

Funciones Especiales en la Era Digital

por

Amparo Gil, Javier Segura y Nico M. Temme

RESUMEN. Aunque es difícil dar una definición precisa de qué es una función especial, podríamos decir que las funciones especiales lo son en parte por ser importantes en diversas aplicaciones, y en parte por satisfacer determinadas propiedades. Una de las referencias clásicas para la consulta de propiedades y aproximaciones de funciones especiales es el *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, editado por Milton Abramowitz e Irene Stegun y publicado originalmente en 1964 por el *National Bureau of Standards*. Recientemente, el *National Institute of Standards and Technology* (NIST, denominación moderna del NBS) acometió el proceso de modernización del *Handbook* que culminó en 2010 con el lanzamiento del *NIST Handbook of Mathematical Functions* y su versión online y de libre acceso, la *NIST Digital Library of Mathematical Functions*. En esta nueva obra, las tablas de valores numéricos de funciones que aparecían en el manual de Abramowitz y Stegun han sido, como es lógico, sustituidas por referencias a software numérico. Este listado de referencias es necesariamente incompleto, pues estamos muy lejos de disponer de software numérico satisfactorio para todas las funciones contenidas en el *NIST Handbook*, y no parece sencillo que lo pueda haber a medio plazo. Tampoco parece sencillo describir todos los métodos necesarios para evaluar todas las funciones especiales, aunque sí es posible describir y analizar los métodos numéricos básicos e ilustrarlos con ejemplos específicos. En este artículo nos planteamos exponer brevemente algunas de las técnicas habituales involucradas en la construcción de algoritmos para evaluar funciones matemáticas, así como proporcionar referencias sobre software de cálculo de algunas de estas funciones.

1. INTRODUCCIÓN

No hay, ni probablemente pueda haber, una descripción que defina con precisión qué es una función especial. ¿Qué hace a una función especial? Es difícil responder a esta pregunta de forma clara. Las funciones especiales lo son en parte por ser importantes en aplicaciones, en parte por satisfacer determinadas propiedades. Es, por otro lado, mucho más fácil enumerar funciones especiales que descartar una función para este «selecto grupo». Entre las funciones especiales, no hay ninguna duda de que están tanto las funciones de tipo hipergeométrico (con sus múltiples y distinguidos casos especiales como las funciones de Bessel, polinomios ortogonales clásicos, etc.), como las funciones gamma y un buen número de distribuciones de probabilidad.

Una de las referencias clásicas para la consulta de relaciones funcionales, aproximaciones, gráficos y valores particulares de funciones especiales ha sido, sin duda, el *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables* [1], editado por Milton Abramowitz e Irene Stegun. El *Handbook*, culminación de casi diez años de trabajo, estuvo vinculado al proyecto de Tablas Matemáticas de la división de Matemática Aplicada del *National Bureau of Standards* (NBS) de Estados Unidos, y fue editado por primera vez en 1964. Desde entonces se ha convertido en uno de los *best sellers* de la bibliografía matemática de todos los tiempos, y probablemente en el texto más citado: una búsqueda rápida en Google Scholar arroja más de 60 000 citas de la edición de Dover. El *Handbook* se convirtió pronto en un estándar para la definición y notación de funciones especiales, y como referencia de consulta para las propiedades más relevantes de las funciones que uno pueda necesitar: desarrollos en serie, representaciones integrales, desarrollos asintóticos, etc. Sin embargo, el *Handbook* también se quedó algo obsoleto en diversos aspectos; por un lado, más de 500 de sus páginas están dedicadas a tablas de valores de funciones que han sido ampliamente superadas por el moderno software numérico. Por otra parte, el propio campo de las funciones especiales no ha permanecido estático en los casi 50 años transcurridos desde la publicación del *Handbook*, y se han incorporado nuevos métodos de análisis y nuevas clases de funciones bien caracterizadas. Motivado por ello, el *National Institute of Standards and Technology* (NIST, denominación moderna del NBS) acometió el proceso de modernización del *Handbook* que culminó en 2010 con el lanzamiento del *NIST Handbook of Mathematical Functions* [27] y su versión online y de libre acceso, la *NIST Digital Library of Mathematical Functions* (<http://dlmf.nist.gov>). Este proyecto ha sido el resultado del esfuerzo de más de 50 editores, autores, validadores y desarrolladores cuya lista puede consultarse en la página web del proyecto (<http://dlmf.nist.gov/about/staff>). Entre todos ellos cabe destacar al recientemente fallecido Frank Olver (1924–2013), editor en jefe y coautor de 5 de los 36 capítulos de los que consta el *Handbook*, y cuya meticulosidad y rigor impregnan cada una de las páginas del *NIST Handbook*.

Por suerte o por desgracia (suerte para los investigadores en algoritmos de computación, desgracia para los usuarios del software), estamos muy lejos de tener software numérico satisfactorio para todas las funciones contenidas en el *NIST Handbook of Mathematical Functions* y no parece sencillo que lo pueda haber a medio plazo. Tampoco parece sencillo describir todos los métodos necesarios para evaluar todas las funciones especiales, aunque sí es posible describir y analizar los métodos numéricos básicos e ilustrarlos con ejemplos específicos. En este artículo nos planteamos exponer brevemente algunas de las técnicas habituales involucradas en la construcción de algoritmos para evaluar funciones matemáticas, así como proporcionar referencias sobre software de cálculo de algunas de estas funciones.

En la primera parte de este artículo, describiremos de forma breve algunas de las técnicas básicas que se suelen emplear en el desarrollo de los algoritmos de evaluación de funciones. Utilizaremos las funciones de Airy como *leitmotiv* para introducir la aparición de los diversos métodos. Acabaremos describiendo brevemente algunos de los problemas más recientes en el ámbito de la evaluación de funciones especiales y recopilando brevemente referencias sobre algunas fuentes de software numérico.

2. ALGUNAS TÉCNICAS BÁSICAS DE EVALUACIÓN DE FUNCIONES ESPECIALES

Nuestro punto de vista general en conexión con el cálculo de funciones matemáticas es la de ser modestos en cuanto al número de parámetros implicados. Por ejemplo, en principio sería posible diseñar algoritmos para la función hipergeométrica generalizada

$${}_pF_q \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix}; z \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \cdots (a_p)_n}{(b_1)_n \cdots (b_q)_n} \frac{z^n}{n!}, \quad (2.1)$$

donde $p \leq q + 1$ y $(a)_n$ es el símbolo de Pochhammer, definido por

$$(a)_0 = 1, \quad (a)_n = a(a+1) \cdots (a+n-1) \quad (n \geq 1), \quad (a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}.$$

Esto resolvería muchos problemas de una vez, ya que son muchos los casos particulares con nombre propio que pueden ser escritos en términos de esta función, con casos principales dados por $p = 1, q = 1$ (funciones de Kummer, con convergencia de las series para todo z complejo) y $p = 2, q = 1$ (funciones hipergeométricas de Gauss, con convergencia para $|z| < 1$). Sin embargo, como explicaremos, por lo general las series convergentes son de validez limitada para la construcción de algoritmos eficientes y fiables. Conseguir algoritmos precisos para cualesquiera valores de los parámetros es un objetivo ambicioso que por lo general requiere la utilización de diversos métodos en distintas zonas de parámetros. Algunos casos particulares con pocos parámetros resultan tan suficientemente no triviales como para descartar un ataque frontal al problema de calcular funciones hipergeométricas generalizadas.

Nuestra estrategia es de abajo a arriba: empezar por lo más elemental para intentar ascender en el orden de complejidad (sin excesos). La idea es construir métodos eficientes y con un control riguroso del error (sea teórica o computacionalmente). El objetivo final es la construcción de algoritmos numéricamente estables y precisos en una aritmética de precisión fija; es decir, que dispondremos de un sistema numérico con un número limitado de cifras significativas. Ésta es la situación habitual en el software científico.

Las funciones de Airy, soluciones de la ecuación diferencial $y''(z) - zy(z) = 0$, son un buen ejemplo de cómo diferentes técnicas (series convergentes y divergentes, desarrollos de Chebyshev, cuadratura numérica) pueden ser útiles de forma combinada, dependiendo del valor de la variable, para obtener resultados precisos. Como hemos comentado con anterioridad, consideraremos estas funciones como el *leitmotiv* para introducir algunas de las técnicas básicas de evaluación de funciones.

No debería resultar sorprendente que el primer tema a tratar en la evaluación de funciones especiales sean las series de potencias.

2.1. ECUACIONES DIFERENCIALES Y SOLUCIONES EN SERIES DE POTENCIAS

Las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), y particularmente las lineales de segundo orden, sirven de definición a un gran número de funciones especiales que

aparecen en diversas aplicaciones. En los libros de métodos matemáticos para la física y la ingeniería el nombre «función especial» suele aparecer por primera vez cuando se aborda la resolución de ciertas ecuaciones diferenciales mediante series de potencias y series de Frobenius. Ejemplos habituales son las ecuaciones de Hermite, Laguerre o Bessel.

Desde un punto de vista numérico, es importante tener en cuenta que el hecho de que se disponga de una serie convergente para una función no quiere decir que la función sea evaluable numéricamente en todo el rango de convergencia de la serie. Esto sólo sería posible, en general, si dispusiéramos de un sistema con precisión infinita, sin limitación en el tamaño de las cifras que es capaz de almacenar e infinitamente rápido. La situación, claro está, nunca es así; recordemos además que el objetivo es construir algoritmos en precisión fija.

Para empezar, consideremos el ejemplo elemental de obtener numéricamente las soluciones de $y'' - y = 0$. Evidentemente, $y_1(z) = e^z$ e $y_2(z) = e^{-z}$ son dos soluciones independientes para las que tenemos series de potencias convergentes para todo z . Sin embargo, cuando $\Re z > 0$ sólo deberíamos calcular y_2 mediante series para valores pequeños de $\Re z$, puesto que, para $\Re z$ grande, los primeros términos de la serie son mucho mayores que la serie completa; esto indica que el resultado final se produciría por cancelación entre cantidades grandes, dando lugar a pérdida de cifras significativas. Por otra parte, para $\Re z$ grande la situación de y_1 es mejor, pero sigue sin ser buena ya que, a medida que $|z|$ crece, se necesitan más términos de la serie. Por supuesto, lo mismo pasa para $\Re z < 0$ invirtiendo los papeles. En conclusión, las series de Maclaurin no se deberían utilizar lejos de $z = 0$.

Para funciones no tan elementales ocurre lo mismo. Por ejemplo, en el caso de las funciones de Airy, soluciones de la ecuación diferencial

$$y''(z) - zy(z) = 0, \quad (2.2)$$

podemos encontrar soluciones en serie sustituyendo $y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ en la ecuación diferencial. Se obtiene sencillamente que $a_{2+3n} = 0$, $n \in \mathbb{N}$, y que dos soluciones independientes son

$$y_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} 3^k \left(\frac{1}{3}\right)_k \frac{z^{3k}}{(3k)!}, \quad y_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} 3^k \left(\frac{2}{3}\right)_k \frac{z^{3k+1}}{(3k+1)!}. \quad (2.3)$$

El criterio del cociente certifica que ambas series son convergentes para cualquier valor de z complejo.

Consideremos por el momento que $z = x$ es real y positivo; observamos entonces que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son positivas y crecientes para $x > 0$.

Toda solución de la ecuación se puede escribir como $y(x) = \alpha y_1(x) + \beta y_2(x)$. Tanto $y_1(x)$ como $y_2(x)$ tienden a $+\infty$ cuando $x \rightarrow +\infty$ y la ecuación tiene necesariamente una solución $f(x)$, llamada recesiva, tal que $f(x)/y(x) \rightarrow 0$ para cualquier solución de la ecuación $y(x)$ no proporcional a $f(x)$: o bien $y_1(x)/y_2(x) \rightarrow 0$ e $y_1(x)$ es recesiva, o bien $y_2(x)/y_1(x) \rightarrow 0$, e $y_2(x)$ es recesiva, o $y_1(x)/y_2(x) \rightarrow C \neq 0$, e $y_1(x) - Cy_2(x)$ es recesiva. En particular, la última de las posibilidades es la que ocurre (con $C = 3^{1/3}\Gamma(2/3)/\Gamma(1/3)$).

Tenemos, como sucedía en el ejemplo de la ecuación $y'' - y = 0$, soluciones dominantes ($y_1(x)$ e $y_2(x)$ lo son) y solución recesiva, que es única salvo factor multiplicativo. Como en ese ejemplo, las series de Maclaurin sólo se deben utilizar para x pequeño, siendo esta restricción particularmente importante para la solución recesiva; esto es así porque, para x grande y positivo, al calcular la solución recesiva $y(x) = y_1(x) - Cy_2(x)$ utilizando las series para $y_1(x)$ e $y_2(x)$, obtendríamos una solución pequeña (recesiva) como resta de dos soluciones grandes (dominantes), lo que daría lugar a pérdida de cifras significativas.

2.2. SOLUCIONES NUMÉRICAMENTE SATISFACTORIAS

En el caso de la ecuación de Airy, la solución recesiva cuando $z \rightarrow +\infty$ (única salvo constante multiplicativa) es la llamada función de Airy $\text{Ai}(z)$ [26], que, como veremos, resulta ser exponencialmente pequeña cuando $|z| \rightarrow +\infty$ para argumentos $|\arg z| < \pi/3$, mientras que tanto $y_1(z)$ como $y_2(z)$ de (2.3) son exponencialmente grandes.

Las soluciones $y_1(z)$ e $y_2(z)$ no deben utilizarse para calcular numéricamente cualquier solución de (2.2) para todos los valores de z , lo que queda particularmente claro para z real, positivo y grande. Concretamente, la solución recesiva no se debe calcular como combinación de soluciones dominantes. Diríamos entonces que estas dos soluciones no constituyen un par de *soluciones numéricamente satisfactorias* de (2.2). La misma situación ocurre para otras funciones especiales. Si queremos calcular la solución recesiva $\text{Ai}(z)$ para z real y positivo (o para $|\arg z| < \pi/3$), deberemos buscar otra aproximación para z grande.

Además, podemos necesitar, en algunas ocasiones, considerar diferentes pares dependiendo de la zona de cálculo. Por ejemplo, volviendo al caso elemental de la ecuación $y'' - y = 0$, las soluciones $y_1(z) = e^z$ e $y_2(z) = e^{-z}$, que forman un par satisfactorio cuando $\Re z \gg 0$, no son un par satisfactorio cerca $z = 0$. Cerca de $z = 0$ es conveniente incluir la solución $y_3(z) = \sinh z = (y_1(z) - y_2(z))/2$, junto con cualquier otra que no se anule en $z = 0$, como por ejemplo $y_4(z) = \cosh z$. Por supuesto, $y_3(z)$ e $y_4(z)$ no constituyen un par satisfactorio cuando $|\Re z|$ es grande.

En la solución numérica de una ecuación diferencial, sea mediante series convergentes o mediante cualquier otro método, siempre habrá que tener en cuenta que necesitaremos tener una base de soluciones numéricamente satisfactorias, de manera que en ningún caso sea necesario calcular una solución pequeña como combinación lineal de dos soluciones grandes que se cancelan entre sí. Esto requiere de un análisis previo del problema y de la identificación de los conjuntos satisfactorios de soluciones.

2.2.1. COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DOMINANTE

Transformando la ecuación de Airy mediante un cambio de variable adecuado podemos obtener información sobre el comportamiento de las soluciones cuando $|z|$ es grande. En particular, considerando el cambio de variable $\zeta = \frac{2}{3}z^{3/2}$, es fácil comprobar que si $y(z)$ es solución de la ecuación de Airy entonces, definiendo $Y(\zeta) =$

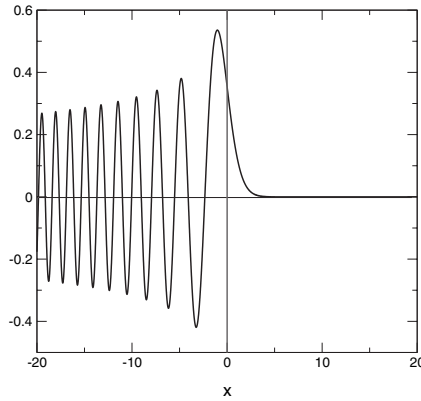


Figura 1: La función de Airy $\text{Ai}(x)$ es oscilante para $x < 0$ y exponencialmente pequeña cuando $x \rightarrow +\infty$.

$z(\zeta)^{1/4}y(z(\zeta))$, tenemos la ecuación diferencial

$$\ddot{Y}(\zeta) + \left(-1 + \frac{5}{36\zeta^2}\right) Y(\zeta) = 0. \quad (2.4)$$

A partir de esta ecuación, esperamos que, si ζ es suficientemente grande, el término $5/(36\zeta^2)$ será despreciable y tendremos que $Y(\zeta) \sim \exp(\pm\zeta)$. Deshaciendo el cambio, tenemos que la solución recesiva de la ecuación de Airy cuando $|\arg z| < \pi/3$ será tal que

$$\text{Ai}(z) \sim C_1 z^{-1/4} \exp\left(-\frac{2}{3}z^{3/2}\right)$$

(es decir que $\lim_{z \rightarrow +\infty} z^{1/4} \exp(\frac{2}{3}z^{3/2}) \text{Ai}(z) = C_1$ para algún $C_1 \neq 0$). Ésta es la llamada aproximación de Liouville-Green. Un análisis más detallado [25, capítulo 6] muestra que esta descripción tiene sentido.

Por otra parte, si $y(z)$ es dominante en $|\arg z| < \pi/3$ tendremos

$$y(z) \sim C_2 z^{-1/4} \exp\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right).$$

Dos posibilidades para acompañar a la solución recesiva $\text{Ai}(z)$ en $|\arg z| < \pi/3$ serían $\text{Ai}(e^{\pm 2\pi i/3}z)$, que son soluciones independientes de $\text{Ai}(z)$ y dominantes en $|\arg z| < \pi/3$. El cálculo de $\text{Ai}(z)$ en $|\arg z| \leq 2\pi/3$ proporciona dos soluciones numéricamente satisfactorias en todo el plano complejo pues $\text{Ai}(z)$, $\text{Ai}(e^{2\pi i/3}z)$ y $\text{Ai}(-e^{2\pi i/3}z)$ son soluciones independientes, y $\text{Ai}(z)$ sólo es dominante en $\pi/3 < |\arg z| < \pi$. Otra solución que se suele considerar es $\text{Bi}(z) = e^{-\pi i/6} \text{Ai}(e^{-2\pi i/3}z) + e^{\pi i/6} \text{Ai}(e^{2\pi i/3}z)$, que es real en el eje real; el par $\{\text{Ai}(z), \text{Bi}(z)\}$ es satisfactorio en $|\arg z| \leq \pi/3$ y en el semieje real negativo.

Veremos más adelante cómo la aproximación de Liouville-Green puede tomarse como punto de partida para los desarrollos asintóticos de las funciones de Airy para $|z| \rightarrow \infty$.

2.2.2. SOLUCIONES COMPLETAMENTE SATISFACTORIAS: FUNCIONES ESCALADAS

Como antes hemos comentado, el objetivo final debería ser el de obtener pares de soluciones numéricamente satisfactorios. Además de esto, lo ideal sería que las funciones se pudieran calcular para cualesquiera valores de la variable y parámetros. Esto en la práctica es difícil que ocurra, porque lo habitual es que las soluciones del par satisfactorio se salgan del rango computable para parámetros grandes (se alcanzan los límites de *overflow* o *underflow*).

Diremos que se dispone de una pareja de soluciones completamente satisfactoria cuando esta pareja de soluciones es numéricamente satisfactoria y, salvo factores elementales (típicamente exponenciales), están acotadas en todo el rango de las variables. Esto significa que estas soluciones pueden ser evaluadas sin restricciones salvo por factores elementales.

Así, por ejemplo, en el caso de la función de Airy podemos factorizar la parte dominante calculando funciones escaladas:

$$\widetilde{\text{Ai}}(z) = z^{1/4} e^{\frac{2}{3}z^{3/2}} \text{Ai}(z).$$

Para las funciones de Airy escaladas, se pueden construir algoritmos de cálculo válidos para cualquier z , por muy grande que sea. Este cálculo es posible en todo el plano complejo y existen algoritmos numéricos totalmente satisfactorios para resolver la ecuación de Airy [10].

Un detalle importante es que las funciones escaladas no se deben nunca evaluar a partir de las no escaladas multiplicando por el factor. Esto es así por dos razones: primero porque, si de lo que se trata es de que la evaluación no se salga del rango computable, las exponenciales no deberíamos evaluarlas porque son justo los factores que se pueden salir de rango; segundo, aunque no estuviéramos fuera de rango, la evaluación numérica del factor dominante está mal condicionada, y multiplicar por este factor haría que aumentase el error todavía más. Es decir, que para poder escalar satisfactoriamente, se debe disponer de expresiones en la que el factor de escalado aparezca explícitamente.

2.3. SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL Y CONDICIONAMIENTO

No es sorprendente que las soluciones recesivas de una ecuación diferencial suelen ser las más importantes en aplicaciones. Las cantidades físicas son finitas por naturaleza y las funciones que representan esas cantidades deberían estar acotadas. Por otra parte, como hemos discutido para ecuaciones de segundo orden, siempre es necesario calcular estas soluciones para poder disponer de un par satisfactorio.

Desde un punto de vista numérico, las soluciones recesivas precisan de un tratamiento particular. Eso también es así si pretendemos calcular una función especial «simplemente» integrando una ecuación diferencial. En efecto, es fundamental tener en cuenta el condicionamiento de la solución que queremos calcular, y, por ejemplo, en el caso de la ecuación de Airy, la solución recesiva cuando $x \rightarrow +\infty$ nunca se debe calcular como un problema de valor inicial a partir de $x = 0$.

Es precisamente el hecho de que los métodos de resolución numérica de EDOs son generales y válidos para cualquier solución de la ecuación lo que hace que fracasen en estos casos. El motivo es simple: un mínimo error en cualquiera de los pasos de la integración para calcular la solución recesiva introducirá en la solución una componente de solución dominante que acabará, como su nombre anuncia, dominando, y, en la práctica, «borrando» la solución recesiva. Este problema no existe para el cálculo de soluciones dominantes, la integración «hacia delante» desde $x = 0$ y hacia valores positivos de x está bien condicionada en este caso.

Hay que insistir en el hecho de que es esencial saber qué tipo de solución estamos considerando a la hora de escoger una estrategia de cálculo. Para las soluciones recesivas (como $\text{Ai}(x)$ para x positivo) la estrategia ha de ser opuesta al caso de soluciones dominantes: la integración de la ecuación diferencial estará bien condicionada si integramos partiendo de valores grandes de x e integramos en sentido de x decreciente.

Consideraríamos entonces el problema de valores iniciales

$$\begin{aligned} y'' - xy &= 0, \\ y(b) &= \text{Ai}(b), \quad y'(b) = \text{Ai}'(b), \end{aligned} \tag{2.5}$$

y calcularíamos la solución «hacia atrás» (desde b hasta 0 con paso de integración negativo); este procedimiento está bien condicionado y sólo necesitaríamos disponer de algún método para calcular los valores iniciales en $x = b$. Si b es suficientemente grande, podremos utilizar las aproximaciones asintóticas que desarrollaremos en la siguiente sección.

En cuanto al método de integración de la ecuación diferencial, puesto que es fácil calcular derivadas sucesivas de la función a partir de la ecuación diferencial, en principio podemos utilizar métodos de Taylor o, lo que es lo mismo, series de Taylor locales, escribiendo

$$y(x+h) \approx \sum_{i=0}^N \frac{h^i}{i!} y^{(i)}(x).$$

En este caso, por el condicionamiento, tomaríamos un paso negativo h para calcular $\text{Ai}(x)$ para valores de x cada vez más pequeños.

Las derivadas sucesivas se pueden calcular a partir de $\text{Ai}(b)$ y $\text{Ai}'(b)$. Derivando la ecuación diferencial (2.5) tenemos

$$y^{(n+2)}(x) - xy^{(n)}(x) - ny^{(n-1)}(x) = 0, \quad n \geq 1. \tag{2.6}$$

Ésta es una ecuación en diferencias de tercer orden que permite calcular sencillamente las sucesivas derivadas para aplicar las series de Taylor locales, siempre que la ecuación en diferencias esté bien condicionada. El estudio de las recurrencias lineales es también de interés para la evaluación de funciones especiales, no sólo porque nos aparezcan en este ejemplo sino, como veremos, porque muchas funciones especiales satisfacen este tipo de relaciones. También en este caso será fundamental estudiar el condicionamiento de las recurrencias.

Vemos como, de nuevo, es imprescindible un análisis previo del conjunto de soluciones antes de abordar la resolución numérica.

2.4. APROXIMACIONES ASINTÓTICAS

Hemos visto anteriormente que, para $z \rightarrow \infty$, la función de Airy $\text{Ai}(z)$ tiene el comportamiento $\text{Ai}(z) \sim C z^{-1/4} \exp(-\zeta)$, donde $\zeta = \frac{2}{3} z^{3/2}$. Podemos mejorar esta estimación utilizando de nuevo (2.4). Consideramos la solución recesiva en $|\arg z| < \pi/3$ y la escribimos en la forma

$$Y(\zeta) = \exp(-\zeta)g(\zeta), \quad \zeta = \frac{2}{3}z^{3/2}.$$

Sustituyendo llegamos a la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 g}{d\zeta^2} - 2 \frac{dg}{d\zeta} + \frac{\lambda}{\zeta^2} g = 0, \quad \lambda = \frac{5}{36},$$

y escribiendo $g(\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \zeta^{-m}$, tenemos, igualando término a término,

$$a_{m+1} = -\frac{\lambda + m(m+1)}{2(m+1)} a_m, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

con lo que obtenemos el desarrollo

$$y(z) \sim z^{-1/4} e^{-\zeta} \sum_{m=0}^{\infty} a_m \zeta^{-m}, \quad \zeta = \frac{2}{3} z^{3/2}. \quad (2.7)$$

En concreto, la definición habitual de la función $\text{Ai}(z)$ es para $a_0 = \frac{1}{2}\pi^{-1/2}$. Tenemos entonces

$$\text{Ai}(z) \sim z^{-1/4} e^{-\zeta} \sum_{m=0}^{\infty} a_m \zeta^{-m}. \quad (2.8)$$

Se puede probar que (2.7) es una aproximación asintótica válida cuando $|z| \rightarrow \infty$ para valores complejos de z excluyendo valores negativos de z . La serie no converge para ningún z ; es una serie asintótica, y de ahí que utilicemos el símbolo $\sim$.

Diremos que un desarrollo de la forma

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}, \quad z \rightarrow \infty,$$

es un desarrollo asintótico cuando

$$z^N \left(f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^{-n} \right), \quad N = 0, 1, 2, \dots,$$

sea una función acotada para valores grandes de z y con límite a_N cuando $z \rightarrow \infty$, para cualquier $N \geq 1$. También escribiremos esto como sigue:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^{-n} + \mathcal{O}(z^{-N}), \quad z \rightarrow \infty.$$

Para decidir si un desarrollo es asintótico deberíamos acotar el error de la aproximación, cosa que no hemos hecho aquí. Un tratamiento amplio y riguroso de desarrollos asintóticos para EDOs de segundo orden con aplicaciones para funciones especiales la podemos encontrar en [25].

La noción de desarrollo asintótico implica que, si z es suficientemente grande, un número finito de términos del desarrollo puede dar un resultado preciso. Hasta cierto punto, los desarrollos asintóticos se pueden utilizar para propósitos numéricos igual que las series convergentes, es decir, añadiendo términos hasta alcanzar la precisión requerida. Pero hay una diferencia esencial: no podemos añadir más términos de la cuenta ya que, si el desarrollo es divergente, habrá un número de términos a partir del cual el resultado empeora. Para cada valor z hay un número de términos óptimo, y a partir de ese número la suma emprende la senda de la divergencia. No se trata de un efecto numérico, sino de una propiedad intrínseca de la serie.

Bajo ciertas condiciones, los desarrollos asintóticos pueden diferenciarse (ver, por ejemplo, [25, teorema 4.2]). En particular (2.8), que es el desarrollo asintótico para la función entera $Ai(z)$, puede diferenciarse; obtenemos así un desarrollo asintótico para $Ai'(z)$. Con esto ya tendríamos, por ejemplo, los valores iniciales necesarios para evaluar $Ai(x)$ para x real y positivo empezando por $x = b$ (b grande) mediante la integración de la ecuación diferencial.

Pero, por otra parte, puesto que disponemos de desarrollos tanto para $x > 0$ pequeño como grande, se puede pensar en un primer algoritmo sencillo para calcular $Ai(x)$ con x positivo, combinando series de Maclaurin con desarrollos asintóticos. Sabemos, por la discusión anterior, que las series de Maclaurin no se pueden utilizar para x grande porque son numéricamente inestables, mientras que la serie asintótica, por su naturaleza, no puede utilizarse para x pequeño. Sin embargo, unos sencillos experimentos numéricos pueden servir para comprobar cómo la utilización de series de Maclaurin para $x \leq x_0$, $x_0 = 5.5$, y series asintóticas para $x > x_0$ dan lugar a un algoritmo para evaluar $Ai(x)$ y su derivada con una precisión relativa menor que 10^{-8} para todo $x > 0$ cuando calculamos valores utilizando doble precisión (15 o 16 dígitos).

2.5. DESARROLLOS DE CHEBYSHEV

Hasta el momento, hemos esbozado un algoritmo que, combinando aproximaciones alrededor de $x = 0$ (series de Maclaurin) y alrededor de $x = \infty$ (series asintóticas), proporciona una precisión de 10^{-8} para el cálculo de la función $Ai(x)$ con x positivo (trabajando con una precisión de 15 dígitos). La limitación de la serie asintótica es intrínseca y, aunque el rango de aplicabilidad de las series de Maclaurin se podría ampliar utilizando precisión extendida (mayor número de cifras), parece claro que es conveniente un método para rangos intermedios de x (más que conveniente, imprescindible si trabajamos en precisión fija).

Ésta es una situación que se da con mucha frecuencia en la evaluación de funciones especiales: además de la utilización de series convergentes y divergentes, se necesita de algún otro procedimiento para cubrir satisfactoriamente las zonas intermedias.

Para variable real, una posibilidad la proporciona la interpolación de Chebyshev

o, más genéricamente, las aproximaciones tipo Chebyshev (ver, por ejemplo, [15, capítulo 3] y [23]). La interpolación en un intervalo mediante nodos de Chebyshev consigue aproximaciones, por lo general, con errores uniformemente distribuidos en el intervalo, siempre que se interpole una función con derivadas suficientemente pequeñas. Para este fin, en el caso de las funciones de Airy, sería conveniente extraer el comportamiento dominante de la función, escribiendo $\text{Ai}(x) = x^{-1/4} \exp(-\zeta)g(\zeta)$, e interpolando $g(\zeta)$. Para poder construir el polinomio de interpolación de Chebyshev deberíamos poder disponer de un algoritmo alternativo capaz de proporcionarnos los valores de la función a interpolar en los nodos de interpolación con suficiente exactitud.

Un tipo de aproximación relacionada con la interpolación de Chebyshev es la aproximación en series de polinomios de Chebyshev. Dada una función $f(x)$ definida en $[-1, 1]$ y con ciertas propiedades de continuidad (es suficiente la continuidad de Dini-Lipschitz), podemos escribir un desarrollo convergente del tipo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(x), \quad -1 \leq x \leq 1.$$

En la práctica, la expresión se trunca hasta cierto orden y los coeficientes pueden obtenerse de varios modos. Por ejemplo, se pueden expresar como una transformada coseno de la función a aproximar.

En el caso particular de funciones $f(x)$ que son soluciones de ecuaciones diferenciales con coeficientes polinómicos, los coeficientes del desarrollo satisfacen determinadas relaciones de recurrencia que pueden utilizarse para su evaluación. De hecho, en algunos casos basta tener una única condición de normalización de los coeficientes para poder evaluar la serie de Chebyshev (ver, por ejemplo, [15, ejemplo 3.14]). Los casos en los que esto es posible corresponden a recurrencias con una solución mínima (es decir, recesiva), lo que de nuevo nos muestra que el estudio de las relaciones de recurrencia y su condicionamiento es un problema básico que se ha de estudiar. Un caso más elaborado fue el analizado en [17], donde el espacio de las soluciones recesivas tenía dimensión 2, lo que requirió de la utilización de dos condiciones de normalización.

2.6. RELACIONES DE RECURRENCIA Y FRACCIONES CONTINUAS

Vamos a tratar brevemente los aspectos numéricos de las relaciones de recurrencia (ecuaciones en diferencias). Esto nos apartará brevemente de nuestro *leitmotiv* (la evaluación de la función de Airy), que retomaremos en breve.

Ya hemos visto cómo han aparecido ecuaciones en diferencias cuando hemos planteado el cálculo de funciones de Airy mediante series de Taylor (ver (2.6)), y también hemos mencionado que aparecen en la evaluación de series de Chebyshev. Pero, además, muchas funciones especiales dependientes de un parámetro satisfacen relaciones de este tipo sobre el parámetro.

En particular, las funciones de tipo hipergeométrico (de Gauss y confluentes) satisfacen relaciones de recurrencia de tres términos. Las funciones de Airy son, con

un cambio de variable, un caso particular de funciones de Bessel. Tomemos como ejemplo las funciones de Bessel modificadas de variable real y positiva.

Las funciones de Bessel modificadas de orden ν son soluciones de la ecuación diferencial

$$x^2 y'' + xy' - (x^2 + \nu^2)y = 0.$$

La notación habitual para dos de sus soluciones es $K_\nu(x)$ (recesiva en $x = +\infty$) e $I_\nu(x)$ [28]. Cuando $\nu = 1/3$, esta ecuación está relacionada con la de Airy y tenemos que

$$\text{Ai}(z) = \pi^{-1} \sqrt{z/3} K_{\frac{1}{3}}(\zeta), \quad \zeta = \frac{2}{3} z^{3/2}.$$

Las funciones de Bessel también satisfacen relaciones funcionales en términos del parámetro ν . La más elemental de ellas es la relación de recurrencia

$$y_{\nu+1} + \frac{2\nu}{x} y_\nu - y_{\nu-1} = 0, \quad (2.9)$$

siendo $y_\nu^{(1)}(x) = I_\nu(x)$ e $y_\nu^{(2)}(x) = e^{i\pi\nu} K_\nu(x)$ dos soluciones linealmente independientes de la recurrencia.

Para valores reales de x y ν , el par $\{y_\nu^{(1)}(x), y_\nu^{(2)}(x)\}$ resulta ser un par de soluciones numéricamente satisfactorio tanto si $x \rightarrow +\infty$ como si $\nu \rightarrow +\infty$, ya que una de ellas es recesiva y la otra dominante. Respecto a ν , $y_\nu^{(1)}(x)$ resulta ser recesiva (o mínima), pues $\lim_{\nu \rightarrow +\infty} y_\nu^{(1)}(x)/y_\nu^{(2)}(x) = 0$.

Las mismas precauciones respecto a la dirección de integración que tuvimos cuando se discutió el problema del condicionamiento en ecuaciones diferenciales de segundo orden, deberemos tenerlas ahora en cuanto a la dirección de aplicación de la recurrencia (2.9). Es decir, que las soluciones dominantes podremos calcularlas en dirección de ν creciente, pero la mínima (única salvo factor multiplicativo no dependiente de ν) sólo podemos calcularla en dirección de ν decreciente.

En concreto, tenemos, por ejemplo, que

$$K_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}, \quad K_{\frac{3}{2}}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left(1 + \frac{1}{z}\right),$$

lo que permite calcular los valores de $K_{n+1/2}(x)$ utilizando la relación

$$K_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} K_\nu(z) + K_{\nu-1}(z),$$

pues $K_\nu(z)$ es dominante. En cambio, para $I_\nu(z)$ no podemos hacer lo mismo porque el problema estaría mal condicionado al ser $I_\nu(z)$ mínima.

Un ejemplo todavía más sencillo para entender el problema nos lo proporciona la famosa sucesión de Fibonnaci, que cumple

$$y_{n+1} = y_n + y_{n-1}. \quad (2.10)$$

Más concretamente, se le suele dar nombre de sucesión de Fibonacci a la solución particular con $y_0 = 1$, $y_1 = 1$.

Un cálculo elemental sirve para comprobar que toda solución que satisface (2.10) se puede escribir como

$$F_n = ay_n^{(+)} + by_n^{(-)}, \quad y_n^{(+)} = \varphi^n, \quad y_n^{(-)} = (-\varphi)^{-n}, \quad \varphi = (1 + \sqrt{5})/2.$$

Consideremos en particular la solución $y_n = (-\varphi)^{-n}$ y calculemos numéricamente las soluciones en precisión doble (es decir, con aproximadamente 15 dígitos) partiendo de y_0 y y_1 . Deberíamos obtener una sucesión oscilante y decreciente en valor absoluto. Sin embargo, a partir de y_{41} esto deja de ser así, y tenemos, aproximadamente, $y_{41} \simeq -3.3 \times 10^{-10}$, $y_{42} \simeq 5.4 \times 10^{-9}$, $y_{43} \simeq 5.2 \times 10^{-9}$, $y_{44} \simeq 1.1 \times 10^{-8}$ y a partir de entonces la sucesión es de términos positivos y creciente, y además verifica que y_n/y_{n-1} tiende numéricamente a φ cuando n es grande, en lugar de a $-1/\varphi$. Vemos cómo la evaluación de la solución propuesta es inestable. Esto es debido a que el problema está mal condicionado. Cualquier error numérico que se introduzca en el cálculo recurrente de $y_n^{(-)}$ introducirá una componente de $y_n^{(+)}$ que acabará dominando el cálculo pues $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n^{(-)}/y_n^{(+)} = 0$. Como vemos, el problema de condicionamiento es similar al descrito para ecuaciones diferenciales.

Como en aquel caso, es necesario conocer el tipo de solución que se está calculando para saber en qué dirección se ha de aplicar la relación de recurrencia. En el caso de recurrencias lineales homogéneas de tres términos, si la solución no es mínima (es decir, recesiva) se puede aplicar «hacia adelante»; éste es el caso de cualquier solución no proporcional a $y_n^{(-)}$. Para esta solución, sin embargo, la recurrencia sólo se puede aplicar «hacia atrás», es decir, en la dirección de n decreciente.

Existe además una conexión directa entre la existencia de solución mínima para una recurrencia de tres términos y la convergencia de una fracción continua asociada a la recurrencia y que converge al cociente y_n/y_{n-1} , siendo y_n la solución mínima y n el parámetro variable de la recurrencia. Esta conexión la proporciona el teorema de Pincherle [15, teorema 4.7]. Por ejemplo, para el caso de la sucesión de Fibonacci, reescribiendo la recurrencia como

$$y_n^{(-)}/y_{n-1}^{(-)} = \frac{1}{-1 + y_{n+1}/y_n}$$

e iterando tenemos que

$$-\varphi^{-1} = \frac{1}{-1 + \frac{1}{-1 + \frac{1}{-1 + \dots}}}$$

El teorema de Pincherle garantiza la convergencia de esta fracción continua. De esto se sigue que, como es bien sabido,

$$\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} \quad (2.11)$$

Muchas funciones especiales satisfacen relaciones de recurrencia a tres términos (afortunadamente, con mejor convergencia que (2.11)), y en muchas ocasiones poder calcular cocientes de soluciones mínimas mediante una fracción continua es un ingrediente importante en algoritmos numéricos (ver, por ejemplo, [9]).

Para ecuaciones lineales en diferencias de orden superior a dos (relaciones con tres o más términos), el análisis es más complejo porque, por ejemplo, pueden existir soluciones que no sean ni mínimas ni dominantes, y para las que ninguna de las direcciones de aplicación de la recurrencia esté bien condicionada.

En cualquier caso, previamente a la utilización de recurrencias para el cálculo de funciones especiales, es necesario analizar el comportamiento asintótico de sus soluciones (cuando el parámetro se hace grande) y conocer el comportamiento asintótico de la solución o soluciones que queremos evaluar. Para analizar cómo pueden ser las soluciones, una herramienta útil es el teorema de Perron-Kreuser [21] (generalización del teorema de Poincaré [29]), que esencialmente viene a decir que, dada una recurrencia lineal $\sum_{i=0}^k a_n^{(i)} y_n = 0$ con coeficientes $a_n^{(i)}$ algebraicos, las soluciones son tales que los cocientes y_n/y_{n-1} se comportan asintóticamente como las raíces de la ecuación algebraica $\sum_{i=0}^k a_n^{(i)} \lambda^n = 0$ (aunque con ciertas matizaciones para los casos degenerados). Los diagramas de Newton-Puiseux permiten analizar de forma sencilla la estructura del espacio de soluciones de la ecuación en diferencias.

Para más detalles, particularmente para ecuaciones de segundo orden, remitimos a [15, capítulo 4] y [7, capítulo 8]. Para órdenes superiores, remitimos a la referencia original [21]; una descripción más reciente la encontramos en [4].

2.7. CUADRATURA NUMÉRICA

Otra forma de obtener valores para las funciones de Airy para valores intermedios de la variable (no necesariamente real) es considerar representaciones integrales. Las representaciones integrales pueden ser interesantes tanto desde el punto de vista numérico como asintótico y, de hecho, algunas ideas del análisis asintótico son el punto de partida para la obtención de representaciones integrales numéricamente estables.

El problema inicial consiste en obtener alguna representación integral que pueda ser útil desde un punto de vista numérico. En el caso de la ecuación de Airy es sencillo comprobar que una solución se puede escribir, para x real, como

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos(t^3/3 + xt) dt, \quad (2.12)$$

que es justamente la solución $\text{Ai}(x)$ que hemos comentado con anterioridad. Éste es un ejemplo de representación integral aparentemente sencilla pero poco útil numéricamente. La integral converge porque el integrando es oscilante y las contribuciones positivas son compensadas por las negativas para dar un resultado finito; esto es un desastre para la integración numérica pues se produce una severa pérdida de precisión por cancelaciones.

Una representación integral más interesante es la siguiente:

$$\text{Ai}(z) = \frac{1}{2\pi} e^{-\zeta} \int_0^\infty e^{-z^{1/2}t} \cos\left(\frac{1}{3}t^{3/2}\right) t^{-1/2} dt, \quad \zeta = \frac{2}{3}z^{3/2}.$$

En [5] se dan detalles sobre cómo obtener esta representación. El término fuera del signo integral muestra que ésta es la solución recesiva en $|\arg z| < \pi/3$. Observando el integrando, comprobamos cómo la principal contribución para z grande viene de t próximo a cero. Reemplazando el coseno por 1 tenemos una primera estimación $\text{Ai}(x) \sim (2\sqrt{\pi})^{-1} z^{-1/4} \exp(\zeta)$, que es el comportamiento ya conocido (2.8). Y si reemplazamos el coseno por su serie de Maclaurin e integramos término a término obtenemos el desarrollo (2.8). Para integrales de tipo Laplace, el lema de Watson [15, teorema 2.13], justifica el procedimiento y prueba su carácter asintótico.

También podemos utilizar la anterior integral para evaluar numéricamente $\text{Ai}(z)$, particularmente para z positivo y grande. La integral tiene un factor exponencialmente decreciente, que es usualmente una situación favorable para la regla trapezoidal, y algún cambio de variable puede además mejorar la convergencia. Las oscilaciones del integrando en este caso no son importantes, porque el factor exponencial hace que la amplitud de la oscilación decrezca rápidamente. Sin embargo, para z pequeño habría que integrar muchas oscilaciones para obtener un resultado preciso, lo que daría lugar a pérdida de cifras significativas por cancelación. Por lo tanto, conviene encontrar una representación integral alternativa.

Algunas ideas utilizadas para obtener aproximaciones asintóticas de integrales resultan interesantes para obtener nuevas representaciones integrales numéricamente estables. En particular, partiendo de representaciones integrales en el plano complejo es posible, en algunos casos, encontrar representaciones integrales con integrandos no oscilantes. En el caso de la función de Airy, tenemos la siguiente representación integral [26, 9.5.4], válida para cualquier z complejo:

$$\text{Ai}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{\phi(w)} dw, \quad \phi(w) = \frac{1}{3}w^3 - zw, \quad (2.13)$$

donde C es un contorno en el plano complejo que empieza en $\infty e^{-\pi i/3}$ y termina en $\infty e^{+\pi i/3}$. Deformando el camino de integración (teniendo en cuenta el teorema de Cauchy), veremos cómo se puede conseguir que la función compleja $\phi(w)$ tenga parte imaginaria constante a lo largo del nuevo camino de integración, de forma que el integrando no sea oscilante sobre este camino. Este camino (de descenso más rápido) pasa por alguno(s) de los puntos de silla de ϕ , que son solución de $\phi'(w) = 0$, que en este caso son $w_\pm = \pm\sqrt{z}$. Cerca de los puntos de silla, el integrando tiene su máxima contribución, y, lejos, el integrando decae rápidamente de forma exponencial. Este tipo de integrales con decrecimiento exponencial (y sin oscilaciones) son adecuadas para un tratamiento numérico y, en particular, es interesante considerar la regla trapezoidal como método de cuadratura (ver [15, secciones 5.2 y 5.4], así como el reciente artículo de revisión [36]).

Antes de abordar el caso de la función de Airy, que vamos a describir con cierto detalle, vamos a dar un ejemplo sencillo de este tipo de procedimiento. Un ejemplo

elemental de este «pre-procesamiento» para encontrar representaciones estables y eficientemente evaluables mediante la regla trapezoidal nos lo proporciona la siguiente integral:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(w^2/2 + xw) dw = \Re(F),$$

$$F = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\phi(w)} dw, \quad \phi(t) = i(w^2/2 + xw),$$

que es una integral con los mismos problemas de cancelación que tenía nuestra primera representación integral para la función de Airy (2.12).

El punto de silla se obtiene mediante

$$\phi'(w_0) = 0 \Rightarrow w_0 = -x,$$

y el camino $w = v - x + iv$, $v \in (-\infty, +\infty)$, que pasa por el punto de silla, es el de descenso más rápido y proporciona el mismo resultado que el camino original, en primer lugar porque se puede deformar el camino original al nuevo camino sin cruzar ninguna singularidad y, en segundo, porque la deformación se hace dentro de los «valles» de la función $|e^{\phi(w)}|$, de tal manera que el resultado es el mismo aunque los puntos inicial y final no lo sean. Tenemos entonces, siendo $dw = (1 + i)dv$, $\Re(\phi(w)) = -v^2$, que

$$F = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\phi(w)} dw = e^{\phi(w_0)}(1 + i) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2} dv.$$

La integral que queda tiene su máxima contribución en el punto de silla $v = 0$ y es perfectamente adecuada para aplicarle la regla trapezoidal, cosa que en este caso no hace falta pues sabemos que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2} dv = \sqrt{\pi}$. Con esto, $F = e^{-ix^2/2}(1 + i)\sqrt{\pi}$ e $I = \sqrt{2\pi} \cos(x^2/2 - \pi/4)$.

Volvamos a la representación integral (2.13) y vamos ahora a describir con cierto detalle cómo se puede obtener una representación numéricamente estable a partir de ella utilizando estas ideas. En este ejemplo tomaremos $\arg z \in [0, \frac{2}{3}\pi]$.

Denotamos $\phi(w) = \frac{1}{3}w^3 - zw$. Los puntos de silla son $w_0 = \sqrt{z}$ y $-w_0$, y se obtienen resolviendo $\phi'(w) = w^2 - z = 0$. El contorno de punto de silla (camino de descenso más rápido) que transcurre a través del punto de silla w_0 se define mediante $\Im[\phi(w)] = \Im[\phi(w_0)]$.

Escribimos

$$z = x + iy = re^{i\theta}, \quad w = u + iv, \quad w_0 = u_0 + iv_0.$$

Entonces,

$$u_0 = \sqrt{r} \cos \frac{1}{2}\theta, \quad v_0 = \sqrt{r} \sin \frac{1}{2}\theta, \quad x = u_0^2 - v_0^2, \quad y = 2u_0v_0.$$

El camino de descenso más rápido a través de w_0 está dado por la ecuación

$$u = u_0 + \frac{(v - v_0)(v + 2v_0)}{3 \left[u_0 + \sqrt{\frac{1}{3}(v^2 + 2v_0v + 3u_0^2)} \right]}, \quad -\infty < v < \infty.$$

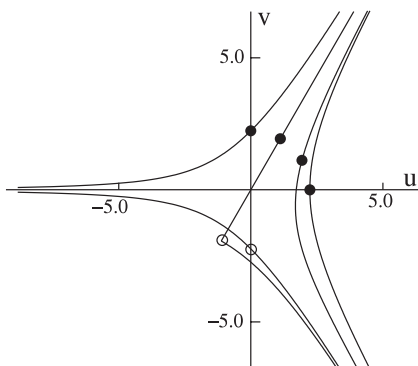


Figura 2: Contornos de punto de silla para $\theta = 0, \frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi, \pi$ y $r = 5$.

Ejemplos de estos contornos para $r = 5$ y unos pocos valores de θ se muestran en la figura 2. Los puntos de silla relevantes están localizados sobre el círculo de radio $\sqrt{r}$ y se indican con puntos pequeños.

El punto de silla sobre el eje real positivo corresponde al caso con $\theta = 0$, y los dos sobre el eje imaginario corresponden al caso $\theta = \pi$. Es interesante comprobar que el contorno se puede dividir y pasar por ambos puntos de silla $\pm w_0$. Cuando $\theta = \frac{2}{3}\pi$ ambos puntos de silla están sobre un mismo camino; éste es el caso correspondiente a valores de z sobre la línea de Stokes $\arg z = 2\pi/3$.

Integrando con respecto a $\tau = v - v_0$ (y escribiendo $\sigma = u - u_0$) obtenemos

$$\text{Ai}(z) = \frac{e^{-\zeta}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\psi_r(\sigma, \tau)} \left(\frac{d\sigma}{d\tau} + i \right) d\tau, \quad (2.14)$$

donde $\zeta = \frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}$, y

$$\sigma = \frac{\tau(\tau + 3v_0)}{3 \left[u_0 + \sqrt{\frac{1}{3}(\tau^2 + 4v_0\tau + 3r)} \right]}, \quad -\infty < \tau < \infty,$$

$$\psi_r(\sigma, \tau) = \Re[\phi(w) - \phi(w_0)] = u_0(\sigma^2 - \tau^2) - 2v_0\sigma\tau + \frac{1}{3}\sigma^3 - \sigma\tau^2.$$

La representación integral para la función de Airy en (2.14) es ahora adecuada para la aplicación de la regla trapezoidal.

La regla trapezoidal es una buena regla de cuadratura, además de sencilla, para muchos ejemplos de funciones especiales. En algunos otros casos, las reglas de cuadratura gaussianas pueden ser una elección interesante, particularmente cuando está disponible alguna representación con un peso clásico. Éste es el caso de la función de Airy, que se puede evaluar eficientemente tanto con la regla trapezoidal como con integración de Gauss-Laguerre.

Para la integración de Gauss-Laguerre, utilizaríamos la representación integral [26, 9.5.8]

$$\text{Ai}(z) = \frac{z^{-\frac{1}{4}} e^{-\zeta}}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{5}{6})} \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{t}{2\zeta} \right)^{-\frac{1}{6}} t^{-\frac{1}{6}} e^{-t} dt,$$

donde

$$\zeta = \frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}, \quad |\arg \zeta| < \pi \quad (\text{luego } |\arg z| < \frac{2}{3}\pi).$$

Ésta es una representación integral interesante para evaluación numérica. Observemos que el término dominante $e^{-\zeta}$ aparece explícitamente factorizado. La integral parece adecuada para una integración de Gauss-Laguerre de parámetro $\alpha = -1/6$ (correspondiente a la función peso $t^{-\frac{1}{6}}e^{-t}$), pues la función $f(t) = (1 + t/\zeta)^{-1/6}$ tiene derivadas pequeñas, particularmente si $|z|$ es grande, con lo que el error de truncamiento es pequeño en este caso.

En [11] se investigó esta integral también para z complejo. La principal dificultad en este caso estriba en que aparece una singularidad cuando $t = -2\zeta$, que se aproxima al semieje real positivo cuando $\theta \rightarrow \pm 2\pi/3$.

Esto se puede remediar girando el camino de integración. Si $|\theta| \in [\frac{1}{2}\pi, \frac{2}{3}\pi]$ giramos el camino considerando la sustitución $t \mapsto t(1 + i \tan \tau)$. Obtenemos entonces la representación

$$\text{Ai}(z) = \left(\frac{e^{i\tau}}{\cos \tau} \right)^{\frac{5}{6}} \frac{z^{-\frac{1}{4}} e^{-\zeta}}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{5}{6})} \int_0^\infty e^{-it \tan \tau} \left(1 + \frac{t}{2\zeta'} \right)^{-\frac{1}{6}} t^{-\frac{1}{6}} e^{-t} dt,$$

donde

$$\zeta' = \zeta e^{-i\tau} \cos \tau,$$

y τ es el ángulo de giro del camino de integración. Una interesante elección del giro es $\tau = \frac{3}{2}(\theta - \frac{1}{2}\pi)$. Con esto, la nueva integral coincide con la anterior para $\theta = \pi/2$ y, si $\pi/2 < \theta \leq 3\pi/2$, la nueva integral está libre de singularidades

De esta forma, la integración de Gauss-Laguerre se puede utilizar en todo el sector $|\theta| \leq \frac{2}{3}\pi$. La integral es interesante para $|z|$ no muy pequeño. En concreto, esta representación se utilizó en [11] cuando las series de Maclaurin no alcanzaban suficiente precisión (fuera de la región $|y| < 3$, $-2.6 < x < 1.3$).

2.8. ENSAMBLANDO LOS MÉTODOS PARA CALCULAR FUNCIONES DE AIRY

Para el caso particular de las funciones de Airy, es posible escribir algoritmos eficientes y precisos de cálculo para cualesquiera valores complejos de z , limitados por problemas de *overflow* o *underflow*. Es más, para funciones escaladas (extrayendo el factor dominante) no hay restricción alguna.

En resumen, para calcular las funciones de Airy se puede utilizar la siguiente combinación de métodos:

- Series de Maclaurin para $|z|$ pequeño.
- Desarrollos asintóticos para $|z|$ grande.
- Cuadratura numérica para valores de $|z|$ intermedios (tanto la cuadratura gaussiana [11] como la trapezoidal [11] dan excelentes resultados).

La cuadratura numérica en la zona intermedia puede sustituirse por integración de la ecuación diferencial, tal como hemos explicado anteriormente (ver [8]).

Además de estos métodos, para x real son interesantes las aproximaciones de tipo Chebyshev.

Acabamos de discutir el ejemplo de evaluación de la función de Airy. El hecho de que sean necesarias distintas aproximaciones según el rango de parámetros es lo habitual en la construcción de software numérico. Por lo general, distintos comportamientos de la función requieren distintas aproximaciones. En ese sentido, sería interesante introducir brevemente algún ejemplo de desarrollo asintótico uniforme, en particular alguna de tipo Airy. Finalizamos esta sección con un breve comentario sobre este tipo de desarrollos.

2.9. DESARROLLOS ASINTÓTICOS UNIFORMES

Para evaluar funciones que dependen de uno o varios parámetros, ciertas técnicas asintóticas permiten la obtención de desarrollos válidos para parámetros grandes uniformemente sobre la variable. Consideremos, por ejemplo, el caso de las funciones del cilindro parabólico, soluciones de la ecuación diferencial

$$y''(x) - \left(\frac{x^2}{4} + a \right) y(x) = 0. \quad (2.15)$$

Un par de soluciones numéricamente satisfactorio se denota por $U(a, x)$, $V(a, x)$ [34] que, salvo por un factor dependiente de a (una función gamma), satisfacen también la misma relación de recurrencia a tres términos (y es un par satisfactorio numéricamente tanto en función de x como a cuando para valores grandes y reales de los parámetros).

Cuando $x^2/4 + a < 0$, las soluciones de (2.15) son oscilantes y, cuando $x^2/4 + a > 0$, monótonas. Para valores cercanos a la zona de transición $x^2/4 + a = 0$, las funciones pasan de ser oscilantes a monótonas. Es de esperar, como así ocurre, que dependiendo de la zona en la que estemos, existan desarrollos asintóticos respecto a a de distinto tipo. En las zonas $x^2/4 + a \gg 0$ y $x^2/4 + a \ll 0$ existen desarrollos en términos de funciones elementales (exponenciales y trigonométricas) válidos en estas zonas. Por otra parte, para una adecuada descripción asintótica para a negativo y grande, la transición de la zona monótona a la oscilatoria se puede hacer en términos de funciones de Airy.

El cambio lineal $z = \sqrt{2}\mu t$, $\mu = \sqrt{2|a|}$, lleva la ecuación a la forma simplificada

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \mu^4 (t^2 - e^{i\alpha}) y = 0, \quad e^{i\alpha} = a/|a|.$$

Dada una ecuación diferencial $y''(t) + A(t)y(t)$, y un cambio de variable $\zeta(t)$, la función $Y(t) = \sqrt{\zeta'(t)}y(t)$ satisface, en la variable ζ , la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2 Y}{d\zeta^2} + i^2 \left[A(t(\zeta)) + i^{1/2} \frac{d^2}{d\zeta^2} i^{1/2} \right] Y = 0, \quad t = \frac{dt}{d\zeta}.$$

Estas transformaciones son el punto de partida para algunos desarrollos uniformes.

Consideremos $a < 0$ y empecemos por el caso monótono. Para $x^2/4 + a \gg 0$, es decir, $t^2 - 1 \gg 0$, con el cambio

$$\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2 = A(t),$$

y después de comprobar que el segundo término es suficientemente pequeño (remitemos a [25] para un tratamiento riguroso y detallado), tenemos que el coeficiente de la ecuación diferencial es aproximadamente 1, de lo que se sigue el comportamiento asintótico dominante de las soluciones (lo que se conoce como aproximación de Liouville-Green). Términos adicionales del desarrollo se obtienen considerando el término despreciado en la primera aproximación.

Para la zona de transición, se puede considerar el cambio

$$\zeta \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2 = A(t),$$

que lleva, cuando el segundo término sea despreciable, a la ecuación de Airy. Los desarrollos resultantes tienen como factor principal una función de Airy, que describe adecuadamente el comportamiento en la zona de transición. Términos adicionales se pueden obtener con desarrollo en potencias negativas de μ si no despreciamos el segundo término. La teoría general de este tipo de desarrollos la encontramos en el libro de Olver [25, capítulo 11]. Los mismos desarrollos pueden obtenerse también a partir de representaciones integrales. El cálculo de los coeficientes del desarrollo es una tarea no exenta de dificultad de cálculo y evaluación, pero la recompensa es grande, pues permite calcular la función en un amplio rango de parámetros (siempre que se disponga de un método de evaluación de las funciones de Airy).

2.10. ESTO Y LO OTRO

Evidentemente, no todos los métodos que se utilizan para la evaluación de funciones se pueden tratar en la limitada extensión de un artículo. Quedarán sin tratar algunos temas relevantes de cuadratura numérica (como algunos métodos para integrandos oscilantes), de aproximación (como aproximaciones Chebyshev racionales) y de solución de ecuaciones no lineales (los ceros de funciones especiales son importantes en múltiples aplicaciones); en este último tema, cabe citar los recientes métodos de cuarto orden desarrollados en [31] y [32].

3. MÁS ALLÁ DE LA FUNCIÓN DE AIRY

La función de Airy, que hemos utilizado para introducir diversos métodos de evaluación de funciones, es una pequeña (pero importante) pieza dentro del conjunto de funciones hipergeométricas confluentes, soluciones de la ecuación diferencial

$$xy'' + (b - x)y' - ay = 0, \tag{3.1}$$

una de cuyas soluciones se denota por ${}_1F_1(a; b; x)$ (ver la definición general (2.1)). También son importantes en aplicaciones, como hemos mencionado, las funciones hipergeométricas de Gauss, soluciones de

$$x(1-x)y''(x) + [c - (a+b+1)x]y' - aby = 0, \quad (3.2)$$

una de cuyas soluciones es ${}_2F_1(a, b; c; x)$.

Utilizando que dada una EDO de segundo orden

$$y''(x) + B(x)y'(x) + A(x)y(x) = 0,$$

tenemos que $w(x) = \exp\left(\frac{1}{2} \int B(x) dx\right) y(x)$ satisface

$$w''(x) + [A(x) - B'(x)/2 - B(x)^2/4]w(x) = 0.$$

Con este cambio, las ecuaciones hipergeométricas (3.2) y (3.1) se transforman, respectivamente, en ecuaciones de la forma

$$w''(x) + \left[\frac{\alpha}{x(1-x)} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\gamma}{(1-x)^2} \right] w(x) = 0$$

y

$$w''(x) + \left[\alpha + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x^2} \right] w(x) = 0.$$

La situación dista mucho de estar completamente resuelta para estas dos ecuaciones en el sentido de que exista solución completamente satisfactoria al problema para cualesquiera valores de los parámetros, ni siquiera si son reales. Para la segunda ecuación, y restringiéndonos al caso en que el coeficiente no tiene término en $1/x$, tenemos la ecuación para las funciones de Bessel, que resulta conveniente escribir en la forma

$$w''(x) + \left[\alpha - \frac{\nu^2 - 1/4}{x^2} \right] w(x) = 0, \quad \alpha = \pm 1.$$

Incluso para este caso, no está todo el trabajo hecho cuando los coeficientes son reales. En este caso tenemos $\nu^2 \in \mathbb{R}$, y esto nos da las siguientes posibilidades para x real:

1. $\nu \in \mathbb{R}$: funciones de Bessel de orden real.

a) $\alpha = 1$, funciones de Bessel.

Par satisfactorio: $\{\sqrt{x}J_\nu(x), \sqrt{x}Y_\nu(x)\}$.

b) $\alpha = -1$, funciones de Bessel modificadas.

Par satisfactorio: $\{\sqrt{x}I_\nu(x), \sqrt{x}K_\nu(x)\}$.

2. $\nu = ia$, $a \in \mathbb{R}$: funciones de Bessel de orden imaginario.

a) $\alpha = 1$, funciones ordinarias de Bessel de orden imaginario.

Par satisfactorio: $\{\sqrt{x}K_{ia}(x), \sqrt{x}L_{ia}(x)\}$.

b) $\alpha = -1$, funciones de Bessel modificadas de orden imaginario.

Par satisfactorio: $\{\sqrt{x}F_a(x), \sqrt{x}G_a(x)\}$.

Los dos primeros grupos de funciones son estándar y existen desde hace décadas algoritmos satisfactorios [2]. Sin embargo, los dos últimos grupos de funciones se definen en [6], y no hace tanto tiempo que se obtuvo una solución completa y satisfactoria para el caso de las funciones $K_{ia}(x)$, $L_{ia}(x)$ [13, 12], a pesar de sus múltiples aplicaciones. Para $\{F_a(x), G_a(x)\}$ no existe ningún algoritmo, a pesar de que es un caso con aplicaciones en física. Claramente, es un objetivo a considerar entre los muchos posibles.

Un caso en el que está resuelto el problema de forma completamente satisfactoria es para las funciones del cilindro parabólico $\{U(a, x), V(a, x)\}$ [14], soluciones de (2.15). Para el caso de la misma ecuación, pero con signo menos en el término en x^2 , se tiene solución satisfactoria numéricamente [17], pero no completamente satisfactoria en el sentido de la sección 2.2.2. En otros casos, como en la evaluación de funciones cónicas (dentro del conjunto de las funciones hipergeométricas de Gauss), de momento sólo se tienen métodos para una de las soluciones [16, 19], aunque estamos en la actualidad trabajando en la construcción de pares satisfactorios.

3.1. MÁS ALLÁ DE LAS FUNCIONES HIPERGEOMÉTRICAS

En este artículo hemos tratado en todo momento con funciones que son soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden y, más en concreto, hemos considerado funciones de tipo hipergeométrico (Gauss y confluyente), para las que todavía queda trabajo por hacer. El problema de la evaluación numérica de funciones no acaba aquí y, por supuesto, hay importantes funciones especiales que, o bien no están definidas a partir de ecuaciones diferenciales, o bien satisfacen ecuaciones diferenciales de otro tipo.

Un ejemplo del primer caso sería la función gamma, para la que existe una considerable variedad de algoritmos disponibles. Otras funciones relacionadas son las funciones gamma incompletas (que sí están en la familia de hipergeométricas confluentes), y los cocientes de funciones gamma incompletas sobre la función gamma, que son las conocidas funciones de distribución acumulada χ^2 centradas (algoritmos para su cálculo e inversión son descritos en [18]). Otras funciones importantes que generalizan los cocientes de funciones gamma son las funciones de Marcum, que tienen como caso particular las funciones de distribución acumulada χ^2 no centradas. La función Marcum- Q se define como

$$Q_\mu(x, y) = x^{\frac{1}{2}(1-\mu)} \int_y^{+\infty} t^{\frac{1}{2}(\mu-1)} e^{-t-x} I_{\mu-1}(2\sqrt{xt}) dt$$

y su función complementaria $P_\mu(x, y)$ se define igual que $Q_\mu(x, y)$ pero con 0 como extremo inferior de integración y y como extremo superior; se cumple que $Q_\mu(x, y) + P_\mu(x, y) = 1$. Recientemente se han desarrollado algoritmos para estas funciones [20] que demuestran ser cientos de veces más eficientes que los algoritmos disponibles en Matlab y Mathematica, a la vez que más fiables; un siguiente paso será el de la obtención de algoritmos de inversión rápida.

En el segundo caso, tendríamos funciones que satisfacen otro tipo de ecuaciones diferenciales. Entre estos casos están las funciones hipergeométricas generalizadas

(2.1) con $q > 1$, que satisfacen ecuaciones de orden mayor que 2. Otra interesante familia de funciones es el de las funciones de Heun [33], que están en una categoría diferente a la de las hipergeométricas generalizadas. Las funciones de Heun satisfacen ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes polinómicos, pero se diferencian de las funciones hipergeométricas en el número de singularidades: son cuatro puntos singulares regulares. Un ejemplo interesante, que aparece en un gran número de aplicaciones físicas, es la de la función de Heun confluyente, en la que dos singularidades regulares confluyen en ∞ ; la ecuación de Heun confluyente tiene entonces dos singularidades regulares (en 0 y 1) y una singularidad irregular en ∞ . Tras escribir la ecuación en forma normal con un cambio de función elemental, llegamos a una ecuación del tipo

$$y''(z) + \left[A + \frac{B}{z} + \frac{C}{z^2} + \frac{D}{z-1} + \frac{E}{(z-1)^2} \right] y(z) = 0.$$

Es de destacar lo poco que se conoce de las soluciones de esta ecuación diferencial, empezando porque no existen aproximaciones asintóticas manejables. Incluso las series de Frobenius no son triviales en el sentido de que los coeficientes satisfacen relaciones de recurrencia para los que no hay solución explícita. El único software disponible para esas funciones es, hasta el momento, los comandos Maple que utilizan la integración de la ecuación diferencial para calcular soluciones, que parecen ser algo lentos y no siempre precisos. Éste puede ser un interesante problema a considerar.

4. ACERCA DEL SOFTWARE PARA EL CÁLCULO DE FUNCIONES ESPECIALES

Finalizamos este artículo con algunas consideraciones respecto al software de cálculo de funciones especiales, que es el objetivo final del estudio numérico de las funciones especiales.

4.1. VALIDACIÓN DE SOFTWARE

Una vez que se dispone de un determinado método confiable, el siguiente paso natural es la construcción del algoritmo numérico correspondiente. Para tal labor, es imprescindible verificar la exactitud del algoritmo para suprimir la posibilidad de errores de programación y para certificar la precisión del algoritmo. Hay que tener en cuenta, por otra parte, que, muy frecuentemente, son estos tests numéricos los que delimitan la zona de validez de cada aproximación utilizada, puesto que es raro que se pueda acotar de forma razonablemente sencilla el error de cada método. Lo habitual es que la obtención de cotas de error realistas para los métodos numéricos empleados, sobre todo cuando son funciones con varios parámetros, sea tan complicado, o más, que la evaluación de las propias funciones. En cualquier caso, incluso disponiendo de cotas de error rigurosas, es siempre necesaria una verificación computacional de la precisión real del algoritmo.

Pueden ser varios los métodos de verificación de un algoritmo, entre ellos:

1. Comparación con otros algoritmos, con el inconveniente de que la precisión verificable viene limitada por el algoritmo de comparación.
2. Consistencia entre métodos de evaluación dentro de un mismo algoritmo. Un algoritmo puede utilizar diversos métodos de aproximación para los que puede haber regiones de las variables en las que dos o más métodos distintos son válidos.
3. Verificación de identidades funcionales, tales como wronskianos, valores especiales (por ejemplo ceros), sumas, etc. Es, por supuesto, esencial cerciorarse de la estabilidad de las relaciones empleadas. Por ejemplo, en la verificación de las funciones de Airy en el plano complejo, la relación

$$W[\text{Ai}(z), \text{Bi}(z)] = \text{Ai}(z) \text{Bi}'(z) - \text{Ai}'(z) \text{Bi}(z) = \frac{1}{\pi}$$

sólo es estable para $|\arg z| \leq \pi/3$, donde $\text{Ai}(z)$ es recesiva cuando $|z| \rightarrow \infty$ y $\text{Bi}(z)$ dominante. Fuera de este sector, ambas funciones son dominantes de forma que, para $|z|$ grande, el valor $\frac{1}{\pi}$ se obtendría por cancelación de dos cantidades exponencialmente grandes, por lo que la identidad no sería útil para verificar el algoritmo numéricamente.

4. Comparación en aritmética extendida. Consiste en comparar un algoritmo con otra versión del mismo algoritmo que utilice una aritmética con un mayor número de cifras. Este tipo de comparaciones sólo demuestran la consistencia del método y sirven para estimar la precisión bajo la suposición de que funcione correctamente.
5. Series de Taylor. Conocido el valor de una función y su primera derivada en un punto, si la función satisface una EDO de segundo orden «sencilla», podemos obtener derivadas sucesivas diferenciando en la EDO. Esto nos permite construir una serie de Taylor con la que podemos verificar los valores de la función y su primera derivada en puntos en cierto entorno del punto en el que se está construyendo el desarrollo.

4.2. ALGUNAS FUENTES DE SOFTWARE NUMÉRICO

Conocidas plataformas de software en precisión extendida, como Mathematica y Maple, disponen de buenos (habitualmente) algoritmos para el cálculo de una gran variedad de funciones especiales. Sin embargo, las funciones implementadas en estas plataformas no son adecuadas para cálculos computacionales intensivos que requieran rapidez y eficiencia; por otra parte, la precisión no siempre está verificada, como por ejemplo se observa en [20]. Por otra parte, existen diversos libros publicados que incluyen software para funciones especiales: conviene mencionar [3, 24, 30, 35], por citar algunos. Asimismo en la red hay disponibles numerosas colecciones de software para funciones especiales, como por ejemplo la librería matemática Cephes¹

¹<http://www.moshier.net>

o repositorios más generales como Netlib², la librería de programas de CPC³ o CALGO⁴. Estos dos últimos repositorios incluyen el software asociado a los artículos publicados en *ACM Transactions on Mathematical Software* y *Computer Physics Communications* respectivamente, por lo que las rutinas tienen la garantía de estar verificadas.

Una revisión extensa del software disponible para funciones especiales hasta el año 2000 puede consultarse en [22] (esta revisión de software fue publicada en 1994 y luego actualizada en el año 2000). Por su parte, el *NIST Handbook* [27] incluye referencias a software numérico en cada uno de sus capítulos, en lugar de las tablas numéricas del antiguo *Handbook* [1].

REFERENCIAS

- [1] M. ABRAMOWITZ Y I. A. STEGUN, *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, National Bureau of Standards Applied Mathematics Series **55**, US Printing Office, 1964. Disponible en <http://people.math.sfu.ca/~cbm/aands/>
- [2] D. E. AMOS, Algorithm 644: a portable package for Bessel functions of a complex argument and nonnegative order, *ACM Trans. Math. Software* **12** (1986), 265–273.
- [3] L. BAKER, *C Mathematical Function Handbook*, Programming Tools For Engineers and Scientists, McGraw-Hill, New York, 1992.
- [4] J. R. CASH, A note on the numerical solution of linear recurrence relations, *Numer. Math.* **34** (1980), 371–386.
- [5] E. T. COPSON, *Asymptotic Expansions*, Cambridge Tracts in Mathematics **55**, Cambridge University Press, Cambridge, 2004 (reimpresión del original de 1965).
- [6] T. M. DUNSTER, Bessel functions of purely imaginary order, with an application to second-order linear differential equations having a large parameter, *SIAM J. Math. Anal.* **21** (1990), 995–1018.
- [7] S. N. ELAYDI, *An introduction to difference equations*, Springer, New York, 2005.
- [8] B. R. FABIJONAS, D. W. LOZIER Y F. W. J. OLVER, Computation of complex Airy functions and their zeros using asymptotics and the differential equation, *ACM Trans. Math. Software* **30** (2004), 471–490.
- [9] A. GIL Y J. SEGURA, Evaluation of toroidal harmonics, *Comput. Phys. Comm.* **124** (2000), 104–122.
- [10] A. GIL, J. SEGURA Y N. M. TEMME, Algorithm 819: AIZ, BIZ: two Fortran 77 routines for the computation of complex Airy functions, *ACM Trans. Math. Software* **28** (2002), 325–336.

²<http://www.netlib.org/>

³<http://www.cpc.cs.qub.ac.uk>

⁴<http://calgo.acm.org>

- [11] A. GIL, J. SEGURA Y N. M. TEMME, Computing complex Airy functions by numerical quadrature, *Numer. Algorithms* **30** (2002), 11–23.
- [12] A. GIL, J. SEGURA Y N. M. TEMME, Algorithm 831: Modified Bessel functions of imaginary order and positive argument, *ACM Trans. Math. Software* **30** (2004), 159–164.
- [13] A. GIL, J. SEGURA Y N. M. TEMME, Computing solutions of the modified Bessel differential equation for imaginary orders and positive arguments, *ACM Trans. Math. Software* **30** (2004), 145–158.
- [14] A. GIL, J. SEGURA Y N. M. TEMME, Computing the real parabolic cylinder functions $U(a, x)$, $V(a, x)$, *ACM Trans. Math. Software* **32** (2006), 70–101.
- [15] A. GIL, J. SEGURA Y N. M. TEMME, *Numerical Methods for Special Functions*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2007.
- [16] A. GIL, J. SEGURA Y N. M. TEMME, Computing the conical function $P_{-1/2+i\tau}^{\mu}(x)$, *SIAM J. Sci. Comput.* **31** (2009), 1716–1741.
- [17] A. GIL, J. SEGURA Y N. M. TEMME, Fast and accurate computation of the Weber parabolic cylinder function $W(a, x)$, *IMA J. Numer. Anal.* **31** (2011), 1194–1216.
- [18] A. GIL, J. SEGURA Y N. M. TEMME, Efficient and accurate algorithms for the computation and inversion of the incomplete gamma function ratios, *SIAM J. Sci. Comput.* **34**(6) (2012), A2965–A2981.
- [19] A. GIL, J. SEGURA Y N. M. TEMME, An improved algorithm and a Fortran 90 module for computing the conical function, *Comput. Phys. Comm.* **183** (2012), 794–799.
- [20] A. GIL, J. SEGURA Y N. M. TEMME, Computation of the Marcum Q -function, *ACM Trans. Math. Software*, aceptado (2013).
- [21] P. KREUSER, Über das Verhalten der Integrale homogener linearer Differenzengleichungen im Unendlichen, Dissertation (Tübingen), Borna-Leipzig, 1914.
- [22] D. W. LOZIER Y F. W. J. OLVER, Numerical evaluation of special functions, *Mathematics of Computation 1943–1993: a half-century of computational mathematics (Vancouver, BC, 1993)*, *Proc. Sympos. Appl. Math.* **48**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, pp. 79–125. Ver actualizaciones en <http://math.nist.gov/mcsd/Reports/2001/nesf/>
- [23] J. C. MASON Y D. C. HANDSCOMB, *Chebyshev polynomials*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2003.
- [24] S. L. B. MOSHIER, *Methods and Programs for Mathematical Functions*, Ellis Horwood Series: Mathematics and its Applications, Ellis Horwood, Chichester, 1989.
- [25] F. W. J. OLVER, *Asymptotics and special functions*, AKP Classics, A K Peters, Wellesley, MA, 1997 (reimpresión del original de 1974, Academic Press, New York).
- [26] F. W. J. OLVER, Airy and related functions, *NIST handbook of mathematical functions*, U.S. Dept. Commerce, Washington, DC, 2010, pp. 193–213.

- [27] F. W. J. OLVER, D. W. LOZIER, R. F. BOISVERT Y C. W. CLARK (EDITORES), *NIST Handbook of Mathematical Functions*, Cambridge University Press, 2010. Versión electrónica disponible en <http://dlmf.nist.gov>
- [28] F. W. J. OLVER Y L. C. MAXIMON, Bessel functions, *NIST handbook of mathematical functions*, U.S. Dept. Commerce, Washington, DC, 2010, pp. 215–286.
- [29] H. POINCARÉ, Sur les Equations Lineaires aux Differentielles Ordinaires et aux Differences Finies, *Amer. J. Math.* **7** (1885), 203–258.
- [30] W. H. PRESS, S. A. TEUKOLSKY, W. T. VETTERLING Y B. P. FLANNERY, *Numerical Recipes in C++*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002, *The art of scientific computing, Second edition*, actualizado para C++.
- [31] J. SEGURA, Reliable computation of the zeros of solutions of second order linear ODEs using a fourth order method, *SIAM J. Numer. Anal.* **48** (2010), 452–469.
- [32] J. SEGURA, Computing the complex zeros of special functions, *Numer. Math.* **124** (2013), 723–752.
- [33] B. D. SLEEMAN Y V. B. KUZNETSOV, Heun functions, *NIST handbook of mathematical functions*, U.S. Dept. Commerce, Washington, DC, 2010, pp. 709–721.
- [34] N. M. TEMME, Parabolic cylinder functions, *NIST handbook of mathematical functions*, U.S. Dept. Commerce, Washington, DC, 2010, pp. 303–319.
- [35] W. J. THOMPSON, *An Atlas for Computing Mathematical Functions: An Illustrated Guide for Practitioners, with Programs in Fortran 90 and Mathematica*, Wiley-Interscience, New York, 1997.
- [36] L. N. TREFETHEN Y J. A. C. WEIDEMAN, The exponentially convergent trapezoidal rule. Disponible en <http://eprints.maths.ox.ac.uk/1734/>.

AMPARO GIL, DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA Y CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN, UNIVERSIDAD DE CANTABRIA, 39005-SANTANDER, SPAIN

Correo electrónico: amparo.gil@unican.es

Página web: <http://personales.unican.es/gila/>

JAVIER SEGURA, DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, ESTADÍSTICA Y COMPUTACIÓN, UNIVERSIDAD DE CANTABRIA, 39005 SANTANDER, SPAIN

Correo electrónico: javier.segura@unican.es

Página web: <http://personales.unican.es/segurajj/>

NICO M. TEMME, CWI, SCIENCE PARK 123, 1098 XG AMSTERDAM, THE NETHERLANDS

Correo electrónico: Nico.Temme@cw.nl

Página web: <http://homepages.cwi.nl/~nicot/>