

***FACULTAD
DE
CIENCIAS***

**Equilibrio de Nash y conjuntos
semialgebraicos**

(Nash equilibrium and semialgebraic sets)

Trabajo de fin de Grado
para acceder al

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autora: Naiara Macho Amiana

Director: Luis Felipe Tabera Alonso

Septiembre-2024

Resumen

En la teoría de juegos, uno de los conceptos fundamentales es el equilibrio de Nash, que describe una situación en la que ningún jugador puede mejorar su resultado cambiando solo su propia estrategia, dado que las estrategias de los demás jugadores están fijas. Este concepto es fundamental, sobre todo en el área de la economía, ya que permite modelar y entender comportamientos estratégicos.

Este trabajo se centra, por una parte, en la existencia de equilibrios de Nash, y por otra, en la caracterización de estos. Utilizando teoremas de punto fijo damos condiciones suficientes para asegurar su existencia tanto en juegos de estrategia pura como en juegos de estrategia mixta. Además, exploramos la complejidad de estos equilibrios mediante conjuntos semialgebraicos, demostrando que cualquier conjunto semialgebraico compacto se puede expresar como la proyección del conjunto de equilibrios de Nash de un juego.

Palabras clave: juegos, estrategias, equilibrios de Nash, teoremas de punto fijo, conjuntos semialgebraicos.

Abstract

In game theory, one of the fundamental concepts is Nash equilibrium, which describes a situation where no player can improve his outcome by changing only his own strategy, given that the strategies of the other players are fixed. This concept is fundamental, especially in the area of economics, since it allows for modeling and understanding strategic behaviors.

This work is focused on the existence of Nash equilibria and their characterization. By using fixed point theorems, we give sufficient conditions to ensure their existence in both pure strategy games and mixed strategy games. Moreover, we explore the complexity of these equilibria by means of semialgebraic sets, showing that any compact semialgebraic set can be expressed as the projection of the set of Nash equilibria of a game.

Keywords: games, strategies, Nash equilibria, fixed point theorems, semialgebraic sets.

Índice general

1. Introducción	3
2. Juegos y equilibrios de Nash	5
2.1. Introducción a la teoría de juegos	5
2.2. Juegos de estrategias puras	6
2.3. Juego y equilibrio de Nash de estrategias mixtas	10
3. Existencia del equilibrio de Nash	13
3.1. Símplices	13
3.2. Lema de Sperner	18
3.3. Teorema de Brouwer	19
3.4. Teorema de Kakutani	21
3.5. Teoremas de existencia de equilibrios de Nash	23
4. Caracterización mediante conjuntos semialgebraicos	25
4.1. Introducción a los conjuntos semialgebraicos	25
4.2. Conjuntos semialgebraicos	25
4.3. Construcción del juego	28
4.4. Caracterización de los conjuntos semialgebraicos cerrados compactos como equilibrio de Nash	29

1. Introducción

El objetivo de este trabajo de fin de grado es explorar y demostrar la existencia y caracterización de los equilibrios de Nash. Este trabajo se divide en tres capítulos principales: el primero se centra en las definiciones fundamentales para la comprensión del trabajo, el segundo en la demostración de la existencia de equilibrios de Nash mediante teoremas de punto fijo y el tercero explora la complejidad de los equilibrios de Nash a través de los conjuntos semialgebraicos. La idea para el tema de este trabajo surgió tras cursar la asignatura Mathematical Economics and Finance en la Università degli Studi Dell'Aquila. Parte de este trabajo se basa en los apuntes de dicha asignatura [4].

El primer capítulo, *Juegos y Equilibrios de Nash*, presenta las bases teóricas necesarias para entender los equilibrios de Nash. Comenzamos introduciendo las definiciones esenciales de un juego, equilibrio de Nash en estrategias puras, y extendemos el concepto a estrategias mixtas. A lo largo del capítulo, se presentan ejemplos que muestran diferentes escenarios de equilibrios de Nash. Dos de estos ejemplos muestran juegos donde existen equilibrios en estrategias puras, mientras que otro muestra un juego donde tales equilibrios no existen, pero sí se puede encontrar un equilibrio de Nash en estrategias mixtas.

El segundo capítulo, *Existencia de equilibrios de Nash*, se dedica a la existencia de equilibrios de Nash. Las demostraciones de tales teoremas se basan en teoremas de punto fijo, para ello se introduce y se demuestra el Lema de Sperner, Teorema de Brouwer y Teorema de Kakutani. Ambos teoremas, bajo condiciones específicas aseguran que existe un punto fijo de una función o de una función de correspondencias. Los dos resultados principales que se demuestran son:

Un juego estratégico tiene un equilibrio de Nash siempre que ciertas condiciones se cumplan: cada jugador debe tener un conjunto de acciones que sea no vacío, compacto y convexo, y las preferencias del jugador deben ser continuas y quasi cóncavas. Esto asegura que bajo estas condiciones, es posible encontrar al menos un equilibrio de Nash en estrategias puras.

El segundo resultado importante se refiere a los juegos estratégicos finitos, donde se demuestra que siempre existe un equilibrio de Nash en estrategias mixtas. Esto significa que incluso en situaciones donde no hay un equilibrio en estrategias puras, al permitir que los jugadores usen estrategias mixtas (es decir, seleccionen aleatoriamente entre varias estrategias puras), se garantiza la existencia de un equilibrio de Nash.

El tercer capítulo, *Caracterización de Equilibrios de Nash mediante Conjuntos Semialgebraicos*, se centra en el estudio de la complejidad de los equilibrios de Nash en juegos de estrategia mixta a través de conjuntos semialgebraicos. El análisis en este capítulo demuestra que cualquier conjunto semialgebraico puede ser representado como el conjunto de equilibrios de Nash de algún juego.

El teorema clave de este capítulo muestra que, dado un conjunto semialgebraico no vacío y compacto, es posible construir un juego binario en el que la proyección de su conjunto de equilibrios de Nash es precisamente ese conjunto semialgebraico. Después, ampliamos este resultado a un conjunto semialgebraico compacto dentro de un espacio mas grande. Este segundo resultado demuestra que, para cualquier conjunto semialgebraico no vacío y

compacto en el espacio de los pagos, existe un juego en el que la proyección del conjunto de pagos de equilibrio de Nash corresponde exactamente a ese conjunto semialgebraico.

Estos resultados subrayan la increíble flexibilidad y riqueza de la teoría de juegos cuando se consideran los equilibrios de Nash en el contexto de conjuntos semialgebraicos. Permiten entender mejor cómo los equilibrios de Nash pueden surgir en escenarios con una estructura compleja.

En conclusión, este TFG ofrece una visión detallada de los equilibrios de Nash, desde su existencia hasta su caracterización en términos de conjuntos semialgebraicos. Los resultados presentados además de explicar los conceptos teóricos de los equilibrios de Nash, muestran también las aplicaciones prácticas en diversos campos que estudian decisiones estratégicas y sus resultados.

2. Juegos y equilibrios de Nash

2.1. Introducción a la teoría de juegos

La teoría de juegos es un conjunto de herramientas diseñadas para ayudarnos a comprender los fenómenos que observamos cuando los jugadores interactúan. Las ideas fundamentales que sostienen esta teoría son que quienes toman decisiones buscan objetivos exógenos bien definidos (actúan de manera racional) y consideran su conocimiento o expectativas sobre el comportamiento de otros jugadores (razonan estratégicamente).

Los modelos de teoría de juegos son representaciones bastante abstractas de situaciones de la vida real. Su abstracción les permite ser utilizados en un número muy grande de fenómenos. Por ejemplo, la teoría de equilibrio de Nash ha sido utilizada para estudiar competencias oligopólicas y políticas.

El límite entre la teoría de juegos pura y aplicada es difuso, ya que algunos desarrollos en la teoría pura fueron motivados por problemas que surgieron en las aplicaciones.

La teoría de juegos utiliza las matemáticas para expresar sus ideas de manera formal. Una formulación matemática facilita definir conceptos precisamente, para verificar la consistencia de las ideas y explorar las implicaciones de las suposiciones. En este capítulo se van a mostrar definiciones y resultados de manera precisa, intercalándolos con motivaciones e interpretaciones de los conceptos.

Un juego es una descripción de una interacción estratégica que incluye las restricciones en las acciones que los jugadores pueden jugar y los intereses de los jugadores, pero no especifica las acciones que juega cada jugador. Una solución es una descripción sistemática de los resultados que pueden surgir en una familia de juegos. La teoría de juegos sugiere soluciones razonables para clases de juegos y examina sus propiedades.

En todos los modelos de teoría de juegos, la entidad básica es un jugador. Un jugador puede interpretarse como un individuo o como un grupo de individuos tomando una decisión. Una vez se define el conjunto de jugadores, se puede diferenciar entre dos tipos de juegos: aquellos en los que los conjuntos de posibles acciones de jugadores individuales son primitivos y aquellos cuyos conjuntos de posibles acciones conjuntas de grupos de jugadores son primitivos. En este trabajo se va a trabajar con el primer tipo, juegos no cooperativos.

Un juego estratégico es un modelo de una situación en la que cada jugador escoge su plan de acción de una vez y las decisiones de todos los jugadores se toman simultáneamente. Es decir, cuando un jugador escoge su plan de acciones no conoce los planes del resto de jugadores. El equilibrio de Nash es la solución más utilizada para juegos estratégicos. De aquí en adelante, cuando nos referimos a juego nos estamos refiriendo a juegos estratégicos.

El modelo que se va a estudiar asume que cada jugador es racional, en el sentido de que él es consciente de sus alternativas, forma expectativas sobre algo desconocido, tiene preferencias claras y elige su acción deliberadamente después de algún proceso de optimización. Es un modelo racional de elección.

El primer problema que nos encontramos cuando empezamos con este trabajo fue la falta de buenas referencias sobre la Teoría de Juegos desde el punto de vista matemático y la

mayoría de las definiciones en los textos eran informales. Conseguimos encontrar el libro [6] y la mayor parte de las definiciones presentadas en este capítulo se basan en él.

2.2. Juegos de estrategias puras

Definición 2.1 (Relación de preferencia). *Dado un conjunto A no vacío, una relación de preferencia es una relación binaria R que es:*

- *Total: Para todo $a, b \in A$, se tiene aRb o bRa .*
- *Reflexiva: Para todo $a \in A$, aRa .*
- *Transitiva: Para todo $a, b, c \in A$ si aRb y bRc , entonces aRc .*

Para $a, b \in A$ se denota aRb por $a \succeq b$.

Definición 2.2. *Si A está dotado de una topología, diremos que una relación de preferencia $\succeq$ en A es continua siempre que dos sucesiones $(a^k)_k$ y $(b^k)_k$ en A convergen a a y b respectivamente y para todo k , $a^k \succeq b^k$, entonces $a \succeq b$.*

Definición 2.3 (Juego). *Un juego estratégico consiste en una tupla $\langle N, (A_i), (\succeq_i) \rangle$ donde:*

- *N es un conjunto finito de jugadores*
- *Para cada jugador $i \in N$, A_i es un conjunto no vacío, las posibles acciones del jugador i .*
- *$A = A_1 \times \dots \times A_N$, llamaremos perfil a un elemento $a \in A$.*
- *Para cada jugador $i \in N$, $\succeq_i$ es una relación de preferencia en A (la relación de preferencia del jugador i).*

Frecuentemente, se especifica la relación de preferencia de un jugador i dando una función de pagos $u_i : A \rightarrow \mathbb{R}$. En este caso, la relación de preferencia es $a \succeq_i b \leftrightarrow u_i(a) \geq u_i(b)$. Los valores de esa función son los pagos. En ese caso, el juego se denota por $\langle N, (A_i), (u_i) \rangle$.

Proposición 2.4. *Dada una función de pagos $u_i : A \rightarrow \mathbb{R}$ y la relación de preferencia $\succeq_i$ inducida, se tiene que si u_i es continua, entonces $\succeq_i$ también lo es.*

Demostración. Se tiene que $\succeq_i$ es continua si teniendo que $(a^k)_k \rightarrow a$, $(b^k)_k \rightarrow b$ y $a^k \succeq_i b^k$ entonces $a \succeq_i b$. Partiendo de las condiciones iniciales y de que $u_i(a) \geq u_i(b) \leftrightarrow u_i(a) \succeq_i u_i(b)$

$$a^k \succeq_i b^k \leftrightarrow u_i(a^k) \geq u_i(b^k)$$

Como u_i es continua

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} u_i(a^k) &= u_i(a) \\ \lim_{k \rightarrow \infty} u_i(b^k) &= u_i(b) \end{aligned}$$

Luego, $u_i(a) \geq u_i(b) \leftrightarrow a \succeq_i b$. □

Un juego estratégico en el que hay dos jugadores puede ser descrito como en la siguiente tabla, donde las acciones de un jugador están en las filas y las del otro en las columnas. Los dos números en la celda de la fila r y columna c son los pagos de los jugadores cuando el jugador de las filas elige r y el de las columnas elige c . Entonces, en el ejemplo de la tabla, el conjunto de acciones del jugador de las filas es $\{T, B\}$ y el del jugador de las columnas $\{L, R\}$, y por ejemplo el pago del jugador de las filas cuando se juega (T, L) es w_1 y el pago del de las columnas es w_2 .

	L	R
T	w_1, w_2	x_1, x_2
B	y_1, y_2	z_1, z_2

El equilibrio de Nash captura un estado estable del desarrollo de un juego estratégico en el que cada jugador mantiene la expectativa correcta sobre el comportamiento del otro jugador y actúa de manera racional.

Definición 2.5 (Equilibrio de Nash). *Sea $\langle N, (A_i), (\succsim_i) \rangle$ un juego estratégico. Para cada $i \in N$, tenemos $A_{-i} = \prod_{j \in N \setminus i} A_j$ y dado un perfil $a \in A$ tenemos $a_{-i} = (a_j)_{j \in N \setminus \{i\}} \in A_{-i}$. Identificaremos cada elemento $a \in A$ con (a_{-i}, a_i) .*

En estas condiciones, un equilibrio de Nash es un perfil $a^ \in A$ de acciones tal que para todo jugador $i \in N$ se tiene*

$$\forall a_i \in A_i \quad (a_{-i}^*, a_i^*) \succsim_i (a_{-i}^*, a_i) \quad (2.1)$$

Entonces, para que a^ sea un equilibrio de Nash se necesita que ningún jugador i tenga una acción que produzca un resultado que prefiera al generado cuando elige a_i^* , dado que todos los demás jugadores j eligen su acción de equilibrio a_j^* . En resumen, ningún jugador puede desviarse de manera rentable, fijadas las acciones de los demás jugadores.*

La siguiente reformulación de la definición a veces es útil. Para cualquier $a_{-i} \in A_{-i}$ se define el conjunto de las mejores acciones del jugador i dado a_{-i} como:

$$B_i(a_{-i}) = \{a_i \in A_i : \forall a'_i \in A_i \quad (a_{-i}, a_i) \succsim_i (a_{-i}, a'_i)\} \subseteq A_i \quad (2.2)$$

Entonces, un equilibrio de Nash es un perfil de acciones a^ tal que*

$$a_i^* \in B_i(a_{-i}^*) \quad \forall i \in N \quad (2.3)$$

Ejemplo 2.6 (El dilema del prisionero). *Este es un problema clásico de la teoría de juegos. Estudia los incentivos que tienen dos sospechosos de un robo para delatar a su compañero o no. El problema es el siguiente: dos sospechosos de un crimen están en celdas separadas. Si ambos se delatan, cada uno será condenado a 3 años de cárcel. Si solo uno de ellos delata al otro, él delator será libre y el delatado será condenado a 4 años. Si ninguno de los dos delata al otro, ambos serán condenados a 1 año de cárcel. Ambos prisioneros deben tomar la mejor decisión sin saber la estrategia del otro.*

	Delatar	No delatar
Delatar	3, 3	0, 4
No delatar	4, 0	1, 1

Lo mejor para ambos sería no delatarse el uno al otro, pero la única manera de asegurarse una condena menor sin saber la estrategia del otro es delatando.

- Si el prisionero 1 decide delatar, entonces el prisionero 2 delatará también, (Delatar, Delatar).
- Si el prisionero 1 decide no delatar, entonces el prisionero 2 decidirá delatar, (No delatar, Delatar).
- Si el prisionero 2 decide delatar, entonces el prisionero 1 delatará también, (Delatar, Delatar).
- Si el prisionero 2 decide no delatar, entonces el prisionero 1 decidirá delatar, (Delatar, No delatar).

Por lo tanto, el único equilibrio de Nash del juego es que ambos prisioneros tomen la decisión de delatarse, (Delatar, Delatar) y el pago sería (3, 3).

Utilizando el lenguaje de la Definición 2.5, vamos a ver que el equilibrio de Nash es el perfil $a^* = (\text{Delatar}, \text{Delatar})$. En este ejemplo, a_1^* es la elección del prisionero 1, Delatar, y a_2^* es la elección del prisionero 2, Delatar. a_{-1}^* es el conjunto de perfiles que no es el del prisionero 1, como en este juego solo hay dos jugadores: $a_{-1}^* = a_2^*$ y $a_{-2}^* = a_1^*$. El conjunto de mejores acciones $B_1(a_{-1}^*) = \{\text{Delatar}\}$ y $B_2(a_{-2}^*) = \{\text{Delatar}\}$. Por lo tanto, $a_1^* \in B_1(a_{-1}^*)$ y $a_2^* \in B_2(a_{-2}^*)$, $a^* = (\text{Delatar}, \text{Delatar})$ es, efectivamente, un equilibrio de Nash.

Ejemplo 2.7 (Juego de estrategias puras sin equilibrio de Nash). El siguiente ejemplo se trata de un juego con dos jugadores, cada uno tiene que elegir cara o cruz. Si ambos coinciden en la elección, el jugador 1 le tiene que dar un euro al jugador 2. Si sus elecciones son distintas, el jugador 2 le tiene que dar un euro al jugador 1.

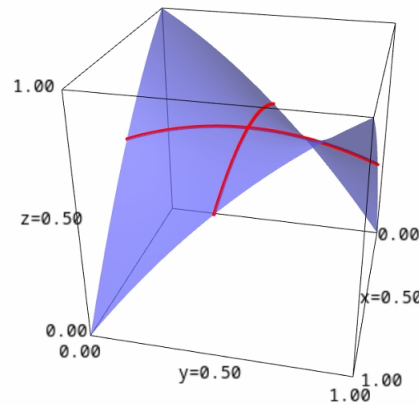
	Cara	Cruz
Cara	-1, 1	1, -1
Cruz	1, -1	-1, 1

- Si el jugador 1 elige cara entonces, el jugador 2 elegirá cara, (Cara, Cara).
- Si el jugador 1 elige cruz entonces, el jugador 2 elegirá cruz, (Cruz, Cruz).
- Si el jugador 2 elige cara entonces, el jugador 1 elegirá cruz, (Cruz, Cara).
- Si el jugador 2 elige cruz entonces, el jugador 1 elegirá cara, (Cara, Cruz).

Por lo tanto, no hay ningún equilibrio de Nash de estrategia pura, ya que los intereses de los jugadores son opuestos. Un juego como este se llama estrictamente competitivo.

Ejemplo 2.8. Para este ejemplo hemos buscado una función $f(x, y)$ en el cuadrado unidad que tenga un equilibrio de Nash en el centro $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Donde x e y son los jugadores del juego. La función debe cumplir las siguientes condiciones:

- Si x escoge $\frac{1}{2}$ debe quedar la siguiente función $f(\frac{1}{2}, y) = y(y - 1)$ y la mejor opción que puede escoger y es $\frac{1}{2}$.

Figura 2.1: Representación gráfica $f(x,y)$

- Si y escoge $\frac{1}{2}$ debe quedar la siguiente función $f(x, \frac{1}{2}) = x(x-1)$ y la mejor opción que puede escoger x es $\frac{1}{2}$.
- $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$.

Usando interpolación, encontramos el polinomio:

$$f(x,y) = -x^2 + 5xy - y^2 - \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}y + 1$$

Ordenándola y sacando factor común, nos queda:

$$f(x,y) = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 5\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right) - \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \quad (2.4)$$

representada gráficamente en 2.1

La función verifica todas las condiciones anteriores, y por tanto tenemos un equilibrio de Nash en el punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Además se pueden encontrar otros dos equilibrios de Nash. Si $x = 1$, tenemos la ecuación 2.5

$$f(1,y) = \frac{5}{2}\left(y - \frac{1}{2}\right) - \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \quad (2.5)$$

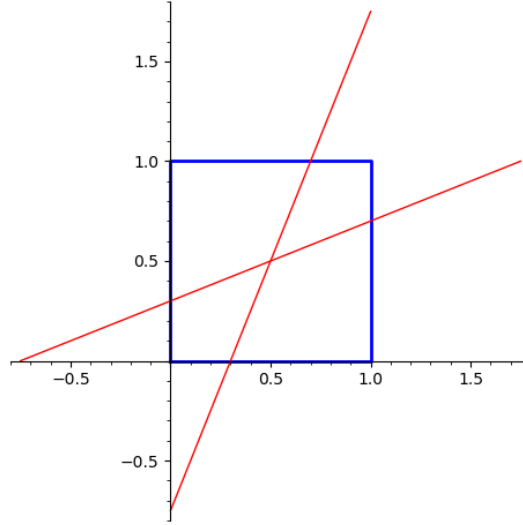
Vamos a estudiar sus máximos y mínimos y su comportamiento

$$f'(1,y) = \frac{1}{2}y + 1 = 0 \implies y = -2$$

En $(-\infty, -2)$ la función decrece y en $(-2, \infty)$ la función crece. Por lo tanto, como $y \in [0, 1]$ y la función es creciente en este intervalo, alcanzará su máximo en $y = 1$. Por simetría cuando $y = 1$ estamos en la misma situación y el valor máximo se consigue en $x = 1$. Por lo tanto, el punto $(1,1)$ es un equilibrio de Nash.

Razonando de la misma manera con el punto $(0,0)$, cuando $y = 0$, tenemos la ecuación 2.6 y estudiamos su comportamiento.

$$f(x,0) = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) \quad (2.6)$$

Figura 2.2: $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$

En $(-\infty, -\frac{3}{4})$ la función crece, en $(-\frac{3}{4}, \infty)$ la función decrece, por lo tanto, encontramos un máximo en $x = -\frac{3}{4}$, pero $x \in [0, 1]$ y en ese intervalo la función decrece, entonces alcanzará su máximo en $x = 0$. Por simetría, cuando $x = 0$, $f(0, y)$ alcanza su máximo en $y = 0$. Podemos concluir entonces que el punto $(0, 0)$ es también un equilibrio de Nash.

Para ver los equilibrios de Nash más claros se representan en la Figura 2.2 las derivadas parciales, 2.7, de la función 2.4

$$f_x(x, y) = -2x + 5y - \frac{3}{2} = 0 \quad (2.7)$$

$$f_y(x, y) = -2y + 5x - \frac{3}{2} = 0 \quad (2.8)$$

En la Figura 2.2 están representadas en rojo las funciones 2.7, se ve claramente que la intersección de estas es un equilibrio de Nash. Se podría pensar que en las diagonales también hay equilibrios de Nash, pero si x escoge $\frac{3}{4}$, el máximo de $f(\frac{3}{4}, y)$ es 1. Sin embargo, si y escoge 1, el máximo de $f(x, 1)$ es 1, como ya hemos visto. Por lo tanto, no hay equilibrio de Nash. Lo mismo pasa con cualquier otro punto del cuadrado en el que pensemos. Por lo que los únicos equilibrios de Nash son en $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(0, 0)$ y $(1, 1)$.

2.3. Juego y equilibrio de Nash de estrategias mixtas

En esta sección se van a introducir, partiendo de juegos finitos de estrategias puras, los juegos de estrategia mixta y se va a definir el equilibrio de Nash en este tipo de juegos. La noción de equilibrio de Nash de estrategia mixta está diseñada para modelar un estado estable de un juego en el que las elecciones de los participantes no son deterministas, sino que están reguladas por reglas probabilísticas.

Sea $\langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ un juego de estrategia pura donde cada A_i es finito. Asociamos a cada conjunto de acciones A_i del jugador i un conjunto de distribuciones de probabilidad

$\Delta(A_i)$ independiente de las distribuciones del resto de jugadores. Un elemento $\alpha_i \in \Delta(A_i)$, es una estrategia mixta del jugador i . Si cada jugador i juega siguiendo la distribución de probabilidad α_i , el pago esperado del jugador j será:

$$U_j(\alpha_1, \dots, \alpha_N) = \sum_{a \in A} \prod_{i \in N} \alpha_i(a_i) u_j(a)$$

En este caso, el jugador j debe buscar la distribución de probabilidad α_j que maximice esta esperanza.

Definición 2.9. Sea $\langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ un juego de estrategia pura, donde los A_i son conjuntos finitos. La extensión mixta del juego estratégico es $\langle N, \Delta(A_i), (U_i) \rangle$ donde

$$U_i : \prod_{j \in N} \Delta(A_j) \longrightarrow \mathbb{R}$$

manda cada $\alpha \in \prod_{j \in N} \Delta(A_j)$ a la esperanza bajo u_i de la probabilidad sobre A que es inducida por α

$$U_i(\alpha) = \sum_{a \in A} \left(\prod_{j \in N} \alpha_j(a_j) \right) u_i(a) \quad (2.9)$$

Definición 2.10. Un equilibrio de Nash de estrategia mixta de un juego estratégico es el equilibrio de Nash de su extensión mixta.

Sea $G = \langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ un juego finito de estrategia pura, $a^* \in A$ un perfil. Para cada i , sea e_i la distribución de probabilidad degenerada en la que $e_i(a_i^*) = 1$. En este caso, el pago $U_i(e_1, \dots, e_N) = u_i(a^*)$. De esta manera, podemos considerar el conjunto A_i y los pagos como un subconjunto del juego de estrategia mixta. Con esta correspondencia tenemos el siguiente resultado:

Proposición 2.11. Si $G = \langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ es un juego finito de estrategia pura y a^* es un equilibrio de Nash de G , entonces $(e_1, \dots, e_N) \in \prod_{j \in N} \Delta(A_j)$ es un equilibrio de Nash de estrategia mixta.

Demostración. Sea a^* un equilibrio de Nash de estrategia pura. Veamos que $(e_1, \dots, e_N) \in \prod_{j \in N} \Delta(A_j)$ es un equilibrio de Nash de estrategia mixta. Para ello, sea $i \in N$ y $\alpha_i \in \Delta(A_i)$ tenemos que comprobar que $U_i(e_1, \dots, e_{i-1}, \alpha_i, e_{i+1}, \dots, e_N) \leq U_i(e_1, \dots, e_N) = u_i(a^*)$.

Dado cualquier $b \in A_i$, tenemos que $0 \leq \alpha_i(b) \leq 1$ y $\sum_{b \in A_i} \alpha_i(b) = 1$. Y como a^* es un equilibrio de Nash $u_i(a_{-i}^*, b) \leq u_i(a_{-i}^*, a^*)$. Así:

$$U_i(e_{-i}, \alpha_i) = \sum_{b \in A_i} \alpha_i(b) u_i(a_{-i}^*, b) \leq \sum_{b \in A_i} \alpha_i(b) u_i(a_{-i}^*, a^*) = u_i(a_{-i}^*, a^*).$$

Por lo tanto, $(e_1, \dots, e_N)$ es un equilibrio de Nash de la extensión mixta del juego de estrategias puras G . $\square$

Se acaba de argumentar que el conjunto de equilibrios de Nash de un juego estratégico es un subconjunto de su conjunto de equilibrios de Nash de estrategia mixta. Sin embargo, cada juego en el que cada jugador tiene un número finito de acciones tiene al menos un equilibrio de Nash de estrategia mixta, como demostraremos en el Teorema 3.33.

Ejemplo 2.12 (Extensión mixta del juego de estrategias puras sin equilibrio de Nash). *Se presenta en este ejemplo el mismo juego que en el Ejemplo 2.7, pero ahora vamos a extenderlo a un juego de estrategias mixtas y buscamos equilibrios de Nash de estas estrategias.*

Vamos a representar los pagos de los jugadores de la siguiente manera:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{Cara} & \text{Cruz} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Cara} \\ \text{Cruz} \end{array} & \begin{pmatrix} (-1, 1) & (1, -1) \\ (1, -1) & (-1, 1) \end{pmatrix} \end{array}$$

El juego estratégico de estrategias puras es:

$$G = \langle 2, \{\text{cara}, \text{cruz}\}^2, u_i \rangle$$

con $u_i : A_i \longrightarrow \mathbb{R}$ los pagos de la matriz anterior.

La extensión mixta del juego estratégico, teniendo en cuenta que $\Delta(A_i) = [0, 1]$, es:

$$G = \langle 2, [0, 1]^2, U_i \rangle$$

$$\begin{array}{ccc} U_i : & [0, 1]^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (\alpha_1, \alpha_2) & \mapsto U_i(\alpha) = \sum_{a \in A} \left(\prod_{j \in N} \alpha_j(a_j) \right) u_i(a) \end{array}$$

Entonces, α_1 es la probabilidad de que el jugador 1 escoja cara y α_2 es la probabilidad de que el jugador 2 escoja cara.

$$\begin{aligned} U_1 &= \alpha_1(-\alpha_2 + (1 - \alpha_2)) + (1 - \alpha_1)(\alpha_2 - (1 - \alpha_2)) \\ U_1 &= -(2\alpha_1 - 1)(2\alpha_2 - 1) \\ U_2 &= \alpha_2(\alpha_1 - (1 - \alpha_1)) + (1 - \alpha_2)(-\alpha_1 + (1 - \alpha_1)) \\ U_2 &= (2\alpha_1 - 1)(2\alpha_2 - 1) \end{aligned}$$

U_1 va a alcanzar su máximo cuando:

$$\begin{aligned} U_{1\alpha_1} &= -2\alpha_1(2\alpha_2 - 1) = 0 \\ U_{1\alpha_2} &= -2\alpha_2(2\alpha_1 - 1) = 0 \end{aligned}$$

Entonces, U_1 alcanza su máximo en $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ y $\alpha_2 = \frac{1}{2}$. Por simetría U_2 alcanza su máximo en $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ y $\alpha_2 = \frac{1}{2}$. Por lo tanto, existe un equilibrio de Nash de estrategia mixta en $(\alpha_1, \alpha_2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

En este ejemplo se puede ver como el mismo juego estratégico no tiene un equilibrio de Nash en estrategias puras, pero si un equilibrio de Nash en estrategias mixtas.

3. Existencia del equilibrio de Nash

3.1. Símplices

En este capítulo, tal y como se ha mencionado en la introducción, se van a demostrar dos teoremas para la existencia de equilibrios de Nash. El primero de ellos va a proporcionar, bajo unas condiciones, un equilibrio de Nash en juegos de estrategia pura. Con el segundo se demuestra que cualquier juego estratégico finito tiene un equilibrio de Nash.

La demostración de estos dos teoremas son a través del Teorema de punto fijo de Kakutani y para llegar a este, se demuestran primero el Lema de Sperner y el Teorema de punto fijo de Brouwer. Tanto el Teorema de Kakutani como el de Brouwer se demuestran primero para unas condiciones más específicas y luego se generalizan.

Las definiciones, teoremas y sus respectivas demostraciones de este capítulo se han desarrollado en base a las referencias [3], [9] y [5].

Definición 3.1. *Un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ es convexo si $\forall x, y \in S$ y $\lambda \in [0, 1]$ se tiene que $\lambda x + (1 - \lambda)y \in S$.*

En lo siguiente, el vector i en el conjunto de vectores $x^1, \dots, x^m$ se va denotar como x^i , mientras que la componente i del vector x se va a denotar como x_i . Y el conjunto $\{1, \dots, m\} = [m]$.

Definición 3.2. *$\sum_{i=1}^m \lambda_i x^i$ es una combinación convexa de $x^1, \dots, x^m$ si $\lambda_i \geq 0$ para todo $i \in [m]$ y $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$. Es estrictamente positiva si para todo $i \in [m]$, $\lambda_i > 0$.*

Definición 3.3. *Para $A \subseteq \mathbb{R}^n$, la envolvente convexa de A , denotada como $co(A)$, es el conjunto de todas las combinaciones convexas de puntos en A :*

$$co(A) = \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i x^i : x^i \in A, \lambda_i \geq 0, \forall i \in [m] \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \right\} \quad (3.1)$$

Definición 3.4. *Los puntos $x^1, \dots, x^m \in \mathbb{R}^n$ son afínmente independientes si, para cualesquiera escalares $\lambda_0, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ reales, las siguientes ecuaciones:*

$$\sum_{i=0}^m \lambda_i x_i = 0, \quad \sum_{i=0}^m \lambda_i = 0 \quad (3.2)$$

implican que $\lambda_0 = \dots = \lambda_m = 0$.

Los puntos $x_0, \dots, x_m$ son afínmente independientes si, y sólo si, los vectores $x_1 - x_0, x_2 - x_0, \dots, x_m - x_0$ son linealmente independientes.

Definición 3.5. *Un m -simplex es el conjunto de todas las combinaciones convexas estrictamente positivas de un conjunto afínmente independiente a un elemento $(m+1)$. Un m -simplex T con vértices afínmente independientes $x^0, \dots, x^m$ está definido por:*

$$T = x^0 \cdots x^m = \left\{ \sum_{i=0}^m \lambda_i x^i : \lambda_i > 0, \forall i \in \{0, \dots, m\} \quad \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1 \right\} \quad (3.3)$$

Definición 3.6. Un m -simplex cerrado con vértices en los vectores afínmente independientes $x^0, \dots, x^m$ es la envolvente convexa del conjunto de vectores $\{x^0, \dots, x^m\}$:

$$\overline{T} = \overline{x^0 \dots x^m} = \left\{ \sum_{i=0}^m \lambda_i x^i : \lambda_i \geq 0, \forall i \in \{0, \dots, m\} \quad \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1 \right\} \quad (3.4)$$

Definición 3.7. Si $k \leq m$, entonces el k -simplex $x^{i_0} \dots x^{i_k}$ es una cara de $x^0 \dots x^m$, donde $i_0, \dots, i_k \in \{0, \dots, m\}$ y $i_0 < \dots < i_k$. Hay que tener en cuenta que un m -simplex cerrado es también la unión de todas las caras de un m -simplex con los mismos vértices.

Definición 3.8. El m -simplex estándar es

$\{y \in \mathbb{R}^{m+1} : y_i > 0, i \in \{0, \dots, m\}, \sum_{i=0}^m y_i = 1\} = e^0 \dots e^m$. Se denota la clausura del m -simplex estándar como Δ_m , que se le llama el m -simplex estándar cerrado. (Cuando la m está clara por el contexto se puede escribir simplemente Δ).

Definición 3.9. Sea T un m -simplex, se define el diámetro del símplece como la mayor distancia entre cualquier par de puntos del símplece, es decir,

$$\text{diam}(T) = \sup_{x, y \in T} \|x - y\| \quad (3.5)$$

Teorema 3.10. Sea T un m -simplex, el diámetro de un símplece, la mayor distancia entre cualquier par de puntos del símplece, se alcanza en los vértices.

Demostración. Sea $\{v_0, \dots, v_m\}$ el conjunto de vértices y sean x e y dos puntos del símplece,

$$x = \sum_{i=0}^m \lambda_i v_i \quad y = \sum_{i=0}^m \mu_i v_i$$

con $\lambda_i \geq 0$, $\mu_i \geq 0$ y $\sum_{i=0}^m \lambda_i = \sum_{i=0}^m \mu_i = 1$. La distancia entre x e y es:

$$\|x - y\| = \left\| x - \sum_{i=0}^m \mu_i v_i \right\|$$

Como $\sum_{i=0}^m \mu_i = 1$

$$\left\| x - \sum_{i=0}^m \mu_i v_i \right\| = \left\| \sum_{i=0}^m \mu_i x - \sum_{i=0}^m \mu_i v_i \right\| \leq \sum_{i=0}^m \mu_i \|x - v_i\|$$

Sea v_x el vértice del símplece donde la distancia entre un vértice y x alcanza su máximo

$$\sum_{i=0}^m \mu_i \|x - v_i\| \leq \sum_{i=0}^m \mu_i \|x - v_x\| = \|x - v_x\|$$

Razonando de la misma manera, existe otro vértice del símplece v_k de manera que

$$\|x - v_x\| \leq \|v_k - v_x\|$$

Tomando máximos obtenemos que el diámetro se alcanza en los vértices. $\square$

Definición 3.11. Si $T = x^0 \cdots x^m$ es un m -simplex, una subdivisión simplicial de $\overline{T}$ es una colección finita de simplices $\{T_i : i \in [n]\}$ (llamada subsimplices) tal que

- $\bigcup_{i=1}^n T_i = \overline{T}$.
- $\forall i, j \in [n]$ se tiene $\overline{T_i} \cap \overline{T_j} = \emptyset$ o $\overline{T_i} \cap \overline{T_j} = \overline{T_{ij}}$ donde T_{ij} es una cara común de T_i y T_j .

El diámetro de una subdivisión simplicial es el diámetro del subsímplice más largo de la subdivisión.

Definición 3.12. Sea $\overline{T} = \overline{x^0 \cdots x^m}$ simplicialmente subdividido. Sea V la colección de todos los vértices del subsímplice. Para $v = \sum_{i=0}^m \lambda_i x^i \in T$ y $X(v) = \{i : \lambda_i > 0\}$. Diremos que una función $\lambda : V \rightarrow \{0, \dots, m\}$ que satisface $\lambda(v) \in X(v)$ es una función de etiquetado apropiada de la subdivisión. Un subsímplice es completamente etiquetado si λ asume todos los valores $0, \dots, m$ en su conjunto de vértices.

Definición 3.13. Sea S un m -simplex, con un conjunto de vértices $\{p_0 \cdots p_m\}$, la subdivisión baricéntrica de S subdivide S en $(m+1)!$ subsimplices más pequeños. Cada uno de los subsimplices corresponde a una permutación distinta del conjunto de vértices.

Cada subsímplice tiene un conjunto de vértices $\{v_0, \dots, v_m\}$. Dada una permutación de los vértices $\sigma = (\sigma_0, \dots, \sigma_m)$, los vértices v_i se construyen de la siguiente manera:

- v_0 es el baricentro del vértice $\{p_{\sigma_0}\}$
- v_1 es el baricentro del conjunto de vértices $\{p_{\sigma_0}, p_{\sigma_1}\}$
- $\dots$
- v_m es el baricentro del conjunto de vértices $\{p_{\sigma_0}, \dots, p_{\sigma_m}\}$

El baricentro de un conjunto de puntos es el punto que se encuentra en el centro de esos puntos, considerando la media aritmética de sus coordenadas. Para el conjunto de puntos $\{p_0, \dots, p_m\}$, el baricentro se calcula como:

$$v_i = \frac{1}{1+i} \sum_{j=0}^i p_j \quad (3.6)$$

Ejemplo 3.14. Tenemos un 2-simplex, es decir, un triángulo con un conjunto de vértices $\{p_0 = (0, 0), p_1 = (\frac{1}{2}, 1), p_2 = (1, 0)\}$. Las posibles permutaciones de los vértices son $3! = 6$, por lo tanto, la subdivisión baricéntrica constará de 6 subsimplices. Las permutaciones son:

$$\begin{aligned} &(p_0, p_1, p_2) \\ &(p_0, p_2, p_1) \\ &(p_1, p_0, p_2) \\ &(p_1, p_2, p_0) \\ &(p_2, p_0, p_1) \\ &(p_2, p_1, p_0) \end{aligned}$$

Cada permutación define un subsímplice de la subdivisión baricéntrica. Tomando la primera permutación $((0, 0), (\frac{1}{2}, 1), (1, 0))$, tomamos:

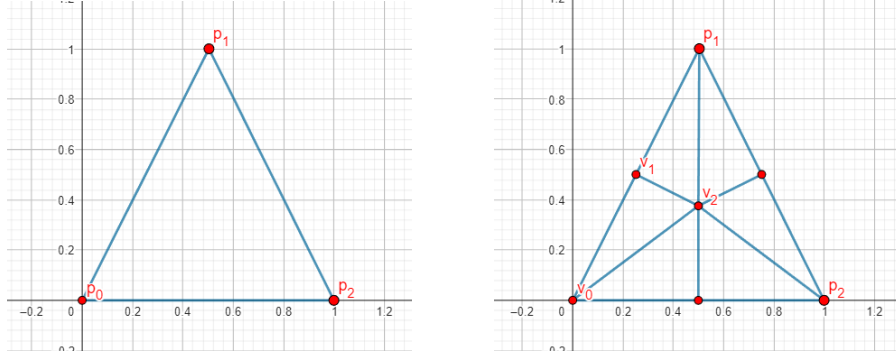


Figura 3.1: El 2-simplex y su subdivisión baricéntrica

- El baricentro de $\{p_0\}$, $v_0 = p_0 = (0, 0)$.
- El baricentro de $\{p_0, p_1\}$, $v_1 = \frac{p_0 + p_1}{2} = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$.
- El baricentro de $\{p_0, p_1, p_2\}$, $v_2 = \frac{p_0 + p_1 + p_2}{3} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$.

Así, con el conjunto de vértices $\{(0, 0), (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{3})\}$ creamos el primer subsímplice de la subdivisión. Haciendo el mismo proceso con las demás permutaciones creamos los 6 subsímplices.

Teorema 3.15. Sea S un m -simplex, consideremos su subdivisión baricéntrica. Sea T uno de los subsímplices de la subdivisión baricéntrica, entonces

$$\text{diam}(T) \leq \frac{m}{m+1} \text{diam}(S)$$

Demostración. Por inducción en m , para un 1-simplex, con un conjunto de vértices $\{x_0, x_1\}$ tras realizar la subdivisión baricéntrica tenemos dos símplices con los conjuntos de vértices $\{x_0, \frac{x_0+x_1}{2}\}$ y $\{x_1, \frac{x_0+x_1}{2}\}$. El diámetro de la subdivisión baricéntrica será menor o igual a la distancia entre uno de los vértices del símplice y alguno de los vértices de la subdivisión $\|x_0 - v_1\| = \|x_1 - v_1\| = \frac{1}{2}\|x_0 - x_1\|$.

En el caso de un m -simplex, con un conjunto de vértices $\{x_0, \dots, x_m\}$, tomamos un subsímplice de la subdivisión baricéntrica con vértices $\{p_0, \dots, p_m\}$. Por el Teorema 3.10, sabemos que el diámetro de este subsímplice se alcanza en dos vértices p_i, p_j .

Si p_i y p_j están en una cara R de S de dimensión r ,

$$\|p_i - p_j\| \leq \frac{r}{r+1} \text{diam}(R) \leq \frac{r}{r+1} \text{diam}(S) \leq \frac{m}{m+1} \text{diam}(S)$$

La otra posibilidad es que uno de los vértices sea el baricentro, p_i, p_m

$$p_i = \frac{x_0 + \dots + x_i}{i+1} \quad p_m = \frac{x_0 + \dots + x_m}{m+1}$$

Entonces, por el Teorema 3.10 la distancia entre p_i y p_m estará acotada por la distancia entre p_i y un vértice x_j de S , luego $\|p_i - p_m\| \leq \|x_j - p_m\|$.

$$\left\| x_j - \frac{\sum_{i=0}^m x_i}{m+1} \right\| = \left\| \frac{\sum_{i=0}^m x_j}{m+1} - \frac{\sum_{i=0}^m x_i}{m+1} \right\| = \left\| \sum_{i=0}^m \frac{(x_j - x_i)}{m+1} \right\|$$

Aplicando la desigualdad triangular

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=0}^m \frac{(x_j - x_i)}{m+1} \right\| &\leq \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^m \|x_j - x_i\| = \frac{1}{m+1} \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^m \|x_j - x_i\| \leq \frac{1}{m+1} \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^m \text{diam}(S) = \\ &= \frac{m}{m+1} \text{diam}(S) \end{aligned}$$

□

Corolario 3.16. *Sea S un m -simplex y $\epsilon > 0$ existe una subdivisión simplicial de manera que el diámetro de cada subsímplice sea menor que ϵ .*

Demostración. Por el Teorema 3.15, sabemos que el diámetro de cada subsímplice T de la subdivisión está acotado por

$$\text{diam}(T) \leq \frac{m}{m+1} \text{diam}(S)$$

Si realizamos una segunda subdivisión, el diámetro de cada subsímplice T_2 está acotado por

$$\text{diam}(T_2) \leq \frac{m}{m+1} \text{diam}(T) \leq \left(\frac{m}{m+1} \right)^2 \text{diam}(S)$$

Después de k subdivisiones el diámetro de cada subsímplice T_k estará acotado por

$$\text{diam}(T_k) \leq \left(\frac{m}{m+1} \right)^k \text{diam}(S)$$

Cuanto más grande se hace k , más pequeño se hace $\left(\frac{m}{m+1} \right)^k$. Entonces, podemos encontrar un k lo suficientemente grande para el cuál

$$\begin{aligned} \left(\frac{m}{m+1} \right)^k \text{diam}(S) &< \epsilon \\ \left(\frac{m}{m+1} \right)^k &< \frac{\epsilon}{\text{diam}(S)} \end{aligned}$$

Aplicando logaritmos a ambos lados

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{m}{m+1} \right)^k &< \ln \left(\frac{\epsilon}{\text{diam}(S)} \right) \\ k \cdot \ln \left(\frac{m}{m+1} \right) &< \ln \left(\frac{\epsilon}{\text{diam}(S)} \right) \\ k &> \frac{\ln \left(\frac{\epsilon}{\text{diam}(S)} \right)}{\ln \left(\frac{m}{m+1} \right)} \end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos elegir un k lo suficientemente grande para garantizar que el diámetro de los subsímplices después de k subdivisiones va a ser menor que ϵ . □

3.2. Lema de Sperner

Lema 3.17 (Sperner). Sea $\overline{T} = \overline{x^0 \cdots x^m}$ subdividido simplicialmente y etiquetado por la función λ . Entonces, hay un número impar de subsímplices completamente etiquetados.

Demostración. La prueba es por inducción en m .

Cuando $m = 0$, el símplice consiste en un único punto x^0 . Este punto lleva la única etiqueta posible, 0, y por lo tanto, hay exactamente un subsímplice completamente etiquetado, que es el propio x^0 .

Se asume ahora que la hipótesis de inducción es cierta para $m - 1$ y se demuestra para m . Sea:

- C es el conjunto de los m -símplex completamente etiquetados (aquellos donde cada etiqueta de $\{0, \dots, m\}$ aparece exactamente una vez)
- A es el conjunto de los m -símplex casi completamente etiquetados, es decir, aquellos tales que el rango de λ es exactamente $\{0, \dots, m - 1\}$.
- B es el conjunto de los $(m - 1)$ -símplex en la frontera que llevan todas las etiquetas $\{0, \dots, m - 1\}$.
- E es el conjunto de los $(m - 1)$ -símplex que llevan todas las etiquetas $\{0, \dots, m - 1\}$.

Un $(m - 1)$ -símplex o bien se encuentra en el borde y es la cara de un m -símplex en la subdivisión o es una cara común de dos m -símplex. Se puede ver esta situación como un grafo, como una colección de nodos y aristas. Se construye el grafo de la siguiente manera: $D = C \cup A \cup B$ es el conjunto de nodos y E el conjunto de aristas del grafo. Una arista $e \in E$ y un nodo $d \in D$ son incidentes si $d \in A \cup C$ y e es una cara de d o $e = d \in B$.

El grado de un nodo d , $\delta(d)$, es el número de lados incidentes a d . Si $d \in A$, entonces una etiqueta está repetida y exactamente dos caras de d pertenecen a E , entonces su grado es 2. El grado de $d \in B \cup C$ es 1. Por otra parte, cada arista es incidente exactamente a dos nodos. Si un $(m - 1)$ -símplex se encuentra en el borde y lleva etiquetas $\{0, \dots, m - 1\}$ es incidente a sí mismo (como un nodo en B) y a un m -símplex (que debe ser un nodo en A o C). Si un $(m - 1)$ -símplex es una cara común de dos m -símplex, entonces cada uno de los m -símplex pertenece a A o C .

$$\delta(d) = \begin{cases} 1 & d \in B \cup C \\ 2 & d \in A \end{cases}$$

Por la teoría de grafos, se sabe que la suma de los grados de todos los nodos es el doble del número de lados, $\sum_{d \in D} \delta(d) = 2|E|$. Es decir, mientras cada lado está unido exactamente a dos nodos, contando el número de lados incidentes en cada nodo y sumándolos, cada lado cuenta dos veces.

Dado que $\delta(d) = 2$ si $d \in A$ y $\delta(d) = 1$ si $d \in B \cup C$, entonces:

$$\sum_{d \in D} \delta(d) = 2|A| + |B| + |C|$$

Como $\sum_{d \in D} \delta(d) = 2|E| \implies 2|E| = 2|A| + |B| + |C|$

Luego, $|B| + |C|$ es par, y como por hipótesis de inducción $|B|$ es impar, se tiene que $|C|$ es impar.

Por lo tanto, se deduce que el número de subsímplices completamente etiquetados $|C|$ es impar. $\square$

3.3. Teorema de Brouwer

Lema 3.18. *Si $x, y \in \Delta_m$ y $x \leq y$ ($x_i \leq y_i$ para $i = 0, \dots, m$), entonces $x = y$*

Demostración. Como $x, y \in \Delta_m$, se sabe que $\sum_{i=0}^m x_i = \sum_{i=0}^m y_i = 1$. Para demostrarlo por contradicción, primero se asume que $x_j < y_j$ para algún $j \in \{0, \dots, m\}$. Como $x \leq y$, sigue que $x_i \leq y_i$ para todo $i \in \{0, \dots, m\}$, entonces $1 = \sum_{i=0}^m x_i < \sum_{i=0}^m y_i = 1$, contradicción. Entonces $x_i \geq y_i$ para todo $i \in \{0, \dots, m\}$, pero como se tiene que $x_i \leq y_i$ para todo $i \in \{0, \dots, m\}$, la única opción es que $x_i = y_i$ para todo $i \in \{0, \dots, m\}$, por lo que $x = y$. $\square$

Teorema 3.19. *Sea $f : \Delta_m \rightarrow \Delta_m$ continua. Entonces, f tiene un punto fijo.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$, por el Corolario 3.16 podemos subdividir Δ en subsímplices de diámetro $\leq \epsilon$ siendo V es el conjunto de vértices de la subdivisión. Se define la siguiente función de etiquetado $\lambda : V \rightarrow \{0, \dots, m\}$ como: $\lambda(v) \in \{i_0, \dots, i_k\} \cap \{i : f_i(v) \leq v_i\}$, $v \in x^{i_0} \dots x^{i_k}$ y es un vértice del subsímplice $x^{i_0} \dots x^{i_k}$. La intersección es no vacía porque considerando la suma de las coordenadas

$$1 = \sum_{i=0}^m v_i = \sum_{j=0}^k v_{i_j}$$

y si $f_i(v) > v_i$ para todo $i \in \{i_0, \dots, i_k\}$, se tendría

$$1 = \sum_{i=0}^m f_i(v) \geq \sum_{j=0}^k f_{i_j}(v) > \sum_{j=0}^k v_{i_j} = \sum_{i=0}^m v_i = 1$$

una contradicción, ya que entonces debería existir al menos un i tal que $f_i(v) \leq v_i$. Por como está definida λ , satisface la hipótesis del Lema de Sperner, Δ_m es un m -simplex cerrado subdividido simplicialmente y etiquetado por la función λ , entonces existe un subsímplice completamente etiquetado, T_1 . Si se hace un refinamiento de esta subdivisión, es decir, una subdivisión simplicial que también sea subdivisión simplicial del subsímplice T_1 , se consigue un nuevo subsímplice $T_2 \subseteq T_1$. Por lo tanto, se consigue $T_1 \supseteq T_2 \supseteq T_3 \dots$ y como Δ_m es compacto y el diámetro es cada vez más pequeño, esta secuencia de subsímplices tiene una intersección no vacía que contiene un único punto z . Como f es continua se tiene $f_i(z) \leq z_i$, $i = 0, \dots, m$ así que por el Teorema 3.18 $f(z) = z$. $\square$

Definición 3.20. *Un conjunto A es homeomorfo a un conjunto B si existe una función continua biyectiva $h : A \rightarrow B$ con inversa continua. La función h es un homeomorfismo.*

Corolario 3.21. *Sea K homeomorfo a Δ y $f : K \rightarrow K$ continua. Entonces, f tiene un punto fijo.*

Demostración. Dado que K es homeomorfo a Δ , existe un homeomorfismo $h : \Delta \rightarrow K$ con h continua y biyectiva y con inversa continua $h^{-1} : K \rightarrow \Delta$.

Considerando la función compuesta $h^{-1} \circ f \circ h : \Delta \rightarrow \Delta$ es continua por ser composición de funciones continuas.

Entonces, por el Teorema 3.19, cualquier función continua de un m -simplex a sí mismo tiene al menos un punto fijo. Aplicando el teorema a la función $h^{-1} \circ f \circ h$, existe un z' tal que $h^{-1} \circ f \circ h(z') = z'$.

Sea $h(z') = z$, como h es homeomorfismo, es inyectiva y $h^{-1}(z) = z'$, entonces $h^{-1}(z) = z'$, y $h^{-1}(f(z)) = h^{-1}(z)$. Aplicando h en ambos lados de la igualdad

$$h(h^{-1}(f(z))) = h(h^{-1}(z)) \quad \text{y por lo tanto} \quad f(z) = z$$

Entonces, se demuestra que existe un $z \in K$ tal que $f(z) = z$, es decir, f tiene un punto fijo en K . $\square$

Teorema 3.22 (Brouwer). *Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y compacto y sea $f : K \rightarrow K$ continua. Entonces, f tiene un punto fijo.*

Demostración. Como K es compacto, está contenido en algún simplex suficientemente grande T . Esto se debe a que cualquier conjunto compacto puede ser encerrado en un simplex de dimensión adecuada.

Se define $h : \bar{T} \rightarrow K$ estableciendo $h(x)$ igual al punto en K más cercano a x , el cual existe por ser K compacto y es único por ser convexo.

- Existencia: consideramos la función distancia $d : K \rightarrow \mathbb{R}$ con $d(y) = \|x - y\|^2$ donde $\|\cdot\|$ denota la norma euclidiana y d mide la distancia entre cualquier par de puntos $x, y \in K$. Por un Corolario del Teorema de Weierstrass, sabemos que una función continua en un conjunto compacto alcanza sus valores máximos y mínimos, y como d es continua, existe al menos un punto en K donde d alcanza su valor mínimo.
- Unicidad: Por reducción al absurdo, vamos a suponer que existen dos puntos diferentes $y_1, y_2 \in K$ que minimizan la distancia a x . Entonces, $\|x - y_1\| = \|x - y_2\| = \min_{y \in K} \|x - y\|$. Si y_1, y_2 minimizan la distancia a x , como K es convexo, cualquier punto en el segmento entre este par de puntos está en K . En particular, escogemos el punto intermedio $y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2}$, sabemos que su distancia al punto x será mayor que la distancia de cualquiera de los dos puntos y_1, y_2 a x , es decir, $\|x - y_3\| \geq \|x - y_1\| = \|x - y_2\|$. Además,

$$\|x - y_3\| = \left\| x - \frac{y_1 + y_2}{2} \right\| \leq \frac{1}{2}\|x - y_1\| + \frac{1}{2}\|x - y_2\| = \|x - y_1\| = \|x - y_2\|$$

Entonces, $\|x - y_1\| = \|x - y_2\| = \|x - y_3\|$, pero en un segmento o en una recta no puede haber tres puntos equidistantes a un punto dado, porque una recta y una esfera se cortan como máximo en dos puntos. Por lo que llegamos a una contradicción.

Demostremos ahora que la función $h : \bar{T} \rightarrow K$ es continua. Recordemos que $h(x)$ es el punto $y_x \in K$ que minimiza la distancia a x , $d(x) = \min_{y \in K} \|x - y\| = \|x - h(x)\|$ y como hemos visto antes, $h(x)$ es único. Para demostrar la continuidad veamos que sea $\{x_n\}$ una sucesión de $\bar{T}$ tal que $x_n \rightarrow x$ cuando $n \rightarrow \infty$ entonces $h(x_n) \rightarrow h(x)$.

Como K es compacto $\{h(x_n)\}$ tiene al menos una subsucesión convergente $\{h(x_{n_k})\}$ que converge a algún punto $y \in K$. Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned} x_{n_k} &\rightarrow x & y & h(x_{n_k}) \rightarrow y \\ \|x_{n_k} - h(x_{n_k})\| &\rightarrow \|x - y\| & \text{cuando } k &\rightarrow \infty \end{aligned}$$

Por definición de $h(x)$, y debe ser el punto en K más cercano a x , es decir:

$$\|x - y\| = \|x - h(x)\|$$

Por lo tanto, $y = h(x)$. Entonces, la subsucesión convergente $\{h(x_n)\}$ converge a $h(x)$. Como el límite de cualquier subsucesión convergente es único, toda sucesión $\{h(x_n)\}$ converge a $h(x)$.

Se considera ahora la composición $f \circ h : \bar{T} \rightarrow K \subseteq \bar{T}$, que por el Teorema 3.19 tiene al menos un punto fijo z .

Ese punto fijo no puede pertenecer a $\bar{T} \setminus K$, ya que $f \circ h$ te lleva a K . Entonces, $z \in K$ y $f \circ h(z) = z$, además $h(z) = z$, por lo que $f(z) = z$.

Se demuestra entonces que existe al menos un punto z en K tal que $f(z) = z$, es decir, f tiene al menos un punto fijo en K . $\square$

3.4. Teorema de Kakutani

Definición 3.23. El conjunto de partes de X es el conjunto $2^X = \{A : A \subseteq X\}$. Es decir, es el conjunto de subconjuntos de X .

Definición 3.24. Una función de correspondencia ϕ del conjunto X a Y puede ser definida como $\phi : X \rightarrow 2^Y$, donde $\phi(x) \neq \emptyset$ para todo $x \in X$.

Definición 3.25. Sean X e Y subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, una función de correspondencia $\phi : X \rightarrow 2^Y$ tiene un grafo cerrado si el conjunto $\{(x, y) : y \in \phi(x)\}$ es un subconjunto cerrado de $X \times Y$. En otras palabras, para todas las secuencias (x_n) y (y_n) tal que x_n converge a x y y_n converge a y y $y_n \in \phi(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $y \in \phi(x)$.

Lema 3.26 (Teorema del punto fijo de Kakutani para símplexes). Sea S un símplex cerrado en $\mathbb{R}^n$. Si la función de correspondencias $\phi : S \rightarrow 2^S$ tiene un grafo cerrado, y $\phi(x)$ es no vacío y convexo para todo $x \in S$, entonces existe un punto fijo x^* de X .

Demostración. Sea S un n -símplex, se considera la subdivisión baricéntrica m de S . Sigue de esto que esta subdivisión tiene, para algún $k \in \mathbb{N}$, k subsímplexes de S , donde cada subsímplex es un n -símplex con el conjunto de $n + 1$ vértices.

Se considera un subsímplex de la subdivisión baricéntrica de S y se denota su conjunto de vértices como $\{v_0, \dots, v_n\}$. Para cada $i \in \{0, \dots, n\}$ y_i va a ser un punto tal que $y_i \in \phi(v_i)$.

Se define ahora una función $f_m : S \rightarrow S$. V es el conjunto de todos los vértices distintos de los subsímplexes de la subdivisión de S . Para cada $v \in V$, se toma un $y_v \in \phi(v)$. Un v en S que es vértice de más de un subsímplex de la subdivisión, solo se le asignará un $y_v \in \phi(v)$. Para todo $s \in S$, s está contenido en algún subsímplex con el conjunto de vértices $\{v_0, \dots, v_n\}$. Por definición, se puede escribir s como $s = \sum_{i=0}^n \theta_i v_i$, donde $\theta_i \geq 0 \forall i \in [n] \cup \{0\}$

y $\sum_{i=0}^n \theta_i = 1$. Entonces, se define $f(s)$ como $f(s) = \sum_{i=0}^n \theta_i y_i$. Intuitivamente, la función manda todos los subsímplices de la subdivisión de S a subsímplices de S .

Como f_m es una función continua desde el conjunto convexo, compacto S a sí mismo, se puede aplicar el Teorema de Brouwer (3.22), y entonces, existe un punto fijo x^* de f_m . Ahora, se puede construir una secuencia de estos puntos fijos (x_m^*) , donde x_m^* es como se ha definido arriba para la subdivisión baricéntrica m . Como (x_m^*) está definida en el conjunto compacto S , por Bolzano-Weierstrauss, (x_m^*) tiene alguna subsecuencia que converge a algún x^* .

Para cualquier $m \in \mathbb{N}$, la subdivisión m contiene al menos un subsímplice que contiene a x^* . Se elige uno de estos subsímplices y se denota el conjunto de sus vértices como $\{v_0^m, \dots, v_n^m\}$. Con cada subdivisión, la máxima distancia entre x^* y los vértices se acerca a 0. Entonces, para cualquier $i \in [n] \cup \{0\}$, la secuencia $(v_i^m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge a x^* , ya que con cada subdivisión la distancia entre los vértices y x^* están decreciendo continuamente, siendo 0 su límite inferior.

Se considera ahora la secuencia $(y_i^m)_{m \in \mathbb{N}}$, donde $y_i^m = f_m(v_i^m)$. Como $(y_i^m)_{m \in \mathbb{N}}$ está definida en el conjunto compacto S , debe tener una subsecuencia que converja a algún y_i^* .

Como $y_i^m = f_m(v_i^m) \in \phi(v_i^m)$ para todo $m \in \mathbb{N}$, por definición de f_m , y como las secuencias convergen $((v_i) \rightarrow x^*$ y $(y_i) \rightarrow y_i^*)$, por definición de un grafo cerrado, $y_i^* \in \phi(x^*)$ para todo $i \in [n] \cup \{0\}$.

Finalmente, x^* está contenido en la envolvente convexa de vértices y_i^* y la imagen $\phi(x^*)$ es convexa por definición, entonces, $x^* \in \phi(x^*)$. □

Definición 3.27. *Dados dos espacios X, Y , donde $Y \subseteq X$, una función continua $r : X \rightarrow Y$ es una retracción si para todo $y \in Y$, $r(y) = y$.*

Definición 3.28. *Sea S un conjunto no vacío, compacto y convexo, la función de correspondencias $\phi : S \rightarrow 2^S$ es upper semicontinua si dos secuencias cualesquiera (x_n) y (y_n) en S convergen a x e y respectivamente y si $y_n \in \phi(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $y \in \phi(x)$.*

Teorema 3.29 (Punto fijo de Kakutani). *Sea S un conjunto no vacío, compacto y convexo de $\mathbb{R}^n$. Si la función de correspondencias $\phi : S \rightarrow 2^S$ tiene grafo cerrado y $\phi(x)$ es no vacío y convexo para todo $x \in S$, entonces, existe un punto fijo x^* de ϕ .*

Demostración. Para cualquier conjunto compacto y convexo X , existe algún símplice cerrado S tal que $X \subseteq S$. Un símplice cerrado en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo definido por $n+1$ puntos afínmente independientes.

Se puede definir entonces, una retracción continua $\psi : S \rightarrow X$. Es decir, $\psi(x) = x \forall x \in X$. Por lo que la composición $\phi \circ \psi : S \rightarrow 2^X \subseteq 2^S$ es una función de correspondencias que tiene grafo cerrado porque la composición de funciones continuas y funciones de correspondencia con grafo cerrado preserva la propiedad de tener grafo cerrado. Entonces es upper semicontinua desde el símplice cerrado S a 2^S .

Aplicando el Teorema del punto fijo de Kakutani para símplices (3.26), existe un punto fijo $x^* \in S$ tal que, $x^* \in \phi \circ \psi(x^*) \subseteq X$. Como $x^* \in S$ y $x^* \in (\phi \circ \psi)(x^*) \subseteq X$ entonces, $x^* \in X$ y por definición de una retracción $\psi(x^*) = x^*$. Finalmente, $x^* \in \phi \circ \psi(x^*) = \phi(x^*)$, es decir, $x^* \in \phi(x^*)$ y x^* es un punto fijo de ϕ . □

3.5. Teoremas de existencia de equilibrios de Nash

Definición 3.30. Una relación de preferencia $\succsim_i$ sobre A es *quasi cóncava* en A_i si para todo $a^* \in A$, el conjunto $\{a_i \in A_i : (a_{-i}^*, a_i) \succsim_i a^*\}$ es convexo.

Teorema 3.31. El juego estratégico $\langle N, (A_i), g_i \rangle$ tiene un equilibrio de Nash si para todo $i \in N$

- El conjunto de acciones A_i del jugador i es un subconjunto no vacío compacto y convexo de un espacio Euclídeo.
- La relación de preferencia $\succsim_i$ es continua y quasi cóncava en A_i .

Demostración. Se define un $B : A \rightarrow A$ con $A = \prod_{i \in N} A_i$ tal que $B(a) = \prod_{i \in N} B_i(a_{-i})$ donde $B_i(a_{-i})$ es el conjunto de mejores respuestas del jugador i dado el perfil de acciones de los demás jugadores a_{-i}

$$B_i(a_{-i}) = \{a_i \in A_i : \forall a'_i \in A_i \quad (a_{-i}, a_i) \succsim_i (a_{-i}, a'_i)\}$$

Por lo tanto, $B_i(a_{-i})$ es el conjunto de acciones a_i que son al menos tan buenas como cualquier otra acción a'_i dada la acción de los demás jugadores a_{-i} .

- Para todo $i \in N$ el conjunto $B_i(a_{-i})$ es no vacío ya que $\succsim_i$ es continua y A_i es compacta. Esto asegura que siempre hay al menos una mejor respuesta.
- Para todo $i \in N$ el conjunto $B_i(a_{-i})$ es convexo ya que $\succsim_i$ es quasi cóncava en A_i . Esto significa que cualquier combinación convexa de mejores respuestas también es una mejor respuesta.
- B tiene grafo cerrado porque $\succsim_i$ es continua. Esto significa que si una secuencia de puntos a^k converge a a y una secuencia b^k converge a b con $b^k \in B(a^k)$, entonces $b \in B(a)$.

Aplicando el Teorema de Kakutani (3.29), como B es una correspondencia con grafo cerrado, $B(a)$ es no vacío, compacto y convexo para todo $a \in A$, B tiene un punto fijo. Luego

Luego, existe un punto fijo $a^* \in A$ tal que $a^* \in B(a^*)$. Este a^* es un equilibrio de Nash ya que $a^* \in B_i(a_{-i}^*) \quad \forall i \in N$. Es decir, cada jugador i está eligiendo una mejor respuesta dada la elección de los demás jugadores. $\square$

Observación 3.32. En la definición 2.9, hemos definido el conjunto de estrategias mixtas del jugador i como $\Delta(A_i)$. Este conjunto se puede identificar con el conjunto de vectores $(p_1, \dots, p_{m_i})$ con $p_k \geq 0 \quad \forall k$ y $\sum_{k=1}^{m_i} p_k = 1$, donde p_k es la probabilidad con la que el jugador i juega su estrategia pura k . El conjunto de vectores $\Delta(A_i)$ es, por tanto, un símplice cerrado. Este conjunto es no vacío, convexo y compacto.

Teorema 3.33. Cualquier juego estratégico finito tiene un equilibrio de Nash de estrategia mixta.

Demostración. Se considera el juego estratégico $G = \langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ donde:

- N es el conjunto de jugadores
- A_i es el conjunto de acciones del jugador i
- u_i es la función de pagos del jugador i

Para cada jugador i , m_i es el número de miembros del conjunto de acciones A_i . Como hemos visto en la observación anterior el conjunto $\Delta(A_i)$ se puede identificar con el conjunto de vectores $(p_1, \dots, p_{m_i})$ con $p_k \geq 0 \quad \forall k$ y $\sum_{k=1}^{m_i} p_k = 1$.

La esperanza del pago u_i es lineal en las probabilidades p_k , y por lo tanto, lo será también la función de pagos esperada. La función de pagos esperada es continua ya que es lineal y es una suma finita de funciones continuas. Para ver que la función de pagos esperada es quasi cóncava basta con ver que para cualquier combinación convexa de dos estrategias (p_i, q_i) el pago esperado de esta combinación es mayor o igual que el menor de los dos pagos de cada una de las estrategias. Como la función de pagos esperada es lineal, el pago de cualquier combinación convexa de p_i, q_i será una combinación convexa de los pagos de cada una. Por el Teorema de equilibrios de Nash para juegos finitos, existe un perfil de equilibrio de Nash de estrategias mixtas si las funciones de pago son continuas y quasi cóncavas en sus propias estrategias. Dado que las condiciones del Teorema 3.31 se cumplen, se puede aplicar el teorema y por tanto, existe un perfil de estrategias mixtas p^* tal que ningún jugador puede mejorar su pago esperado cambiando unilateralmente su estrategia mixta. Es decir, p^* es un equilibrio de Nash de estrategias mixtas para el juego G . $\square$

4. Caracterización mediante conjuntos semialgebraicos

4.1. Introducción a los conjuntos semialgebraicos

En este capítulo se va a explorar la complejidad de los posibles equilibrios de Nash en juegos de estrategia mixta. Los conjuntos semialgebraicos son aquellos que se pueden describir mediante ecuaciones e inecuaciones polinómicas.

Al demostrar que cualquier conjunto semialgebraico puede ser la proyección de un conjunto de equilibrios de Nash de algún juego, se está mostrando que los equilibrios de Nash pueden ser tan complejos como se desee, ya que los conjuntos semialgebraicos pueden representar una amplia variedad de formas y estructuras en el espacio. Esto implica que, los jugadores pueden optar diferentes estrategias que, en conjunto, mantienen en equilibrio el juego, lo que presenta una diversidad de estrategias. Estos juegos son de gran ayuda para la comprensión de fenómenos sociales, económicos y biológicos.

Gran parte de este último capítulo esta fundamentado en la referencia [8].

4.2. Conjuntos semialgebraicos

Definición 4.1. De acuerdo con la definición del libro *Algorithms in Real Algebraic Geometry*, [1], definimos los conjunto semialgebraicos de $\mathbb{R}^n$ como la familia de conjuntos más pequeña de $\mathbb{R}^n$ que contiene los conjuntos algebraicos y los conjuntos definidos por inecuaciones polinómicas, es decir, un conjunto de la forma $\{x \in \mathbb{R}^n : P(x) > 0\}$ para algún polinomio $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ y que la unión e intersección finita de estos conjuntos es un conjunto de la misma forma y el complementario también.

Sean P y Q polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$, cualquier conjunto semialgebraico en $\mathbb{R}^n$ es la unión finita de conjuntos de la forma $\{x \in \mathbb{R}^n : P(x) = 0, Q_1(x) > 0, \dots, Q_s(x) > 0\}$.

Definición 4.2. Siguiendo los apuntes de la asignatura de Cálculo de Probabilidades [7], sea Ω un conjunto no vacío y sea $\sigma \subseteq P(\Omega)$. Diremos que una familia de conjuntos $\mathcal{A}$ es una álgebra si se cumplen las siguientes condiciones:

- $\Omega \in \sigma$.
- Si $A \in \sigma$, entonces, $A^c \in \sigma$.
- Si $\{A_1, \dots, A_n\} \subseteq \mathcal{A}$, entonces $\cup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$.

Podemos identificar entonces el conjunto de todos los conjuntos semialgebraicos de $\mathbb{R}^n$ como una álgebra.

Teorema 4.3. *Por el Teorema 2.7.1 (Teorema de Finitud) del libro [2], sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto semialgebraico cerrado. Entonces A es una unión finita de conjuntos semialgebraicos de la forma:*

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f_1(x) \geq 0, \dots, f_s(x) \geq 0\} \quad (4.1)$$

donde $f_1, \dots, f_s \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$.

Ejemplo 4.4. *Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2(x-1) - y^2 > 0\}$ un conjunto semialgebraico representado gráficamente en 4.1. Por la teoría de conjuntos semialgebraicos [2] sabemos que la clausura de un conjunto semialgebraico es un conjunto semialgebraico (cerrado). Por lo que se puede escribir como indica el Teorema de finitud, 4.3. Podríamos pensar que este conjunto es $\bar{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2(x-1) - y^2 \geq 0\}$ por la continuidad de la función debe ser $\bar{A} \subseteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2(x-1) - y^2 \geq 0\}$. Pero, en este conjunto aparece el punto $(0, 0)$ que no está en la clausura de A , y como se puede observar en la Figura 4.2, es un punto aislado.*

Para evitar eso, podemos escribirlo como $\bar{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2(x-1) - y^2 \geq 0, x - \frac{1}{2} \geq 0\}$.



Figura 4.1: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2(x-1) - y^2 > 0\}$

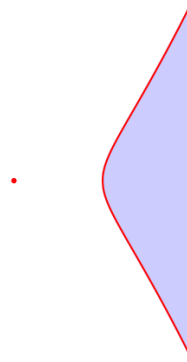


Figura 4.2: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2(x-1) - y^2 \geq 0\}$

En particular, un subconjunto compacto E de $\mathbb{R}^n$ es semialgebraico si y solo si existen dos enteros positivos A y B y polinomios en n variables P_{ab} , con $1 \leq a \leq A$, $1 \leq b \leq B$ tal que:

$$E = \bigcup_{a=1}^A \bigcap_{b=1}^B \{x \in \mathbb{R}^n : P_{ab}(x) \leq 0\} \quad (4.2)$$

Teorema 4.5 (Teorema de proyección de conjuntos semialgebraicos). *La imagen de un subconjunto semialgebraico de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ bajo la proyección natural $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un conjunto semialgebraico.*

Definición 4.6. *Una función $f(x_1, \dots, x_n)$ es multiafín si cada término en su expansión polinómica tiene grado menor o igual a 1.*

Lema 4.7. Sea P un polinomio en las variables $x_1, \dots, x_n$, con grado estrictamente menor a 2^q en cada variable, entonces existe una función multiafín $f : \mathbb{R}^{nq} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$P(x_1, \dots, x_n) = f(x_1^{2^0}, \dots, x_1^{2^{q-1}}, \dots, x_n^{2^0}, \dots, x_n^{2^{q-1}}). \quad (4.3)$$

Demostración. Cualquier entero positivo m se puede escribir como suma de potencias de 2 (desarrollo binario de m). Entonces, si $m < 2^q$, existen números $\epsilon_0(m), \dots, \epsilon_q(m)$ en $\{0, 1\}$ tal que $m = \sum_{k=0}^{q-1} \epsilon_k(m) 2^k$, por lo tanto,

$$x_i^m = \prod_{k=0}^{q-1} (x_i^{2^k})^{\epsilon_k(m)}$$

Luego, si reemplazamos cualquier x_i^m que aparece en el polinomio P por $\prod_{k=0}^{q-1} (x_{ik})^{\epsilon_k}$, y denotamos la expresión resultante como $f(x_{10}, \dots, x_{1(q-1)}, \dots, x_{n0}, \dots, x_{n(q-1)})$, esto define una función $f : \mathbb{R}^{nq} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $P(x_1, \dots, x_n) = f(x_1^{2^0}, \dots, x_1^{2^{q-1}}, \dots, x_n^{2^0}, \dots, x_n^{2^{q-1}})$ para cualquier $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Como todo $\epsilon_k(m)$ es 0 o 1, f es afín en cada variable. $\square$

Proposición 4.8. Sea $S = \{P \leq 0\} \subseteq \mathbb{R}^k$ entonces, existe un conjunto de polinomios multiafines en $n(2q-1)$ variables

$$\{f, b_{10} - a_{10}, a_{11} - b_{10}a_{10}, \dots, b_{n0} - a_{n0}, a_{n1} - b_{n0}a_{n0}, \dots, b_{n(q-2)} - a_{n(q-2)}, a_{n(q-1)} - b_{n(q-2)}a_{n(q-2)}\}$$

tal que la proyección sobre $\mathbb{R}^k$ del conjunto $\{f \leq 0, b_{10} - a_{10} = 0, a_{11} - b_{10}a_{10} = 0, \dots, a_{n(q-1)} - b_{n(q-2)}a_{n(q-2)} = 0\} \subseteq \mathbb{R}^{n(2q-1)}$ es S

Demostración. Usando el lema anterior existe una función multiafín f en nq variables, $a_{10}, \dots, a_{1q-1}, a_{20}, \dots, a_{2q-1}, \dots, a_{n0}, \dots, a_{nq-1}$, que satisface la ecuación

$$P(x_1, \dots, x_n) = f(a_{10}, \dots, a_{1q-1}, a_{20}, \dots, a_{2q-1}, \dots, a_{n0}, \dots, a_{nq-1}).$$

Para cada variable x_i de P introducimos las variables auxiliares y polinomios correspondientes para representar las potencias necesarias en f . Queremos que:

$$\begin{aligned} a_{10}^2 &= a_{11} \\ a_{11}^2 &= a_{12} \\ &\vdots \\ a_{1(q-2)}^2 &= a_{1(q-1)} \\ &\vdots \\ a_{n(q-2)}^2 &= a_{n(q-1)} \end{aligned}$$

Para lograr esto, añadimos los siguientes polinomios auxiliares: $b_{ij} - a_{ij} = 0$ para asegurar que $b_{ij} = a_{ij}$ y $a_{i(j+1)} - b_{ij}a_{ij}$ con $i = 1, \dots, n$ y $j = 0, \dots, q-2$. Finalmente, definimos el conjunto $T \subseteq \mathbb{R}^{n(2q-1)}$ como:

$$T = \{a_{10}, \dots, a_{n(q-1)}, b_{10}, \dots, b_{n(q-2)}; f(a_{10}, \dots, a_{n(q-1)}) \leq 0, b_{ij} - a_{ij} = 0, a_{i(j+1)} - b_{ij}a_{ij} = 0\}$$

Los polinomios auxiliares garantizan que las variables a_{ij} representan las potencias necesarias de las x_i en f , por lo tanto, la proyección de T sobre $\mathbb{R}^k$ es el conjunto S . $\square$

4.3. Construcción del juego

Definición 4.9 (Juego binario). *Un juego se considera binario si cada jugador tiene solo dos estrategias puras. Y como antes, se identifica la estrategia mixta del jugador número i con la probabilidad x_i que está asignada a la primera de sus dos acciones puras.*

Antes de introducir los teoremas, vamos a aclarar la notación. Solo se consideran juegos binarios y se denotan las dos estrategias puras de cada jugador como Top y Bottom.

Es conveniente utilizar la misma notación para el nombre de un jugador y su probabilidad de jugar Top, excepto que para poder distinguir entre jugadores y estrategias, se utilizan letras mayúsculas para jugadores. Por lo tanto, los n jugadores básicos llevan los nombres $X_1, X_2 \dots X_n$, y x_i es la probabilidad de que el jugador X_i juegue Top.

Se definen los juegos binarios dando los pagos de cada jugador cuando él elige Top o Bottom, como una función de los perfiles de estrategia mixta de sus oponentes (más precisamente, de su probabilidad de jugar Top). Estas expresiones van a ser siempre multiafines en las probabilidades de jugar Top de los oponentes (es decir, afín respecto a la probabilidad de jugar Top de cada oponente), asegurando de que corresponden a los pagos en la extensión mixta de un juego binario. Por ejemplo, el primer juego tendrá (por lo menos) dos jugadores, X_α y X_β , jugando Top con probabilidad x_α y x_β respectivamente, jugando Bottom con probabilidad $(1 - x_\alpha)$ y $(1 - x_\beta)$ respectivamente, y con pagos si juegan Top o Bottom descritos por las siguientes tablas:

$$(2) \quad \text{Jugador } X_\alpha \quad \begin{array}{c|c} \text{T} & x \\ \hline \text{B} & x_\beta \end{array} \quad \text{Jugador } X_\beta \quad \begin{array}{c|c} \text{T} & x_\alpha \\ \hline \text{B} & x \end{array}$$

donde x es un número real en $[0, 1]$. Esto significa que los pagos de los jugadores X_α y X_β son $x_\alpha x + (1 - x_\alpha)x_\beta$ y $x_\beta x_\alpha + (1 - x_\beta)x$ respectivamente. Dejando que X_α sea el jugador de fila y X_β el de columna, la correspondiente matriz de pagos sería

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{T} & \text{B} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{T} \\ \text{B} \end{array} & \left(\begin{array}{cc} x, 1 & x, x \\ 1, 0 & 0, x \end{array} \right) \end{array}$$

independientemente de cualquier otra acción de otro jugador.

Lema 4.10. *Sea $x \in [0, 1]$. En cualquier juego con 2 jugadores cuyos pagos vienen dados por 4.3 y un número arbitrario de otros jugadores sin pagos especificados, se tiene que, en cualquier equilibrio, $x_\alpha = x$.*

Demostración. Por reducción al absurdo, asumimos por una parte que $x_\alpha > x$. Entonces el jugador X_β juega Top, ya que el pago es mayor, luego $x_\beta = 1$. Entonces $x_\beta \geq x_\alpha > x$, por lo tanto el jugador X_α juega Bottom, ya que el pago es mayor y $x_\alpha = 0$. Mientras $x \in [0, 1]$, esto contradice que $x_\alpha = 0 > x$.

Por otra parte, si se asumiera que $x_\alpha < x$, el jugador X_β jugaría Bottom, ya que el pago sería mayor, luego $x_\beta = 0$. Entonces $x_\beta \leq x_\alpha < x$, por lo tanto el jugador X_α jugaría Top y $x_\alpha = 1$. Mientras $x \in [0, 1]$, esto contradice que $x_\alpha = 1 < x$. Por lo tanto, $x_\alpha = x$. $\square$

Lema 4.11. Sea $i \in \{1, \dots, n\}$. Se considera un juego con n jugadores básicos $X_1 \dots X_n$ y, al menos, $2q$ jugadores adicionales X_{ik}, Y_{ik} , $0 \leq k \leq q-1$, cuyos pagos vienen dados por la siguiente tabla (donde, como en todas las tablas de pagos, T y B corresponden a las acciones de los jugadores).

$$\begin{array}{c|c} \text{Jugador } X_{ik} & \begin{array}{c} T \\ \hline B \end{array} \begin{array}{c} x_i \prod_{j=0}^{k-1} x_{ij} \\ y_{ik} \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c|c} \text{Jugador } Y_{ik} & \begin{array}{c} T \\ \hline B \end{array} \begin{array}{c} x_{ik} \\ x_i \prod_{j=0}^{k-1} x_{ij} \end{array} \end{array}$$

En cualquier equilibrio, para cualquier $k \in \{0, \dots, q-1\}$, $x_{ik} = (x_i)^{2^k}$.

Demostración. La demostración es por inducción en q . El caso $q = 1$ es el caso del Lema 4.10 aplicado a los jugadores X_{i0} e Y_{i0} con $x_\alpha = x_{i0}$, $x_\beta = y_{i0}$, y $x = x_i$. Se asume que el resultado es cierto añadiendo $2(q-1)$ jugadores. Por la hipótesis de inducción $x_{ik} = (x_i)^{2^k}$ para $k = 0, \dots, q-2$. Es decir,

$$x_i \prod_{j=0}^{q-2} x_{ij} = x_i \prod_{j=0}^{q-2} (x_i)^{2^j}$$

Para ver que el resultado siga siendo cierto cuando se añaden $2q$ jugadores es suficiente demostrar que es cierto también para $k = q-1$. Con la hipótesis de inducción y aplicando el Lema 4.10 a los jugadores X_{ik} e Y_{ik} con $k = 0, \dots, 2(q-1)$ con $x_\alpha = x_{ik}$, $x_\beta = y_{ik}$ y $x = x_i \prod_{j=0}^{k-1} x_{ij}$ se demuestra que, en cualquier equilibrio,

$$x_{ik} = x_i \prod_{j=0}^{q-1} x_{ij} = x_i \prod_{j=0}^{q-1} (x_i)^{2^j} = (x_i)^{2^k}$$

□

El lema anterior 4.11 nos va a permitir, para cualquier polinomio P_{ab} , añadir un jugador cuyo pago en equilibrio cuando juega Top es igual a $P_{ab}(x_1, \dots, x_n)$.

4.4. Caracterización de los conjuntos semialgebraicos cerrados compactos como equilibrio de Nash

Teorema 4.12. Sea $E = \bigcup_{a=1}^A \bigcap_{b=1}^B \{x \in \mathbb{R}^n : P_{ab}(x) \leq 0\}$ un subconjunto de $[0, 1]^n$ no vacío, compacto y semialgebraico entonces existe un juego binario de N jugadores ($N > n$) tal que la proyección de su conjunto de equilibrios de Nash en sus primeras n coordenadas (las de los primeros n jugadores) sea igual a E .

Además, si d es una cota superior de los grados de P_{ab} , entonces, el número de jugadores necesarios está acotado por

$$N \leq 1 + AB + n(3 + 2\ln_2(d))$$

Demostración. Sea $d < 2^q$. Se empieza con un juego con n jugadores básicos $X_1, \dots, X_n$, y para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $2q$ jugadores adicionales con pagos

$$\text{Jugador } X_{ik} \quad \frac{\text{T}}{\text{B}} \left| \frac{x_i \prod_{j=0}^{k-1} x_{ij}}{y_{ik}} \right. \quad \text{Jugador } Y_{ik} \quad \frac{\text{T}}{\text{B}} \left| \frac{x_{ik}}{x_i \prod_{j=0}^{k-1} x_{ij}} \right.$$

Por el Lema 4.11, en un punto de equilibrio, $x_{ik} = (x_i)^{2^k}$. Sea $\hat{x} = (x_{10}, \dots, x_{1(q-1)}, \dots, x_{n0}, \dots, x_{n(q-1)})$, para cualquier polinomio P_{ab} , se define f_{ab} como en el Lema 4.7 y por lo tanto, en equilibrio $P_{ab}(x_1, \dots, x_n) = f_{ab}(\hat{x})$. Como f_{ab} es multiafín, se puede añadir un jugador S_{ab} , jugando Top con probabilidad s_{ab} y con pago

$$\text{Jugador } S_{ab} \quad \frac{\text{T}}{\text{B}} \left| \frac{f_{ab}(\hat{x})}{0} \right.$$

Se añade también un jugador U , jugando Top con probabilidad u , y con pago

$$\text{Jugador } U \quad \frac{\text{T}}{\text{B}} \left| \frac{\prod_{a=1}^A \sum_{b=1}^B s_{ab}}{0} \right.$$

Finalmente, sea $z = (z_1, \dots, z_n)$ cualquier elemento de E y los pagos de los n jugadores iniciales (X_i) son

$$\text{Jugador } X_i \quad \frac{\text{T}}{\text{B}} \left| \frac{(z_i - x_{i0})u}{0} \right.$$

Luego el juego tiene $(1 + AB)$ jugadores adicionales, más $2(1 + \ln_2(d))$ para definir los pagos del jugador X_i , entonces

$$N \leq 1 + AB + n(3 + 2\ln_2(d))$$

Más precisamente, si $d(i)$ es el grado máximo en x_i del polinomio P_{ab} , entonces se necesita como máximo $N = 1 + AB + 3n + 2 \sum_i \ln_2(d(i))$ jugadores.

Veamos ahora que la proyección de los equilibrios de Nash de este juego que hemos construido es E , para ello vamos a demostrar que sea $x = (x_1, \dots, x_n)$ las n primera coordenadas de un equilibrio, que $x \in E$ es una condición necesaria y suficiente.

Supongamos primero que $x = (x_1, \dots, x_n)$ son las n primeras coordenadas de un equilibrio y asumimos que $x \notin E$. En equilibrio, se tiene $f_{ab}(\hat{x}) = P_{ab}(x)$. Además, como $x \notin E$, para cada a , existe un b tal que $P_{ab}(x) > 0$ y entonces $s_{ab} = 1$. Luego,

$$\prod_{a=1}^A \sum_{b=1}^B s_{ab} > 0$$

y $u = 1$. Como $z \in E$, debe haber un i tal que $x_i \neq z_i$. En cualquier equilibrio $x_i = x_{i0}$. Si $x_{i0} < z_i$ entonces, $(z_i - x_{i0})u > 0$, luego $x_i = 1$ y como en cualquier equilibrio $x_i = x_{i0}$, $x_{i0} = 1$, se llega a una contradicción ya que $1 = x_{i0} < z_i \leq 1$. Si $x_{i0} > z_i$ esto implica que $(z_i - x_{i0})u < 0$ y $x_i = 0 = x_{i0}$, por lo que $0 \leq z_i < x_{i0} = 0$, contradicción.

Hemos probado que es necesario que $x \in E$, veamos ahora que es suficiente.

Sea $x \in E$, se considera el siguiente perfil: $x_{ik} = y_{ik} = (x_i)^{2^k}$ para todo i y k , $u = 0$, $s_{ab} = 0$ si $P_{ab}(x) \leq 0$ y 1 de lo contrario. Todos los jugadores X_{ik} y Y_{ik} son indiferentes, y jugadores X_i también, ya que $u = 0$. Los jugadores S_{ab} no tienen desviaciones rentables por construcción. Finalmente, como $x \in E$, entonces existe a tal que para todo b , $s_{ab} = 0$, luego

$$\prod_{a=1}^A \sum_{b=1}^B s_{ab} = 0$$

y el jugador U es indiferente. $\square$

Ejemplo 4.13. Se tiene un conjunto $E = \{x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0\} \cap \{-x_1^2 - x_2^2 + 1 \leq 0\}$, entonces por el lema 4.7 se tiene:

$$f_1(x_{10}, x_{11}, x_{20}, x_{21}) = x_{11} + x_{21} - 1, \quad f_2(x_{10}, x_{11}, x_{20}, x_{21}) = -x_{11} - x_{21} + 1$$

Por lo tanto, va a haber dos jugadores básicos X_1, X_2 , 4 jugadores de la forma X_{ij} y otros 4 de la forma Y_{ij} con $i = \{1, 2\}$ y $j = \{0, 1\}$, 2 jugadores S_i y un jugador U .

$$\begin{array}{ll}
 \text{Jugador } X_{10} & \frac{T}{B} \left| \begin{array}{c} x_1 \\ y_{10} \end{array} \right. & \text{Jugador } Y_{10} & \frac{T}{B} \left| \begin{array}{c} x_{10} \\ x_1 \end{array} \right. \\
 \text{Jugador } X_{11} & \frac{T}{B} \left| \begin{array}{c} x_1 \cdot x_{10} \\ y_{11} \end{array} \right. & \text{Jugador } Y_{11} & \frac{T}{B} \left| \begin{array}{c} x_{11} \\ x_1 \cdot x_{10} \end{array} \right. \\
 \text{Jugador } X_{20} & \frac{T}{B} \left| \begin{array}{c} x_2 \\ y_{20} \end{array} \right. & \text{Jugador } Y_{20} & \frac{T}{B} \left| \begin{array}{c} x_{20} \\ x_2 \end{array} \right. \\
 \text{Jugador } X_{21} & \frac{T}{B} \left| \begin{array}{c} x_2 \cdot x_{20} \\ y_{21} \end{array} \right. & \text{Jugador } Y_{21} & \frac{T}{B} \left| \begin{array}{c} x_{21} \\ x_2 \cdot x_{20} \end{array} \right. \\
 \text{Jugador } S_1 & \frac{T}{B} \left| \begin{array}{c} f_1 = x_{11} + x_{21} - 1 \\ 0 \end{array} \right. & \text{Jugador } S_2 & \frac{T}{B} \left| \begin{array}{c} f_2 = -x_{11} - x_{21} + 1 \\ 0 \end{array} \right. \\
 & & \text{Jugador } U & \frac{T}{B} \left| \begin{array}{c} s_1 + s_2 \\ 0 \end{array} \right.
 \end{array}$$

con $z = (1, 0) \in E$:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Jugador } X_1 & \frac{T}{B} \left| \begin{array}{c} (1 - x_{10})u \\ 0 \end{array} \right. & \text{Jugador } X_2 & \frac{T}{B} \left| \begin{array}{c} -x_{20}u \\ x_1 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Por el Teorema 4.12 E es un subconjunto de $[0, 1]^2$ no vacío, compacto y semialgebraico, entonces existe un juego binario de 13 jugadores tal que la proyección de su conjunto de equilibrios de Nash en sus primeras 2 coordenadas (las de los primeros 2 jugadores) es igual a E .

(a, b) es un equilibrio $\iff x_{10} = a$ (entonces, $x_{11} = a^2$) y $x_{20} = b$ (entonces, $x_{21} = b^2$)

Luego,

$$\begin{array}{ll}
 \text{Jugador } S_1 & \frac{T}{B} \left| \begin{array}{c} a^2 + b^2 - 1 \\ 0 \end{array} \right. & \text{Jugador } S_2 & \frac{T}{B} \left| \begin{array}{c} -a^2 - b^2 + 1 \\ 0 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Entonces,

$$\text{Jugador } U \quad \frac{T}{B} \left| \begin{array}{c} s_1 + s_2 \\ 0 \end{array} \right.$$

- Si $a^2 + b^2 - 1 > 0 \implies s = 1$ y $-a^2 - b^2 + 1 < 0 \implies s_2 = 0$

Entonces, $s_1 + s_2 = 1 \implies u = 1$

$$\text{Jugador } X_1 \quad \frac{T \mid 1-a}{B \mid 0} \quad \text{Jugador } X_2 \quad \frac{T \mid -b}{B \mid 0}$$

Como $a \in [0, 1]$ y $b \in [0, 1]$ hay tres opciones:

- $a = 0$ y $b = 1$

Si $a = 0$ el jugador X_1 va a elegir jugar T , entonces $x_1 = 1$ y como $x_1 = a$ contradicción.

- $a = 1$ y $b = 0$

$$\text{Jugador } X_1 \quad \frac{T \mid 0}{B \mid 0} \quad \text{Jugador } X_2 \quad \frac{T \mid 0}{B \mid 0}$$

El jugador X_1 puede elegir Top y el jugador X_2 puede elegir Bottom, por lo tanto, este es un equilibrio, $(a, b) = (1, 0) = z$.

- $a \in (0, 1)$ y $b \in (0, 1)$ Si $a \in (0, 1)$, X_1 elige T , entonces $x_1 = 1$ y como $x_1 = a$ contradicción. Si $b \in (0, 1)$, X_2 elige B , entonces $x_2 = 0$ y como $x_2 = b$ contradicción.

Por lo tanto, si $a^2 + b^2 - 1 > 0$ solamente hay un equilibrio de estrategias mixtas en el punto $z = (1, 0)$

- Si $a^2 + b^2 - 1 < 0 \implies s_1 = 0$ y $-a^2 - b^2 + 1 > 0 \implies s_2 = 1$

Entonces, $s_1 + s_2 = 1 \implies u = 1$ y razonando de la misma manera que en el caso anterior, se llega a que hay un equilibrio de Nash de estrategias mixtas en el punto $z = (0, 1)$.

- $a^2 + b^2 - 1 = 0 \implies s_1 = s_1$ y $s_2 = s_2 \implies u \in \{1, 0\}$

- Si $u = 1$

$$\text{Jugador } X_1 \quad \frac{T \mid 1-a}{B \mid 0} \quad \text{Jugador } X_2 \quad \frac{T \mid -b}{B \mid 0}$$

Razonando de la misma manera que en los casos anteriores, se llega a que hay un equilibrio de Nash de estrategias mixtas en el punto $z = (0, 1)$.

- Si $u = 0$

$$\text{Jugador } X_1 \quad \frac{T \mid 0}{B \mid 0} \quad \text{Jugador } X_2 \quad \frac{T \mid 0}{B \mid 0}$$

El jugador X_1 puede elegir Top y el jugador X_2 puede elegir Bottom, por lo tanto, este también es un equilibrio siempre y cuando $s_1 = s_2 = 0$

Por como hemos construido el juego, si tomamos como punto base el punto z , siempre va a haber un equilibrio de Nash en ese punto z , independientemente de los valores de u y s_i . Por lo que necesitamos que $z \in E$. Los únicos puntos, aparte del punto z , que son proyecciones de equilibrios de Nash son aquellos en los que $u = s_1 = s_2 = 0$.

Corolario 4.14. Sea $E = \bigcup_{a=1}^A \bigcap_{b=1}^B \{x \in \mathbb{R}^n : P_{ab}(x) \leq 0\}$ un conjunto de $\mathbb{R}^n$ no vacío, compacto y semialgebraico entonces existe un juego binario de N jugadores tal que la proyección de su conjunto de pagos de equilibrio de Nash en sus primeras n coordenadas es igual a un conjunto homeomorfo a E .

Demostración. Dado que E es un conjunto compacto en $\mathbb{R}^n$, se utiliza una transformación lineal para ajustarlo dentro del cubo unitario $[0, 1]^n$.

La transformación lineal es $-D + 2Dx$, donde D es una cota positiva tal que $E \subseteq [-D, D]^n$. Se aplica a cada coordenada x_i de E . Esta transformación da lugar a un conjunto transformado

$$E' = \{x \in \mathbb{R}^n \mid -D + 2Dx \in E\}$$

que es un subconjunto de $[0, 1]^n$, porque todos los puntos de E' están en el cubo $[-D, D]^n$. Si $x \in E'$, y x_i es una de sus coordenadas, entonces $x_i \in [-D, D]$, si $a \in E$ es tal que $-D + 2Da = x$, entonces $-D \leq -D + 2Da_i \leq D$, por lo que $0 \leq a_i \leq a_1$. Además, E' es un conjunto semialgebraico, ya que lo podemos expresar como:

$$E' = \bigcup_{a=1}^A \bigcap_{b=1}^B \{x \in \mathbb{R}^n : P_{ab}(-D + 2Dx) \leq 0\}$$

Se utiliza la transformación y se aplica la construcción del Teorema 4.12 para adaptar el juego binario, de manera que los jugadores Y_{i0} tienen pagos estratégicamente equivalentes a $-D + 2Dx_{i0}$ cuando juegan en equilibrio. Reemplazando los pagos del jugador Y_{i0} por el pago estratégicamente equivalente:

$$\begin{array}{c|c} \text{T} & -D + 2Dx_{i0} \\ \hline \text{B} & -D + 2Dx_i \end{array}$$

Esto implica que los pagos en equilibrio de Nash de los jugadores Y_{i0} reflejan la posición x_i en el conjunto E . Así se construye un juego binario donde los jugadores tienen estrategias que reflejan las coordenadas de E' en $[0, 1]^n$. $\square$

Bibliografía

- [1] S. Basu, R. Pollack y M.-F. Roy. *Algorithms in Real Algebraic Geometry*. Second. Vol. 10. Algorithms and Computation in Mathematics. Berlin: Springer-Verlag, 2006, págs. xx+662.
- [2] J. Bochnak, M. Coste y M.-F. Roy. *Géométrie Algébrique Réelle*. Berlin: Springer-Verlag, 1987.
- [3] K. C. Border. *Fixed Point Theorems with Applications to Economics and Game Theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 1985, págs. xiv+146.
- [4] M. Giuli. *Apuntes de la asignatura: Mathematical Economics and Finance-2022*.
- [5] Z. Liu. «Fixed Point Theorems and the Existence of a General Equilibrium». En: (2018).
- [6] M. J. Osborne y A. Rubinstein. *A Course in Game Theory*. Cambridge, MA: MIT Press, 1994, págs. xvi+352.
- [7] A. N. Reyes. *Apuntes de la asignatura: Cálculo de Probabilidades-2021*.
- [8] G. Vigeral e Y. Viossat. «Semi-algebraic Sets and Equilibria of Binary Games». En: *Journal of Dynamics and Games* 4.2 (2017), págs. 181-202. DOI: 10.3934/jdg.2017009.
- [9] A. Yuan. «Fixed Point Theorems and Applications to Game Theory». En: (2017). Working Paper.