Universidad de Cantabria

Facultad de Ciencias

CUERPOS P-ÁDICOS
(p-adic fields)

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autor: Noelia Jiménez Jiménez

Director: Jesús Araujo Gómez

Septiembre - 2024

Índice general

1. Conceptos básicos **7**
1.1. Valores absolutos en $\mathbb{Q}$ . . . 7
1.2. Equivalencia de valores absolutos. . . . 8

2. Los cuerpos p-ádicos **15**
2.1. El anillo de los enteros p-ádicos . . . 15
2.2. Compleción de un cuerpo. . . . 17

3. Extensiones y propiedades de valores absolutos. **23**
3.1. Espacios vectoriales normados . . . 23
3.2. Extensión de valores absolutos. . . . 24
3.3. Unicidad de la extensión de valores absolutos. . . . 28
3.4. Grupo de valores y cuerpo residual . . . 29
3.5. El valor absoluto sobre la clausura algebraica. . . . 30
3.6. Compleción de la clausura algebraica. El cuerpo $\mathbb{C}_p$. . . . 35

4. Los complejos p-ádicos. **39**
4.1. Separabilidad de $\mathbb{C}_p$. . . . 39
4.2. Intersección de bolas encajadas en $\mathbb{C}_p$. . . . 40

Glosario **45**

Bibliografía **47**

Resumen

Habitualmente, se trabaja con el cuerpo de los números racionales (que no es completo respecto al valor absoluto usual) y con su compleción con respecto a dicho valor absoluto: el cuerpo de los números reales.

Los cuerpos p-ádicos se obtienen al completar el cuerpo de los números racionales con respecto a un nuevo valor absoluto: el valor absoluto p-ádico. En esta memoria se estudia el proceso de compleción, la existencia y unicidad de la extensión de valores absolutos y se analiza cómo se comportan estos en la clausura algebraica de un cuerpo.

Entre los objetivos de este trabajo, se incluye además la construcción del cuerpo complejo p-ádico y el estudio de sus propiedades. En particular, se analiza la separabilidad y el comportamiento frente a la intersección de bolas encajadas.

Palabras clave: p-ádico, compleción, valor absoluto, clausura algebraica, no arquimediano.

Abstract

Usually, we work with the field of rational numbers (which is not complete with respect to the usual absolute value) and with its completion with respect to that absolute value: the field of real numbers.

The p-adic fields are obtained by completing the field of rational numbers with respect to a new absolute value: the p-adic absolute value. This memory studies the process of completion, the existence and uniqueness of the extension of absolute values, and analyzes how these behave in the algebraic closure of a field.

Among the aims of this work, we include the construction of the complex p-adic field and study its properties. In particular, the separability and behavior concerning the intersection of nested balls are analyzed.

Keywords: p-adic, completion, absolute value, algebraic closure, non-archimedean.

Capítulo 1

Conceptos básicos

A lo largo de esta memoria $\mathbb{K}$ denotará un cuerpo.

1.1. Valores absolutos en $\mathbb{Q}$

Recordemos que el concepto de valor absoluto sobre $\mathbb{R}$ puede generalizarse a cualquier cuerpo en el siguiente sentido:

Definición 1.1.1. Un valor absoluto sobre $\mathbb{K}$ es una aplicación $|\ \ | : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ que satisface las siguientes condiciones:

i) $|x| = 0$ si y solo si $x = 0$.

ii) $|xy| = |x||y|$ para cada $x, y \in \mathbb{K}$.

iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$ para cada $x, y \in \mathbb{K}$.

Se conocen diferentes valores absolutos definidos en $\mathbb{Q}$: para empezar, podemos considerar el valor absoluto trivial o el valor absoluto usual. A continuación, vamos a definir, para cada primo p, un nuevo valor absoluto: el valor absoluto p-ádico $|\ \ |_p$.

Consideramos un número primo p. Nótese que, fijado $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, podemos expresar de manera única n como producto

$$n = p^N n'$$

donde $p \nmid n'$ y $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dicho número N se suele denotar por $v_p(n)$. Más en general, tenemos la siguiente definición:

Definición 1.1.2. Sea p primo. Llamamos valoración p-ádica a la función

$$v_p : \mathbb{Q} \diagdown \{0\} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

definida como

$$v_p\left(\frac{a}{b}\right) := v_p(a) - v_p(b)$$

donde $v_p(n)$ ha sido introducida anteriormente para los números enteros no nulos.

Podemos ver que, cuanto "más divisible" sea un número por p más grande (en módulo) será su valoración p-ádica. Por ejemplo, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$v_p(p^n) = n$$

$$v_p\left(\frac{1}{p^n}\right) = -n$$

A partir de esta aplicación podemos definir ahora, para cada primo p, el valor absoluto p-ádico.

Definición 1.1.3. Sea p primo. Para cada $x \in \mathbb{Q}$ se define el valor absoluto p-ádico de x como

$$|x|_p := p^{-v_p(x)}$$

si $x \neq 0$, y se establece $|0|_p := 0$.

Al igual que antes, comprobamos que, cuanto "más divisible" sea por p un número, más pequeño será su valor absoluto p-ádico. Así tenemos que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$|p^n|_p = \frac{1}{p^n}$$

$$\left|\frac{1}{p^n}\right|_p = p^n$$

Por el momento, tenemos los siguientes valores absolutos en $\mathbb{Q}$:

- el trivial, en que $|0| = 0$ y $|q| = 1$ si $q \neq 0$;
- el usual, en que $\mathbb{Q}$ hereda el valor absoluto de $\mathbb{R}$;
- el p-ádico, definido anteriormente para cada primo p.

1.2. Equivalencia de valores absolutos.

De manera natural, cada valor absoluto induce una métrica $d(x, y) := |x - y|$ y, con ello, una topología.

Definición 1.2.1. Dos valores absolutos sobre $\mathbb{K}$ son equivalentes si inducen la misma topología sobre $\mathbb{K}$.

En el siguiente resultado, haremos uso de que dos métricas generan la misma topología si la convergencia de una sucesión en una es equivalente a la convergencia en la otra.

Lema 1.2.2. *Sean $|\ |_1$ y $|\ |_2$ dos valores absolutos equivalentes sobre $\mathbb{K}$. Entonces, dado $x \in \mathbb{K}$, se tiene $|x|_1 < 1$ si y solo si $|x|_2 < 1$.*

Demostración. Fijamos $x \in \mathbb{K}$ con $|x|_1 < 1$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} |x^n|_1 = \lim_{n\to\infty} {|x|_1}^n = 0.$$

Como la topología inducida por $|\ |_2$ es la misma, deducimos que (x^n) también converge a 0 con respecto a $|\ |_2$, es decir, $\lim_{n\to\infty} |x^n|_2 = 0$. Fácilmente concluimos que $|x|_2 < 1$.

La otra implicación es análoga. □

A continuación, damos un resultado que nos permite caracterizar la equivalencia entre los valores absolutos en términos relacionados con los mismos.

Teorema 1.2.3. *Sean $|\ |_1$ y $|\ |_2$ dos valores absolutos equivalentes sobre $\mathbb{K}$. Entonces existe un número real $c > 0$ tal que $|\ |_2 = {|\ |_1}^c$.*

Demostración. Vamos a distinguir dos casos:

- Si $| \ |_1$ es el valor absoluto trivial, entonces la bola $B_{| \ |_1}(0,1)$ es abierto con respecto a $| \ |_1$ y $| \ |_2$ (por definición de valores absolutos equivalentes). Por ello, 0 es punto interior de $B(0,1)$ y, por tanto, existe $\delta > 0$ tal que $B_{| \ |_2}(0,\delta) = \{x \in \mathbb{K} : |x|_2 < \delta\} \subset B_{| \ |_1}(0,1) = \{0\}$. Así, si $|x|_2 < \delta$, entonces $x = 0$ y $|x|_2 = 0$.

  Ahora tomamos $y \in \mathbb{K}$ tal que $|y|_2 < 1$. Entonces existe $n > 0$ tal que $|y^n|_2 = {|y|_2}^n < \delta$ y, con ello, $y^n = 0$, es decir, $y = 0$. Por la misma razón, si $|y|_2 > 1$ entonces $\left|\frac{1}{y}\right|_2 < 1$, lo cual es imposible. Concluimos que si $y \neq 0$, entonces $|y|_2 = 1$. Así, $| \ |_2$ es el valor absoluto trivial.

  Así, en este caso, se verifica el teorema tomando $c = 1$.

- Si $| \ |_1$ es distinto del valor absoluto trivial, entonces tomamos $x \in \mathbb{K}$ tal que $|x|_1 > 1$. Ahora, dado $y \in \mathbb{K}$, $y \neq 0$, con $|y|_1 \neq 1$, existe $a \neq 0$ tal que $|y|_1 = {|x|_1}^a$.

  Seguidamente, sea $r := \frac{m}{n}$ (con $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$) tal que $r > a$. Como $|x|_1 > 1$,

$$|y|_1 = {|x|_1}^a < |x|_1^r.$$

  A continuación, probamos que $|y|_2 < |x|_2^r$.

  Tenemos que

$$|y|_1 < |x|_1^r \Longleftrightarrow \frac{|y|_1}{{|x|_1}^r} < 1 \Longleftrightarrow \frac{{|y|_1}^n}{{|x|_1}^m} < 1,$$

  con lo que

$$|y^n x^{-m}|_1 < 1.$$

  De este modo, por Lema 1.2.2, $|y^n x^{-m}|_2 < 1$ y deshaciendo las desigualdades anteriores tenemos que $|y|_2 < |x|_2^r$.

  Tomando $s < a$ llegamos, del mismo modo, a que $|y|_2 > |x|_2^s$. Resumiendo, se tiene

$$|x|_2^s < |y|_2 < |x|_2^r$$

  siempre que $s < a < r$. Así, podemos concluir que $|y|_2 = |x|_2^a$. Entonces

$$\frac{|y|_2}{|y|_1} = \frac{|x|_2^a}{|x|_1^a}$$

  y, aplicando logaritmos, nos queda

$$\frac{\log |y|_2}{\log |y|_1} = \frac{a \cdot \log |x|_2}{a \cdot \log |x|_1} = c$$

  donde $c := \frac{\log |x|_2}{\log |x|_1} > 0$, con lo que concluimos

$$|y|_2 = {|y|_1}^c.$$

  Podemos comprobar fácilmente que la igualdad anterior se satisface (con el mismo c) para cualquier elección inicial de y, siempre que $y \neq 0$, $|y|_1 \neq 1$. Por otra parte, es inmediato que, si $y = 0$, $|y|_2 = 0 = {|y|_1}^c$ y, si $|y|_1 = 1$, entonces usando Lema 1.2.2, $|y|_2 = 1 = {|y|_1}^c$ y así, también se da la igualdad. □

Definición 1.2.4. Sea $|\ \ |$ un valor absoluto sobre $\mathbb{K}$. Se dice que $|\ \ |$ es no arquimediano si satisface la *desigualdad triangular fuerte*:

$$|x+y| \leq \max(|x|,|y|)$$

para cualesquiera $x, y \in \mathbb{K}$. En caso contrario, decimos que el valor absoluto es arquimediano.

Lema 1.2.5. *Un valor absoluto* $|\ \ |$ *sobre* $\mathbb{K}$ *es no arquimediano si y solo si* $|n| \leq 1$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Supongamos en primer lugar que $|\ \ |$ es no arquimediano. Lo probaremos por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$:

- para $n = 2$ se tiene que
$$|2| = |1+1| \leq \max(|1|,|1|) = 1;$$
- para $n-1$ lo suponemos cierto;
- para n, teniendo en cuenta $|n-1| \leq 1$ (por hipótesis de inducción),
$$|n| = |(n-1)+1| \leq \max(|n-1|,|1|) \leq 1.$$

Veamos ahora el recíproco. Sea $n \in \mathbb{N}$. Como $\binom{n}{k}$ es un número natural, por hipótesis sabemos que $\left|\binom{n}{k}\right| \leq 1$, luego dados $x, y \in \mathbb{K}$,

$$|(x+y)^n| = \left|\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |x|^k |y|^{n-k} \leq (n+1)\max(|x|,|y|)^n.$$

Por tanto,
$$|x+y| \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1}\,\max(|x|,|y|) = \max(|x|,|y|).$$

Se concluye que $|\ \ |$ es no arquimediano. $\square$

Veamos a continuación que, de hecho, todo ello depende del valor absoluto de 2.

Proposición 1.2.6. *Sea* $|\ \ |$ *un valor absoluto sobre* $\mathbb{K}$. *Si* $|2| \leq 1$, *entonces* $|\ \ |$ *es no arquimediano.*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Probaremos que $|n| \leq 1$. Escribimos n como sigue:

$$n = a_0 + a_1 \cdot 2 + \cdots + a_s \cdot 2^s$$

donde $a_0, a_1, ..., a_s \in \{0,1\}$ y $a_s = 1$.

Como $|2| \leq 1$,
$$|n| \leq \sum_{j=0}^{s} |a_j| \cdot |2^j| \leq \sum_{j=0}^{s} |2|^j \leq s+1 \tag{1.1}$$

Tenemos además que $n < 2^{s+1}$, luego si $k \in \mathbb{N}$ entonces $n^k < 2^{k(s+1)}$. De nuevo, podemos escribir
$$n^k = b_0 + b_1 \cdot 2 + ... + b_t \cdot 2^t$$
donde $b_0, b_1, ..., b_t \in \{0,1\}$, $b_t = 1$ y $t < k(s+1)$.

Por tanto, utilizando 1.1
$$|n|^k = |n^k| \leq t+1 < k(s+1),$$
y concluimos así
$$|n| \leq \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k(s+1)} = 1.$$
Basta ahora aplicar Lema 1.2.5. $\square$

Además, la desigualdad triangular fuerte tiene importantes consecuencias. Veamos alguna de ellas.

Lema 1.2.7. *Sea $|\ \ |$ un valor absoluto no arquimediano sobre $\mathbb{K}$. Dados $x, y \in \mathbb{K}$, si $|x| \neq |y|$ entonces*
$$|x+y| = \max(|x|, |y|).$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad, suponemos $|x| > |y|$.

Por ser $|\ \ |$ un valor absoluto no arquimediano, tenemos la siguiente desigualdad:
$$|x+y| \leq \max(|x|, |y|) = |x|.$$

Por otro lado, si escribimos x como $x = (x+y) - y$, se tiene que
$$|x| = |(x+y) - y| \leq \max(|x+y|, |y|).$$

Es claro que $\max(|x+y|, |y|)$ no puede ser $|y|$, pues en ese caso, habríamos llegado a que $|x| \leq |y|$, en contradicción con la hipótesis de partida. Por tanto, $\max(|x+y|, |y|) = |x+y|$.

Concluimos, a partir de las dos desigualdades que hemos obtenido,
$$|x| \leq |x+y| \leq |x|,$$
esto es, $|x+y| = |x| = \max(|x|, |y|)$, como queríamos probar. $\square$

Teorema 1.2.8 (Ostrowski)**.** *Cada valor absoluto no trivial sobre el cuerpo de los números racionales es equivalente o bien al valor absoluto usual, o bien al valor absoluto p-ádico.*

Demostración. Distinguimos dos casos.

- *Caso 1: $|\ \ |$ es un valor absoluto arquimediano sobre* $\mathbb{Q}$. En este caso vamos a probar que $|\ \ |$ es equivalente al valor absoluto usual.

  Como $1 < |2| \leq |1| + |1| = 2$, existe un número $c \in \mathbb{R}, 0 < c \leq 1$, para el cual
  $$|2| = 2^c.$$

  Con ello, tenemos en particular garantizada la convergencia de la serie
  $$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^{jc}}$$

  A continuación, veremos que
  $$|n| = n^c$$
  para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$. En primer lugar, escribimos n como sigue:
  $$n = a_0 + a_1 \cdot 2 + \cdots + a_s \cdot 2^s,$$

donde $a_0, a_1, ... \in \{0,1\}, a_s = 1$.

Tenemos que $2^s \leq n < 2^{s+1}$, luego

$$2^{sc} \leq n^c < 2^{(s+1)c}. \tag{1.2}$$

Comencemos probando $|n| \leq n^c$. Usando (1.2), tenemos

$$|n| \leq \sum_{j=0}^{s} |a_j| \cdot |2|^j \leq \sum_{j=0}^{s} 2^{jc} = 2^{sc} \cdot (1 + 2^{-c} + ... + 2^{-sc}) \leq n^c \cdot M,$$

donde $M := \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-jc}$ no depende de n.

Como n es un número arbitrario, concluimos así que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $|n| \leq n^c \cdot M$. En particular, para todo $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{N}$, tenemos entonces que

$$|n^k| \leq n^{kc} \cdot M,$$

luego

$$|n| \leq \lim_{k\to\infty} n^c \sqrt[k]{M} = n^c, \tag{1.3}$$

y llegamos así a la desigualdad que queríamos probar. Veamos ahora la otra desigualdad: $|n| \geqslant n^c$. Dado $n \in \mathbb{N}$, y usando la notación anterior,

$$|n| = |2^{s+1} - (2^{s+1} - n)| \geqslant |2^{s+1}| - |2^{s+1} - n| \tag{1.4}$$

Usando la desigualdad ya probada anteriormente $|k| \leq k^c$, cierta para cada $k \in \mathbb{N}$, tenemos entonces

$$|2^{s+1} - n| \leq (2^{s+1} - n)^c \leq (2^{s+1} - 2^s)^c = 2^{sc},$$

donde en la última acotación hemos tenido en cuenta $2^s \leq n$.

Utilizando que $|2^{s+1}| = |2|^{s+1} = 2^{(s+1)c}$ y volviendo a (1.4), se sigue

$$|n| \geq |2^{s+1}| - |2^{s+1} - n| \geq 2^{(s+1)c} - 2^{sc} = 2^{(s+1)c}(1 - 2^{-c}).$$

De nuevo, por (1.2) tenemos que $2^{(s+1)c} > n^c$ y definiendo $M' := 1 - 2^{-c}$ obtenemos

$$|n| \geqslant n^c M'.$$

Como la desigualdad se da para todo $n \in \mathbb{N}$, deducimos que para $n, k \in \mathbb{N}$,

$$|n^k| \geq n^{kc} M'$$

y, tomando límites,

$$|n| \geqslant \lim_{k\to\infty} n^c \sqrt[k]{M'} = n^c.$$

Hemos probado ambas desigualdades, luego podemos concluir $|n| = |n|_{\mathbb{R}}^c$. Fácilmente, se generaliza esta igualdad a $\mathbb{Z}$ y a $\mathbb{Q}$.

- *Caso 2: $|\ \ |$ es un valor absoluto no arquimediano sobre* $\mathbb{Q}$. A continuación probaremos que $|\ \ |$ es equivalente a algún valor absoluto p-ádico.

  Como partimos de que $|\ \ |$ no es el valor absoluto trivial, entonces el conjunto $D := \{n \in \mathbb{N} : |n| < 1\}$ es no vacío, ya que al ser $|\ \ |$ un valor absoluto no arquimediano, entonces $|n| \leq 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$ (y, si fuese $|n| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces sería el valor absoluto trivial). Veamos que $p := \text{mín}\, D$ es primo.

En efecto, $p \neq 1$ y si $p = a \cdot b$ para algún $a, b \in \mathbb{N}$ con $a < p, b < p$ entonces $|a| = |b| = 1$ (pues, en otro caso, p no sería el mínimo de D). Entonces $|p| = |ab| = 1$, que es absurdo pues $p \in D = \{n \in \mathbb{N} : |n| < 1\}$. Por tanto, p ha de ser primo.

Vamos a probar que $|\ \ |$ es equivalente a $|\ \ |_p$. Para ello, definimos $c := \dfrac{-\log|p|}{\log p}$ y veremos que $|\ \ | = |\ \ |_p{}^c$. Tenemos así que $\log|p| = -c \log p$ y, con ello,

$$|p| = p^{-c} = |p|_p{}^c.$$

Veamos, en primer lugar, que $|q| = 1$ para cada $q \in \mathbb{N}$ que no es divisible por p.

Escribimos $q = a \cdot p + r$ con $a \in \{0, 1, 2, ...\}$ y $1 \leq r < p$. De nuevo, por ser p mínimo, necesariamente $|r| = 1$ y tenemos que $|ap| = |a||p| \leq |p| < 1$.

Por la desigualdad triangular fuerte,

$$1 = |r| \leq \max(|ap + r|, |-ap|) = \max(|q|, |ap|).$$

Como $|ap| < 1$, deducimos que $|q| \geq 1$, esto es, $|q| = 1$.

Finalmente, dado cualquier $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, podemos escribirlo como

$$n = p^{v_p(n)} n',$$

con $p \nmid n'$. Entonces

$$|n| = |p|^{v_p(n)} |n'| = |p|^{v_p(n)} = \left(|p|_p{}^{v_p(n)}\right)^c = |n|_p{}^c.$$

Fácilmente, se generaliza esta igualdad a $\mathbb{Z}$ y a $\mathbb{Q}$. Concluimos que $|\ \ |$ es equivalente al valor absoluto p-ádico. $\square$

Capítulo 2

Los cuerpos p-ádicos

2.1. El anillo de los enteros p-ádicos

Más adelante, introduciremos la compleción de $\mathbb{Q}$ con respecto a $|\ |_p$. Dicho conjunto se conoce como cuerpo de los números p-ádicos y se denota por $\mathbb{Q}_p$.

Al igual que en $\mathbb{R}$ podemos obtener una representación de sus elementos utilizando potencias sucesivas de 10, podemos establecer una analogía para los p-ádicos utilizando potencias sucesivas de p.

Esto es, cuando en $\mathbb{R}$ escribimos la expresión $a_n\, a_{n-1}\, \dots\, a_0\,,\, a_{-1}\, a_{-2} \dots$, en realidad estamos representando el número

$$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0 + a_{-1} \cdot 10^{-1} + a_{-2} \cdot 10^{-2} + \cdots$$

donde cada $a_i \in \{0, 1, ..., 9\}$.

Así, llamamos número p-ádico a cualquier expresión formal del tipo

$$x = \sum_{j=n}^{\infty} a_j p^j,$$

donde $n \in \mathbb{Z}$ y $a_j \in \{0, ..., p-1\}$ para cada j. También podemos escribir

$$x = \dots\ a_{j+2}\ a_{j+1}\ a_j \dots a_1\ a_0\,,\ a_{-1}\ a_{-2} \dots$$

donde $a_m = 0$ si $m \leq n$.

Un subconjunto especial de $\mathbb{Q}_p$ lo constituyen los llamados enteros p-ádicos. Un elemento $x \in \mathbb{Q}_p$ se dice entero p-ádico si tiene la forma

$$x = \sum_{j=0}^{\infty} a_j p^j,$$

es decir, si en la serie que lo determina no aparecen potencias negativas. El conjunto de los enteros p-ádicos se denota por $\mathbb{Z}_p$. Nótese que cada $x \in \mathbb{Z}_p$ se puede escribir como $x = ...\ a_2\ a_1\ a_0$.

Si x es un número entero positivo, esta expresión como serie es, en realidad, su desarrollo en base p, donde todos los a_j son nulos salvo un número finito. Tenemos, por tanto, la inclusión $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}_p$.

Ya conocemos, por tanto, una representación de los elementos del cuerpo de los números p-ádicos. Para ver cómo se define el valor absoluto p-ádico sobre $\mathbb{Q}_p$, introducimos primero el orden de un elemento.

Definición 2.1.1. Sea $x = \ldots a_2\, a_1\, a_0,\, a_{-1}\, a_{-2}\, \ldots$ un elemento de $\mathbb{Q}_p$. Llamamos orden de x a

$$\mathrm{ord}_p(x) := \begin{cases} \infty & \text{si } a_j = 0 \text{ para cada } j, \\ \min\{j : a_j \neq 0\} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Y se define el valor absoluto p-ádico de x del siguiente modo:

$$|x|_p := \begin{cases} 0 & \text{si } a_j = 0 \text{ para cada } j, \\ p^{-\mathrm{ord}_p(x)} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ahora que ya hemos dotado a $\mathbb{Q}_p$ de un valor absoluto, podemos definir el cuerpo de los enteros p-adicos más formalmente como el conjunto

$$\mathbb{Z}_p := \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\}.$$

Además, podemos ver que $\mathbb{Z}$ es un subconjunto de $\mathbb{Z}_p$. Para ello, veamos cómo conseguir el desarrollo de los números enteros negativos: como las series de potencias de p pueden ser multiplicadas, será suficiente conocer el desarrollo para -1. Esto es, una vez que tengamos la serie de potencias de un número positivo, bastará multiplicar esta serie por la de -1 para obtener el desarrollo de cualquier número negativo.

Así, veamos que dado cualquier primo p, tenemos que $-1 = x$, donde

$$x := (p-1) + (p-1)\cdot p + (p-1)\cdot p^2 + (p-1)\cdot p^3 + \cdots$$

Seguidamente, podemos sumar 1 a ambos lados de la igualdad y comprobar que, efectivamente, se anula.

$$\begin{aligned} 1 + x &= 1 + (p-1) + (p-1)\cdot p + (p-1)\cdot p^2 + (p-1)\cdot p^3 + \cdots \\ &= p + (p-1)\cdot p + (p-1)\cdot p^2 + (p-1)\cdot p^3 + \cdots \\ &= p^2 + (p-1)\cdot p^2 + (p-1)\cdot p^3 + \cdots \\ &= p^3 + (p-1)\cdot p^3 + (p-1)\cdot p^4 + \cdots \\ &= \cdots \end{aligned}$$

Así vemos, de manera informal, que el orden de $1 + x$ es "tan grande como queramos" y, por tanto, su valor absoluto es 0. Con ello, $1 + x$ ha de ser 0, esto es, $x = -1$.

Es decir, tenemos

$$-1 = \sum_{n=0}^{\infty} (p-1)p^n,$$

o, equivalentemente,

$$\frac{1}{1-p} = \sum_{n=0}^{\infty} p^n.$$

Por ejemplo, en $\mathbb{Q}_3$ se obtiene

$$-1 = 2\cdot 1 + 2\cdot 3 + 2\cdot 3^2 + \cdots + 2\cdot 3^n + \cdots,$$

o, equivalentemente, $-\dfrac{1}{2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 3^n$.

2.2. Compleción de un cuerpo.

En esta sección, discutiremos cómo completar un cuerpo dotado de un valor absoluto no arquimediano en el caso general.

Comenzamos recordando la siguiente definición:

Definición 2.2.1. Sea $|\ \ |$ un valor absoluto sobre $\mathbb{K}$. Una sucesión (x_n) se llama sucesión de Cauchy si para cada $\epsilon > 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ (que depende de ϵ) tal que para cada n, m con $n, m \geq m_0$ se satisface

$$|x_n - x_m| < \epsilon.$$

Haremos uso del hecho de que toda sucesión de Cauchy es acotada.

Obviamente, la definición anterior se introduce en general en el ámbito de los espacios métricos.

La completitud es la propiedad que tienen algunos de estos espacios de que toda sucesión de Cauchy converge hacia algún elemento del espacio. Mediante el proceso de la compleción podemos obtener espacios métricos completos a partir de aquellos que no lo son.

Por ejemplo, es bien conocido que el cuerpo de los números racionales $\mathbb{Q}$ no es completo con respecto al valor absoluto usual y que el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$ es su completado respecto de ese valor absoluto.

Teorema 2.2.2. *Todo espacio métrico (X, d) puede completarse, esto es, existe un espacio métrico $(\hat{X}, D)$ tal que*

i) $\hat{X}$ es completo respecto de D;

ii) $\hat{X}$ contiene un subconjunto denso $\hat{X}_0$ isométrico a X;

Consideramos un valor absoluto $|\ \ |$ sobre $\mathbb{K}$ y denotamos por $\mathcal{C}$ al conjunto de todas las sucesiones de Cauchy en $\mathbb{K}$, esto es,

$$\mathcal{C} := \{(x_n) : (x_n) \text{ es una sucesión de Cauchy en } \mathbb{K} \text{ con respecto a } |\ \ |\}.$$

A continuación, definimos una suma y un producto en $\mathcal{C}$: dados $(a_n), (b_n)$ elementos de $\mathcal{C}$,

- *suma:* $(a_n) + (b_n) := (a_n + b_n)$.
- *producto:* $(a_n) \cdot (b_n) := (a_n \cdot b_n)$.

En primer lugar, tenemos que ver que se trata de operaciones internas en $\mathcal{C}$. Sean $\epsilon > 0$, $N, M \in \mathbb{N}$ tales que para cada $n, m > N$ se tiene que $|a_n - a_m| < \dfrac{\epsilon}{2}$ y para todo $n, m > M$, se tiene que $|b_n - b_m| < \dfrac{\epsilon}{2}$.

Por un lado, para cada $n, m > \text{máx}\{N, M\}$ tenemos que

$$\begin{array}{rcl} |(a_n + b_n) - (a_m + b_m)| & = & |(a_n - a_m) + (b_n - b_m)| \\ & \leq & |a_n - a_m| + |b_n - b_m| \\ & < & \dfrac{\epsilon}{2} + \dfrac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{array}$$

Para el caso del producto, tenemos en cuenta que toda sucesión de Cauchy es acotada, luego existe $K > 0$ con $|a_n|, |b_n| \leq K$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tenemos así que, si $n, m \geq \max\{N, M\}$,

$$\begin{aligned}
|a_n b_n - a_m b_m| &= |a_n b_n - a_n b_m + a_n b_m - a_m b_m| \\
&= |a_n(b_n - b_m) + b_m(a_n - a_m)| \\
&\leq |a_n(b_n - b_m)| + |b_m(a_n - a_m)| \\
&< |a_n|\frac{\epsilon}{2} + |b_m|\frac{\epsilon}{2} \\
&= \frac{\epsilon}{2}(|a_n| + |b_m|) \leq \epsilon K.
\end{aligned}$$

Por tanto, tanto $(a_n + b_n)$ como $(a_n \cdot b_n)$ son sucesiones de Cauchy y, con ello, son elementos de $\mathcal{C}$.

Es claro que $\mathcal{C}$ es un anillo conmutativo con unidad, donde $\hat{0} = (0, 0, \ldots)$ y $\hat{1} = (1, 1, \ldots)$ son los elementos neutros para la suma y el producto respectivamente. Sin embargo, $\mathcal{C}$ no es un cuerpo pues contiene infinitos divisores de 0. Por ejemplo, $(0, 0, x, 0, \ldots)(1, 1, 0, 1, \ldots) = \hat{0}$ para todo $x \in \mathbb{K}$.

Definición 2.2.3. Dados dos elementos $(a_n), (b_n)$ en $\mathcal{C}$, diremos que son equivalentes si

$$\lim_{n\to\infty} |a_n - b_n| = 0.$$

Definición 2.2.4. Sea $\mathcal{N} \subset \mathcal{C}$ el ideal que contiene a las sucesiones que tienden a cero, esto es,

$$\mathcal{N} := \{(x_n) : x_n \longrightarrow 0\} = \{(x_n) : \lim_{n\to\infty} |x_n| = 0\}.$$

Proposición 2.2.5. *$\mathcal{N}$ es un ideal maximal de $\mathcal{C}$.*

Demostración. Es fácil ver que $\mathcal{N}$ cumple las propiedades para ser un ideal. Veamos que es maximal.

Sea $(a_n) \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{N}$ y consideramos el ideal $\mathcal{I}$ generado por (a_n) y $\mathcal{N}$. Vamos a demostrar que $\hat{1} \in \mathcal{I}$, con lo que tendríamos que $\mathcal{I} = \mathcal{C}$ y, por tanto, $\mathcal{N}$ sería maximal.

Como (a_n) es de Cauchy pero no converge a cero, entonces existen $c > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que $|a_n| \geq c > 0$ para cada $n \in \mathbb{N}, n \geq N$.

Definimos una nueva sucesión (b_n)

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } a_n = 0 \\ \frac{1}{a_n} & \text{si } a_n \neq 0 \end{cases}$$

Veamos que (b_n) es de Cauchy: si $n, m \geq N$,

$$|b_n - b_m| = \left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_m}\right| = \left|\frac{a_m - a_n}{a_n a_m}\right| \leq \frac{|a_m - a_n|}{c^2},$$

y se deduce fácilmente.

Definimos ahora una nueva sucesión de la siguiente manera

$$x_n = \begin{cases} 1 & \text{si } a_n = 0 \\ 0 & \text{si } a_n \neq 0 \end{cases}$$

Por cómo están definidas las sucesiones, tenemos que $1 = a_n b_n + x_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y como $(a_n b_n)$ y $(x_n) \in \mathcal{I}$, entonces $\hat{1} \in \mathcal{I}$. Por tanto, concluimos que $\mathcal{N}$ es ideal maximal de $\mathcal{C}$. $\square$

Podemos ahora definir $\hat{\mathbb{K}}$ como el cociente de ambos espacios, esto es, $\hat{\mathbb{K}} := \mathcal{C}/\mathcal{N}$. Como $\mathcal{N}$ es un ideal maximal de $\mathcal{C}$, entonces $\hat{\mathbb{K}}$ será un cuerpo. Por último, vamos a definir un valor absoluto sobre este cuerpo $\hat{\mathbb{K}}$.

Supongamos que $(x_n) \in \mathcal{C}$. Veamos que existe $\lim_{n\to\infty} |x_n|$. Dados $n, m \in \mathbb{N}$, tenemos que $| |x_n| - |x_m| | \leq |x_n - x_m|$. Por tanto, la sucesión $(|x_n|)$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$ y, por ser $\mathbb{R}$ completo, el límite de los valores absolutos existe.

Definición 2.2.6. Dado $x \in \hat{\mathbb{K}}$, definimos

$$|x|' := \lim_{n\to\infty} |x_n|,$$

donde $x = (x_n) + \mathcal{N}$.

Si consideramos ahora la aplicación $i : \mathbb{K} \longrightarrow \mathcal{C}$ que envía cada elemento de $\mathbb{K}$ a la sucesión constante natural, esto es,

$$x \longmapsto \hat{x} = (x, x, \cdots)$$

(que es, obviamente, sucesión de Cauchy), entonces tenemos identificado $\mathbb{K}$ con un subconjunto de $\mathcal{C}$. Además, es fácil ver que $i : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{C}$ es una inclusión (es decir, es inyectiva y respeta las operaciones de cuerpo y preserva el valor absoluto).

Proposición 2.2.7. *El valor absoluto* $| \ \ |'$ *está bien definido en* $\hat{\mathbb{K}}$.

Demostración. Tenemos que ver que el valor absoluto no depende del representante de las clases escogido. Sean (a_n), $(b_n) \in \mathcal{C}$ representantes de la misma clase, esto es, $(a_n) = (b_n) + (c_n)$, donde $(c_n) \in \mathcal{N}$. Utilizando $\lim\limits_{n\to\infty} |c_n| = 0$, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} |b_n + c_n| \leq \lim_{n\to\infty} |b_n|;$$

$$\lim_{n\to\infty} |b_n| = \lim_{n\to\infty} |a_n - c_n| \leq \lim_{n\to\infty} |a_n|.$$

Por tanto, concluimos $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \lim\limits_{n\to\infty} |b_n|$.

Sean $a, b \in \hat{\mathbb{K}}$ con representantes (a_n) y (b_n), respectivamente. Tenemos

$$|a \cdot b|' = \lim_{n\to\infty} |a_n \cdot b_n| = \left(\lim_{n\to\infty} |a_n|\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} |b_n|\right) = |a|' \cdot |b|'.$$

Por último, concluimos

$$|a + b|' = \lim_{n\to\infty} |a_n + b_n| \leq \lim_{n\to\infty} (|a_n| + |b_n|) = |a|' + |b|'. \quad \square$$

Por último, tenemos que ver que el cuerpo $\hat{\mathbb{K}}$, con el valor absoluto que hemos definido, es completo. Para ello, utilizaremos el siguiente resultado:

Lema 2.2.8. *Sea* $\epsilon > 0$. *Dado* $X \in \hat{\mathbb{K}}$, *existe un representante* (x_n) *de su clase de equivalencia con* $|x_n - x_m| < \epsilon$ *para cualesquiera* $n, m \in \mathbb{N}$.

Demostración. Tomamos un representante cualquiera (y_n) de X. Sabemos, en particular, que (y_n) es una sucesión de Cauchy. Por lo tanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n, m \geq n_0$, entonces $|y_n - y_m| < \epsilon$. Ahora definimos $x_n := y_n$ si $n \geq n_0$ y $x_n := y_{n_0}$ si $n < n_0$. Finalmente, considerando $n, m \in \mathbb{N}$ y

- si $n, m \geq n_0$, entonces $|x_n - x_m| = |y_n - y_m| < \epsilon$;

- si $n, m < n_0$, entonces $|x_n - x_m| = 0$;
- si $n < n_0 \leq m$, entonces $|x_n - x_m| = |y_{n_0} - y_m| < \epsilon$.

Obviamente $(x_n) + \mathcal{N} = (y_n) + \mathcal{N}$. $\square$

Teorema 2.2.9. *El cuerpo $\hat{\mathbb{K}}$ es completo con respecto a $| \ \ |'$ y $\mathbb{K}$ es denso en $\hat{\mathbb{K}}$.*

Demostración. Veamos que $\hat{\mathbb{K}}$ es completo. Sea (X_k) una sucesión de Cauchy en $\hat{\mathbb{K}}$. Veamos que converge hacia algún elemento de $\hat{\mathbb{K}}$. Por Lema 2.2.8, podemos escribir

$$X_1 = (x_1^1, x_2^1, x_3^1, \ldots) + \mathcal{N},$$

$$X_2 = (x_1^2, x_2^2, x_3^2, \ldots) + \mathcal{N},$$

y, así, en general,

$$X_k = (x_1^k, x_2^k, x_3^k, \ldots) + \mathcal{N}$$

donde

$$|x_n^k - x_m^k| < \frac{1}{k} \tag{2.1}$$

para cualesquiera $n, m, k \in \mathbb{N}$.

Entonces consideramos la sucesión diagonal (x_n^n) y definimos $X := (x_1^1, x_2^2, x_3^3, \ldots) + \mathcal{N}$. Vamos a ver que (X_k) converge a X.

Fijamos $\epsilon > 0$. Consideramos $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{k_0} < \dfrac{\epsilon}{3}$. Como la sucesión (X_k) es de Cauchy, existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que, si $k, l \geq k_1$, entonces

$$|X_k - X_l|' < \frac{\epsilon}{3}.$$

Podemos además suponer que $k_1 \geq k_0$. Fijamos $k \geq k_1$. Vamos a ver que $|X_k - X|' \leq \epsilon$.

Hay que ver que $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n^k - x_n^n| \leq \epsilon$. Suponemos que $n \geq k_1$, luego

$$|X_k - X_n|' < \frac{\epsilon}{3}$$

y, así, $\lim\limits_{m\to\infty} |x_m^k - x_m^n| < \dfrac{\epsilon}{3}$, es decir, existe $m_0 \geq k_1$ tal que $|x_m^k - x_m^n| < \dfrac{\epsilon}{3}$ si $m \geq m_0$. En particular,

$$|x_{m_0}^k - x_{m_0}^n| < \frac{\epsilon}{3}. \tag{2.2}$$

Recordemos que hemos fijado $k \geq k_1 \geq k_0$ y suponemos que $n \geq k_1$. Vamos a ver que $|x_n^k - x_n^n| < \epsilon$.

Así, como $k_1 \geq k_0$, entonces $\dfrac{1}{k_1} \leq \dfrac{1}{k_0} < \dfrac{\epsilon}{3}$. Así, por la desigualdad 2.1, $|x_n^k - x_{m_0}^k| < \dfrac{1}{k} < \dfrac{\epsilon}{3}$ y se tiene que

$$|x_n^n - x_{m_0}^n| < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{k_1} < \frac{\epsilon}{3}. \tag{2.3}$$

Ahora, como $n \geq k_1$, entonces por desigualdades 2.1, 2.2 y 2.3, respectivamente

$$\begin{aligned} |x_n^k - x_n^n| &\leq |x_n^k - x_{m_0}^k| + |x_{m_0}^k - x_{m_0}^n| + |x_{m_0}^n - x_n^n| \\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

Con ello, tenemos que si $k \geq k_1$, entonces $|x_k - x|' \leq \epsilon$, como queríamos ver.

Veamos ahora que $\mathbb{K}$ es denso en $\hat{\mathbb{K}}$. Fijamos $\epsilon > 0$. Tomamos $X \in \hat{\mathbb{K}}$. Por Lema 2.2.8, podemos elegir un representante (x_n) de X con $|x_n - x_m| < \epsilon$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$. Consideramos $x_1 \in \mathbb{K}$. Se tiene que

$$|i(x_1) - X| = \lim_{n\to\infty} |x_1 - x_n| \leq \epsilon. \qquad \square$$

Como habíamos mencionado anteriormente, el cuerpo de los números p-ádicos es la compleción de $\mathbb{Q}$ respecto del valor absoluto $|\ |_p$. Además, un cuerpo siempre es denso en su compleción, por lo que podemos afirmar que, en particular, $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{Q}_p$.

Capítulo 3

Extensiones y propiedades de valores absolutos.

3.1. Espacios vectoriales normados

De aquí en adelante y, salvo que se exprese lo contrario, consideramos $\mathbb{K}$ un cuerpo dotado de un valor absoluto no arquimediano no trivial.

Definición 3.1.1. Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Una norma sobre E es una aplicación $q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que para cada $x, y \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$, se tiene

i) $q(x) \geq 0$;

ii) $q(x) = 0$ si, y solo si, $x = 0$,

iii) $q(\lambda x) = |\lambda| \cdot q(x)$;

iv) $q(x + y) \leq \max(q(x), q(y))$;

Habitualmente, escribiremos $\| \ \|$ en lugar de q.

Nótese la diferencia entre la definición de norma en el caso no arquimediano y en el caso real. Así, en el caso no arquimediano, la norma satisface la desigualdad triangular fuerte.

Definición 3.1.2. Un espacio normado sobre $\mathbb{K}$ es un par $(E, \| \ \|)$ donde E es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $\| \ \|$ es una norma sobre E. En general, escribiremos simplemente E.

Así como definimos una equivalencia para valores absolutos, también lo hacemos para dos normas en el mismo espacio vectorial.

Definición 3.1.3. Diremos que dos normas $\| \ \|_1$ y $\| \ \|_2$ de un espacio vectorial E son equivalentes si existen constantes $N, M > 0$ tales que, para cada $x \in E$, se tiene

$$N\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq M\|x\|_2.$$

Definición 3.1.4. Sea E un espacio normado. E es un espacio de Banach sobre $\mathbb{K}$ si E es completo con respecto a la métrica inducida $(x, y) \longrightarrow \|x - y\| \ (x, y \in E)$.

Un primer resultado que podemos obtener es similar a uno ya bien conocido en el caso real.

Teorema 3.1.5. *Todas las normas sobre un $\mathbb{K}$-espacio vectorial E de dimensión finita son equivalentes. En particular, E es un espacio de Banach con respecto a cada norma.*

3.2. Extensión de valores absolutos.

Cuando se trabaja con extensiones de cuerpos, es fundamental comprender cómo se comportan los valores absolutos con respecto a la inclusión de subcuerpos y cómo pueden ser extendidos de manera adecuada.

Lema 3.2.1. *Sea $\mathbb{K}$ un subcuerpo del cuerpo $\mathbb{L}$. Sea $|\ \ |$ un valor absoluto sobre $\mathbb{K}$. Si $z \in \mathbb{L} \setminus \mathbb{K}$, entonces existe un valor absoluto sobre $\mathbb{K}(z)$ que extiende a $|\ \ |$.*

Demostración. Para probar el resultado distinguimos dos casos:

- *Consideramos que z no es algebraico sobre* $\mathbb{K}$. Entonces $\mathbb{K}(z)$ es isomorfo al cuerpo $\mathbb{K}(X)$ de las funciones racionales sobre $\mathbb{K}$. Extendemos $|\ \ |$ a un valor absoluto $|\ \ |'$ sobre $\mathbb{K}(z)$ del siguiente modo:

  para $f = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n \in \mathbb{K}[X]$, definimos
  $$|f|' := \text{máx}\{|a_j| : 0 \leq j \leq n\}.$$
  Dadas $f, g \in \mathbb{K}[X]$, comprobamos que $|\ \ |'$ (definido como anteriormente), satisface las propiedades de un valor absoluto no arquimediano:

  - $|f|' \geq 0; |f|' = 0$ si y solo si $f = 0$.

    Como $|f|' := \text{máx}\{|a_j| : 0 \leq j \leq n\}$ y $|\ \ |$ es un valor absoluto, entonces $|a_j| \geq 0$ para cada $j \in \{0, ..., n\}$. Por tanto, $|f|' \geq 0$. Además, si $|f|' = 0$, esto implica que $\text{máx}\{|a_j| : 0 \leq j \leq n\} = 0$ y, por tanto, al ser el máximo 0, todos los coeficientes han de ser 0. Necesariamente $f = 0$.

  - $|f + g|' \leq \text{máx}(|f|', |g|')$

    Sean $f = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n$ y $g = b_0 + b_1X + ... + b_mX^m$, entonces
    $$|f + g|' = \text{máx}\{|a_j + b_j| : 0 \leq j \leq \text{máx}(m, n)\}.$$
    Como $|\ \ |$ es un valor absoluto no arquimediano, sabemos que satisface
    $$|a_j + b_j| \leq \text{máx}(|a_j|, |b_j|)$$
    Entonces
    $$\begin{aligned} |f+g|' &= \text{máx}\{|a_j + b_j| : 0 \leq j \leq \text{máx}(m, n)\} \\ &\leq \text{máx}\{\text{máx}(|a_j|, |b_j|) : 0 \leq j \leq \text{máx}(m, n)\} \\ &= \text{máx}\left\{\{\text{máx}\{|a_j| : 0 \leq j \leq n\}, \{\text{máx}\{|b_j| : 0 \leq j \leq m\}\right\} \\ &= \text{máx}\{|f|', |g|'\}. \end{aligned}$$

  - $|f \cdot g|' = |f|' \cdot |g|'$

    Sean f y g como en el apartado anterior. Entonces
    $$f(X) \cdot g(X) = c_0 + c_1X + \cdots + c_{n+m}X^{n+m}$$
    con $c_j = a_0b_j + a_1b_{j-1} + \cdots + a_jb_0$.

    Probamos primero $|f \cdot g|' \leq |f|' \cdot |g|'$:
    $$\begin{aligned} |c_j| &= |a_0 \cdot b_j + a_1 \cdot b_{j-1} + \cdots + a_j \cdot b_0| \\ &\leq \text{máx}\{|a_0 \cdot b_j|, \cdots, |a_j \cdot b_0|)\} \\ &\leq \text{máx}\{\{|a_k| : 0 \leq k \leq n\}, \text{máx}\{|b_k| : 0 \leq k \leq m\}\} \\ &= |f|' \cdot |g|'. \end{aligned}$$

Para la otra desigualdad, sean $s := \min\{j : |a_j| = |f|'\}, t := \min\{j : |b_j| = |g|'\}$. El coeficiente c_{s+t} de X^{s+t} de $f \cdot g$ es una suma finita de elementos del tipo $a_k b_l$ donde $k + l = s + t$. Si no fuese $k = s$ y $l = t$ entonces $k < s$ o $l < t$ y tendríamos $|a_k b_l| < |f|' \cdot |g|'$.

Se sigue que $c_{s+t} = a_s b_t + r$ donde $r = \displaystyle\sum_{k+l=s+t,\, k\neq s} a_k b_l$, con lo que $|r| < |f|' \cdot |g|'$. Como consecuencia de la desigualdad triangular fuerte (Lema 1.2.7) tenemos $|c_{s+t}| = |a_s b_t + r| = \max\{|a_s b_t|, |r|\} = |a_s b_t| = |f|' \cdot |g|'$. Luego $|f \cdot g|' \geq |f|' \cdot |g|'$.

- *Supongamos ahora que z es un elemento algebraico sobre* $\mathbb{K}$. Entonces la dimensión de $\mathbb{K}(z)$ como $\mathbb{K}$-espacio vectorial es finita. Sea $e_1, e_2, ..., e_n$ una base de $\mathbb{K}(z)$. Vamos a introducir un "candidato" a valor absoluto en $\mathbb{K}(z)$.

Dado un elemento $x \in \mathbb{K}(z)$, lo escribimos como combinación lineal de los elementos de la base, esto es,

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$$

y definimos

$$\|x\|_1 := \max\{|\alpha_1|,\, |\alpha_2|,\, \ldots,\, |\alpha_n|\}.$$

Así, para $x, y \in \mathbb{K}(z)$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ tenemos

i) $\|x\|_1 \geq 0$; $\|x\|_1 = 0$ si y solo si $x = 0$;

ii) $\|\lambda x\|_1 = |\lambda| \cdot \|x\|_1$;

iii) $\|x + y\|_1 \leq \max(\|x\|_1, \|y\|_1)$.

Es facil comprobar que $\|\ \ \|$ tiene las propiedades de una norma, pero no podemos afirmar aún que se trate de un valor absoluto en $\mathbb{K}(z)$. De hecho, no lo será:

Si $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$, $y = \sum_{j=1}^n \beta_j e_j$ con los coeficientes α_i, β_j en $\mathbb{K}$, entonces

$$\|xy\|_1 = \left\| \sum_{i,j} \alpha_i\, \beta_j\, e_i\, e_j \right\|_1 \leq \max_{i,j} |\alpha_i|\, |\beta_j|\, \|e_i e_j\|_1 \leq C\|x\|_1\|y\|_1$$

donde $C := \max_{i,j} \|e_i\, e_j\|_1$.

A partir de $\|\ \ \|_1$, definimos una nueva aplicación $\|\ \ \|_2 : \mathbb{K}(z) \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$\|x\|_2 := C \cdot \|x\|_1, (x \in \mathbb{K}(z)).$$

Vemos que i), ii), iii) siguen siendo válidas para $\|\ \ \|_2$ y además se cumple que

iv) $\|xy\|_2 \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2$ $(x, y \in \mathbb{K}(z))$.

Sin embargo, esto no nos garantiza aún que $\|\ \ \|_2$ sea un valor absoluto en $\mathbb{K}(z)$, ya que en iv) podría no darse la igualdad.

Para introducir la última modificación en la definición de esta norma, definimos $\nu : \mathbb{K}(z) \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$\nu(x) := \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\|x^n\|_2}.$$

Por iv), $\|x^n\|_2 \leq \|x\|_2^n$, luego $\nu(x) \leq \|x\|_2$ para todo $x \in \mathbb{K}$ y, al tomar valores en $\mathbb{R}^+$, comprobamos que ν está bien definida. De hecho, ν cumple las siguientes propiedades: para todo $x, y \in \mathbb{K}(z), \lambda \in \mathbb{K}$,

1. $\nu(x) = \text{lím}_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|_2} = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{\|x^n\|_2}$;
2. $0 \leq \nu(x) \leq \|x\|_2$ (como ya hemos visto);
3. $\nu(\lambda x) = |\lambda|\nu(x)$;
4. $\nu(xy) \leq \nu(x)\nu(y)$;
5. $\nu(1) = 1$;
6. $\nu(x^k) = \nu(x)^k$ para $k = 1, 2, ...$;
7. $\nu(1 + x) \leq \text{máx}(1, \nu(x))$.

A partir de estas propiedades, encontraremos el valor absoluto con las propiedades que nos interesen.

Para ello, consideramos ahora $\mathcal{S}$ como el conjunto de todas las funciones $\nu : \mathbb{K}(z) \longrightarrow \mathbb{R}$ cumpliendo las propiedades $(2) - (7)$ anteriores. Acabamos de ver que $\mathcal{S}$ es no vacío.

En este conjunto $\mathcal{S}$, introduciremos un orden parcial $\leq$ en los siguientes términos: dados $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{S}$, escribiremos $\nu_1 \leq \nu_2$ si $\nu_1(x) \leq \nu_2(x)$ para cada $x \in \mathbb{K}(z)$.

A continuación, utilizaremos el lema de Zorn para ver que el conjunto $\mathcal{S}$ tiene elemento minimal. Para ello, notemos que si $(\nu_\lambda)_{\lambda\in\wedge}$ es una cadena descendente, entonces existe $\mathcal{R}(x) := \inf\{\nu_\lambda(x) : \nu_\lambda \in (\nu_{\lambda)_{\lambda\in\wedge}}) \geq 0$. Así, podemos definir la aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{R} : \ & \mathbb{K}(z) \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longrightarrow \mathcal{R}(x), \end{aligned}$$

que, con una simple comprobación, se ve que es de nuevo un elemento de $\mathcal{S}$.

Por el lema de Zorn, podemos concluir que $\mathcal{S}$ tiene elemento minimal τ.

Vamos a probar que dicho elemento minimal es un valor absoluto sobre $\mathbb{K}(z)$ que extiende a $|\ \ |$. En primer lugar, teniendo en cuenta que τ es un elemento de $\mathcal{S}$ vemos que, por la propiedad (3),

$$\tau(0) = |0|\,\tau(0) = 0$$

y, por otra parte, usando las propiedades (4) y (5), tenemos que, si $x \in \mathbb{K}(z)\setminus\{0\}$, entonces

$$\begin{aligned} 1 = \tau(1) &= \tau(xx^{-1}) \\ &\leq \tau(x)\tau(x^{-1}), \end{aligned}$$

con lo cual $\tau(x) > 0$.

A continuación, vamos a probar la igualdad en el producto. Sean $x, a \in \mathbb{K}(z), a \neq 0$. A partir de la cadena de desigualdades

$$\tau(x) \geq \tau(ax)\tau(a)^{-1} \geq \tau(a^2x)\tau(a)^{-2} \geq \dots$$

definimos $\rho(x) := \lim\limits_{n\to\infty} \tau(a^n x)\tau(a)^{-n} = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \tau(a^n x)\tau(a)^{-n}$, que existe para cada $x \in \mathbb{K}(z)$. Además, por definición, $\rho \leq \tau$, y se comprueba facilmente que ρ satisface las propiedades $(2) - (7)$, con lo que $\rho \in \mathcal{S}$.

Como τ es un elemento minimal de $\mathcal{S}$ y $\rho \leq \tau$, ha de ser $\rho = \tau$. Esto es, $\tau(x) = \tau(ax)\tau(a)^{-1}$ para cada $x \in \mathbb{K}(z)$. Como a es arbitrario, tenemos que

$$\tau(xy) = \tau(x)\tau(y)$$

para cualesquiera $x, y \in \mathbb{K}(z)$.

Para la prueba de la desigualdad triangular fuerte, utilizando la propiedad (7) tenemos

$$\begin{aligned}\tau(x+y) &= \tau(x(1+x^{-1}y)) = \tau(x)\tau(1+x^{-1}y)\\ &\leq \tau(x)\,\text{máx}(1, \tau(x^{-1}y)) = \text{máx}(\tau(x), \tau(x)\tau(x^{-1}y))\\ &= \text{máx}(\tau(x), \tau(y)).\end{aligned}$$

Así, hemos visto que τ satisface las propiedades de un valor absoluto. Concluimos, por tanto, que τ es un valor absoluto sobre $\mathbb{K}(z)$ que extiende a $|\ \ |$. $\square$

Teorema 3.2.2 (Teorema de existencia de Krull)**.** *Sea $\mathbb{K}$ un subcuerpo del cuerpo $\mathbb{L}$. Sea $|\ \ |_{\mathbb{K}}$ un valor absoluto sobre $\mathbb{K}$. Entonces existe un valor absoluto sobre $\mathbb{L}$ que extiende a $|\ \ |_{\mathbb{K}}$.*

Demostración. Consideramos la familia

$\mathcal{F} := \{(\mathbb{K}', |\ \ |_{\mathbb{K}'}) : \mathbb{K} \subset \mathbb{K}' \subset \mathbb{L}$, $\mathbb{K}'$ es cuerpo y $|\ \ |_{\mathbb{K}'}$ es un valor absoluto que extiende a $|\ \ |_{\mathbb{K}}\}$.

Tenemos que

1. $\mathcal{F} \neq \emptyset$ porque $(\mathbb{K}, |\ \ |_{\mathbb{K}}) \in \mathcal{F}$.
2. En $\mathcal{F}$ damos un orden: $(\mathbb{K}_1, |\ \ |_{\mathbb{K}_1}) \leq (\mathbb{K}_2, |\ \ |_{\mathbb{K}_2})$ si y solo si $\mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2$ y $|\ \ |_{\mathbb{K}_2}$ es una extensión de $|\ \ |_{\mathbb{K}_1}$. Se trata de un orden parcial en $\mathcal{F}$. Veamos que cumple las propiedades que lo determinan:
   - *Reflexiva:* es claro que $(\mathbb{K}, |\ \ |_{\mathbb{K}}) \leq (\mathbb{K}, |\ \ |_{\mathbb{K}})$ ya que $\mathbb{K} \subset \mathbb{K}$ y $|\ \ |_{\mathbb{K}}$ extiende a $|\ \ |_{\mathbb{K}}$.
   - *Antisimétrica:* si $(\mathbb{K}_1, |\ \ |_{\mathbb{K}_1}) \leq (\mathbb{K}_2, |\ \ |_{\mathbb{K}_2})$ y $(\mathbb{K}_2, |\ \ |_{\mathbb{K}_2}) \leq (\mathbb{K}_1, |\ \ |_{\mathbb{K}_1})$, entonces se tienen las inclusiones $\mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2$ y $\mathbb{K}_2 \subset \mathbb{K}_1$ respectivamente, luego $\mathbb{K}_1 = \mathbb{K}_2$. Como además $|\ \ |_{\mathbb{K}_1}$ extiende a $|\ \ |_{\mathbb{K}_2}$ y $|\ \ |_{\mathbb{K}_2}$ extiende a $|\ \ |_{\mathbb{K}_1}$, se concluye $|\ \ |_{\mathbb{K}_1} = |\ \ |_{\mathbb{K}_2}$. Con ello, $(\mathbb{K}_1, |\ \ |_{\mathbb{K}_1}) = (\mathbb{K}_2, |\ \ |_{\mathbb{K}_2})$
   - *Transitiva:* si $(\mathbb{K}_1, |\ \ |_{\mathbb{K}_1}) \leq (\mathbb{K}_2, |\ \ |_{\mathbb{K}_2})$ y $(\mathbb{K}_2, |\ \ |_{\mathbb{K}_2}) \leq (\mathbb{K}_3, |\ \ |_{\mathbb{K}_3})$, entonces $\mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2$ y $\mathbb{K}_2 \subset \mathbb{K}_3$, y así $\mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_3$. Además, como $|\ \ |_2$ extiende a $|\ \ |_1$ y $|\ \ |_3$ extiende a $|\ \ |_2$, entonces $|\ \ |_3$ extiende a $|\ \ |_1$. Por tanto, se tiene que $(\mathbb{K}_1, |\ \ |_{\mathbb{K}_1}) \leq (\mathbb{K}_3, |\ \ |_{\mathbb{K}_3})$.
3. Suponemos que tenemos una cadena ascendente $(\mathbb{K}_\lambda, |\ \ |_{\mathbb{K}_\lambda})_{\lambda\in\wedge}$ en $\mathcal{F}$. Veamos que tiene una cota superior. Llamamos
$$\mathbb{K}_0 := \bigcup_{\lambda\in\wedge} \mathbb{K}_\lambda \subset \mathbb{L}.$$
   En primer lugar, $\mathbb{K}_0$ es cuerpo:
   - Dados $x, y \in \mathbb{K}_0$ existen λ_1, λ_2 respectivamente, tales que $x \in \mathbb{K}_{\lambda_1}$ e $y \in \mathbb{K}_{\lambda_2}$. Además, o bien $\mathbb{K}_{\lambda_1} \subset \mathbb{K}_{\lambda_2}$ o $\mathbb{K}_{\lambda_2} \subset \mathbb{K}_{\lambda_1}$ (suponemos $\mathbb{K}_{\lambda_1} \subset \mathbb{K}_{\lambda_2}$. Por tanto, es claro que
$$x + y \in \mathbb{K}_{\lambda_2},\ x \cdot y \in \mathbb{K}_{\lambda_2},$$
     con lo que $x + y$ y $x \cdot y$ pertenecen a $\mathbb{K}_0 = \bigcup_{\lambda\in\wedge} \mathbb{K}_\lambda$.
   - Dado $x \in \mathbb{K}_0$, existe un λ tal que $x \in \mathbb{K}_\lambda$. Como $\mathbb{K}_\lambda$ es cuerpo, entonces $x^{-1} \in \mathbb{K}_\lambda$ y, con ello, como $\mathbb{K}_\lambda \subset \mathbb{K}_0$ se tiene que $x^{-1} \in \mathbb{K}_0$.

   Además, nótese que si $(\mathbb{K}_\alpha, |\ \ |_{\mathbb{K}_\alpha}) \leq (\mathbb{K}_\beta, |\ \ |_{\mathbb{K}_\beta})$ entonces $|x|_{\mathbb{K}_\alpha} = |x|_{\mathbb{K}_\beta}$ para cada $x \in \mathbb{K}_\alpha$. De este modo, tenemos definido un *único* valor absoluto en $\mathbb{K}_0$ que es extensión de $|\ \ |_{\mathbb{K}}$. Así, $(\mathbb{K}_0, |\ \ |_{\mathbb{K}_0}) \in \mathcal{F}$ y, con ello, $(\mathbb{K}_0, |\ \ |_{\mathbb{K}_0})$ es cota superior de la cadena. Por el lema de Zorn, concluimos que existe al menos un elemento maximal en $\mathcal{F}$. Veamos que cualquier elemento maximal se basa en el cuerpo $\mathbb{L}$, es decir, es de la forma $(\mathbb{L}, |\ \ |_{\mathbb{L}})$ donde $|\ \ |_{\mathbb{L}}$ es un valor absoluto sobre $\mathbb{L}$ que extiende a $|\ \ |_{\mathbb{K}}$.

Suponemos que existe un elemento maximal $(\mathbb{L}', |\ \ |_{\mathbb{L}'})$ basado en un cuerpo $\mathbb{L}' \neq \mathbb{L}$. Tomamos $z \in \mathbb{L} \setminus \mathbb{L}'$. Con ello, $\mathbb{L}' \subsetneq \mathbb{L}'(z)$. Por Lema 3.2.1, existe una extensión $|\ \ |_{\mathbb{L}'(z)}$ de $|\ \ |_{\mathbb{L}'}$ a $\mathbb{L}'(z)$. Además, $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}'(z) \subset \mathbb{L}$ y $|\ \ |_{\mathbb{L}'(z)}$ es una extensión de $|\ \ |_{\mathbb{K}}$ (por serlo $|\ \ |_{\mathbb{L}'}$). Así $(\mathbb{L}'(z), |\ \ |_{\mathbb{L}'(z)}) \in \mathcal{F}$ y, además, $(\mathbb{L}', |\ \ |_{\mathbb{L}'}) < (\mathbb{L}'(z), |\ \ |_{\mathbb{L}'(z)})$, lo cual contradice el hecho de que $(\mathbb{L}', |\ \ |_{\mathbb{L}'})$ sea maximal. □

3.3. Unicidad de la extensión de valores absolutos.

En esta sección estableceremos condiciones que garanticen la unicidad de la extensión de un valor absoluto.

Teorema 3.3.1. *Sea $\mathbb{K}$ completo y sea $\mathbb{L}$ una extensión algebraica de $\mathbb{K}$. Entonces existe un único valor absoluto $|\ \ |'$ sobre $\mathbb{L}$ que extiende el valor absoluto $|\ \ |$ sobre $\mathbb{K}$. De hecho, si $\|\ \ \|$ es una norma arbitraria sobre el $\mathbb{K}$-espacio vectorial $\mathbb{L}$, entonces*

$$|x|' = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}, \quad (x \in \mathbb{L}).$$

Demostración. Para ver la unicidad, supongamos que existen dos valores absolutos sobre $\mathbb{L}$, $|\ \ |_1$ y $|\ \ |_2$ que extienden a $|\ \ |$. Veamos que, necesariamente, ha de ser $|\ \ |_1 = |\ \ |_2$. Consideramos $|\ \ |_1$ y $|\ \ |_2$ como normas en $\mathbb{L}$, tomado como espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Fijamos $x \in \mathbb{L} \setminus \mathbb{K}$ y vamos a probar que $|x|_1 = |x|_2$.

Obviamente, $\mathbb{K}(x)$ es un espacio vectorial finito-dimensional sobre $\mathbb{K}$, y por Teorema 3.1.5, las normas $|\ \ |_1$ y $|\ \ |_2$ restringidas a $\mathbb{K}(x)$ son equivalentes. Por ello, existen constantes positivas N, M tales que si $y \in \mathbb{K}(x)$, entonces

$$N|y|_2 \leq |y|_1 \leq M|y|_2.$$

En particular, para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$N{|x|_2}^n \leq {|x|_1}^n \leq M{|x|_2}^n$$

y, tomando raíces n-ésimas, obtenemos que

$$\sqrt[n]{N}|x|_2 \leq |x|_1 \leq \sqrt[n]{M}|x|_2.$$

Así, tomando límites cuando n tiende a infinito, concluimos

$$|x|_1 = |x|_2.$$

Para probar la segunda parte, sea $\|\ \ \|$ una norma arbitraria sobre $\mathbb{L}$. Fijamos $z \in \mathbb{L} \setminus \mathbb{K}$. Las siguientes propiedades se recogen en la prueba de Lema 3.2.1 (cuya notación seguimos aquí):

i) Existe una constante positiva C tal que $\|xy\| \leq C\,\|x\|\,\|y\|$ para cada $x, y \in \mathbb{K}(z)$.

ii) Sea $\|x\|_2 := C\,\|x\|$, con $x \in \mathbb{K}(z)$. Entonces la función $\nu : \mathbb{K}(z) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$\nu(x) := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|_2} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$$

existe y es un elemento de $\mathcal{S}$.

iii) Sea τ elemento minimal de $\mathcal{S}$. Entonces $\tau \leq \nu$ y τ es un valor absoluto sobre $\mathbb{K}(z)$ que extiende el de $\mathbb{K}$.

Por la primera parte de la demostración, sabemos que solo existe un valor absoluto $|\ \ |$ sobre $\mathbb{K}(z)$ que extiende al de $\mathbb{K}$. Por tanto, ha de ser $\tau = |\ \ |$.

Ahora, por una parte, para cada $x \in \mathbb{K}(z)$ tenemos que, por definición, $\|x^n\|_2 = C\|x^n\| \leq C^n\|x\|^n$, con lo cual

$$\sqrt[n]{\|x^n\|_2} \leq C\|x\| = \|x\|_2$$

y, así

$$\nu(x) \leq \|x\|_2$$

y, por lo tanto,

$$|x| = \tau(x) \leq \nu(x) \leq \|x\|_2 = C\|x\|.$$

Por otra parte, como $|\ \ |$ y $\|\ \ \|$ son dos normas sobre $\mathbb{K}(z)$, sabemos que son equivalentes (usando de nuevo Teorema 3.1.5), luego existe una constante C_1 tal que, si $x \in \mathbb{K}(z)$,

$$C\|x\| \leq C_1|x|.$$

Así, para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $|x^n| \leq \nu(x^n) \leq C_1|x^n|$. Utilizando la multiplicatividad de potencias de ν y tomando raíces n-ésimas tenemos que

$$|x| \leq \nu(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{C\|x^n\|} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{C_1}|x| = |x|.$$

Se sigue que $\nu = |\ \ |$ en $\mathbb{K}(z)$ (donde z es arbitrario) y el teorema queda probado. $\square$

3.4. Grupo de valores y cuerpo residual

Comenzamos recordando que $B(a,r)$ y $\overline{B}(a,r)$ son respectivamente las bolas abierta y cerrada de centro a y radio r.

Proposición 3.4.1. *$\overline{B}(0,1)$ es un subanillo de $\mathbb{K}$. $B(0,1)$ es el único ideal maximal de $\overline{B}(0,1)$.*

Demostración. Veamos que $\overline{B}(0,1)$ es cerrado para la suma, el producto y los opuestos en $\mathbb{K}$.

Si $x, y \in \overline{B}(0,1) = \{z \in \mathbb{K} : |z| \leq 1\}$, entonces

$$|x+y| \leq \text{máx}(|x|, |y|) \leq 1,$$

luego $x + y \in \overline{B}(0,1)$.

Por otro lado,

$$|xy| = |x||y| \leq 1,$$

luego $xy \in \overline{B}(0,1)$.

Por otra parte, si $x \in \overline{B}(0,1)$, entonces $|-x| = |x|$ y, así, $-x \in \overline{B}(0,1)$.

Razonando de manera análoga, podemos ver que $B(0,1)$ es anillo. Veamos ahora que es ideal maximal de $\overline{B}(0,1)$.

Si $x \in \overline{B}(0,1)$, $y \in B(0,1)$, entonces $|xy| = |x||y| < 1$, por lo que $xy \in B(0,1)$. Como $\overline{B}(0,1)\backslash B(0,1)$ son exactamente los elementos invertibles de $\overline{B}(0,1)$, se concluye que $B(0,1)$ es el único ideal maximal de $\overline{B}(0,1)$. $\square$

Esta última proposición nos deja un resultado muy interesante, puesto que al ser $\overline{B}(0,1)$ anillo y $B(0,1)$ ideal maximal de este, tenemos que $\overline{B}(0,1)/B(0,1)$ es cuerpo. A partir de esto, podemos introducir las siguientes definiciones:

Definición 3.4.2. Llamamos cuerpo residual de $\mathbb{K}$ a

$$k := \overline{B}(0,1)\big/ B(0,1) = \{x \in \mathbb{K} : |x| \leq 1\}\big/\{x \in \mathbb{K} : |x| < 1\}.$$

Ejemplo 3.4.3. Veamos que el cuerpo residual de $\mathbb{Q}_p$ es $\mathbb{Z}_p / p\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{F}_p$, esto es, el cuerpo de p elementos.

Sabemos que el cuerpo residual es el cociente de la bola cerrada $\overline{B}(0,1)$ con la bola abierta $B(0,1)$. Como en $\mathbb{Q}_p$ la bola unidad cerrada es exactamente $\mathbb{Z}_p$ y la bola unidad abierta es $p\mathbb{Z}_p$, consideraremos el cociente $\mathbb{Z}_p / p\mathbb{Z}_p$. Los elementos de este cociente son clases de equivalencia de la forma $[x]$ donde $x \in \mathbb{Z}_p$.

Cada $x \in \mathbb{Z}_p$ puede ser escrito como $x = a_0 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2, \cdots$ donde $a_i \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$. La clase de equivalencia de $[x]$ en $\mathbb{Z}_p / p\mathbb{Z}_p$ depende solo del coeficiente a_0. Esto es, $[x] = [a_0]$.

Consideramos la aplicación $\varphi : \mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{F}_p$, que lleva cada entero p-ádico $x = a_0 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2, \cdots$ a a_0. El núcleo de φ es exactamente $p\mathbb{Z}_p$, ya que $x \equiv 0 (mod\, p)$ únicamente cuando $a_0 = 0$. Como además φ es sobreyectivo y tiene exactamente p elementos, por el primer teorema de isomorfía, podemos concluir

$$\mathbb{Z}_p / p\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{F}_p.$$

Definición 3.4.4. Sea $\mathbb{K}^* := \{x \in \mathbb{K} : x \neq 0\}$. El grupo de valores de $\mathbb{K}$ es el subgrupo $|\mathbb{K}^*| := \{|x| : x \in \mathbb{K}^*\}$ del grupo multiplicativo de los números reales positivos.

Veamos un ejemplo para mayor claridad:

- Si consideramos $\mathbb{Q}$ (o, más en general, $\mathbb{Q}_p$) con el valor absoluto p-ádico, entonces el grupo de valores es $|\mathbb{Q}^*| = |\mathbb{Q}_p^*| = \{p^n : n \in \mathbb{Z}\}$.

Definición 3.4.5. Un valor absoluto sobre $\mathbb{K}$ es discreto si 1 no es punto de acumulación del grupo de valor $|\mathbb{K}^*|$. En otro caso, se dice que el valor absoluto es denso.

Como consecuencia, si el valor absoluto es discreto, existe $\max |\mathbb{K}^*| \cap (0,1)$ y es, obviamente, un número estrictamente menor que 1.

3.5. El valor absoluto sobre la clausura algebraica.

En este capítulo veremos algunas propiedades de los valores absolutos sobre la clausura algebraica de un cuerpo $\mathbb{K}$ completo. Denotaremos la clausura algebraica de $\mathbb{K}$ por $\mathbb{K}^a$.

Teorema 3.5.1. *Sea $\mathbb{K}$ completo. Entonces el valor absoluto sobre $\mathbb{K}$ puede extenderse de una única manera a un valor absoluto sobre $\mathbb{K}^a$.*

Demostración. Sea $x \in \mathbb{K}^a \setminus \mathbb{K}$. Entonces existe una extensión algebraica $\mathbb{L}_1$ de $\mathbb{K}$ con $x \in \mathbb{L}_1$. Por Teorema 3.3.1, sabemos que existe una única extensión $|\ \ |_{\mathbb{L}_1}$ de $|\ \ |_{\mathbb{K}}$ a $\mathbb{L}_1$. Así, podemos definir

$$|x|_{\mathbb{K}^a} := |x|_{\mathbb{L}_1}.$$

Si ahora tomamos otra extensión algebraica $\mathbb{L}_2$ de $\mathbb{K}$ con $x \in \mathbb{L}_2$, también podemos considerar la única extensión $|x|_{\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2}$ a la intersección.

Por el teorema de unicidad visto en la sección 3.3, ha de ser

$$|x|_{\mathbb{L}_1} = |x|_{\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2},$$

es decir, $|x|_{\mathbb{K}^a}$ está unívocamente definido. □

Teorema 3.5.2. *El cuerpo residual k^a de $\mathbb{K}^a$ coincide con la clausura algebraica de k. Por otra parte, el grupo de valores $|(\mathbb{K}^a)^*|$ satisface*

$$|(\mathbb{K}^a)^*| = \{r \in (0,\infty) : r^m \in |\mathbb{K}^*| \text{ para algún } m \in \mathbb{N}\}.$$

Demostración. Para ver que k^a es la clausura algebraica de k, tenemos que ver que k^a es una extensión algebraica de k y que, además, es algebraicamente cerrada.

Para ver que k^a es algebraica sobre k, veamos que, dado un elemento x de k^a, existe un polinomio no nulo con coeficientes en k que tiene a x como raíz.

Por Definición 3.4.2, dado $x \in k^a$, existe un $y \in \mathbb{K}^a$, con $|y| \leq 1$, tal que $\overline{y} = x$ y, por ello, existen $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$a_0 + a_1 y + \cdots + a_n y^n = 0$$

con algún $a_j \neq 0$.

Multiplicando por una constante adecuada, podemos suponer $\max |a_j| = 1$, luego

$$\overline{a_0} + \overline{a_1} X + \cdots + \overline{a_n} X^n \in k[X]$$

es distinto de cero y tiene a x como raíz. Así x es algebraico, como queríamos ver.

A continuación, vamos a ver que k^a es algebraicamente cerrado. Para ello, tomamos un polinomio mónico $f = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n$ en $k^a[X]$ y vamos a probar que f tiene una raíz en k^a.

En primer lugar, existen $b_0, b_1, \cdots, b_n \in \mathbb{K}^a$, con $|b_j| \leq 1$ para cada j y tales que $\overline{b_j} = a_j$ para $j = 0, 1, \cdots, n-1$ y, en particular, $b_n = 1$.

El polinomio $F := b_0 + b_1 X + \cdots + b_n X^n \in \mathbb{K}^a[X]$ tiene una raíz θ en $\mathbb{K}^a$. Si fuera $|\theta| > 1$, teniendo en cuenta que $|b_j| \leq 1$ para cada j, tendríamos que

$$\text{si } j \neq n, \text{ entonces } |b_j \theta^j| < |\theta^n|.$$

Con ello,

$$|b_0 + b_1\theta + \cdots + b_n \theta^n| = \max_j |b_j \theta^j| = |\theta|^n \neq 0.$$

Por tanto, ha de ser $|\theta| \leq 1$ y, con ello, $\overline{b_0} + \overline{b_1}\,\overline{\theta} + \cdots + \overline{b_n}\,\overline{\theta}^n = \overline{0}$.

Esto es, $\overline{\theta}$ es una raíz de f.

Concluimos, tras ver que k^a es una extensión algebraica y algebraicamente cerrada de k, que k^a es la clausura algebraica de k.

Veamos ahora que

$$|(\mathbb{K}^a)^*| = \{r \in (0,\infty) : r^m \in |\mathbb{K}^*| \text{ para algún } m \in \mathbb{N}\}.$$

Lo probaremos por doble inclusión.

Sea $x \in \mathbb{K}^a \setminus \mathbb{K}$ un elemento cualquiera que satisface

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0,$$

donde cada $a_k \in \mathbb{K}$ y $n \geq 2$.

Han de existir índices i, j con $i > j$ tales que $|a_i x^i| = |a_j x^j| \neq 0$, pues, en caso contrario, se tendría que

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right| = \max\{|a_k||x^k| : 0 \leq k \leq n\} \neq 0.$$

Por tanto, como $|a_i x^i| = |a_j x^j| \neq 0$, entonces si llamamos $m := i - j$,

$$|x|^m = \left|\frac{a_j}{a_i}\right| \in |\mathbb{K}^*|,$$

con lo que $|x| = \left|\frac{a_j}{a_i}\right|^{\frac{1}{m}}$, y concluimos la primera inclusión. Recíprocamente, dados $m \in \mathbb{N}$ y $r \in |\mathbb{K}^*|$, y tomando $a \in \mathbb{K}$ tal que $|a| = r$, existe $x \in \mathbb{K}^a$ de manera que $x^m = a$. Luego, concluimos

$$|x| = \sqrt[m]{|a|} = \sqrt[m]{r}.$$

□

Corolario 3.5.3. *El cuerpo de residuos de $\mathbb{K}^a$ es infinito.*

Demostración. Se debe a que todo cuerpo algebraicamente cerrado es infinito. Veámoslo.

$1 \in \mathbb{K}^a$. Tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, existen n raíces diferentes $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ de la unidad, esto es,

$$(x^n - 1) = \prod_{\alpha_i}^{n} (x - \alpha_i).$$

La unión de todas las raíces n-ésimas de la unidad constituyen un subconjunto infinito de $\mathbb{K}^a$. □

Corolario 3.5.4. *El cuerpo de residuos de $\mathbb{Q}_p^a$ es la clausura algebraica del cuerpo de p elementos.*

Demostración. Por Teorema 3.5.2, sabemos que el cuerpo residual k^a de $\mathbb{K}^a$ coincide con la clausura algebraica de k. Teniendo en cuenta Ejemplo 3.4.3 el cuerpo residual de $\mathbb{Q}_p^a$ coincide con la clausura algebraica del cuerpo de p elementos. □

Corolario 3.5.5. *El grupo de valores de $\mathbb{Q}_p^a$ es $\{p^r : r \in \mathbb{Q}\}$.*

Demostración. Es inmediato a partir de Teorema 3.5.2. En particular, como $|\mathbb{Q}_p^*| = \{p^n : n \in \mathbb{Z}\}$, tenemos

$$\begin{aligned} |(\mathbb{Q}_p^a)^*| &= \{r \in (0, \infty) : r^m = p^n \text{ para algunos } n, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\} \\ &= \{p^{\frac{n}{m}} : m, n \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

□

Observación 3.5.6. *Dada la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, podemos ver que $|(\mathbb{Q}_p^a)^*|$ es denso en $[0, \infty)$.*

Más en general: se puede probar que $|\mathbb{K}^*|$ es denso en $[0, \infty)$ para cualquier $\mathbb{K}$ completo.

La prueba del siguiente teorema nos muestra cómo podemos resolver ciertos problemas analíticos sobre $\mathbb{K}$ fijándonos en lo que ocurre en $\mathbb{K}^a$.

Teorema 3.5.7. *Sea $\mathbb{K}$ completo y sea $f : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ una función polinómica no constante.*

i) Si (λ_n) es una sucesión en $\mathbb{K}$ tal que $\lim_{n\to\infty} |f(\lambda_n)| = 0$, entonces existe una subsucesión de (λ_n) que converge a una raíz de f.

ii) Si $X \subset \mathbb{K}$ es cerrado, entonces $f(X)$ es cerrado.

iii) Si $X \subset \mathbb{K}$ es compacto, entonces $f^{-1}(X)$ es compacto.

Demostración.

i) Existen $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}^a$ tales que $f(x) = a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$, para algún $a \neq 0$.

Si existe $\epsilon > 0$ tal que $|\lambda_j - \alpha_k| \geq \epsilon$ para cualesquiera j y k, entonces $|f(\lambda_j)| \geq |a|\epsilon^n$, con lo cual $\text{lím}_{n\to\infty} |f(\lambda_n)|$ no puede ser 0.

Por lo tanto, existe una subsucesión de (λ_n) que converge a algún α_n. Como $\mathbb{K}$ es completo, entonces $\alpha_n \in \mathbb{K}$.

ii) Para ver que, si X es cerrado, entonces $f(X)$ también lo es, tomamos una sucesión (μ_n) en $f(X)$ convergente a $\mu \in \mathbb{K}$ y vamos a probar que $\mu \in f(X)$.

Como cada $\mu_n \in f(X)$, para cada n existe un $\lambda_n \in X$ tal que $f(\lambda_n) = \mu_n$. Esto es, tenemos que la sucesión (λ_n) en X satisface $f(\lambda_n) = \mu_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ahora definimos $g := f - \mu$. Se tiene que $\underset{n\to\infty}{\text{lím}}\, g(\lambda_n) = 0$ y, por i), existe una sucesión (λ_n) en $\mathbb{K}$ tal que (λ_n) converge a un cierto λ que, por ser X cerrado, pertenece a X.

De este modo, como f es continua, $\underset{n\to\infty}{\text{lím}}\, f(\lambda_n) = f(\lambda)$, es decir, concluimos que $f(\lambda) = \mu$, esto es, $\mu \in f(X)$.

iii) Supongamos ahora que X es compacto. Vamos a ver que $f^{-1}(X)$ es compacto. Para ello haremos uso del resultado que establece que un subconjunto de un espacio métrico es compacto si y solo si toda sucesión en dicho subconjunto admite una subsucesión con límite en el propio subconjunto (véase Teorema 7.2.3 en [1]).

Fiijamos una sucesión (λ_n) en $f^{-1}(X)$. Probaremos que existe una subsucesión de (λ_n) convergente a un cierto $\lambda \in f^{-1}(X)$.

Por una parte, llamamos $\mu_n := f(\lambda_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Así tenemos la sucesión (μ_n) en el compacto X, y ha de existir una subsucesión convergente a un punto $\mu \in X$. Para no complicar la notación, suponemos que la propia sucesión (μ_n) es convergente a $\mu \in X$.

Ahora tomamos $g := f - \mu$. Como

$$\underset{n\to\infty}{\text{lím}}\, g(\lambda_n) = \underset{n\to\infty}{\text{lím}}\, \mu_n - \mu = 0,$$

concluimos por i) que (λ_n) admite una subsucesión convergente. $\square$

Volviendo al tema principal de esta sección, para cada $\mathbb{K}$ completo hemos encontrado un cuerpo algebraicamente cerrado $\mathbb{K}^a \supset \mathbb{K}$. Sin embargo, nos preguntamos si este cuerpo es completo siempre. Veamos que no es cierto cuando $\mathbb{K} = \mathbb{Q}_p$.

Teorema 3.5.8. *La clausura algebraica $\mathbb{Q}_p^a$ de $\mathbb{Q}_p$ no es completa.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos el conjunto

$$H_n := \{x \in \mathbb{Q}_p^a : \dim\ \mathbb{Q}_p(x) \leq n\},$$

donde $\mathbb{Q}_p(x)$ denota el subcuerpo más pequeño de $\mathbb{Q}_p^a$ que contiene a $\mathbb{Q}_p$ y a x, y donde $\dim\ \mathbb{Q}_p(x)$ es la dimensión de $\mathbb{Q}_p(x)$ como $\mathbb{Q}_p$-espacio vectorial.

Claramente, tenemos $H_1 \subset H_2 \subset \cdots$ y $\bigcup_n H_n = \mathbb{Q}_p^a$.

Presentamos la demostración dividida en varios pasos:

i) *Veamos que H_n es cerrado para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Para ello, fijamos n y consideramos una sucesión (x_i) en H_n convergente a un punto $x \in \mathbb{Q}_p^a$. Hay que probar que $x \in H_n$.

Para cada i, existen $a_0^i, a_1^i, \cdots, a_{n-1}^i \in \mathbb{Q}_p$ tales que $\text{máx}_j\, |a_j^i|_p = 1$ (con lo cual cada $a_j^i \in \mathbb{Z}_p$), y

$$a_0^i + a_1^i x_i + \cdots + a_{n-1}^i x_i^{n-1} = 0$$

(véase Teorema VII.1.3 en [2]). Por ello, existe un $j_0 \in \{0, \cdots, n-1\}$ tal que $|a_{j_0}^i|_p = 1$ para infinitos $i \in \mathbb{N}$. Tomando una subsucesión si es necesario, podemos suponer que $|a_{j_0}^i| = 1$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Como $\mathbb{Z}_p$ es compacto, podemos asumir (tomando una subsucesión adecuada) que, para $j = 0, 1, \cdots, n-1$,

$$a_j := \lim_{i \to \infty} a_j^i$$

existe en $\mathbb{Z}_p$. Además,$|a_{j_0}| = \lim |a_{j_0}^i| = 1$, con lo que $\text{máx}\{|a_j|_p : 0 \le j \le n-1\} = 1$, luego no todos los a_j son nulos. Por otra parte, tenemos que

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} = \lim_{i \to \infty} (a_0^i + a_1^i x + \cdots + a_{n-1}^i x^{n-1}) = 0.$$

Por tanto, x es raíz de un polinomio de grado a lo sumo $n-1$ con coeficientes en $\mathbb{Q}_p$, luego $x \in \mathbb{Q}_p^a$ y $\dim \mathbb{Q}_p(x) \le n$, esto es, $x \in H_n$.

Concluimos así que cada H_n es cerrado.

ii) *Veamos ahora que $H_n \ne \mathbb{Q}_p^a$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Vamos a demostrar que, para cada $m \in \mathbb{N}$, existe $x \in \mathbb{Q}_p^a$ tal que la dimensión de $\mathbb{Q}_p(x)$ como $\mathbb{Q}_p$-espacio vectorial es mayor o igual que m.

Elegimos $x \in \mathbb{Q}_p^a$ tal que $x^m = p$. Vamos a probar que $1, x, \cdots, x^{m-1}$ son linealmente independientes. Para ello, tomamos una combinación lineal

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_{m-1} x^{m-1},$$

donde cada $a_i \in \mathbb{Q}_p$.

Utilizando que $|x| = \sqrt[m]{p^{-1}}$, tenemos que, si $i < j$, entonces

$$|x^{j-i}| = \frac{1}{p^{\frac{j-i}{m}}},$$

con lo cual $|x^{j-i}| \notin |\mathbb{Q}_p^*|$.

Por ello, si $a_i \ne 0, a_j \ne 0$, con $i \ne j$, entonces $\left|\frac{a_i}{a_j}\right| \ne \left|\frac{x_j}{x_i}\right|$, es decir,

$$|a_i x^i| \ne |a_j x^j|.$$

Se sigue que

$$|a_0 + a_1 x + \cdots + a_{m-1} x^{m-1}| = \text{máx}\{|a_j|_p |x^j| : 0 \le j \le m-1\} \ne 0.$$

Así tenemos que, los elementos $1, x, \cdots, x^{m-1}$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}_p$. Por tanto, $\dim \mathbb{Q}_p(x) \ge m$, como queríamos ver.

iii) *A continuación, vamos a ver que $H_n + H_m \subset H_{nm}$ con $n, m \in \mathbb{N}$.*

Sean $x \in H_n$, $y \in H_m$. Según la prueba de Teorema VII.1.4 de [2], el espacio vectorial $\mathbb{Q}_p(x, y)$ tiene como base los elementos de la forma $\alpha_i\beta_j$, donde $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ es base de $\mathbb{Q}_p(x)$ sobre $\mathbb{Q}_p$ y $\{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ es base de $\mathbb{Q}_p(x, y)$ sobre $\mathbb{Q}_p(x)$.

Así, $\dim \mathbb{Q}_p(x + y) \leq \dim \mathbb{Q}_p(x, y) \leq n \cdot m$. Esto es, $x + y \in H_{mn}$.

iv) *Finalmente, vamos a probar que $\mathbb{Q}_p^a$ no es completo.*

Procederemos por reducción al absurdo: suponemos que $\mathbb{Q}_p^a$ es completo.

Vamos a aplicar el teorema de la categoría de Baire a $\mathbb{Q}_p^a$. Este teorema dice que si un espacio métrico completo es la unión numerable de conjuntos cerrados, entonces al menos uno de esos conjuntos contiene una bola.

Teniendo en cuenta que estamos suponiendo que $\mathbb{Q}_p^a$ es completo, que cada H_n es cerrado y que $\bigcup_n H_n = \mathbb{Q}_p^a$, podemos aplicar dicho teorema. Entonces, algún H_n contendría una bola de la forma

$$\overline{B}(b, \epsilon) := \{x \in \mathbb{Q}_p^a : |x - b| \leq \epsilon\}$$

para algún $\epsilon > 0$ y algún $b \in \mathbb{Q}_p^a$.

Ahora, dado $s \in \mathbb{Q}_p^a \setminus \{0\}$, $|s| \leq \epsilon$, tenemos que $s + b \in \overline{B}(b, \epsilon) \subset H_n$, luego $s = (s + b) - b \in H_n + H_n \subset H_{n^2}$.

Esto implica que cualquier múltiplo de s pertenece a H_{n^2} y, así, $\mathbb{Q}_p^a \subset H_{n^2}$. Como cada $H_n \subset \mathbb{Q}_p^a$ por definición, en particular, $H_{n^2} \subset \mathbb{Q}_p^a$. Por tanto, tendríamos que $\mathbb{Q}_p^a = H_{n^2}$, en contradicción con lo probado en ii). Concluimos que $\mathbb{Q}_p^a$ no puede ser completo. $\square$

Corolario 3.5.9. *$\mathbb{Q}_p^a$ es un espacio vectorial de dimensión infinita sobre $\mathbb{Q}_p$. $\mathbb{Q}_p$ y $\mathbb{R}$ como cuerpos no son isomorfos.*

Demostración. La primera parte es clara a partir del teorema anterior (para detalles, véase la prueba del mismo): si $\mathbb{Q}_p^a$ tuviese dimensión finita sobre $\mathbb{Q}_p$, podemos encontrar una base $x_1, \ldots, x_k$ de $\mathbb{Q}_p^a$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}_p$. Así, cada $x_i \in H_{n_i} := \{x \in \mathbb{Q}_p^a : \dim \mathbb{Q}_p \leq n_i\}$. Tomamos $n_0 := \max\{n_1, \ldots, n_k\}$ y tenemos que $x_i \in H_{n_0}$ y, por tanto, $\mathbb{Q}_p^a \subset H_{n_0}$. Sin embargo, por el apartado ii) de la demostración anterior sabemos que eso es imposible. Concluimos que $\mathbb{Q}_p^a$ es infinito-dimensional sobre $\mathbb{Q}_p$.

Para ver que $\mathbb{Q}_p$ y $\mathbb{R}$ como cuerpos no son isomorfos, basta observar que $\mathbb{R}^a$ es finito-dimensional sobre $\mathbb{R}$, lo que es evidente (puesto que $\mathbb{R}^a = \mathbb{C}$ y su dimensión sobre $\mathbb{R}$ es 2). $\square$

3.6. Compleción de la clausura algebraica. El cuerpo $\mathbb{C}_p$.

La clausura algebraica de $\mathbb{K}$ puede no ser completa, pero gracias al siguiente resultado, es útil trabajar con su compleción.

Lema 3.6.1. *Si $x_0 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ y $x \in B(x_0, |x_0|)$ entonces $|x| = |x_0|$.*

Demostración. Partimos de la hipótesis inicial $|x - x_0| < |x_0|$, entonces

$$|x| = |(x - x_0) + x_0| = \max\{|x - x_0|, |x_0|\} = |x_0|. \quad \square$$

Teorema 3.6.2. *La compleción de la clausura algebraica de $\mathbb{K}$ es algebraicamete cerrada.*

Demostración. Denotamos por $\widehat{\mathbb{K}^a}$ la compleción de $\mathbb{K}^a$. Queremos probar que cada polinomio mónico

$$f = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n$$

(donde cada $a_j \in \widehat{\mathbb{K}^a}$, $n \in \mathbb{N}$), tiene una raíz en $\widehat{\mathbb{K}^a}$.

Como $\mathbb{K}^a$ es denso en $\widehat{\mathbb{K}^a}$, para cada $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$, podemos tomar $a_{ij} \in \mathbb{K}^a$ tal que $|a_{ij} - a_j| < \frac{1}{i}$, con $|a_{ij}| = |a_j|$ para $i = 1, 2, \ldots$ (esto es posible por Lema 3.6.1).

Entonces, como $\mathbb{K}^a$ es algebraicamente cerrado, el polinomio

$$f_i := a_{i0} + a_{i1}X + \cdots + X^n \in \mathbb{K}^a[X]$$

tiene una raíz λ_i en $\mathbb{K}^a$.

Por tanto, por ser λ_i raíz,

$$a_{i0} + a_{i1}\lambda_i + \cdots + a_{i,n-1}{\lambda_i}^{n-1} + {\lambda_i}^n = 0,$$

esto es,

$$\begin{aligned} {\lambda_i}^n &= -a_{i0} - a_{i1}\lambda_i - \cdots - a_{i,n-1}{\lambda_i}^{n-1} \\ &= -(a_{i0} + a_{i1}\lambda_i + \cdots + a_{i,n-1}{\lambda_i}^{n-1}). \end{aligned}$$

Teniendo esto en cuenta y tomando valores absolutos, tenemos que

$$|\lambda_i|^n = |-(a_{i0} + a_{i1}\lambda_i + \cdots + a_{i,n-1}{\lambda_i}^{n-1})| \leq \text{máx}\{|a_{ij}||\lambda_i|^j : 0 \leq j \leq n-1\}.$$

Aquí se tiene que

$$|\lambda_i|^n \leq a_0 \longrightarrow |\lambda_i| \leq \sqrt[n]{|a_0|};$$
$$|\lambda_i|^n \leq a_1|\lambda_i| \longrightarrow |\lambda_i| \leq \sqrt[n-1]{|a_1|}$$
$$|\lambda_i|^n \leq a_2|\lambda_i| \longrightarrow |\lambda_i| \leq \sqrt[n-2]{|a_2|}.$$

Por tanto,

$$|\lambda_i| \leq \text{máx}\left(\sqrt[n]{|a_0|}, \sqrt[n-1]{|a_1|}, \cdots, |a_{n-1}|\right) =: c$$

Como $f_i(\lambda_i) = 0$, podemos escribir

$$\begin{aligned} |f(\lambda_i)| &= |f(\lambda_i) - f_i(\lambda_i)| = \left|\sum_{j=0}^{n}(a_j - a_{ij}){\lambda_i}^j\right| \\ &\leq \frac{1}{i}\,\text{máx}(1, |\lambda_i|, |\lambda_i|^2, \cdots, |\lambda_i|^n) \\ &= \frac{1}{i}\,\text{máx}(1, c^n) \end{aligned}$$

y se sigue que $\text{lím}_{i\to\infty} |f(\lambda_i)| = 0$.

De este modo, tenemos una sucesión (λ_i) en $\widehat{\mathbb{K}^a}$ tal que $\text{lím}_{i\to\infty} |f(\lambda_i)| = 0$. Concluimos, por Teorema 3.5.7, que existe una subsucesión que converge a una raíz de f en $\widehat{\mathbb{K}^a}$. □

Escribiremos $\mathbb{C}_p$ para denotar a la compleción de la clausura algebraica de $\mathbb{Q}_p$.

Corolario 3.6.3. *La compleción $\mathbb{C}_p$ de la clausura algebraica de $\mathbb{Q}_p$ tiene las siguientes propiedades:*

i) $\mathbb{C}_p$ *es algebraicamente cerrada.*

ii) $\mathbb{C}_p$ *es separable.*

iii) $\mathbb{C}_p$ *no es localmente compacto.*

iv) El grupo de valores de $\mathbb{C}_p$ *es* $\{p^r : r \in \mathbb{Q}\}$.

v) El cuerpo de residuos de $\mathbb{C}_p$ *es la clausura algebraica del cuerpo de* p *elementos.*

vi) $\mathbb{C}_p$ *es infinito dimensional como* $\mathbb{Q}_p$*-espacio vectorial.*

Demostración.

i) Es el teorema anterior.

ii) Lo veremos en el capítulo siguiente.

iii) Veamos que la bola unidad cerrada $\overline{B}(0,1)$ de centro 0 y radio 1 no es compacto. Para ello, basta ver que existe una sucesión sin ninguna subsucesión convergente.

Sabemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un $x_n \in \mathbb{C}_p$ con $|x_n| = p^{\frac{1-n}{n}}$. Como $|x_n| \leq 1$ para cada n, entonces la sucesión (x_n) está en $\overline{B}(0,1)$.

Se tiene que, para $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{n-1}{n} < \frac{n}{n+1}$$

(ya que $n^2 - 1 < n^2$). Con ello, como $p > 1$,

$$p^{\frac{n-1}{n}} < p^{\frac{n}{n+1}}$$

y, así,

$$\frac{1}{p^{\frac{n-1}{n}}} > \frac{1}{p^{\frac{n}{n+1}}},$$

es decir, $|x_n| > |x_{n+1}|$. De este modo, la sucesión $(|x_n|)$ es estrictamente decreciente.

Además, $|x_n| \geq \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{p^{\frac{n-1}{n}}} = \dfrac{1}{p}$.

Por otra parte, $|x_n| \neq |x_m|$ si $n \neq m$, luego

$$|x_n - x_m| = \max\{|x_n|, |x_m|\} \geq \frac{1}{p}.$$

Así, no hay ninguna subsucesión de Cauchy (ni por tanto convergente).

iv) Obviamente $|(\mathbb{Q}_p^a)^*| \subset |\mathbb{C}_p^*|$, y, por Corolario 3.5.5, $|(\mathbb{Q}_p^a)^*| = \{p^r : r \in \mathbb{Q}\}$.

Ahora, sea $x \in \mathbb{C}_p^*$. Así, existe una sucesión (x_n) en $\mathbb{Q}_p^a$ que converge a x, es decir, $\lim_{n\to\infty} |x - x_n| = 0$. Obviamente, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ con $|x - x_{n_0}| < |x|$.

Con ello, $|x| = |x_{n_0}| \in \{p^r : r \in \mathbb{Q}\}$.

v) Por Corolario 3.5.4, sabemos que el cuerpo residual de $\mathbb{Q}_p^a$ coincide con la clausura algebraica del cuerpo de p elementos.

Consideramos $k^{\mathbb{C}_p} = \overline{B}^{\mathbb{C}_p}(0,1) \big/ B^{\mathbb{C}_p}(0,1)$. Vamos a establecer un isomorfismo de cuerpos $i : k^{\mathbb{C}_p} \longrightarrow k^{\mathbb{Q}_p^a}$.

Como $\mathbb{Q}_p^a$ es denso en $\mathbb{C}_p$, dado $x \in B^{\mathbb{C}_p}(0,1)$ existe un $z_x \in \mathbb{Q}_p^a$ con $|x - z_x| < 1$. Así $x + B^{\mathbb{C}_p}(0,1) = z_x + B^{\mathbb{C}_p}(0,1)$.

Definimos $i(z_x + B^{\mathbb{C}_p}) := z_x + B^{\mathbb{Q}_p^a}(0,1)$.

Es claro que i es suprayectiva, pues dado $z_y + B^{\mathbb{Q}_p^a}(0,1) \in k^{\mathbb{Q}_p^a}$, se tiene que $z_y + B^{\mathbb{C}_p}(0,1)$ satisface $i(z_y + B^{\mathbb{C}_p}(0,1)) = z_y + B^{\mathbb{Q}_p^a}(0,1)$.

Por otro lado, veamos que i también es inyectiva. Tenemos que $i(1 + B^{\mathbb{C}_p}(0,1)) = 1 + B^{\mathbb{Q}_p^a}(0,1)$; y si existe $a + B^{\mathbb{C}_p}(0,1)$ tal que $i(a + B^{\mathbb{C}_p}(0,1)) = 1 + B^{\mathbb{Q}_p^a}(0,1)$ entonces $|a-1| < 1$. Esto es, $a + B^{\mathbb{C}_p}(0,1) = 1 + B^{\mathbb{C}_p}(0,1)$.

Por tanto, i es biyectiva y, con ello, i es isomorfismo.

vi) Sea $n \in \mathbb{N}$. Vamos a encontrar n vectores linealmente independientes en $\mathbb{C}_p$.

Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{C}_p$ tales que $|x_j| = p^{\frac{1}{j+1}}$ para cada j. Consideramos una combinación lineal en $\mathbb{Q}_p$ de estos elementos, esto es,

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{Q}_p$ satisfacen $|\alpha_j| = p^{n_j}$ con cada $n_j \in \mathbb{Z}$.

Ahora bien, si

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0,$$

entonces existen i, j, con $i \neq j$, tales que $|\alpha_i x_i| = |\alpha_j x_j|$, pues, en caso contrario, tendríamos que

$$|\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n| = \max\{|\alpha_j x_j| : 1 \leq j \leq n\} \neq 0.$$

Por tanto, como $|\alpha_i x_i| = |\alpha_j x_j|$, entonces

$$p^{n_i + \frac{1}{i+1}} = p^{n_j + \frac{1}{j+1}},$$

esto es,

$$n_i + \frac{1}{i+1} = n_j + \frac{1}{j+1},$$

es decir, $\dfrac{1}{i+1} + \dfrac{1}{j+1} \in \mathbb{Z}$, lo cual es absurdo.

Así, se concluye que $\mathbb{C}_p$ es infinito dimensional como $\mathbb{Q}_p$-espacio vectorial. $\square$

Capítulo 4

Los complejos p-ádicos.

Gracias a lo visto en el capítulo anterior, hemos podido definir el cuerpo complejo p-ádico como $\mathbb{C}_p := \widehat{\mathbb{Q}_p^a}$. A continuación, estudiaremos algunos resultados interesantes.

Para empezar, vamos a comparar $\mathbb{C}_p$ con la clausura algebraica de $\mathbb{R}$ a través de dos propiedades: la separabilidad y el comportamiento de la intersección de bolas encajadas.

4.1. Separabilidad de $\mathbb{C}_p$.

En primer lugar, vemos que, al igual que en el caso arquimediano, el cuerpo complejo p-ádico es separable.

Para probar esta propiedad haremos uso del siguiente resultado:

Lema 4.1.1. *Sean $f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \cdots + a_n \cdot x^n$ y $g(x) = b_0 + b_1 \cdot x + \cdots + b_n \cdot x^n$ funciones polinómicas sobre $\mathbb{K}^a$ con $a_n, b_n \neq 0$. Supongamos que $|a_j - b_j| < \delta$ para cada $j = 0, \ldots, n$. Entonces, si x_0 es una raíz de f, existe una raíz y_0 de g con*

$$|x_0 - y_0| < \epsilon := \sqrt[n]{\frac{\delta}{|b_n|}} \max\{1, |x_0|\}.$$

Demostración. En primer lugar, tenemos que

$$\begin{aligned}
|g(x_0) - f(x_0)| &= |(b_0 - a_0) + (b_1 - a_1) \cdot x_0 + \cdots + (b_n - a_n) \cdot x_0{}^n| \\
&\leq \max_{0 \leq j \leq n} |b_j - a_j||x_0|^j \\
&\leq \delta \max\{1, |x_0|^n\}.
\end{aligned}$$

Por otra parte, $f(x_0) = 0$ y, con ello, $|g(x_0) - f(x_0)| = |g(x_0)|$. O sea,

$$|g(x_0)| \leq \delta \max\{1, |x_0|^n\}.$$

A continuación, podemos escribir $g(x)$ como

$$g(x) = b_n(x - \beta_1) \cdots (x - \beta_n),$$

y queremos probar que existe j con $|x_0 - \beta_j| \leq \epsilon$. Supongamos por el contrario que $|x_0 - \beta_j| > \epsilon$ para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Tendremos entonces que

$$|g(x_0)| = |b_n||x_0 - \beta_1| \cdots |x_0 - \beta_n| > |b_n|\epsilon^n.$$

Así, obtendremos

$$|b_n|\epsilon^n < |g(x_0)| \leq \delta \max\{1, |x_0|^n\},$$

con lo que

$$\epsilon < \sqrt[n]{\frac{\delta}{|b_n|}} \max\{1, |x_0|\},$$

y así llegamos a una contradicción. □

Proposición 4.1.2. *El cuerpo $\mathbb{Q}_p^a$ es un espacio métrico separable.*

Demostración. Tenemos que probar que existe un subconjunto de $\mathbb{Q}_p^a$ que es denso y numerable.

Dado $x \in \mathbb{Q}_p^a$, consideramos f su polinomio mínimo sobre $\mathbb{Q}_p$. Por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}_p$, podemos considerar una sucesión (g_n) de polinomios en $\mathbb{Q}$ con el mismo grado de f y tal que $g_n \longrightarrow f$ coeficiente a coeficiente.

Como $f(x) = 0$, por Lema 4.1.1 x ha de ser un límite de raíces x_n de los polinomios g_n, que están en $\mathbb{Q}^a$.

Por tanto, $\mathbb{Q}^a$ en denso en $\mathbb{Q}_p^a$. Además, dado un polinomio de grado $n \in \mathbb{N}$ con coeficientes en $\mathbb{Q}$, tiene a lo sumo n raíces en $\mathbb{Q}^a$. Por otra parte, para cada $n \in \mathbb{N}$, hay un número contable de polinomios de grado n en $\mathbb{Q}(x)$, con un número contable de raíces en $\mathbb{Q}^a$. Concluimos que $\mathbb{Q}^a$ es contable. □

Ahora, a partir de la separabilidad de $\mathbb{Q}_p^a$, podemos demostrar la del cuerpo complejo p-ádico.

Teorema 4.1.3. *El cuerpo $\mathbb{C}_p$ es un espacio métrico separable.*

Demostración. Tenemos que probar que existe un subconjunto de $\mathbb{C}_p$ que es denso y numerable.

Por Proposición 4.1.2, sabemos que el cuerpo $\mathbb{Q}_p^a$ es un espacio métrico separable. Además, por definición de compleción, $\mathbb{Q}_p^a$ es denso en $\mathbb{C}_p$.

Ahora, cualquier subconjunto denso numerable de $\mathbb{Q}_p^a$ será automáticamente denso en $\mathbb{C}_p$. Un ejemplo de tal subconjunto es $\mathbb{Q}^a$, el cual es numerable y denso en $\mathbb{Q}_p^a$.

Por lo tanto, podemos concluir que $\mathbb{C}_p$ es separable. □

4.2. Intersección de bolas encajadas en $\mathbb{C}_p$.

Seguidamente, estudiaremos la segunda propiedad mencionada anterioremente. Como $\mathbb{C}$ es localmente compacto, la intersección de una cadena de bolas cerradas encajadas es siempre no vacía. Estudiamos este fenómeno en el caso p-ádico.

Para poder probarlo, introducimos antes los siguientes resultados y definciones que nos serán de gran utilidad:

Definición 4.2.1. Un espacio ultramétrico (X, d) (o simplemente X) es un espacio métrico en el cual la distancia satisface la desigualdad triangular fuerte, esto es,

$$d(x, y) \leq \max(d(x, z), d(z, y))$$

para todo $x, y, z \in X$.

En particular, si consideramos la métrica inducida por el valor absoluto, todo cuerpo no arquimediano es un espacio ultramétrico.

Definición 4.2.2. Un espacio ultramétrico X es esféricamente completo si cualquier sucesión decreciente de bolas cerradas tiene intersección no vacía.

Proposición 4.2.3. *Cada bola en un espacio ultramétrico X es un conjunto abierto y cerrado. Además, cada punto de la bola puede tomarse como el centro de esta.*

Demostración. Sea $a \in X$ y $r \in (0, \infty)$. Por un lado, es obvio que la bola abierta $B(a,r)$ es un conjunto abierto y la bola cerrada $\overline{B}(a,r)$ es un conjunto cerrado.

Veamos ahora que $B(a,r)$ es cerrado. Para ello, veremos que su complementario es abierto. Sea $y \notin B(a,r)$. Entonces $|a-y| \geq r$. Veamos que $B(y,r)$ está contenida en $(B(a,r))^c$. Sea $z \in B(y,r)$. Si $z \in B(a,r)$, entonces $|z-a| < r$. Así,

$$|y-a| \leq \max\{|z-a|, |z-y|\} < r,$$

contra la hipótesis. Por ello tendremos $B(y,r) \subset B(a,r)^c$. Concluimos que $B(a,r)^c$ es abierto y, con ello, $B(a,r)$ es cerrado.

Para probar que $\overline{B}(a,r)$ es abierta, tomamos $b \in \overline{B}(a,r)$ y vamos a demostrar que $B(b,r) \subset \overline{B}(a,r)$. Si $x \in B(b,r)$, por la desigualdad triangular fuerte

$$d(x,a) \leq \max\left(d(x,b), d(b,a)\right) \leq r,$$

luego $x \in \overline{B}(a,r)$.

Luego $B(b,r) \subset \overline{B}(a,r)$ y, con ello, $\overline{B}(a,r)$ es abierta.

Por último, veamos que cualquier punto es el centro de la bola. Sea $x \in B(a,r)$. Utilizando $d(a,x) < r$, tenemos que, si $y \in B(a,r)$, entonces

$$d(y,x) \leq \max\{d(y,a), d(a,x)\} < r.$$

Por otra parte, si $y \in B(x,r)$, entonces

$$d(y,a) \leq \max\{d(y,x), d(a,x)\} < r$$

y, con ello, $B(a,r) = B(x,r)$. El caso de la bola cerrada es análogo. □

Proposición 4.2.4. *Dadas B_1 y B_2 dos bolas en un espacio ultramétrico X o bien una está contenida en la otra, o bien son disjuntas.*

Demostración. Supongamos que ninguna de las tres afirmaciones es cierta, esto es, B_1 no está contenida en B_2, B_2 no está contenida en B_1 y la intersección $B_1 \cap B_2$ es no vacía.

Entonces, podemos encontrar elementos $x \in B_1 \setminus B_2$, $y \in B_2 \setminus B_1$ y $z \in B_1 \cap B_2$.

Además, por Proposición 4.2.3 z sería simultáneamente un centro de B_1 y B_2 y tendríamos que

$$d(z,y) > d(z,x) \text{ (ya que } x \in B_1 \text{ e } y \notin B_1),$$

$$d(z,x) > d(z,y) \text{ (ya que } y \in B_2 \text{ y } x \notin B_2).$$

Por lo tanto, como hemos llegado a una contradicción, ha de ser cierta alguna de las afirmaciones del enunciado. □

Antes de estudiar el comportamiento del cuerpo "complejo" p-ádico, nótese que tenemos la siguiente implicación:

Proposición 4.2.5. *Todo espacio esféricamente completo es completo.*

Demostración. Sea X un espacio métrico esféricamente completo. Veamos que también es completo.

Para ello, consideramos dos sucesiones:

- (x_n) sucesión de Cauchy en X;
- (r_n) sucesión decreciente definida a partir de la sucesión anterior, donde $r_n := \sup_{m>n} |x_m - x_n|$ (convergente a 0).

Como X es esféricamente completo, la sucesión decreciente de bolas cerradas $B(x_n, r_n)$ tiene intersección no vacía. De hecho, tal intersección contiene un único punto x_0, que será a su vez el límite de la sucesión (x_n).

Por tanto, $\lim_{n\to\infty} x_n \in X$ y, con ello, X es completo. $\square$

Finalmente, veamos el resultado principal de esta sección:

Teorema 4.2.6. $\mathbb{C}_p$ *no es esféricamente completo.*

Demostración. Tenemos que ver que existe, al menos, una sucesión decreciente de bolas cerradas en $\mathbb{C}_p$ que tienen intersección vacía.

Por Observación 3.5.6 (véase también Corolario 3.6.3 iv.), como $|\mathbb{C}_p{}^*|$ es denso en $[0, \infty)$, podemos encontrar una sucesión estrictamente decreciente (r_n) de $|\mathbb{C}_p^*|$, con límite $r > 0$. Esto es,

$$r_0 > r_1 > \cdots > r_n > \cdots > \lim_{n\to\infty} r_n = r > 0.$$

El proceso que vamos a seguir es el siguiente: tomamos dos puntos $x, y \in \overline{B}(0, r_0)$. Ahora consideramos $B_0 := \overline{B}(x, r_1)$ y $B_1 := \overline{B}(y, r_1)$, dos bolas cerradas y disjuntas en $\overline{B}(0, r_0)$, ambas con radio r_1.

A continuación, en cada una de estas bolas, elegimos otras dos bolas B_{i_0} y B_{i_1} de radio r_2, cerradas y disjuntas en B_i (con $i = 0, 1$).

Continuando con este proceso, podemos definir una sucesión de bolas cerradas con radios cada vez más pequeños (dados por la sucesión (r_n)) y tales que

$$B_i \supset B_{ij} \supset \cdots \supset B_{ij\cdots k} \supset B_{ij\cdots kl} \supset \cdots ,$$

con los multiíndices iguales a 0 o 1.

Por construcción, dos bolas con distinto subíndice (de la misma longitud) son disjuntas.

Si $(i) = (i_1, i_2, \cdots)$ es una secuencia binaria, podemos definir

$$B_{(i)} := \bigcap_{n\geq 1} B_{i_1\cdots i_n}.$$

Tal intersección o bien es vacía, o bien es una bola cerrada de radio $r = \lim_{n\to\infty} r_n$, que tiene como centro cualquier elemento de ella.

En cualquier caso, todas las $B_{(i)}$ son conjuntos abiertos de $\mathbb{C}_p$.

Si $(i) \neq (j)$, esto es, $i_n \neq j_n$ para algún n, entonces por construcción $B_{i_1 \cdots i_n}$ y $B_{j_1 \cdots j_n}$ son disjuntas y además como

$$B_{(i)} \subset B_{i_1 \cdots i_n}$$

$$B_{(j)} \subset B_{j_1 \cdots j_n},$$

entonces $B_{(i)}$ y $B_{(j)}$ son disjuntas.

Como $\mathbb{C}_p$ es separable, la familia de conjuntos abiertos disjuntos $B_{(i)}$ ha de ser un conjunto numerable (puesto que cualquier subconjunto denso numerable tiene intersección no vacía con todos los conjuntos abiertos). Sin embargo, el cardinal del conjunto

$$\{B_{(i)} : (i) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}\}$$

es no contable, ya que puede indentificarse con el conjunto de Cantor en $\mathbb{R}$, que no es numerable (véase Ejemplo 17.9c y/o Corolario 30.5 en [7]). Por tanto, para ser numerable han de existir muchas bolas vacías en dicho conjunto.

De este modo, hemos llegado a una sucesión decreciente de $\mathbb{C}_p$ de bolas cerradas que tienen intersección vacía. Concluimos que $\mathbb{C}_p$ no es esféricamente completo. $\square$

Glosario

- $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.
- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.
- $B(x, r) = \{y : d(x, y) < r\}$.
- $\overline{B}(x, r) = \{y : d(x, y) \leq r\}$
- $B_{|\ |}(x, r)$: si se precisa resaltar el valor absoluto se escribirá $B_{|\ |}(x, r)$ en vez de $B(x, r)$.
- $\overline{B}_{|\ |}(x, r)$: si se precisa resaltar el valor absoluto se escribirá $\overline{B}_{|\ |}(x, r)$ en vez de $\overline{B}(x, r)$.
- $B^{\mathbb{K}}(x, r)$: si se precisa resaltar en qué cuerpo estamos trabajando se escribirá $B^{\mathbb{K}}(x, r)$ en vez de $B(x, r)$.
- $\overline{B}^{\mathbb{K}}(x, r)$: si se precisa resaltar en qué cuerpo estamos trabajando se escribirá $\overline{B}^{\mathbb{K}}(x, r)$ en vez de $\overline{B}(x, r)$.
- $\mathbb{K}^a$ es la clausura algebraica de $\mathbb{K}$.
- $\hat{\mathbb{K}}$ es la compleción de $\mathbb{K}$.
- $k^{\mathbb{K}}$ es el cuerpo residual de $\mathbb{K}$.
- A^c es el complementario del conjunto A.

Bibliografía

[1] Díaz Moreno, J. M. *Introducción a la topología de los espacios métricos. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz*, 1998.

[2] Lang, S. *Undergraduate algebra.* 3ª edición, Springer, 2005.

[3] Raya, A. *Álgebra y geometría lineal.* Editorial Reverté, 2007.

[4] Robert, A. M. *A course in p-adic analysis.* Springer, 2000.

[5] Sadornil, D. *Teoría de Galois. Apuntes de la asignatura.* Universidad de Cantabria, 2022.

[6] Schikhof, W.H. *Ultrametric calculus: An introduction to p-adic analysis.* Cambridge University Press, 1984.

[7] Willard, S. *General topology.* Addison Wesley, 1970.