variedad M , cuando no nos restringimos a un conjunto convexo \mathcal{C} , sí que será cierta una versión más “fuerte” del ítem *ii* tal y como se muestra en el siguiente lema.

LEMA 3.1.4. *Para cualesquiera $p, q \in M$ con $p \ll q$ existen entornos abiertos U y V de p y q , respectivamente, tales que $p' \ll q'$ para todos $p' \in U$ y $q' \in V$.*

DEMOSTRACIÓN. Dado que $p \ll q$, existe una curva temporal α desde p hasta q . Consideremos dos abiertos convexos disjuntos \mathcal{C} y \mathcal{C}' entornos de p y q respectivamente. Como α es continua, existirá $p^+ \in \mathcal{C}$ en α después de p y $q^- \in \mathcal{C}'$ en α antes que q . Entonces, $p \in I^-(p^+, \mathcal{C})$ y por el Lema 3.1.3 anterior $I^-(p^+, \mathcal{C})$ es abierto en M al igual que $I^+(q^-, \mathcal{C}')$ cumpliendo $q \in I^+(q^-, \mathcal{C}')$. Por tanto, dichos abiertos satisfacen las condiciones de los U y V que buscábamos. \square

El lema anterior pone de manifiesto la relación existente entre la causalidad y la topología de una variedad M pues los futuros cronológicos serán siempre conjuntos abiertos en M . Es por ello por lo que muchos de los resultados y conclusiones que alcanzaremos a lo largo del capítulo estarán basados en las herramientas y aparato técnico que ofrece esta rama de las matemáticas, esto es la *topología diferencial*. No obstante, no siempre será cierto que $J^+(p)$ sea un conjunto cerrado³ tal y como se muestra en la Figura 4. Lo que sí será cierto son las dos propiedades del Lema 3.1.5 siguiente.

LEMA 3.1.5. *Sea $A \subseteq M$ un subconjunto, se verifica:*

- i) $\text{int } J^+(A) = \overline{I^+(A)}$.*
- ii) $J^+(A) \subseteq \overline{I^+(A)}$, dándose la igualdad “=” si y solo si $J^+(A)$ es cerrado.*

DEMOSTRACIÓN. Como $I^+(A) \subseteq J^+(A)$ y $I^+(A)$ es abierto, entonces $I^+(A) \subseteq \text{int } J^+(A)$. De otro lado, si $q \in \text{int } J^+(A)$, por definición, existe un entorno abierto U de q , tal que $U \subseteq J^+(A)$. Reduciéndolo aún más si fuera preciso, conseguimos un entorno abierto convexo \mathcal{C} de q en $J^+(A)$. Por ende, el abierto $I^-(q, \mathcal{C})$ contiene algún punto de $J^+(A)$ distinto de q y tendremos que $q \in I^+(J^+(A)) = I^+(A)$.

Para *ii*, probaremos $J^+(p) \subseteq \overline{I^+(p)}$ para un solo punto a partir de lo cual se deduce para cualquier conjunto A . Para empezar, todo entorno de p interseca al conjunto $I^+(p)$ por lo que $p \in \overline{I^+(p)}$. Sea

³Aunque ya definimos lo que es un conjunto cerrado al inicio del trabajo, existe otra caracterización que será de gran utilidad de ahora en adelante: Sea F un subconjunto de un espacio topológico X , F es un conjunto cerrado si se verifica que si una sucesión $\{x_n\}$ en F converge a un punto x , entonces $x \in F$.

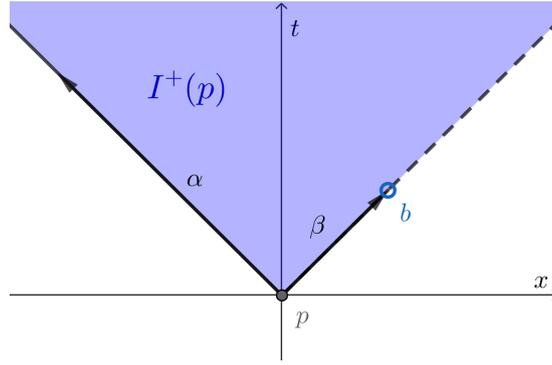


FIGURA 4. Espacio-tiempo de Minkowski con una coordenada espacial y menos el punto $b = (1, 1)$, esto es $\mathbb{R}_1^2 - \{b\}$. Tomando p el origen, $I^+(p)$ coincide con el cono cronológico futuro tal y como se vio en la Figura 2. Sin embargo, al haber “borrado” el punto b , ninguna curva causal desde p alcanzará los puntos de la línea discontinua y el futuro causal $J^+(p)$ consiste en $I^+(p)$ junto con los puntos de las geodésicas nulas α y β . Es claro, por tanto, que en este caso $J^+(p)$ no es un conjunto cerrado.

$q \in J^+(p)$ con $p < q$ y α una curva causal hacia el futuro de p a q . Tomemos \mathcal{C} un abierto convexo entorno de q y un punto q^- en α antes de llegar a q tal que $q^- \in \mathcal{C}$, así $q \in J^+(q^-, \mathcal{C}) \subseteq \overline{I^+(q^-, \mathcal{C})}$ teniendo en cuenta el Lema 3.1.3. Pero como se tiene:

$$I^+(q^-, \mathcal{C}) \subseteq I^+(q^-) \cap \mathcal{C} \subseteq I^+(J^+(p)) \subseteq I^+(p),$$

concluimos el enunciado. El caso cerrado es claro a partir de la definición de clausura. \square

Una consecuencia del Teorema 2.10.2 es el siguiente corolario que será de gran utilidad posteriormente.

COROLARIO 3.1.6. *Sea A un subconjunto de una variedad de Lorentz M y α una curva causal hacia el futuro desde A a un punto $q \in J^+(A) - I^+(A)$. Entonces, α es una geodésica nula sin puntos conjugados antes de q y no corta a $I^+(A)$.*

3.2. Quasi-límite de curvas causales

Dada la importancia inherente de las curvas diferenciables a trozos sobre una variedad de Lorentz M para el estudio de la causalidad en dicha variedad o espacio-tiempo parece lógico intentar establecer cierta noción de límite para una sucesión de este tipo de curvas. No obstante, por la dificultad que entraña garantizar la diferenciabilidad de un supuesto límite, nos quedaremos en un artificio más débil que asegura una geodésica a trozos como límite aproximado y en relación a un recubrimiento por abiertos convexos de la variedad. Esta última característica es la que nos permitirá reducir el estudio de propiedades de causalidad global al ámbito local, más sencillo, y aprovechar las ventajas de los abiertos convexos.

DEFINICIÓN 3.2.1. Dada una variedad de Lorentz M , sea $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de curvas causales hacia el futuro en M y \mathfrak{R} un recubrimiento convexo de M . Llamaremos *sucesión límite* de $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ relativa a \mathfrak{R} a toda sucesión finita o infinita $p_0 < p_1 < p_2 < \dots$ en M verificando las siguientes propiedades:

- **QL1:** Para cada p_i existe una subsucesión $\{\alpha_m\} \subseteq \{\alpha_n\}$ de forma que para cada $m \in \mathbb{N}$ existen valores reales $s_{m0} < s_{m1} < s_{m2} < \dots < s_{mi}$ tales que
 - i) $\lim_m \alpha_m(s_{mj}) = p_j$ para todo $j \leq i$.
 - ii) Para cada $j < i$ y para cada m , los puntos p_j, p_{j+1} y los segmentos de curva $\alpha_m|_{[s_{m,j}, s_{m,j+1}]}$ están contenidos solo en un conjunto abierto convexo $\mathcal{C}_j \in \mathfrak{R}$.
- **QL2:** Si la sucesión $\{p_i\}$ es infinita, es no convergente; y si es finita, tiene más de dos puntos y posee el máximo número de puntos verificando **QL1**.

En vistas de la definición anterior, la idea de límite procede de la condición **QL1i**; **QL2** es un elemento técnico y **QL1ii** permitirá trabajar localmente en entornos abiertos convexos disfrutando, entre otras, de las ventajas que nos brindan las propiedades del Lema 3.1.3. Para la existencia de una sucesión límite

$\{p_i\}$ en términos de la Definición 3.2.1 anterior, serán suficientes, tal y como se expone en la Proposición 3.2.2 siguiente, las siguientes dos condiciones:

- i) La sucesión $\{\alpha_n(0)\}$ es convergente a un punto p .
- ii) Existe un entorno de p que contiene únicamente y de forma íntegra un número finito de las curvas $\{\alpha_n\}$. Lo denotaremos escribiendo $\alpha_n \rightarrow p$.

Con la sucesión límite ya construida, será posible conectar mediante segmentos de geodésicas cada p_i con p_{i+1} consiguiendo así los denominados *quasi-límites*. La prueba del siguiente resultado es de un marcado carácter técnico, por lo que se plantea el enunciado, que asegura la existencia de sucesiones límite bajo las condiciones anteriores, dejando su demostración al lector interesado en el Apéndice A.

PROPOSICIÓN 3.2.2. *Sea $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de curvas causales hacia el futuro en una variedad de Lorentz M tal que $\lim_n \alpha_n(0) = p$ y $\alpha_n \rightarrow p$. Entonces, para cada recubrimiento convexo \mathfrak{R} de M , existe una sucesión límite de $\{\alpha_n\}$ relativa a \mathfrak{R} y que comienza en p , en términos de la Definición 3.2.1.*

En estos términos, si $\{p_n\}$ es una sucesión límite para una sucesión de curvas $\{\alpha_n\}$, sea λ_i la geodésica única de p_i a p_{i+1} contenida en el convexo \mathcal{C}_i del recubrimiento. Uniendo todos los segmentos de geodésica λ_i obtenemos $\lambda := \sum \lambda_i$, una geodésica a trozos que denominaremos *quasi-límite* de $\{\alpha_n\}$ relativo a p_i . Se tendrá que λ es causal hacia el futuro con origen en p , siendo inextensible en el caso en que $\{p_i\}$ sea infinita y acabando en p_k en el caso en que $\{p_i\}$ sea finita con $p_0 < \dots < p_k$.

El quasi-límite λ de una sucesión de curvas $\{\alpha_n\}$ inextensibles hacia el futuro es inextensible hacia el futuro. Esto se puede deducir de la demostración de la Proposición 3.2.2 (Apéndice A) pues se obtendrá siempre, en estas condiciones, una sucesión límite infinita. No obstante, el recíproco no es cierto en general, como se puede intuir del siguiente ejemplo.

En \mathbb{R}_1^2 consideremos la sucesión $\{\alpha_n\}$ tal que para cada n , α_n es el segmento uniendo el origen $(0, 0)$ con el punto $(n, n + 1/n)$. Es fácil ver que cualquier sucesión límite para dichos segmentos quedará en la geodésica nula $\lambda(s) = (s, s)$, $s \geq 0$. Así pues, λ es el único quasi-límite comenzando en $(0, 0)$ siendo inextensible hacia el futuro. Nótese también que si borráramos el punto $(1, 1)$ de la variedad \mathbb{R}_1^2 , el quasi-límite comenzando en $(0, 0)$ se vería reducido a $\beta := \lambda|_{[0,1]}$ siendo esta última inextensible e incompleta. En este último caso, solo intervienen los segmentos iniciales cada vez más pequeños de las curvas α_n , para obtener β .

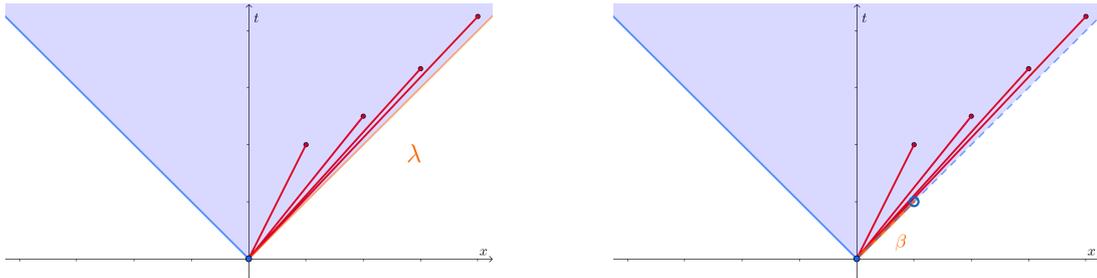


FIGURA 5. Representación gráfica de la sucesión segmentos $\{\alpha_n\}$ en \mathbb{R}_1^2 (izda) y en $\mathbb{R}_1^2 - \{(1, 1)\}$ (dcha).

3.3. Condiciones de causalidad

A la hora de trabajar con una variedad de Lorentz M que represente un espacio-tiempo, será importante establecer qué condiciones topológicas han de satisfacerse para evitar que ocurran paradojas como pueden ser los viajes en el tiempo, es decir, aquellos en los que se retroceda a algún punto del pasado. Este es el caso de la *condición cronológica*, la cual se verifica cuando no existen curvas temporales cerradas, esto es que empiezan y terminan en el mismo punto. En otras palabras, no existe ningún p en M tal que $p \ll p$. Comenzaremos por ver que, precisamente porque esta condición no se cumple en variedades diferenciables compactas, no será interesante trabajar con espacios-tiempo de este tipo:

LEMA 3.3.1. *Si M es compacto, existe una curva temporal cerrada en M .*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el recubrimiento abierto de M dado por $\{I^+(p)\}_{p \in M}$. Como M es compacto existe $\{p_1, \dots, p_k\}$ tales que $M = \bigcup_{j=1}^k I^+(p_j)$. Ahora sea $i(1) \in \{1, \dots, k\}$ tal que $p_1 \in I^+(p_{i(1)})$, $i(2) \in \{1, \dots, k\}$ tal que $p_{i(1)} \in I^+(p_{i(2)})$ y así sucesivamente. Así definidos, se tiene $p_{i(1)} \gg p_{i(2)} \gg p_{i(3)} \gg \dots$ y como el conjunto en que se toman los índices es finito llegará un punto en que un $i(n) \in \{1, \dots, k\}$ se repita y por transitividad $p_{i(n)} \in I^+(p_{i(n)})$, esto es, existe una curva temporal cerrada en $p_{i(n)}$. \square

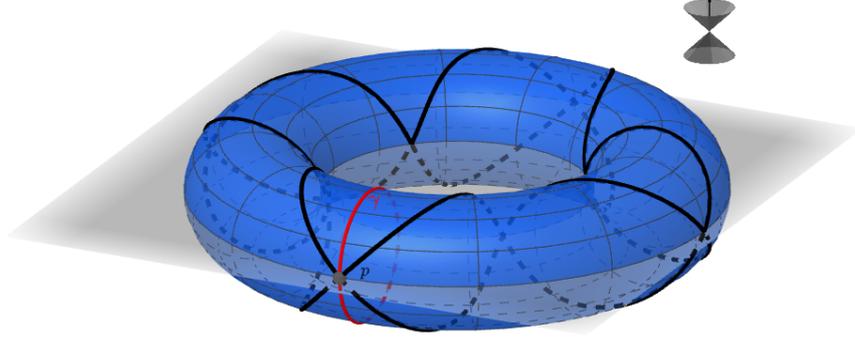


FIGURA 6. Ejemplo gráfico de un toro de Lorentz, $S^1 \times S^1$. Se trata de una variedad diferenciable compacta y, en virtud del Lema 3.3.1, existirán curvas causales cerradas tal y como se ejemplifica con la curva γ , la cual es cerrada en el punto p . Las curvas negras se corresponden con las geodésicas nulas en $S^1 \times S^1$, delimitando $J^\pm(p)$ y $I^\pm(p)$; y que, como en el caso del cilindro (Figura 3), coincide con toda la variedad. El cono auxiliar indica la orientación temporal de la variedad.

La condición cronológica podrá extenderse a las curvas causales dando lugar a la *condición de causalidad*, es decir, dicha condición se verificará cuando no existan curvas causales cerradas en nuestra variedad. En otras palabras, no existe ningún punto p en la variedad tal que $p < p$. Por lo tanto, una variedad en que se satisface la condición de causalidad verificará automáticamente la condición cronológica, no obstante, el recíproco no es cierto en general. Diremos que dichas condiciones se cumplen en un punto p , si no existen las correspondientes curvas cerradas pasando por p ; y en un subconjunto A , si se verifican para cada $p \in A$.

Podemos definir además una condición aún más fuerte en relación a la existencia de curvas causales en las cercanías de un punto p de la variedad:

DEFINICIÓN 3.3.2 (Condición de causalidad fuerte). La *condición de causalidad fuerte* se satisface en $p \in M$ si para cualquier entorno U de p , existe otro entorno $V \subseteq U$ de p de manera que todo segmento de curva causal con extremos en V permanece íntegramente en U .

Dicho de otra forma, lo que la definición anterior expresa es que toda curva causal que tenga su origen arbitrariamente cerca de p (en V) y que salga de cierto entorno de p (de U) no podrá volver a las cercanías de p . Diremos entonces que no existen curvas causales “casi cerradas”. Así, si existiera una curva causal cerrada α en p contenida en un conjunto donde se cumpla la condición de causalidad fuerte, basta considerar U un entorno de p de forma que α quede fuera de U en algunos de sus puntos. Como el origen y extremo final de α coinciden en p y, de forma obvia, este punto estará dentro de cualquier entorno $V \subseteq U$ de p en las condiciones de la definición anterior (es decir, las curvas con extremos en V deberán quedar dentro de U enteramente), es imposible que haya curvas causales cerradas a través de p . Esto significa que la condición de causalidad fuerte implica la condición de causalidad como se deja entrever por sus nombres. Sin embargo, el recíproco no es cierto tal y como se muestra en la Figura 7.

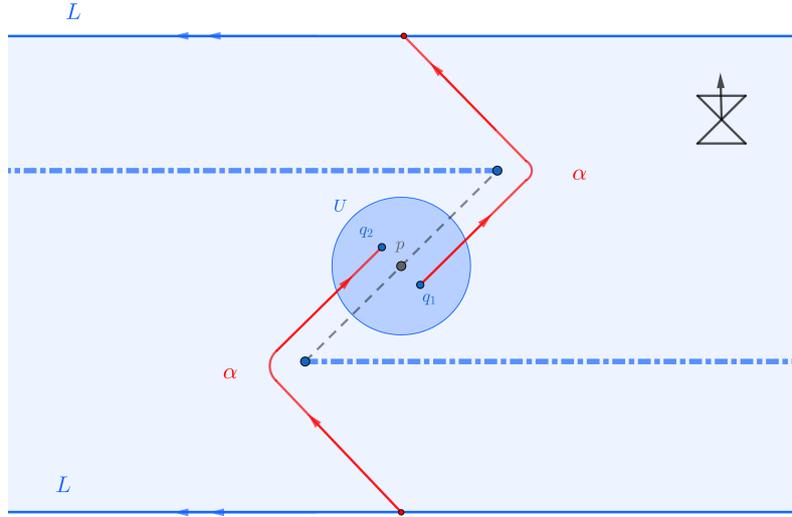


FIGURA 7. Cilindro de Lorentz $S^1 \times \mathbb{R}$ desarrollado, en el que se identifican las dos rectas L y donde se han eliminado dos semirrectas (líneas punteadas azules). El gráfico muestra cómo se satisface la condición de causalidad en p ya que no existen curvas causales cerradas en dicho punto. La razón es que desde p las curvas causales no pueden sobrepasar las semirrectas eliminadas. Sin embargo, al tomar cualquier entorno abierto de p , por ejemplo U en la figura, existe una curva causal con extremos en U abandonando dicho abierto, es el caso de α desde q_1 a q_2 . Es por ello por lo que la condición de causalidad fuerte no se cumple en esta construcción. El cono auxiliar indica la orientación temporal de la variedad.

El hecho de que una variedad cumpla la condición de causalidad fuerte tiene importantes consecuencias técnicas que, más adelante, se utilizarán en la prueba de ciertas propiedades estrechamente relacionadas con una de las hipótesis del teorema de singularidad de Penrose. Así pues, se tienen los siguientes dos lemas.

LEMA 3.3.3. *Sea K un subconjunto compacto de una variedad M verificando la condición de causalidad fuerte. Si α es una curva causal inextensible hacia el futuro y que comienza en K , existe un punto en el que α abandona K para nunca regresar a dicho conjunto, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\alpha(t) \notin K$ para todo $t \geq t_0$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que el enunciado es falso, es decir, que α permanece encerrada en el conjunto K o entra y sale constantemente. Podemos, por tanto, suponer que el dominio de definición de α es $[0, B) \subseteq \mathbb{R}$ con $B \leq \infty$ y existirá una sucesión $\{s_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ con $\lim_i s_i = B$ tal que $\{\alpha(s_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ está contenida en K y converge a un punto $p \in K$, por ser dicho conjunto compacto.

Como, por hipótesis, la curva α es inextensible, deberá existir otra sucesión $\{t_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ con $\lim_j t_j = B$ y tal que $\lim_j \alpha(t_j) \neq p$. Así, es posible encontrar un entorno abierto U de p de manera que no contenga a ninguno de los $\alpha(t_j)$ (pasando a una subsucesión si fuera necesario) y $V \subseteq U$ otro entorno abierto de p en términos de la Definición 3.3.2, es decir, verificando que las curvas con extremos en V permanecen enteramente en U . Además, como ambas sucesiones $\{s_i\}$ y $\{t_j\}$ convergen al mismo límite podemos hallar subsucesiones, llamadas de la misma forma por simplificar la notación, que alternen, es decir, $s_1 < t_1 < s_2 < t_2 < \dots$. Por lo tanto, para un i suficientemente grande el segmento $\alpha|_{[s_i, s_{i+1}]}$ tiene extremos en V pero sale de U pues $\alpha(t_i) \notin U$. Este hecho contradice la condición de causalidad fuerte en K . \square

LEMA 3.3.4. *Sea K un subconjunto compacto de una variedad M verificando la condición de causalidad fuerte. Sea $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de segmentos causales hacia el futuro en K tal que $\lim_n \alpha_n(0) = p$ y $\lim_n \alpha_n(1) = q$, con $q \neq p$. Existe, entonces, una geodésica a trozos λ causal hacia el futuro de p a q y*

una subsucesión $\{\alpha_m\} \subseteq \{\alpha_n\}$ tal que el límite de las longitudes de las curvas α_m es menor o igual a la longitud de λ , es decir, $\lim_m L(\alpha_m) \leq L(\lambda)$.

DEMOSTRACIÓN. Usando la Proposición 3.2.2 sabemos que existe una sucesión límite $\{p_i\}$ para las curvas α_n comenzando en p . Si $\{p_i\}$ es infinita, el quasi-límite λ correspondiente a $\{p_i\}$ será una curva causal inextendible hacia el futuro por lo que nos encontramos en condiciones de aplicar el Lema 3.3.3 y λ deberá abandonar K en algún punto para nunca regresar. En particular, existirá algún $p_i \notin K$ y, por ende, algún α_n abandona K , contradiciendo la hipótesis que afirma que las curvas α_n están en K .

Concluimos así que la sucesión $\{p_i\}$ es finita comenzando en p y acabando en q . Así pues, el quasi-límite λ asociado será una geodésica causal a trozos, donde cada segmento $\lambda_{p_i, p_{i+1}}$ y $\alpha_m|_{[s_{m,i}, s_{m,i+1}]}$ está en un abierto convexo \mathcal{C}_i . Por ello, dada la Proposición 2.10.8, se cumple la siguiente desigualdad donde denotamos $p_{m,i} = \alpha_m(s_{m,i})$:

$$L(\alpha_m|_{[s_{m,i}, s_{m,i+1}]}) \leq |\overrightarrow{p_{m,i} p_{m,i+1}}|.$$

Así que sumando para todo i :

$$L(\alpha_m) \leq L_m = \sum_i |\overrightarrow{p_{m,i} p_{m,i+1}}|$$

Finalmente, como la aplicación Δ que asocia a $(p, q) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}$, donde \mathcal{C} convexo, el vector $\overrightarrow{pq} \in T_p M \subseteq TM$ es continua (Lema 2.8.6) y la norma también lo es concluimos:

$$\lim_m L(\alpha_m) \leq \sum_i \lim_m |\overrightarrow{p_{m,i} p_{m,i+1}}| = \sum_i |\Delta(\lim_m \alpha_m(s_{m,i}), \lim_m \alpha_m(s_{m,i+1}))| = \sum_i |\overrightarrow{p_i p_{i+1}}| = L(\lambda).$$

□

3.4. Separación temporal

DEFINICIÓN 3.4.1 (**Separación temporal**). Sean $p, q \in M$, la *separación temporal* $\tau(p, q)$ de p a q se define como

$$\tau(p, q) := \sup\{L(\alpha) : \alpha \text{ es un segmento de curva causal hacia el futuro de } p \text{ a } q\}.$$

donde $L(\alpha)$ es la longitud de arco tal y como se define en la Definición 2.10.6. Escribiremos $\tau(p, q) = +\infty$ si el conjunto anterior no está acotado superiormente y $\tau(p, q) = 0$ si es vacío, es decir, si $q \notin J^+(p)$.

Obsérvese que $\tau(p, q) > 0$ si y solo si $p \ll q$ pues, en efecto, si $\tau(p, q) > 0$ existe una curva causal hacia el futuro α con $L(\alpha) > 0$ y, por ello, no será una geodésica nula. Por la Proposición 2.10.3 concluimos $p \ll q$. El recíproco es trivial a partir de la definición.

En el caso en que el supremo se alcance podremos pensar en la separación temporal entre dos puntos $p, q \in M$ con $p \leq q$ como el tiempo propio invertido en el camino más lento para ir de p a q . Nótese la diferencia frente a la distancia d en variedades riemannianas donde, al contrario, se minimiza la separación entre dos puntos.

Como ejemplo sencillo, en el espacio-tiempo de Minkowski donde toda la variedad es entorno normal de cada punto, la geodésica radial σ_{pq} de p a q con $p \leq q$ es la curva temporal única de longitud máxima entre dichos puntos y, por tanto, se verifica $\tau(p, q) = |\overrightarrow{pq}|$ (ver Proposición 2.10.8).

Será interesante establecer condiciones suficientes para poder decidir qué variedades o espacios-tiempos verifican esta propiedad. De nuevo por su carácter técnico, la prueba del siguiente resultado se dejará para el Apéndice A.

LEMA 3.4.2. La función separación temporal $\tau : M \times M \rightarrow [0, +\infty]$ es semicontinua inferiormente⁴.

⁴Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ de un espacio topológico X en \mathbb{R} es *semicontinua inferiormente* en un punto $x_0 \in X$ si para todo $\delta > 0$ existe un entorno abierto U de x_0 tal que $f(x) > f(x_0) - \delta$ para todo $x \in U$ ([Stromberg, 1981]).

Dados dos subconjuntos A y B de una variedad de Lorentz M es posible definir la separación temporal $\tau(A, B)$ entre ellos como el supremo de la separación temporal de un punto de A a otro de B , es decir,

$$\tau(A, B) = \sup\{\tau(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Con esta definición y a partir del Lema 3.4.2 anterior, tendremos que las aplicaciones dadas por $x \mapsto \tau(x, B)$ y $z \mapsto \tau(A, z)$ son semicontinuas inferiormente.

A continuación, tal y como se mencionaba anteriormente, se establecen condiciones suficientes para la existencia de una geodésica causal de longitud máxima de p a q , puntos cualesquiera de una variedad M . Para ello, será conveniente introducir el conjunto

$$J(p, q) := J^+(p) \cap J^-(q),$$

siendo el más pequeño incluyendo todas las curvas causales hacia el futuro desde p hasta q . Es claro, por tanto, que dicho conjunto $J(p, q)$ es vacío a menos que $p \leq q$.

PROPOSICIÓN 3.4.3. *Sean p y q son dos puntos de una variedad de Lorentz M con $p < q$. Si el conjunto $J(p, q)$ es compacto y se verifica en él la condición de causalidad fuerte, existe una geodésica causal de p a q de longitud $\tau(p, q) < +\infty$.*

DEMOSTRACIÓN. Como $p < q$ se tiene $\tau(p, q) \geq 0$. Será preciso probar por tanto que $\tau(p, q) < +\infty$ y que dicho supremo se alcanza, esto es que existe una curva causal de p a q con longitud $\tau(p, q)$. Sea $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de segmentos causales de p a q cuya longitud converge a $\tau(p, q)$ que, a priori, puede ser finito o infinito. Todos los segmentos causales α_n se encuentran en el conjunto $J(p, q)$, que es compacto y verifica la condición de causalidad fuerte. Podemos aplicar, por tanto, el Lema 3.3.4 concluyendo así que

$$(3.4.1) \quad \lim_n L(\alpha_n) = \tau(p, q) \leq L(\lambda) < +\infty,$$

donde λ es una geodésica causal a trozos de p a q . No obstante, si λ no fuera un único segmento sino que tuviera algún vértice habría una curva causal de p a q más larga que λ (Proposición 2.10.3) pero eso es imposible por la Ecuación (3.4.1) y la definición de τ . Así, λ es un segmento geodésico causal de p a q con $L(\lambda) = \tau(p, q) < +\infty$. \square

A raíz de la Proposición 3.4.3 anterior, se introduce una nueva condición de causalidad: una variedad diferenciable M será *globalmente hiperbólica* siempre y cuando satisfaga la condición de causalidad fuerte y para cualesquiera $p, q \in M$ con $p < q$ el conjunto $J(p, q)$ es compacto. Con lo visto anteriormente, en estas variedades tendremos que para todos aquellos puntos que se puedan conectar mediante una curva causal existirá una geodésica causal entre ellos de longitud máxima. Esta propiedad posibilita ciertas construcciones con geodésicas que hace especialmente interesante trabajar con espacios-tiempos globalmente hiperbólicos.

Un ejemplo es el espacio-tiempo de Minkowski, \mathbb{R}_1^n , en el que se puede apreciar que el hecho de eliminar algún punto de \mathbb{R}_1^n puede echar a perder la hiperbolicidad global al acabar con la compacidad de alguno de los conjuntos $J(p, q)$ tal y como se aprecia en la siguiente Figura 8. Con objeto de debilitar las restrictivas condiciones anteriores, aparece la siguiente definición donde se limita la propiedad de ser globalmente hiperbólico a un subconjunto H de la variedad:

DEFINICIÓN 3.4.4. Sea H un subconjunto de una variedad de Lorentz M . Diremos que H es globalmente hiperbólico si cumple las siguientes dos condiciones:

- i) La condición de causalidad fuerte se verifica en H .
- ii) Para todos $p, q \in H$ con $p < q$, el conjunto $J(p, q)$ es compacto y está contenido en H .

Evidentemente, la propiedad de que un conjunto H sea globalmente hiperbólico no es intrínseco a dicho conjunto sino que dependerá en gran medida de la estructura causal que presenta la variedad M que lo contiene. Tal y como se venía diciendo anteriormente, cualesquiera dos puntos de estos conjuntos

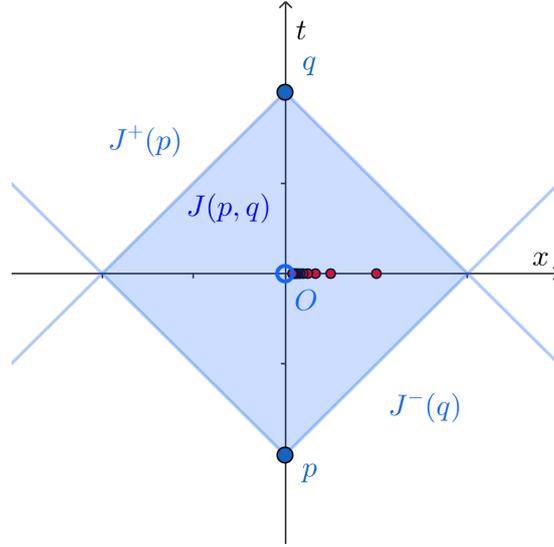


FIGURA 8. Espacio-tiempo de Minkowski con una única coordenada espacial y menos el origen de coordenadas $O = (0, 0)$, es decir, $\mathbb{R}_1^2 - \{(0, 0)\}$. Al haber eliminado el origen de coordenadas O , el conjunto $J(p, q)$ deja de ser compacto. Prueba de ello es que la sucesión $\{(0, 1/n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ (puntos rojos) no converge a ningún punto de la variedad así como ninguna de sus subsucesiones pues todas convergen al punto O y este no se encuentra en nuestro espacio-tiempo. De este modo, por ejemplo los puntos p y q ya no podrán ser unidos mediante un segmento de geodésica causal.

se pueden unir mediante una geodésica; además, otras dos propiedades de importancia son las que se muestran en los dos resultados siguientes.

LEMA 3.4.5. *Sea U un conjunto abierto globalmente hiperbólico en una variedad de Lorentz M . Entonces, la aplicación separación temporal τ es continua en $U \times U$.*

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, por la Proposición 3.4.3 y el Lema 3.4.2 sabemos, respectivamente, que la función τ es finita en $U \times U$ (i.e. $\tau : U \times U \rightarrow [0, +\infty)$) y es semicontinua inferiormente. Solo queda ver que τ también es semicontinua superiormente⁵ para terminar probando que es continua. Supongamos lo contrario, es decir, que para cierto $(p, q) \in U \times U$ existe $\delta > 0$ y existen sucesiones en U , $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con $\lim_n p_n = p$ y $\lim_n q_n = q$, tales que $\tau(p_n, q_n) \geq \tau(p, q) + \delta$. Como $\tau(p_n, q_n) > 0$ debe haber alguna curva causal de p_n a q_n , que llamaremos α_n , cuya longitud verifica $L(\alpha_n) > \tau(p_n, q_n) - 1/n$.

Como U es abierto al igual que $I^-(p)$ y $I^+(q)$ podremos hallar $q^+, p^- \in U$ tales que $p^- \ll p$ y $q \ll q^+$. De este modo, podemos suponer que las sucesiones $\{q_n\}$ y $\{p_n\}$ están en $I^-(q^+)$ y $I^+(p^-)$, respectivamente (si no pasara, bastaría tomar un q^+ posterior o un p^- anterior en el abierto U). Ahora, como U es globalmente hiperbólico, podemos aplicar el Lema 3.3.4 en el compacto $J(p^-, q^+)$ concluyendo así que existe una geodésica causal λ de p a q verificando

$$L(\lambda) \geq \lim_n L(\alpha_n) > \lim_n (\tau(p_n, q_n) - 1/n) \geq \tau(p, q) + \delta - \lim_n 1/n = \tau(p, q) + \delta.$$

Pero esto último contradice la definición de τ . Llegamos así a un absurdo, luego τ es semicontinua superiormente. \square

LEMA 3.4.6. *Dado $U \subseteq M$ un conjunto abierto y globalmente hiperbólico, la relación de causalidad " \leq " en M es cerrada en U , esto es, para cualesquiera sucesiones en U convergentes $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tales que $p = \lim_n p_n$ y $q = \lim_n q_n$ con $q_n \in J^+(p_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $q \in J^+(p)$.*

⁵Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ de un espacio topológico X en \mathbb{R} es *semicontinua superiormente* en un punto $x_0 \in X$ si para todo $\delta > 0$ existe un entorno abierto U de x_0 tal que $f(x) < f(x_0) + \delta$ para todo $x \in U$. Es claro, a partir de las definiciones anteriores, que si una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es semicontinua inferior y superiormente en $x_0 \in X$, f es continua pues para cualquier $\delta > 0$, existirá un entorno U de x_0 verificando $|f(x) - f(x_0)| < \delta$, $\forall x \in U$. [Stromberg, 1981]

DEMOSTRACIÓN. Si $p_n = q_n$ para $n \in I \subseteq \mathbb{N}$ con I incluyendo un número infinito de elementos, se cumple $p = q$. Para verlo basta tener en cuenta que las subsucesiones de una sucesión convergente convergen al mismo límite y considerar la subsucesión formada por los elementos cuyo índice está en I . Por lo tanto, supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}$, $p_n < q_n$. Sea α_n una curva causal de p_n a q_n , razonando como en la prueba del Lema 3.4.5 anterior tendremos que la sucesión de curvas $\{\alpha_n\} \subseteq J(p^-, q^+)$ para ciertos $p^-, q^+ \in U$ con $p^- \ll p$ y $q^+ \ll q$. Como U es globalmente hiperbólico, podremos aplicar nuevamente el Lema 3.3.4 brindándonos una curva causal λ de p a q (i.e. $p < q$) con lo que concluimos el resultado. \square

Como consecuencia inmediata del lema anterior se deduce el siguiente corolario:

COROLARIO 3.4.7. *Sea M una variedad globalmente hiperbólica. Para cualesquiera $p, q \in M$ con $p \leq q$, los conjuntos $J^+(p)$, $J^-(q)$ y $J(p, q)$ son cerrados.*

3.5. Conjuntos acronales

Diremos que un subconjunto A de una variedad de Lorentz es *acronal* si no existe ninguna curva temporal uniendo ninguno de sus puntos, es decir, para cualesquiera $p, q \in A$ no se cumple $p \ll q$ y cualquier curva temporal en M solo podrá intersecar A una sola vez, en caso de que lo haga. En particular, en los conjuntos acronales se cumplirá la condición cronológica. Además, cualquier subconjunto de un conjunto acronal es también acronal así como la clausura \bar{A} de un conjunto acronal A . Esto último es debido a que si existiera $p, q \in \bar{A}$ con $p \ll q$, por el Lema 3.1.4 existirían entornos abiertos en M , U y V de p y q , respectivamente, tales que $p' \ll q'$ para todos $p' \in U$ y $q' \in V$. Dado que todo entorno abierto de puntos de \bar{A} tiene intersección no vacía con A , el hecho anterior contradice la acronalidad de A .

Un ejemplo claro de este tipo de conjuntos es la hipersuperficie que resulta de mantener la coordenada t constante en \mathbb{R}_1^n . Otro ejemplo de conjunto acronal que será de utilidad posteriormente es el cono nulo $\Lambda^+(p) := J^+(p) - I^+(p)$, es decir aquellos puntos que pueden conectarse con p mediante una curva tipo luz. Si existieran $q, r \in \Lambda^+(p)$ tales que $q \ll r$, por el Corolario 3.1.2 concluiríamos que $r \in I^+(p)$ en contra de la definición de $\Lambda^+(p)$.

DEFINICIÓN 3.5.1. El *borde de un conjunto acronal* A se define como el conjunto de aquellos puntos $p \in \bar{A}$ tales que para cualquier entorno abierto U de p existe una curva temporal de $I^-(p, U)$ a $I^+(p, U)$ que no corta a A . Lo denotaremos mediante $\text{bd } A$.

Para hacerse una idea más visual del borde de un conjunto acronal consideremos el conjunto $B = \{(0, x) : -1 < x \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}_1^2$ donde claramente tendremos $\text{bd } B = \{(0, -1), (0, 1)\}$ (Figura 9). No obstante, habrá que tener cuidado con el espacio ambiente en el que se trabaje pues, por ejemplo, si consideramos el mismo conjunto pero en \mathbb{R}_1^3 , es decir, $B = \{(0, x, 0) : -1 < x \leq 1\}$, ahora se tendrá $\text{bd } B = \bar{B}$.

Nuestro objetivo ahora será ver que aquellos conjuntos acronales que no tengan borde presentan una estructura topológica particular, serán hipersuperficies topológicas. Comencemos definiendo las variedades topológicas:

Una *variedad topológica* T de dimensión n es un espacio topológico tal que para todo punto $p \in T$ existe un entorno U de p homeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^n . Por lo tanto, las variedades diferenciables son, en particular, variedades topológicas.

DEFINICIÓN 3.5.2 (**Hipersuperficies topológicas**). Sea S un subconjunto de una variedad topológica T . Diremos que S es una *hipersuperficie topológica* si para cada $p \in S$ existe un entorno U de p en T y un homeomorfismo ϕ de U en un abierto de \mathbb{R}^n tal que $\phi(U \cap S) = \phi(U) \cap \Pi$ donde Π es un hiperplano de \mathbb{R}^n .

De la definición se observa que las hipersuperficies topológicas son, en particular, variedades topológicas. Un ejemplo representativo es el cono nulo $\Lambda^+(0)$ en \mathbb{R}_1^n al considerar el homeomorfismo $\phi(t, x) := (t - |x|, x)$ que lleva $\Lambda^+(0)$ al hiperplano $t = 0$. Nótese que $\Lambda^+(0)$ es una variedad topológica que no es diferenciable

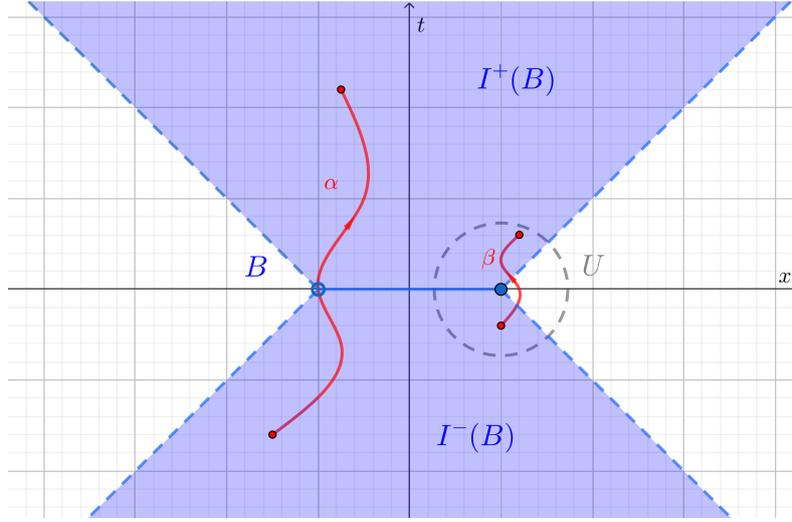


FIGURA 9. Conjunto $B = \{(0, x) : -1 < x \leq 1\}$ en \mathbb{R}_1^2 . Como el punto $(0, -1) \in \bar{B}$ no pertenece al conjunto B , basta tomar una curva temporal que pase por el punto para ver que $(0, -1) \in \text{bd } B$. En cambio para el punto $(0, 1) \in B \subseteq \bar{B}$, para cada entorno U , habrá que salirse de $I(B)$ en U para encontrar una curva en las condiciones de la Definición 3.5.1 y concluir $(0, 1) \in \text{bd } B$.

ya que en el vértice $0 \in \mathbb{R}_1^n$, no existe ningún entorno difeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^n . Con las definiciones anteriores tendremos el siguiente resultado:

PROPOSICIÓN 3.5.3. *Un conjunto acronal A es una hipersuperficie topológica si y solo si el conjunto A no contiene puntos del borde (i.e. $A \cap \text{bd } A = \emptyset$). Más aún, A es una hipersuperficie topológica cerrada si y solo si no tiene borde (i.e. $\text{bd } A = \emptyset$).*

DEMOSTRACIÓN. Veamos, en primer lugar, la implicación de izquierda a derecha del primer enunciado. Supongamos que A es una hipersuperficie topológica. Sea $p \in A$ y U un entorno abierto de p en una variedad topológica T ambiente tal y como se vio en la Definición 3.5.2 anterior. Teniendo en cuenta la definición:

$$\phi(U - A) = \phi(U - (U \cap A)) = \phi(U) - \phi(U \cap A) = \phi(U) - (\phi(U) \cap \Pi)$$

Es decir, $U - A$ es homeomorfo a un abierto $\phi(U)$ de \mathbb{R}^n menos su intersección con un hiperplano Π por lo que podremos suponer que $U - A$ tiene dos componentes conexas (por “encima” y por “debajo” de $U \cap A$). Ahora bien, como A es acronal, los conjuntos $I^+(p, U)$ y $I^-(p, U)$ son abiertos disjuntos que no se intersecan con A y como toda curva temporal que pasa por $p \in A$ corta a ambos conjuntos abiertos, cada uno de ellos estará en componentes de $U - A$ distintas. Esto último quiere decir que toda curva temporal de $I^+(p, U)$ a $I^-(p, U)$ deberá cortar a A de forma obligada con lo que $p \notin \text{bd } A$.

Para la otra implicación supongamos que A y $\text{bd } A$ son conjuntos disjuntos. Veamos que, entonces, A es una hipersuperficie topológica. Sea $p \in A$ y U un entorno abierto coordinado de dicho punto p , donde $\xi = (x^0, \dots, x^{n-1}) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es el sistema de coordenadas de modo que $\partial/\partial x^0$ es temporal hacia el futuro. Consideremos otro entorno abierto V de p en U , más pequeño si hiciera falta, de forma que se verifiquen las dos propiedades siguientes:

- $\xi(V) = (a - \delta, b + \delta) \times \tilde{V} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} = \mathbb{R}^n$.
- Los puntos de V con coordenada $x^0 = a$ están en $I^-(p, U)$ y los puntos con $x^0 = b$ están en $I^+(p, U)$.

Tomando U lo suficientemente pequeño, si $y \in \tilde{V}$ la curva que resulta de variar la coordenada x^0 desde a hasta b , es decir, la curva temporal

$$\begin{aligned} \alpha_y : [a, b] &\longrightarrow U \\ s &\longmapsto \xi^{-1}(s, y) \end{aligned}$$

deberá cortar al conjunto A en un punto pues $p \notin \text{bd } A$. Dado que A es acronal el punto de corte es único y podremos definir la función $h : \tilde{V} \rightarrow (a, b)$ que a cada punto de \tilde{V} asocia la coordenada x^0 de dicho punto de corte. Si vemos que h es continua tendremos que la aplicación

$$\phi(x^0, \dots, x^{n-1}) = (x^0 - h(x^0, \dots, x^{n-1}), x^1, \dots, x^{n-1})$$

es un homeomorfismo sobre un abierto de \mathbb{R}^n que lleva $V \cap A$ sobre el hiperplano $x^0 = 0$ con lo que podremos concluir que A es una hipersuperficie topológica.

Veamos que, efectivamente, h es continua. Supongamos lo contrario, es decir que existe una sucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en \tilde{V} tal que $\lim_n y_n = y$ y $\{h(y_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ no converge a $h(y)$. A priori, $\{h(y_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ podría no converger a ningún valor pero dado que la sucesión es acotada (pues toma valores en (a, b)) sabremos que existe al menos una subsucesión $\{h(y_m)\}$ convergente a $r \in [a, b]$ con $r \neq h(y)$. Sea $q = \xi^{-1}(h(y), y) \in A$ (está en A por construcción de la aplicación h). dado que $r \neq h(y)$, r no estará en el conjunto A sino $r \in I^+(q, V) \cup I^-(q, V)$. Para verlo, basta con considerar la curva temporal α_y . Finalmente, como $I^+(q, V) \cup I^-(q, V)$ es abierto y $\lim_m h(y_m) = r$, tomando un m lo suficientemente grande, $\xi^{-1}(h(y_m), y_m) \in A$ también está en $I^+(q, V) \cup I^-(q, V)$, pero como $q \in A$, llegamos a una contradicción con la acronalidad de A .

Para probar el segundo enunciado de la proposición, vemos de un lado, que si A es una hipersuperficie cerrada $\bar{A} = A$. Ahora, por lo visto inmediatamente antes, tendremos que $A \cap \text{bd } A = \emptyset$ y como $\text{bd } A \subseteq \bar{A}$, se cumple $\text{bd } A = \emptyset$. Para la implicación restante, supongamos que $\text{bd } A = \emptyset$. Entonces, nuevamente por lo anterior, A será una hipersuperficie topológica. Para probar que A es cerrado bastará probar que $\bar{A} - A \subseteq \text{bd } A$ pues así, si $\text{bd } A = \emptyset$ entonces $\bar{A} = A$. En efecto, como se vio a principio de esta sección, \bar{A} es acronal. Por ello, dado $p \in \bar{A} - A$ si fuera $p \notin \text{bd } A$ existiría un entorno U de p en que toda curva temporal de $I^-(p, U)$ a $I^+(p, U)$ debe cortar a A . Sea α una de estas curvas temporales con extremos $q^+ \in I^+(p, U)$ y $q^- \in I^-(p, U)$. En este caso, existiría una curva temporal hacia el futuro de q^- a q^+ pasando por $p \in \bar{A} - A$ y α corta a $A \subseteq \bar{A}$ por hipótesis, en contra de la acronalidad de \bar{A} . \square

Para el siguiente resultado estrechamente relacionado con lo anterior, será necesario introducir un tipo particular de conjuntos, los conjuntos futuros. Dado un subconjunto $F \subseteq M$, diremos que F es un *conjunto futuro* cuando se verifica $I^+(F) \subseteq F$. De forma análoga, diremos que un subconjunto $P \subseteq M$ es un *conjunto pasado* cuando $I^-(P) \subseteq P$.

Según lo visto en la Sección 3.1, un ejemplo sencillo de conjunto futuro sería $J^+(A)$ para cualquier conjunto A y, de forma similar, $J^-(A)$ sería un conjunto pasado. Nótese, además, que si F es futuro, $M - F$ es pasado. De lo contrario,

$$I^-(M - F) \not\subseteq M - F \Rightarrow I^-(M - F) \cap F \neq \emptyset,$$

y existiría $p \in F$ tal que $p \in I^-(M - F)$. Esto último quiere decir que existe $q \in M - F$ y una curva temporal hacia el pasado desde q hasta p y, por tanto, $q \in I^+(p) \cap M - F \subseteq I^+(F) \cap M - F \subseteq F \cap (M - F) = \emptyset$ llegando a una contradicción. Concluimos la sección con el siguiente resultado.

COROLARIO 3.5.4. *La frontera⁶ de un conjunto futuro, si es no vacía, es una hipersuperficie topológica acronal cerrada.*

⁶Sea A un subconjunto de un espacio topológico X , se define la *frontera* de A mediante la expresión $\text{Fr } A = \bar{A} \cap \overline{X - A}$. Se deduce entonces que todo entorno abierto de un punto de $\text{Fr } A$ interseca a A y a su complementario $X - A$. Además otra propiedad interesante es que $\bar{A} = \text{int } A \cup \text{Fr } A$ siendo esta unión disjunta. Es importante no confundir la frontera de un conjunto A con el borde de un conjunto acronal visto anteriormente.

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, probemos que $\text{Fr } F$ es un conjunto acronal. Sea $p \in \text{Fr } F$ y $q \in I^+(p)$, entonces el conjunto $I^-(q)$ es un entorno abierto de p por lo que $I^-(q) \cap F \neq \emptyset$ pues por definición, cualquier entorno abierto de un punto en la frontera de F corta al conjunto F . Sea $p' \in I^-(q) \cap F$ tendremos que $q \in I^+(F) \subseteq F$. De forma similar, sabiendo que $M - F$ es un conjunto pasado, si $r \in I^-(p)$, $I^+(r)$ cortará a $M - F$. Sea $p'' \in (M - F) \cap I^+(r)$, entonces $r \in I^-(M - F) \subseteq M - F$. En suma, tendremos

$$(3.5.1) \quad I^+(\text{Fr } F) \subseteq F, \quad I^-(\text{Fr } F) \subseteq M - F$$

con lo que $I^+(\text{Fr } F)$ y $I^-(\text{Fr } F)$ son conjuntos disjuntos y, por ello, $\text{Fr } F$ es acronal. Esto es porque si existieran $p, q \in \text{Fr } F$ con $p \ll q$ tomando un punto $\tilde{p} \in \text{Fr } F$ de la curva temporal entre p y q , se tendría $\tilde{p} \in I^+(p) \cap I^-(q) \subseteq I^+(\text{Fr } F) \cap I^-(\text{Fr } F)$.

Para ver finalmente que $\text{Fr } F$ es una hipersuperficie topológica cerrada demostremos que tiene borde vacío concluyendo nuestro objetivo por la Proposición 3.5.3 anterior. Por la Ecuación (3.5.1), y dado que $I^+(\text{Fr } F)$ y $I^-(\text{Fr } F)$ son abiertos, se cumple $I^+(\text{Fr } F) \subseteq \text{int } F$ y $I^-(\text{Fr } F) \subseteq \text{int } (M - F)$. Ahora, para cualquier entorno abierto U de $p \in \overline{\text{Fr } F} = \text{Fr } F$, se puede expresar como la siguiente unión disjunta

$$U = (\text{int } (M - F) \cap U) \cup (\text{Fr } (F) \cap U) \cup (\text{int } (F) \cap U).$$

Cualquier curva temporal en U desde $I^-(\text{Fr } F)$ hasta $I^+(\text{Fr } F)$ deberá ir desde el abierto $\text{int } (M - F) \cap U$ hasta $\text{int } (F) \cap U$. Como la imagen de un conjunto conexo⁷ por una aplicación continua es conexa, la curva deberá cortar obligatoriamente al conjunto $\text{Fr } (F) \cap U$ y, por ende, $\text{bd } (\text{Fr } F) = \emptyset$. \square

Podemos emplear el corolario anterior para comprobar que el cono nulo $\Lambda^+(p)$ en \mathbb{R}_1^n es una hipersuperficie topológica sin más que observar que $\text{Fr } J^+(p) = \Lambda^+(p)$.

3.6. Hipersuperficies de Cauchy

DEFINICIÓN 3.6.1 (**Hipersuperficie de Cauchy**). Una *hipersuperficie de Cauchy* en una variedad de Lorentz M es un subconjunto S tal que toda curva temporal inextendible corta a S una y solo una vez.

Es claro a partir de la definición anterior que toda hipersuperficie de Cauchy es, en particular, un conjunto acronal. No obstante, el recíproco no es cierto, existen conjuntos acronales que no son hipersuperficies de Cauchy. Tal es el caso del conjunto $\Lambda^+(p)$ en \mathbb{R}_1^n que es acronal, tal y como se vio en la Sección 3.5.

LEMA 3.6.2. *Una hipersuperficie de Cauchy S es una hipersuperficie topológica acronal y cerrada. Más aún, toda curva causal inextendible corta a S una y solo una vez.*

DEMOSTRACIÓN. A partir de la definición de hipersuperficie de Cauchy se deduce que M se puede expresar como la siguiente unión disjunta,

$$(3.6.1) \quad M = I^+(S) \cup S \cup I^-(S).$$

Esto se debe, primero a que por todo punto $p \in M$ pasa una curva temporal inextendible que, a su vez, deberá cortar a S por lo que p pertenece al menos a uno de los tres conjuntos de la unión (3.6.1). Además, dicha unión es disjunta por ser S acronal usando razonamientos similares a los ya vistos en la Sección 3.5 anterior. Así, cualquier curva temporal que pase de $I^-(S)$ a $I^+(S)$ o viceversa deberá tocar a S por lo que $\text{bd } S = \emptyset$ concluyendo la primera parte por la Proposición 3.5.3 (también se puede deducir del hecho de $S = \text{Fr } I^+(S) = \text{Fr } I^-(S)$ y el Corolario 3.5.4).

Para la segunda parte, supongamos que existe una curva causal α inextendible que no corta a S y, sin pérdida de generalidad, con $\alpha(0) \in I^+(S)$. En este punto, se ruega al lector que realice un acto de fe tomando como verdadera la siguiente sentencia que se probará en el Lema 3.6.3 posterior: existe una curva temporal hacia el pasado β partiendo de $I^+(S)$ que no corta a S . Finalmente, dado que toda curva

⁷Sea X un espacio topológico, diremos que X es *conexo* si no existen subconjuntos abiertos disjuntos U y V de X no vacíos cuya unión es X , es decir, $X = U \cup V$ con $U \cap V = \emptyset$. Para un subconjunto $A \subseteq X$, se dice que $\tilde{U} \subseteq A$ es abierto en A si existe un abierto U en X tal que $A \cap U = \tilde{U}$. Por lo tanto, para un subconjunto diremos que A es conexo si no existen abiertos disjuntos en A cuya unión es A . La imagen de un conjunto conexo por una aplicación continua es conexo.

temporal hacia el futuro comenzando en $\beta(0) \in I^+(S)$ permanece en $I^+(S)$ uniendo dicha curva con β tendremos una curva temporal inextensible que “esquiva” a S en contradicción con el hecho de que S sea de Cauchy. \square

LEMA 3.6.3. *Sea α una curva causal inextensible hacia el pasado de origen $p \in M$ y que no corta a un conjunto cerrado $C \subseteq M$. Entonces, si $p_0 \in I^+(p, M - C)$, existe una curva temporal inextensible hacia el pasado partiendo de p_0 que no corta a C .*

DEMOSTRACIÓN. Como α es inextensible hacia el pasado podremos suponer que su dominio de definición es $[0, +\infty)$ y que la sucesión $\{\alpha(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es no convergente. Para probar el enunciado, la idea será construir en la subvariedad abierta $M - C$, valiéndonos de α , una sucesión de puntos hacia el pasado comenzando en p_0 y de manera que no converjan; para conseguir así que la curva temporal que aparece al conectarlos sea inextensible. Veámoslo con más detalle. En primer lugar, dado que $p_0 \ll p = \alpha(0)$ se cumple, de acuerdo al Corolario 3.1.2, $p_0 \ll \alpha(1)$. Existirá, por la densidad de la relación “ \ll ”, $p_1 \in M - C$ verificando $p_0 \ll p_1 \ll \alpha(1)$. Repitiendo el proceso de forma iterativa conseguimos una sucesión $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq M - C$ tal que $p_{n-1} \ll p_n \ll \alpha(n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. En este punto, bastará unir el punto p_{n-1} con p_n para $n \geq 1$ mediante segmentos temporales para conseguir una curva temporal β en $M - C$ hacia el pasado con $\beta(0) = p_0$. Por continuidad, a la hora de elegir el punto p_n lo podremos tomar tan cerca de $\alpha(n)$ como deseemos lo cual garantiza β no puede extenderse. \square

Ahora bien, observemos que para un campo vectorial temporal $X \in \mathfrak{X}(M)$, las curvas integrales maximales del campo X son curvas temporales inextendibles. Por lo tanto, para una hipersuperficie de Cauchy S y un punto $p \in M$, la curva integral maximal que pasa por p , sea α_p , cortará en un único punto de la hipersuperficie S . Es por ello que estará bien definida la aplicación $\rho : M \rightarrow S$ que a cada $p \in M$ asocia el punto de corte $\rho(p)$ de α_p con S . No solo eso, la aplicación será continua además de presentar las buenas propiedades que se muestran en el siguiente resultado. Este resultado intervendrá directamente en nuestro objetivo último de probar el teorema de Penrose.

PROPOSICIÓN 3.6.4. *Sea S una hipersuperficie de Cauchy en M y $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo vectorial temporal. Con las notaciones anteriores, la aplicación $\rho : M \rightarrow S$ es continua y abierta⁸. En particular, S es un conjunto conexo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\tilde{\psi} : \mathcal{D} \rightarrow M$ el flujo asociado al campo vectorial X , donde \mathcal{D} es el máximo abierto de $M \times \mathbb{R}$ en que ψ está definido (ver Sección 2.5). Ahora, como se vio anteriormente, S es una hipersuperficie topológica en M y, por ello, el conjunto $\mathcal{D}(S) := (S \times \mathbb{R}) \cap \mathcal{D}$ es una hipersuperficie topológica en \mathcal{D} . Consideremos ahora la restricción a $\mathcal{D}(S)$ de $\tilde{\psi}$ que denotaremos por $\psi : \mathcal{D}(S) \rightarrow M$. Dado que se trata de la restricción de una aplicación continua, tendremos que ψ es continua y el hecho de que S es de Cauchy nos garantizará, además, que ψ es biyectiva. Por un lado, para todo punto $p \in M$ la curva integral maximal que pasa por p , α_p , deberá cortar a S por lo que existen $(s, t) \in \mathcal{D}(S)$ con $\psi(s, t) = \alpha_s(t) = p$ y ψ es sobreyectiva. Por otro lado, como el corte con S es único y curvas integrales distintas no se tocan (Lema 2.5.3), se cumple la inyectividad. Esto último, unido a que $\mathcal{D}(S)$ y M son variedades topológicas de la misma dimensión nos permitirá concluir por el Teorema de Brouwer⁹ que ψ es un homeomorfismo. Para acabar, partiendo de que la proyección,

$$\begin{aligned} \pi : S \times \mathbb{R} &\longrightarrow S \\ (s, t) &\longmapsto s \end{aligned}$$

es una aplicación abierta, continua y sobreyectiva concluiremos el enunciado si vemos que $\rho = \pi \circ \psi^{-1}$. En efecto, sea $(s, t) \in \mathcal{D}(S)$,

$$(\rho \circ \psi)(s, t) = \rho(\alpha_s(t)) = s = \pi(s, t).$$

⁸Sean X e Y espacios topológicos y $f : X \rightarrow Y$ una aplicación. Diremos que f es una *aplicación abierta* si para cualquier conjunto abierto U de X , $f(U)$ es abierto en Y .

⁹Sea $\phi : T \rightarrow T'$ una aplicación entre variedades topológicas T y T' de dimensión n . El *Teorema de Brouwer* afirma que si ϕ es una aplicación continua y biyectiva, entonces $\phi(T)$ es abierto en T' y ϕ es un homeomorfismo de T en $\phi(T)$. También es conocido como *invarianza del dominio*.

En particular, se deduce, de este modo, que S es conexo por ser la imagen de un conjunto conexo por una aplicación continua y que el conjunto S permanece fijo mediante ρ . \square

3.7. Desarrollos de Cauchy

Desde un punto de vista relativista, será importante conocer si un determinado evento o suceso es totalmente predecible a partir de otros anteriores. La respuesta a esta pregunta, que da pie a la siguiente definición, dependerá del espacio-tiempo en que nos encontremos y del evento en cuestión.

DEFINICIÓN 3.7.1. Sea A un subconjunto acronal de una variedad de Lorentz M . Llamaremos *desarrollo de Cauchy futuro de A* al conjunto $D^+(A)$ formado por aquellos puntos p de M tales que toda curva causal inextensible hacia el pasado comenzando en p interseca a A .

A partir de la definición, observamos que no es posible alcanzar un punto de $D^+(A)$ mediante una curva causal, que sea inextensible hacia el pasado, sin antes haber pasado por el conjunto A . La interpretación de este suceso, tal y como se anunciaba anteriormente, tiene que ver con que todo evento en $D^+(A)$ será la evolución de otro anterior en A con total seguridad.

También se define, de forma análoga, el *desarrollo pasado de Cauchy de A* , $D^-(A)$, usando en la definición curvas causales inextensibles hacia el futuro. Al conjunto $D(A) := D^+(A) \cup D^-(A)$ lo denominaremos *desarrollo de Cauchy de A* .

A partir de las definiciones es posible deducir una serie de identidades: en primer lugar, es claro que $A \subseteq D^+(A) \subseteq A \cup I^+(A) \subseteq J^+(A)$. Además, como se ha supuesto que A es un conjunto acronal, $D^+(A) \cap I^-(A) = \emptyset$ y $D^-(A) \cap I^+(A) = \emptyset$. Se deduce, de lo anterior, $D^+(A) \cap D^-(A) = A$ y $D^\pm(A) - A = D(A) \cap I^\pm(A)$.

Un ejemplo bastante sencillo para hacerse una idea de la noción de desarrollo de Cauchy es el hiperplano $A = \{(x, t) \in \mathbb{R}_1^n : t = c\}$ en el espacio-tiempo de Minkowski \mathbb{R}_1^n . Se trata de una hipersuperficie espacial donde tendremos $D^+(A) = J^+(A) = \{(x, t) \in \mathbb{R}_1^n : t \geq c\}$ y $D^-(A) = J^-(A) = \{(x, t) \in \mathbb{R}_1^n : t \leq c\}$, por lo que $D(A) = \mathbb{R}_1^n$. No obstante, no todos los casos serán así de sencillos y prueba de ello es la variedad de la Figura 10.

Es importante observar que, en vistas del Lema 3.6.2, un subconjunto acronal A de M es una hipersuperficie de Cauchy si y solo si $D(A) = M$. De hecho, podemos ver $D(A)$ como el mayor subconjunto de la variedad en el que A se comporta como una hipersuperficie de Cauchy. Las curvas causales apuntando al pasado y que comiencen en un punto de $D^+(A)$ no podrán salir de $D^+(A)$ sin pasar antes por A . A esta característica de este tipo de curvas la llamaremos *regresión*. En efecto, si α fuera causal hacia el pasado y $\alpha(s) \notin D^+(A)$, existiría una curva causal inextensible hacia el pasado β partiendo de $\alpha(s)$ y que no pasa por A . Entonces la curva $\alpha|_{[0,s]} + \beta$ debe pasar por A y, por ende, $\alpha|_{[0,s]}$ pasa por A . Otra propiedad importante en relación a los desarrollos de Cauchy se muestra en forma de lema:

LEMA 3.7.2. Si A es acronal y $p \in \text{int } D(A)$, entonces toda curva causal inextensible que pase por p interseca a los conjuntos $I^+(A)$ y $I^-(A)$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos, todavía más, que $p \in A \cup I^+(A)$ (y, de forma análoga, se probará para el caso $p \in A \cup I^-(A)$). Sea α una curva causal inextensible hacia el pasado comenzando en p . A partir del Lema 3.6.3, tomando $C = \emptyset$, nos permite concluir la existencia de una curva temporal inextensible hacia el pasado β partiendo de $D(A) \cap I^+(A) = D^+(A) - A$, tal que para cada $\beta(s)$ existe un punto de α en $I^-(\beta(s))$. Por lo tanto, con este último hecho y sabiendo que β debe pasar por A pues parte de $D^+(A)$, podremos afirmar que α pasa por el conjunto $I^-(A)$.

En este punto, solo queda ver que toda curva causal inextensible pasa por $I^+(A)$. Sea γ una curva causal inextensible hacia el futuro. Si $p \in I^+(A)$ es obvio así que supongamos que $p \in A$. En este caso,

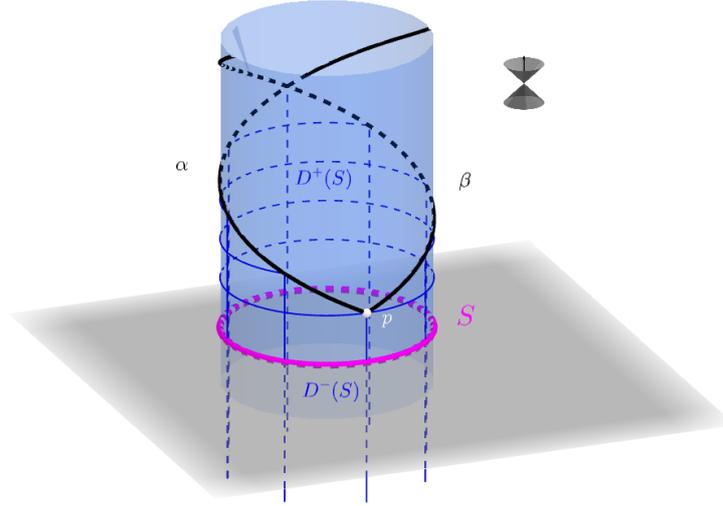


FIGURA 10. Cilindro de Lorentz, $\mathbb{R}_1^1 \times S^1$, menos un punto p . Considerando la circunferencia espacial S , se tiene que $D^+(S)$ es la propia curva S junto con los puntos del cilindro situados por debajo de las geodésicas nulas partiendo de p , α y β (zona del cilindro delineada con verticales y circunferencias azules). La razón es que, para los puntos por encima de estas curvas, podremos encontrar curvas causales hacia el pasado que acaben en p y no toquen a S . El cono auxiliar indica la orientación temporal de la variedad.

bastará aplicar el razonamiento anterior sin más que cambiar las curvas hacia el pasado por curvas hacia el futuro. \square

Son claras las ventajas que ofrece trabajar con conjuntos globalmente hiperbólicos, tal y como se ha visto en la Subsección 3.4. Por lo tanto, tendrá relevancia el siguiente teorema debido a S.W. Hawking y S.F.R. Ellis ([HawkEllis, 1973]). Este resultado ofrece una forma de hallar condiciones que garanticen que el conjunto $D(A)$ sea globalmente hiperbólico, en particular, aquellas que nos permitan asegurar que $D(A)$ es abierto.

TEOREMA 3.7.3. *Sea A un conjunto acronal, si $\text{int } D(A)$ es no vacío entonces $\text{int } D(A)$ es globalmente hiperbólico.*

DEMOSTRACIÓN. Separemos la prueba en tres partes, cada una de las cuales dedicada a probar una de las condiciones que ha de verificar $\text{int } D(A)$ para ser globalmente hiperbólico. No obstante, antes de ello, probaremos la siguiente afirmación que será de utilidad posteriormente.

AFIRMACIÓN. *Si A es un conjunto acronal, la condición de causalidad se satisface en $D(A)$.*

DEMOSTRACIÓN DE LA AFIRMACIÓN. Supongamos que existe una curva causal cerrada γ alrededor de $p \in D(A)$. Entonces al recorrer sucesivamente la curva γ , tendremos una curva causal inextensible $\tilde{\gamma}$ que deberá cortar a A pues $p \in D(A)$ pero, como es periódica, lo hará infinitas veces en contra de la acronalidad de A . \blacksquare

i) **La condición de causalidad fuerte se cumple en $\text{int } D(A)$.**

Sea $p \in D(A)$ y supongamos que dicha condición no se satisface. Existirá, por lo tanto, un entorno abierto U de p tal que para cualquier otro entorno abierto $V \subseteq U$ del mismo punto, existe una curva causal con extremos en V que sale de U . Con ello, haciendo el entorno V cada vez más pequeño, podremos encontrar una sucesión de segmentos de curva causal hacia el futuro $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definidos en $[0, 1]$ (reparametrizando si fuera oportuno) tal que $\lim_n \alpha_n(0) = p$, $\lim_n \alpha_n(1) = p$ y saliendo de U en algunos de sus puntos. Estamos en condiciones de aplicar la Proposición 3.2.2 y habrá una sucesión límite hacia el futuro $\{p_i\}$ empezando en p . Si $\{p_i\}$ es una sucesión finita, acabará en $\lim_n \alpha_n(1) = p$ y, a través del quasi-límite asociado, tendremos $p < p$ lo cual contradice la Afirmación inicial.

Así pues, $\{p_i\}$ deberá ser infinita y el quasi-límite correspondiente λ una curva inextensible hacia el futuro. Por el Lema 3.7.2, λ entra en $I^+(A)$ y como permanece en dicho conjunto por ser causal, existe i_0 tal que $p_{i_0} \in I^+(A)$. Ahora, tomando una subsucesión $\{\alpha_m\}$ y reparametrizando, existe un $s_0 \in [0, 1]$ con $\lim_m \alpha_m(s_0) = p_{i_0}$ y de forma que $\alpha_m(s_0) \in I^+(A)$ para cada m . Como $p \neq p_{i_0}$ podremos aplicar la Proposición 3.2.2 a los segmentos causales $\{\alpha_m|_{[s_0, 1]}\}$ pero recorridos desde $\alpha_m(1)$ a $\alpha_m(s_0)$ hacia el pasado. De este modo, se obtiene una sucesión límite $\{\bar{p}_i\}$ hacia el pasado comenzando en p . Si dicha sucesión $\{\bar{p}_i\}$ es finita, acaba en $\lim_m \alpha_m(s_0) = p_{i_0}$ y, al ser hacia el pasado, se cumple $p_{i_0} < p$. Como ya teníamos $p < p_{i_0}$, se concluye $p < p$ en contra, nuevamente, de la Afirmación inicial.

Por tanto, $\{\bar{p}_i\}$ ha de ser infinita y el quasi-límite $\bar{\lambda}$ asociado es una curva causal inextensible hacia el pasado. Por el Lema 3.7.2, $\bar{\lambda}$ cortará al conjunto $I^-(A)$ y, por ende, algunos de los segmentos $\alpha_m|_{[s_0, 1]}$. Como por construcción, $\alpha_m(s_0) \in I^+(A)$ y los segmentos $\alpha_m|_{[s_0, 1]}$ están dirigidos hacia el futuro (si los recorremos de s_0 a 1) entonces existirá un punto $q \in I^+(A) \cap I^-(A)$ en contra de la acronalidad de A .

ii) **Si $p, q \in \text{int } D(A)$ con $p \leq q$, entonces $J(p, q)$ es compacto.**

Si $p = q$, $J(p, p) = J^+(p) \cap J^-(p) = \{p\}$ pues no hay curvas causales cerradas en $D(A)$ por la Afirmación. Supongamos, por tanto, que $p < q$. Sea $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de puntos en $J(p, q)$, para ver que es compacto probemos que existe una subsucesión convergente a un punto de $J(p, q)$. Dado que $\{r_n\} \subseteq J(p, q)$, para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos α_n , un segmento de curva causal hacia el futuro de p a q pasando por r_n . A partir de aquí, todas las sucesiones límite de curvas, conforme a la Definición 3.2.1, se consideran respecto a un recubrimiento \mathfrak{R} por abiertos convexos \mathcal{C} de la variedad ambiente M tal que la clausura $\bar{\mathcal{C}}$ sea compacta.

Sea $\{p_i\}$ una sucesión límite para la sucesión de curvas $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ comenzando en p . Supongamos, en primer lugar, que $\{p_i\}$ es finita y, por tanto, acaba en $p_k = q$. Sea $\{\alpha_m\}$ una subsucesión de $\{\alpha_n\}$ en términos de la Definición 3.2.1 y $\{x_m\}$ la subsucesión correspondiente a aquellos de los r_n que se encuentran en las curvas α_m . Como $\{r_m\}$ es infinita y $\{p_i\}$ finita, existirá $i_0 < k$ tal que una cantidad infinita de los r_m queden en el fragmento $\alpha_m|_{[s_m, i_0, s_m, i_0+1]}$ ¹⁰. Llamemos $\{r_l\}$ a la subsucesión formada por dichos r_m . Ahora, por la propiedad **QL1**, todos los fragmentos $\alpha_m|_{[s_m, i_0, s_m, i_0+1]}$ así como p_{i_0} y p_{i_0+1} están en un único $\mathcal{C} \in \mathfrak{R}$. Como $\bar{\mathcal{C}}$ es compacto, una nueva subsucesión de $\{r_l\}$ converge a $r \in \bar{\mathcal{C}}$. Finalmente, por el Lema 3.1.3, concluimos

$$p_{i_0} \leq r \leq p_{i_0+1} \Rightarrow p \leq r \leq q \Rightarrow r \in J(p, q).$$

Para acabar, probemos que es falso que toda sucesión límite para $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ comenzando en p y relativa a \mathfrak{R} es infinita lo que posibilita aplicar el razonamiento anterior y concluir el resultado. Supongamos que el hecho anterior es cierto y $\{p_i\}$ es una sucesión infinita, el quasi-límite λ correspondiente es una curva causal inextensible hacia el futuro que comienza en p . Siguiendo un razonamiento similar al del apartado anterior, conseguimos un $s_0 \in [0, 1]$ y una subsucesión $\{\alpha_m\}$ de forma que $\lim_m \alpha_m(0) = p_{i_0}$ con $p_{i_0} \in I^+(A)$.

Si, como anteriormente, aplicamos la Proposición 3.2.2 a los segmentos $\{\alpha_m|_{[s_0, 1]}\}$ recorridos desde $\alpha_m(1)$ a $\alpha_m(s_0)$ conseguimos una sucesión límite hacia el pasado $\{q_i\}$ empezando en q . Si dicha sucesión es finita, acabará en $\lim_m \alpha_m(s_0) = p_{i_0}$ con lo que la sucesión

$$p < p_1 < \dots < p_{i_0} < \dots < q_1 < q$$

es finita empezando en p , en contra de nuestra suposición original de que toda sucesión límite comenzando en p es infinita. Por tanto, $\{q_i\}$ es infinita y la curva límite asociada μ es inextensible hacia el pasado

¹⁰Este hecho es el conocido como *principio del palomar*, también llamado *principio de las cajas* o de *Dirichlet*, el cual establece que, dados tres números naturales n, r y q , si se desea colocar $nq + r$ objetos en n cajas alguna de las cajas debe contener $q+1$ objetos. Dicho de otra forma y como se enuncia comunmente: si n palomas se distribuyen en m palomares con $n > m$ algún palomar ha de albergar más de una paloma. Esta afirmación, aunque obvia, presenta varias generalizaciones a conjuntos no discretos y es utilizado en las pruebas de resultados mucho más profundos.

comenzando en q . Por el Lema 3.7.2, μ cortará a $I^-(A)$ y, por ende, también lo hará algunos de los segmentos $\{\alpha_m|_{[s_0,1]}\}$. Esto último contradice la acronalidad de A teniendo en cuenta que $\alpha_m|_{[s_0,1]}$ se dirige hacia el futuro (recorridos desde s_0 a 1) y $\alpha_m(s_0) \in I^+(A)$ para un m suficientemente grande.

iii) **Si $p, q \in \text{int } D(A)$ y $p \leq q$, entonces $J(p, q) \subseteq \text{int } D(A)$.**

Asumimos $p < q$ pues el caso $p = q$ resulta trivial como se explicó anteriormente. En primer lugar, distinguimos los distintos casos para la disposición de los puntos p y q . Como $D(A) = D^+(A) \cup D^-(A)$, puede ocurrir una de las tres posibilidades siguientes: o bien $p, q \in D^+(A)$, o bien $q \in D^+(A)$ y $p \in D^-(A)$, o bien $p, q \in D^-(A)$. Teniendo en cuenta que $A = D^+(A) \cap D^-(A)$ y $D^\pm(A) \subseteq A \cup I^\pm(A) \subseteq J^\pm(A)$, excluimos la posibilidad de que $p \in A$ en el primer caso y de que $q \in A$ en el tercero, contemplándolas ambas en el segundo caso, de forma que reescribiendo tendremos: o $p, q \in I^+(A)$, o $p \in J^-(A)$ y $q \in J^+(A)$, o $p, q \in I^-(A)$.

- **Caso 1:** $p, q \in I^+(A)$. Como $I^+(A)$ es abierto podemos tomar $q^+ \in I^+(q) \cap D(A) \subseteq D^+(A)$. Sea $U = I^+(A) \cap I^-(q^+)$ que es abierto y, claramente, $J(p, q) \subseteq U$ por lo que si vemos que $U \subseteq D(A)$ terminaremos por probar que $J(p, q) \subseteq U \subseteq \text{int } D(A)$. Dado un $r \in U$ consideremos σ , una curva temporal hacia el pasado desde q^+ hasta r . Como A es acronal y $r \in I^+(A)$, σ no puede cortar a A . Ahora sabiendo que $q^+ \in D^+(A)$, utilizando el argumento de regresión tendremos $r \in D^+(A)$.
- **Caso 2:** $p \in J^-(A)$ y $q \in J^+(A)$. Como $\text{int } D(A)$ abierto, existe $p^- \in I^-(p) \cap D^-(A)$ y $q^+ \in I^+(q) \cap D^+(A)$. De forma similar al apartado anterior veamos que el conjunto abierto $V := I^-(q) \cap I^+(p^-)$ está en $D(A)$. Así, como es evidente que $J(p, q) \subseteq V$, concluiremos que $J(p, q) \subseteq \text{int } D(A)$. Dado $r \in V$ consideramos σ y τ , segmentos de curva temporal hacia el pasado de q^+ a r y de r a p^- , respectivamente. Si $r \in A$, $r \in D(A)$ y hemos terminado. Si $r \notin A$, como A es acronal, al unir las curvas σ y τ la curva resultante corta una única vez a A . Por ello, o bien σ no corta a A en cuyo caso $x \in D^+(A)$ por regresión, o bien es τ la que no corta A y $r \in D^-(A)$ por el mismo argumento.

Finalmente, la prueba del Caso 3 es idéntica a la del Caso 1 realizando los cambios obvios pertinentes. \square

Para acabar con la sección, mostramos un corolario del Teorema 3.7.3 anterior cuya prueba es sencilla pero que será de vital importancia en la prueba del teorema de singularidad de Penrose.

COROLARIO 3.7.4. *Si una variedad de Lorentz posee una hipersuperficie de Cauchy S , entonces M es globalmente hiperbólica.*

DEMOSTRACIÓN. Si S es una hipersuperficie de Cauchy, por definición, $D(S) = M$ y, por lo tanto, con el Teorema 3.7.3 concluimos que $\text{int } D(S) = M$ es globalmente hiperbólico. \square

3.8. Teorema de singularidad de Penrose

El Teorema de singularidad de Penrose aparece con el propósito de encontrar en la geometría de una estrella en colapso condiciones suficientes para la aparición de singularidades futuras en el espacio-tiempo, o lo que comúnmente se conoce como *agujeros negros*.

Antes de enunciar y demostrar el teorema en cuestión, será preciso introducir una serie de conceptos y nociones nuevos pero estrechamente relacionados con todo lo anterior. Comencemos considerando una subvariedad espacial P de una variedad de Lorentz M con codimensión¹¹ mayor o igual que dos. Retomamos también el campo vectorial curvatura media H definido sobre P . Será un sencillo ejercicio de álgebra lineal en el subespacio $T_p P^\perp$ de $T_p M$ el ver que los siguientes ítems son equivalentes:

- i) $\mathbf{k}(v) := \langle H, v \rangle > 0$ para cualquier v tipo luz hacia el futuro y normal a P .

¹¹Sea P una subvariedad de una variedad diferenciable M de dimensión n , llamaremos codimensión de P a $n - \dim P$ y lo denotamos por $\text{codim } P$.

- ii) $\mathbf{k}(w) := \langle H, w \rangle \geq 0$ para cualquier w causal hacia el futuro y normal a P .
- iii) H es un campo vectorial temporal hacia el pasado.

Así, cualquiera de las anteriores condiciones nos servirán para caracterizar las denominadas subvariedades futuras convergentes:

DEFINICIÓN 3.8.1. Una subvariedad espacial P de una variedad de Lorentz M se dice *futura convergente* si la curvatura media H sobre P es un campo vectorial temporal hacia el pasado.

En el caso particular de superficies (dimensión 2) futuras convergentes recibirán el nombre de *superficies atrapadas*.

Una idea similar pero basada en el carácter causal de conjuntos en una variedad de Lorentz, y no en su geometría como antes, es el siguiente: dado un conjunto $A \subseteq M$ se define:

$$E^+(A) := J^+(A) - I^+(A).$$

De forma similar, se tendrá $E^-(A) = J^-(A) - I^-(A)$. Es fácil ver que el conjunto $E^+(A)$ es acronal; en efecto, supongamos $p, q \in E^+(A)$ tal que $p \ll q$, pero entonces $q \in I^+(p)$ con $p \in E^+(A) \subseteq J^+(A)$, es decir, $q \in I^+(E^+(A)) \subseteq I^+(J^+(A)) \subseteq I^+(A)$ lo que entra en contradicción con $q \in E^+(A)$ y $E^+(A)$ será acronal. Como consecuencia de ello, $A \subseteq E^+(A)$ si y solo si A es acronal. De un lado, si $A \subseteq E^+(A)$, A es acronal por ser un subconjunto de un conjunto acronal y, de otro lado, si A es acronal $I^+(A) \cap A = \emptyset$ y $A \subseteq E^+(A)$. Por otro lado, podemos definir:

DEFINICIÓN 3.8.2. Un subconjunto cerrado y acronal A de una variedad de Lorentz M se llamará *atrapado futuro* si $E^+(A)$ es un conjunto compacto. De forma análoga, diremos que A es *atrapado pasado* si $E^-(A)$ es compacto.

El siguiente resultado establecerá condiciones mediante las cuales podremos concluir que una subvariedad futura convergente es un conjunto futuro atrapado. Dicho resultado desempeñará un papel clave en la prueba posterior del teorema de Penrose.

PROPOSICIÓN 3.8.3. *Supongamos las siguientes condiciones:*

- i) $\text{Ric}(v, v) \geq 0$ para todo vector luminoso tangente a M .
- ii) M es luminosamente completa hacia el futuro.

Si P es una subvariedad de codimensión 2 compacta y acronal que es futura convergente entonces es futura atrapada o, lo que es lo mismo, $E^+(P)$ es un conjunto compacto.

DEMOSTRACIÓN. En un principio, no podemos afirmar que exista un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(P)^\perp$ tipo luz definido globalmente. No obstante, en un entorno de cada punto de P podremos encontrar dos vectores luminosos linealmente independientes y perpendiculares a P , de manera que vengan dados por dos campos vectoriales diferenciables normales a P en dicho entorno. Consideramos el conjunto \tilde{P} formado por dichos vectores tipo luz por lo que $\tilde{P} \subseteq NP = \bigcup_{p \in P} \{T_p P^\perp \subseteq T_p M\}$. Como \tilde{P} es un espacio recubridor¹² de la subvariedad compacta P , \tilde{P} será un conjunto compacto.

Por otro lado, en vistas de la Proposición 2.10.4 para cada $v \in \tilde{P}$ existirá un punto focal de P a lo largo de la geodésica $\gamma_v|_{[0, 1/\mathbf{k}(v)]}$ con $\mathbf{k}(v) = \langle H, v \rangle > 0$. Consideremos la aplicación continua dada por $v \mapsto 1/\mathbf{k}(v)$ sobre el conjunto compacto \tilde{P} , es decir, existirá, por ello, un valor máximo $b > 0$ de modo que para cualquier $v \in \tilde{P}$, el punto focal de la geodésica γ_v se encontrará en $\gamma_v|_{[0, b]}$.

Consideremos ahora un punto $q \in E^+(P)$. Por el Corolario 3.1.6, tenemos que existe una geodésica luminosa γ en $E^+(P)$ desde P hasta q y, a su vez, por el Teorema 2.10.2 sabemos que γ es normal a P y

¹²Un espacio recubridor es un espacio topológico que “cubre” otro espacio de manera continua, donde cada punto en el espacio original tiene un entorno que se corresponde de manera única y biyectiva con varias copias en el espacio recubridor. Esto se utiliza para estudiar propiedades globales de espacios complejos a través de espacios más sencillos. Dado que una definición rigurosa exige una discusión más extensa remitimos al lector interesado a [Munkres, 2002] Cap 9, §53. El ej 6. de esta referencia es la que nos permite extraer la conclusión indicada.

sin puntos focales hasta llegar a q . Con ello y parametrizando si fuera necesario, γ coincide con γ_v para algún $v \in \tilde{P}$. Podremos concluir entonces que $E^+(P) \subseteq \exp(K)$ donde

$$K = \{sv \in NP : v \in \tilde{P} \text{ y } 0 \leq s \leq b\}.$$

En primer lugar, como \tilde{P} es compacto, el conjunto K también lo será, al igual que su imagen por la aplicación exponencial $\exp(K)$, por ser continua. Veamos finalmente que $E^+(P)$ es compacto. Para ello, sea $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $E^+(P)$, existirá una subsucesión $\{p_m\} \subseteq \{p_n\}$ convergente a un punto $p \in \exp(K) \subseteq J^+(P)$. Ahora bien, como $I^+(P)$ es abierto y $p_n \notin I^+(P)$, entonces $p \notin I^+(P)$ para ningún n y ha de cumplirse $p \in E^+(P)$. \square

Después de haber recorrido un largo camino por los fundamentos geométricos de la relatividad general y del espacio-tiempo, llegamos a la culminación del trabajo: el teorema de singularidad de Penrose. Con dicho resultado quedará probada de forma robusta la inevitable aparición de singularidades bajo un colapso gravitacional, ello sin asumir exigentes condiciones de simetría o idealizaciones, sino básicamente propiedades geométricas intrínsecas a la estructura causal del espacio-tiempo. Así pues, con las herramientas matemáticas y resultados previamente desarrolladas, estamos en condiciones de formalizar y demostrar uno de los resultados más profundos y revolucionarios en la teoría de la relatividad general.

TEOREMA 3.8.4 (Penrose). *Supongamos las siguientes condiciones:*

- i) $\text{Ric}(v, v) \geq 0$ para todo vector tipo luz tangente a M .*
- ii) M tiene una hipersuperficie de Cauchy S no compacta.*
- iii) Existe una subvariedad P de M de codimensión 2 que es compacta, acronal, espacial y futura convergente.*

Entonces, M es luminosamente incompleta hacia el futuro.

DEMOSTRACIÓN. Para probar el enunciado, supondremos que M es luminosamente completa hacia el futuro con lo que llegaremos a una contradicción con la compacidad de S . Para comenzar, dado que M tiene una hipersuperficie de Cauchy, tenemos, por el Corolario 3.7.4, que es globalmente hiperbólica. En vistas del Lema 3.4.6, sabemos que los conjuntos $J^-(p)$ y $J^+(p)$ son cerrados para cualquier $p \in M$. Ahora bien, consideremos cierta la siguiente afirmación cuya veracidad se probará al final de la demostración:

AFIRMACIÓN. *Suponiendo que para todo $p \in M$ se cumple que $J^+(p)$ y $J^-(p)$ son cerrados, entonces se cumple la siguiente implicación: si $K \subseteq M$ es un conjunto compacto, entonces $J^+(K)$ es un conjunto cerrado.*

Por hipótesis, P es una subvariedad compacta por lo que, a partir de la afirmación precedente, tendremos que $J^+(P)$ es cerrado y, a su vez, por el Lema 3.1.5, $E^+(P) = \overline{J^+(P)} - \text{int } J^+(P) = \text{Fr } J^+(P)$. Ahora, como $J^+(P)$ es un conjunto futuro concluimos por el Corolario 3.5.4 que $E^+(P)$ es una hipersuperficie topológica y por la Proposición 3.8.3 anterior, teniendo en cuenta nuestra suposición sobre la completitud de las geodésicas luminosas sobre M , tendremos que $E^+(P)$ es compacto.

Por otro lado, dado un campo vectorial temporal $X \in \mathfrak{X}(M)$ cualquiera, consideremos ahora la restricción a $E^+(P)$, $\rho : E^+(P) \rightarrow S$, de la aplicación entre variedades topológicas que a cada punto p de $E^+(P)$ asocia el corte con S de la curva integral maximal del campo X que pasa por p , tal y como se vio en la Subsección 3.6. Ya sabemos que la aplicación ρ está bien definida, es continua e inyectiva (Proposición 3.6.4). De este modo, por el teorema de Brouwer, ρ será un homeomorfismo entre $E^+(P)$ y el abierto $\rho(E^+(P))$, en S . Además, dado que $E^+(P)$ es compacto en M , $\rho(E^+(P))$ es compacto y, por ello, cerrado en S . Así, como S es un conjunto conexo y $\rho(E^+(P))$ es a la vez abierto y cerrado tendremos que $\rho(E^+(P)) = S^{13}$ y S es un conjunto compacto en contra de la hipótesis *ii*.

¹³Nótese que si X es un espacio topológico conexo los únicos subconjuntos abiertos y cerrados son el total y el vacío. Si existiera un subconjunto U abierto y cerrado, $X \setminus U$ es abierto y tendríamos la siguiente unión de abiertos disjuntos $X = U \cup V$, en contra de la definición de conexo.

En definitiva, hemos visto que asumiendo la completitud luminosa de M unido a las hipótesis i y iii nos encontramos en condiciones de aplicar la Proposición 3.8.3 llegando a una contradicción. Es por ello por lo que podremos concluir la falsedad de nuestra suposición inicial y M será luminosamente incompleta hacia el futuro.

DEMOSTRACIÓN DE LA AFIRMACIÓN. Sea $\{p_n\} \subseteq J^+(K)$ tal que $\lim_n p_n = p$, veamos que $p \in J^+(K)$ y concluiremos que $J^+(K)$ es un conjunto cerrado. Como para cada n , $p_n \in J^+(K)$ existe una curva causal α_n hacia el futuro desde un punto q_n en K hasta p_n . Como K es un conjunto compacto, existe una subsucesión $\{q_m\}$ convergente a un punto $q \in K$. Ahora como cualquier subsucesión de una sucesión convergente converge al mismo punto, $\{p_m\}$ converge a p . Podremos aplicar así la Proposición 3.2.2 y obtenemos una sucesión límite $\{r_i\}$ hacia el futuro.

Si $\{r_i\}$ es finita acaba en p . Por ello, el quasi-límite λ asociado nos permitirá concluir que $p \in J^+(K)$. Por otro lado, si $\{r_i\}$ es infinita, el quasi-límite λ será inextendible hacia el futuro. Existirá, por tanto, un punto r_{k_1} tal que un número infinito de los p_m se encuentran en $I^-(r_{k_1})$. De igual modo, existirá un r_{k_2} tal que otro número infinito de los p_m se encuentra en $I^+(r_{k_2}) \subseteq I^+(K)$. Por tanto, si denotamos por $\{p_j\}$, la subsucesión que se encuentra en $I^+(r_{k_1}) \cap I^+(r_{k_2}) \subseteq J^+(K)$ esta converge a p y, como por hipótesis $I^+(r_{k_1}) \cap I^+(r_{k_2})$ es cerrado, concluimos $p \in J^+(K)$. ■

□

Discusión y conclusiones

Índice

4.1. Discusión	47
4.2. Conclusiones	49

4.1. Discusión

En el presente capítulo final, se presenta una breve discusión derivada del análisis y la demostración del teorema de singularidad de Penrose. Comenzaremos con una aplicación sencilla del teorema siguiendo por una interpretación del diagrama del artículo original de R. Penrose, sintetizando visualmente los conceptos y resultados clave del teorema. Posteriormente, se comentará de forma sucinta no solo las implicaciones más inmediatas del teorema sino también las líneas de investigación actual en teoremas de singularidad (tomando como referencia [Senovilla, 2015]), las cuales lejos de ser una antigualla del pasado constituyen un campo de investigación fértil en física teórica. Finalmente, y para cerrar el trabajo, se ofrece una conclusión sobre todo lo expuesto a lo largo de este TFG.

A partir del Teorema 3.8.4 podemos extraer sin mucha complicación alguna conclusión acerca del espacio-tiempo plano, es decir, el espacio-tiempo de Minkowski \mathbb{R}_1^n . Y es que, teniendo en cuenta, primero, que efectivamente es plano y su tensor de curvatura es nulo, por lo que también lo es el tensor de Ricci. Así pues, se verifica la condición fuerte sobre la energía en el teorema de Penrose. Segundo, cualquier hiperplano t constante es una hipersuperficie de Cauchy no compacta por lo que se cumple la segunda condición del teorema. Ahora bien, sabemos que la variedad de Lorentz \mathbb{R}_1^n es luminosamente completa hacia el futuro pues toda geodésica nula (son rectas) se puede extender indefinidamente hacia el futuro. Por lo tanto, en virtud del Teorema 3.8.4, podremos concluir entonces que el espacio-tiempo de Minkowski \mathbb{R}_1^n no posee ninguna subvariedad espacial de codimensión 2 que sea acronal, compacta, y convergente hacia el futuro.

Interpretamos ahora de forma detallada el famoso diagrama del artículo original de Penrose (Figura 1). Esta interpretación no solo ilustrará cómo se representan las condiciones necesarias para la formación de una singularidad, sino también cómo el diagrama encapsula la estructura causal del espacio-tiempo en el contexto de un colapso gravitacional. Si observamos el dibujo de la Figura 1, toda la construcción se halla inmersa en un espacio-tiempo simbolizado con M_+^4 , donde el tiempo corre en dirección vertical hacia arriba. Por lo tanto, comencemos por el principio, es decir, en la parte inferior del diagrama, donde apreciamos de entrada el hiperplano t constante C^3 , lo cual vendría indicando la existencia de una hipersuperficie de Cauchy en la variedad, una de las condiciones del teorema de Penrose.

Según avanzamos en el tiempo hacia arriba se aprecia lo que viene a ser una distribución de materia encogiendo o colapsando espacialmente en el tiempo hasta llegar a $S^2 = T^2$. Este anillo (en 3 dimensiones sería una esfera, de ahí la notación) constituye una subvariedad compacta y acronal (pues es perpendicular al eje temporal), otra de las condiciones clave del teorema. El conjunto futuro del anillo, $J^+(S^2)$ viene representado por el interior del cono rayado en horizontal exceptuando la parte inferior del cono discontinuo. Se muestra así que la frontera de dicho conjunto, esto es B^3 , es compacto y, por ende, se tiene una subvariedad futura convergente. En base a la conclusión del teorema de Penrose, la distribución

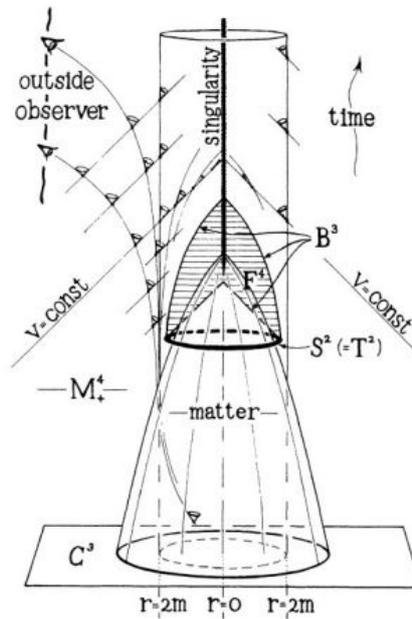


FIGURA 1. Diagrama del artículo original de Roger Penrose en el que se representa gráficamente la formación de una singularidad en el espacio-tiempo a partir del colapso gravitacional de una distribución de materia. Imagen extraída de [Penrose, 1965].

de materia incide finalmente en la línea gruesa vertical que simboliza la singularidad prolongada en el tiempo. Notar además que el cilindro vertical en la imagen es un horizonte de sucesos, pues delimita la zona en la que los rayos de luz convergen. Como se puede observar, aquellos que parten de fuera del cilindro se dirigen hacia el exterior mientras que los rayos del interior se dirigen hacia la singularidad llegando un final abrupto, lo que en otras palabras se puede expresar como la incompletitud de las geodésicas luminosas en el espacio-tiempo M_+^4 .

El teorema de singularidad de Penrose fue transformador entre la comunidad de físicos trabajando en relatividad general y su impacto fue profundo e inmediato. Prueba de ello es el hecho de que unos meses más tarde S. W. Hawking, en el contexto cosmológico, publicó [Hawking, 1965] cuando se dio cuenta de que las superficies atrapadas cerradas deberían existir en cualquier Universo en expansión que fuera homogéneo e isótropo. Esto dio inicio a una serie de artículos de él, Ellis, Geroch y otros sobre la cuestión de la inevitabilidad de una singularidad inicial en nuestro pasado si se supone que la relatividad general se cumple y se cumplen algunas condiciones razonables. Además, en los ya mencionados [Hawking, 1966(1)], [Hawking, 1966(2)] y [Hawking, 1967], Hawking desarrolló nuevas ideas que, cuando se combinaron con [Penrose, 1965], formaron el núcleo de los teoremas de singularidad modernos.

No obstante, muchos otros avances físicos y matemáticos fueron motivados por [Penrose, 1965]. Por ejemplo, en [DeWitt, 1967] se analizó por primera vez la idea recurrente de si una teoría cuántica de la gravedad puede o no extender soluciones de la relatividad general clásica más allá de las singularidades. Además, se desarrolló aún más la teoría de la causalidad y de las condiciones de causalidad vistas en el trabajo, convirtiéndose en una parte integral de la relatividad general. Finalmente, Hawking y Penrose [HawkPen, 1970] lograrían mejorar la comprensión de las condiciones bajo las cuales un espacio-tiempo debía presentar singularidades en lo que todavía se considera el teorema de singularidad por excelencia.

Las líneas de investigación actuales en teoremas de singularidades se han expandido considerablemente. Los teoremas de singularidad, incluido el probado en este trabajo, asumen, aunque no se mencione, que el tensor métrico es dos veces diferenciable en toda la variedad. Una de las líneas de investigación actual pasa por rebajar dicha condición de diferenciabilidad. Recientemente, dos teoremas similares al de Penrose, pero que se aplican a espacios-tiempos cosmológicos en los que pueden haberse formado agujeros negros localizados, fueron probados en [VilenWall, 2014]. A diferencia del teorema de Penrose, los nuevos teoremas proporcionan cierta información sobre la ubicación de las singularidades. Una conclusión es que el Universo debería contener regiones causalmente desconectadas. También se debe considerar qué sucede cuando una o más de las hipótesis en los teoremas de singularidad se relajan o se suprimen por completo. Esto se ha abordado recientemente en [CostaFlores, 2014], donde tratan de encontrar teoremas con conclusiones más suaves. Esto ha abierto nuevas líneas en las que explorar.

Otra fecunda línea de investigación aparece a raíz del conflicto entre los teoremas de singularidad y la teoría de la gravedad cuántica, aún no encontrada. Actualmente, se acepta que las singularidades clásicas, como la de este TFG, suponen una “fractura” de la teoría clásica en condiciones físicas extremas y es que es en estas condiciones extremas cuando se manifiestan los efectos de la gravedad cuántica. Surge así la necesidad de conocer si los teoremas de singularidad, o parte de ellos, siguen siendo válidos en un régimen cuántico (Una discusión general, véase [Bojowald, 2007]). El primer paso hacia el análisis de los teoremas de singularidad a este respecto está consistiendo en debilitar las “condiciones de energía”, es decir, encontrar una versión adecuada de la condición sobre el tensor de curvatura en los teoremas.

Otra cuestión de relevancia es la inflación en el pasado del universo. Este fenómeno viola las condiciones de curvatura en los teoremas de singularidad. Es por ello por lo que se puede considerar la posibilidad de que en realidad el Universo sea geodésicamente completo en el pasado, en contra de los teoremas de Hawking. Sin embargo, este no es el caso si se cumple la condición de energía débil ([Borde, 1994]). La inflación, así como la aceleración de la expansión del Universo, están estrechamente relacionadas con la existencia de una constante cosmológica positiva $\Lambda > 0$ en las ecuaciones de Einstein (Ecuación 2.11.1), es decir,

$$8\pi T + \Lambda g = \text{Ric} - \frac{1}{2}Sg.$$

Esta constante, como es positiva, puede hacer que no se cumpla la condición de curvatura y, en última instancia, la mayoría de los teoremas de singularidad.

4.2. Conclusiones

En conclusión, el teorema de singularidad de Penrose no solo revolucionó nuestra comprensión de los agujeros negros y el origen del universo, sino que también abrió nuevas fronteras en la investigación sobre la estructura del espacio-tiempo. Los desarrollos posteriores han continuado desafiando y expandiendo estas ideas, mostrando que las singularidades siguen siendo un tema central en la física teórica moderna. Este trabajo ha revisado y aplicado todos los conceptos geométricos y relativistas necesarios para entender de forma profunda y detallada, tanto el teorema de singularidad de Penrose de 1965 como sus influencias e implicaciones.

A nivel personal, como alumno tanto de Matemáticas como de Física, el estudio de un teorema de implicaciones tan complejas y que requiere un manejo de herramientas matemáticas complicadas me ha servido para comprobar que, en muchas ocasiones, ambas ciencias están profundamente entrelazadas. Como ha ocurrido, ocurre y seguirá ocurriendo, el avance de cualquiera de ellas está íntimamente relacionada con el avance de la otra, con lo que queda demostrado la importancia de la retroalimentación entre físicos y matemáticos.

Bibliografía

- [Beem, 1996] J.K. Beem, P.E. Ehrlich, K. L. Easley, *Global Lorentzian Geometry*, 2nd ed. Marcel Dekker: Inc, New York, 1996.
- [Bojowald, 2007] M. Bojowald M (2007) Singularities and Quantum Gravity (lecture course at the XIIth Brazilian School on Cosmology and Gravitation 2006) AIP Conf. Proc. **910**, 294-333.
- [Borde, 1994] A. Borde, 1994. Open and closed universes, initial singularities, and inflation *Phys. Rev. D* **50**, 3692.
- [Chan, 1931] S. Chandrasekhar, 1931. The maximum mass of ideal white dwarfs. *Astrophysical Journal*, **74**, 81-82.
- [Coddington, 1955] E. A. Coddington, N. Levinson, “*Theory of Ordinary Differential Equations*”. Tata McGraw-Hill Publishing Company Limited, 1955.
- [CostaFlores, 2014] I.P. Costa e Silva and J.L Flores, 2014. Lightlike sets with applications to the rigidity of null geodesic incompleteness, arXiv:1408.4358
- [DeWitt, 1967] B.S. DeWitt, 1967. Quantum Theory of Gravity. I. The Canonical Theory *Phys. Rev.* , 1113.
- [Eddington, 1924] A.S. Eddington, 1924. A comparison of Whitehead’s and Einstein’s formulae. *Nature*. **113**, 192.
- [Etayo, 2024] F. Etayo, *Variedades Diferenciables*, Apuntes de la asignatura. Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación, Universidad de Cantabria. Curso 2023/24.
- [Hawking, 1965] S.W. Hawking, 1965. Occurrence of singularities in open universes *Phys.Rev.Lett.* **15**, 689.
- [Hawking, 1966(1)] S.W. Hawking, 1966. The occurrence of singularities in Cosmology. I. *Proc. Roy. Soc. London* **A294**, 511.
- [Hawking, 1966(2)] S.W. Hawking, 1966. The occurrence of singularities in Cosmology. II. *Proc. Roy. Soc. London* **A295**, 490.
- [Hawking, 1967] S.W. Hawking, 1966. The occurrence of singularities in Cosmology. III. *Proc. Roy. Soc. London* **A300**, 187.
- [HawkPen, 1970] S.W. Hawking and R. Penrose, 1970. The singularities of gravitational collapse and cosmology *Proc.Roy. Soc. London* **A314**, 529.
- [HawkEllis, 1973] S.W. Hawking, G.F.R. Ellis, *The large Scale Estructure of space-time*. 1st ed. Cambridge University Press. 1973.
- [Hobson, 2006] M.P. Hobson, G.P. Efstathiou, A.N. Lasenby, *General Relativity. An Introduction for Physicists*. Cambridge University Press. 2006.
- [Kerr, 1963] R.P Kerr, 1963. Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics *Phys. Rev. Lett.* **11**, 237.
- [Komar, 1956] A. Komar, 1956. Necessity of singularities in the solution of the field equations of General Relativity *Phys. Rev.* **104**, 544.
- [Lemaître,1933] G. Lemaître, 1933. L’Univers en expansion, Ann. Soc. Sci. Bruxelles, **A53**, 51; English translation reprinted as a Golden Oldie 1997 *Gen. Rel. Grav.* **29**, 641.
- [Manchak, 2020] J.B. Manchak, *Global Spacetime Structure* Cambridge University Press, 2020. ex.3.
- [Munkres, 2002] J. R. Munkres, *Topología (2ª Edición)*. Pearson Educación, S.A., Madrid, 2002.
- [Naber, 1988] G.L. Naber, *Space-time and singularities. An introduction*. London Mathematical Society Student Texts. 11. Cambridge University Press. 1988.
- [O’Neill, 1983] B. O’Neill, *Semi-Riemannian Geometry with applications to relativity*. Academic Press, New York, 1983.
- [OppenSnyder, 1939] J.R. Oppenheimer, H. Snyder, 1939. On continued gravitational contraction *Phys. Rev.* **56**, 455-459.
- [OppenVolkoff, 1939] J.R. Oppenheimer, G.M Volkoff, 1939. On massive neutron cores *Phys. Rev.* **55**, 374.
- [Penrose, 1965] Penrose, R. (1965). Gravitational collapse and space-time singularities. *Physical review letters*, vol. **14**, 57.
- [PenzWil, 1965] A. Penzias, R.W. Wilson, 1965. A measure of excess antenna temperature at 4080 Mc/s, *Ap.J.* **142** 419.
- [Raychad, 1955] A.K. Raychaudhuri, 1955. Relativistic Cosmology I *Phys. Rev.* **98**, 1123.
- [Raychad, 1957] A.K. Raychaudhuri, 1957. Singular State in Relativistic Cosmology *Phys. Rev.* **106**, 172.
- [Rivera, 2020] D. Rivera, “*Gravedad de Einstein-Cartan y Cosmología*”. Trabajo de Fin de Grado, Grado en Física, Facultad de Ciencias, Universidad de Cantabria, 2020.
- [Schwarzschild, 1916] K. Schwarzschild, 1916. *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie Sitzungsberichte der Kniglich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.* *Phys. Math. Klasse* 189; English translation as a Golden Oldie 2003 *Gen. Rel. Grav.* **35** 951
- [Senovilla, 2015] J.M. Senovilla, , D. Garfinkle, *The 1965 Penrose singularity theorem*. (2015) *Classicaland Quantum Gravity*, 32(12), 124008.

- [Stromberg, 1981] K. Stromberg (1981). *Introduction to Classical Real Analysis*. American Mathematical Society, Wadsworth. **132**.
- [VilenWall, 2014] A. Vilenkin, A.C. Wall, 2014. Cosmological singularity theorems and black holes Phys. Rev. D **89** 064035.

Prueba de algún resultado auxiliar

A continuación, se muestran las pruebas de ciertos resultados técnicos que por motivos de extensión fueron excluidas del cuerpo principal del trabajo.

PROPOSICIÓN A.0.1. *Sea $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de curvas causales hacia el futuro en una variedad de Lorentz M tal que $\lim_n \alpha_n(0) = p$ y $\alpha_n \not\rightarrow p$. Entonces, para cada recubrimiento convexo \mathfrak{R} de M , existe una sucesión límite de $\{\alpha_n\}$ relativa a \mathfrak{R} y que comienza en p , en términos de la Definición 3.2.1.*

DEMOSTRACIÓN. Por ser M una variedad diferenciable, M es paracompacto¹ y el recubrimiento \mathfrak{R} admite un refinamiento \mathfrak{R}' localmente finito. Esto es, si denotamos $\mathfrak{R} = \{\mathcal{C}_l\}_{l \in L}$ y $\mathfrak{R}' = \{\mathcal{S}_i\}_{i \in I}$, para cada $i \in I$ existe un $l \in L$ tal que $\mathcal{S}_i \subseteq \mathcal{C}_l$ y para todo punto $q \in M$ existe un entorno abierto de q que solo interseca a una cantidad finita de los \mathcal{S}_i . Además, podremos tomar los abiertos \mathcal{S}_i verificando que $\overline{\mathcal{S}_i}$ es compacto y $\overline{\mathcal{S}_i} \subseteq \mathcal{C}_l$.

Comencemos aplicando ambas hipótesis. Por un lado, $\lim_n \alpha_n(0) = p$ por lo que existirá un abierto \mathcal{S}_0 de \mathfrak{R}' con $p \in \mathcal{S}_0$ e incluyendo la sucesión de puntos $\{\alpha_n(0)\}_{n \geq n_0}$ de un n_0 , lo suficientemente grande, en adelante. Por otro lado, como $\alpha_n \not\rightarrow p$ una cantidad infinita de las curvas α_n deben salir de $\overline{\mathcal{S}_0}$. Llamaremos $\{\alpha_n^1\}$ a dichas curvas y $\{\alpha_n^1(s_{n1})\}$ a la sucesión de sus puntos de corte con la frontera $\text{Fr } \mathcal{S}_0$. Dado que $\text{Fr } \mathcal{S}_0$ es compacto por ser un subconjunto cerrado del compacto $\overline{\mathcal{S}_0}$, existe una subsucesión $\{\alpha_n^1(s_{n1})\}$, que llamaremos de la misma forma para facilitar la notación, convergente a $p_1 \in \text{Fr } \mathcal{S}_0$. Ahora, tomemos un conjunto $\mathcal{S}_1 \in \mathfrak{R}'$ con $p_1 \in \mathcal{S}_1$ y supongamos que un número infinito de las curvas $\{\alpha_n^1\}$ salen del conjunto \mathcal{S}_1 , el caso contrario se tratará posteriormente. Igual que antes, tendremos una serie de curvas $\{\alpha_n^2\}$ que salen de \mathcal{S}_1 y cuyos puntos de corte $\{\alpha_n^2(s_{n2})\}$ con $\text{Fr } \mathcal{S}_1$ convergen a $p_2 \in \overline{\mathcal{S}_1}$. Repetimos el proceso tantas veces como sea posible con la siguiente condición sobre la elección del conjunto $\mathcal{S}_i \in \mathfrak{R}'$ con $p_i \in \mathcal{S}_i$: si existe más de una posibilidad para dicha elección tomaremos la menos utilizada hasta el momento. Tal y como se ha conseguido la sucesión y sabiendo que la relación “ \leq ” es cerrada (Lema 3.1.3 *iv*), como $p_i \neq p_{i+1}$ (pues los \mathcal{S}_i son abiertos y $\text{Fr } \mathcal{S}_i \cap \mathcal{S}_i = \emptyset$) tendremos $p_{i+1} > p_i$ para cada i . Por construcción, la sucesión $\{p_i\}$ verifica **QL1**; veamos que también **QL2** viendo cada uno de los casos posibles.

Si la sucesión $\{p_i\}$ es infinita probemos que es no convergente. Supongamos que $\lim_i p_i = q$, habrá por tanto un abierto \mathcal{S} de \mathfrak{R}' que contenga los puntos p_i salvo una cantidad finita. Ahora bien, como la familia \mathfrak{R}' era localmente finita solo un número finito de los elementos de \mathfrak{R}' interseca a \mathcal{S} y, por ende, al menos uno de ellos ha de haber sido elegido como \mathcal{S}_i infinitas veces siguiendo el proceso explicado anteriormente. Por otro lado, \mathcal{S} ha de haber sido candidato a ser elegido como \mathcal{S}_i un número infinito de veces pero únicamente un número finito ha podido terminar siendo elegido (de lo contrario un número infinito de los p_i se encontraría en su frontera con lo que acabaríamos concluyendo que $q \in \text{Fr } \mathcal{S}$ en contra de la hipótesis inicial). De este modo, se contradice nuestra condición sobre la elección de los conjuntos \mathcal{S}_i .

Si la sucesión $\{p_i\}$ es finita con $p = p_0 < \dots < p_k$ es porque únicamente un número finito de las curvas $\{\alpha_n^k\}$ dejan el abierto \mathcal{S}_k . Denotemos por $\{\alpha_m^k\}$ la sucesión infinita de curva que quedan atrapadas en

¹Sea X un espacio topológico y sea $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ un recubrimiento abierto de X , otro recubrimiento abierto $\{V_\beta\}$ de X se dice que es un *refinamiento* del anterior si para cada abierto V_β existe $\alpha \in A$ tal que $V_\beta \subseteq U_\alpha$. Dada una colección $\mathcal{F} = \{F_\alpha\}$ de subconjuntos de X , se dice que \mathcal{F} es localmente finita si para cada $p \in X$ existe un entorno U que solo interseca a una cantidad finita de subconjuntos de la familia \mathcal{F} . Se dice que X es un espacio topológico *paracompacto* si todo recubrimiento abierto del mismo posee un refinamiento localmente finito.

\mathcal{S}_k . Por el ítem v del Lema 3.1.3 son extendibles y podremos asumir que cada α_m^k está definida en el intervalo cerrado $[0, b_m]$. Dado que $\overline{\mathcal{S}_k}$ es compacto, existirá una subsucesión de los extremos finales $\{\alpha_m^k(b_m)\}$ convergente a un punto $q \in \overline{\mathcal{S}_k}$. Tendremos dos casos, si $q = p_k$ la sucesión $p_0 < \dots < p_k$ es máxima verificando **QL1** por lo que se satisface **QL2**; y si $q \neq p_k$ será la sucesión $p_0 < \dots < p_k < q$ la que verifique **QL1** y **QL2**. \square

LEMA A.0.2. *La función separación temporal $\tau : M \times M \rightarrow [0, +\infty]$ es semicontinua inferiormente.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $(p, q) \in M$ veamos que, dado $\delta > 0$, existen abiertos U y V de p y q respectivamente, tales que para todo $(x, y) \in U \times V$ se tiene $\tau(x, y) > \tau(p, q) - \delta$.

En el caso en que $\tau(p, q) = 0$ como $\tau : M \times M \rightarrow [0, +\infty]$ lo anterior se verifica siempre así que supongamos, por el momento, que $0 < \tau(p, q) < +\infty$ o lo que es lo mismo $p \ll q$. Sea α una curva temporal de p a q verificando $L(\alpha) > \tau(p, q) - \delta/3$. Consideremos \mathcal{C} , un entorno abierto convexo de q , y q_1 un punto de α en \mathcal{C} anterior a q . Para cualesquiera dos puntos r y s denotemos por $\sigma_{r,s}$ el segmento geodésico de r a s . Ya que, por el Lema 2.8.6, la composición

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} \times \mathcal{C} & \xrightarrow{\Delta} & TM & \xrightarrow{|\cdot|} & \mathbb{R} \\ (p, q) & \mapsto & \vec{pq} & \mapsto & |\vec{pq}| \end{array}$$

es continua, existe un abierto V de q tal que para todo $y \in V$ $\sigma_{q_1,y}$ es causal (ie. $V \subseteq J^+(q_1)$) y se verifica $L(\sigma_{q_1,y}) > L(\sigma_{q_1,q}) - \delta/3$. La razón es que, en entornos convexos, como la exponencial es una isometría, para $r, s \in \mathcal{C}$ se tiene $|\vec{rs}| = L(\sigma_{r,s})$. Además, como $\sigma_{q_1,q}$ es geodésica contenida en \mathcal{C} y el fragmento de la curva α que va de q_1 a q , que denotamos por α_1 , también está en \mathcal{C} , se tiene $L(\alpha_1) \leq L(\sigma_{q_1,q})$ y, por ende, $L(\sigma_{q_1,y}) > L(\alpha_1) - \delta/3$.

Repitiendo el mismo razonamiento pero recorriendo la curva α en sentido contrario de q a p , se consigue un entorno $U \subseteq J^-(p_1)$ de p y un punto p_1 en α posterior a p de forma que para todo $x \in U$, $L(\sigma_{x,p_1}) > L(\sigma_{p,p_1}) - \delta/3 \geq L(\alpha_3) - \delta/3$. Se denota por α_3 el fragmento de la curva α comprendido entre p y p_1 y por α_2 aquel entre p_1 y q_1 . Considerándolo todo, para cualesquiera $x \in U$ e $y \in V$, uniendo x con p_1 , este último con q_1 mediante α_2 y q_1 con y :

$$\begin{aligned} \tau(x, y) &\geq L(\sigma_{x,p_1}) + L(\alpha_2) + L(\sigma_{q_1,y}) \\ &> L(\alpha_3) - \delta/3 + L(\alpha_2) + L(\alpha_1) - \delta/3 \\ &= L(\alpha) - 2\delta/3 \\ &> \tau(p, q) - \delta/3 - 2\delta/3 = \tau(p, q) - \delta. \end{aligned}$$

\square