

Incorporación de Medios Conductores en Simuladores FDTD Mediante una Discretización Óptima Basada en el Uso de Promedios Ponderados

Luis F. Velarde, José A. Pereda, Angel Vegas y Oscar González
 Dpto. de Ingeniería de Comunicaciones (DCom), Universidad de Cantabria.
 Email: pereda@dicom.unican.es

Abstract— This paper presents a new finite-difference scheme for the incorporation of conductive media in FDTD simulators. The method is based on the approximation of the current density term by a weighted average with, a priori, unknown coefficients. The optimum value for these coefficients are determined by minimizing the dispersion error inside the conductor. The cases of narrow and wide frequency band FDTD simulations are discussed. The superior performance of the proposed scheme over other existing approximations is shown.

Keywords— FDTD methods, Lossy dielectrics, Numerical Dispersion, Stability

I. INTRODUCCIÓN

EN la formulación original del método de las diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD), propuesta por Yee, solamente se consideraban medios dieléctricos ideales. Con el objeto de poder incluir en las simulaciones FDTD medios conductores basta con añadir un término de corriente de conducción, $\vec{J}_c = \sigma \vec{E}$, en la ecuación de Ampère-Maxwell y aproximarla, mediante diferencias finitas, de forma consistente con el esquema FDTD original. Durante las últimas dos décadas se han propuesto varias formas de realizar esta aproximación [1], [2], cada una de las cuales presenta sus propias características de exactitud y estabilidad [3]-[7].

En este trabajo se investiga una aproximación alternativa a las ya existentes, que llamaremos esquema promedio ponderado en el tiempo (*time-weighted-average*, TWA) y que consiste, simplemente, en discretizar el término de corriente de conducción como

$$\vec{J}_c^{n+\frac{1}{2}} \simeq \sigma \left(a \vec{E}^{n+1} + b \vec{E}^n \right),$$

donde a y b son coeficientes reales a determinar. Este esquema se puede considerar una generalización de otros esquemas ya conocidos. Así por ejemplo, para $a = b = \frac{1}{2}$ resulta el esquema centrado en el tiempo (*time-average*, TA) [1], para $a = 1, b = 0$, se obtiene el esquema hacia adelante en el tiempo (*time-forward*, TF) [2] y para $a = 0, b = 1$ resulta el esquema hacia atrás en el tiempo (*time-backward*, TB) [6].

Un vez obtenidas las nuevas ecuaciones FDTD para aplicar en regiones conductoras, hemos realizado un análisis

Este trabajo ha sido financiado mediante el proyecto TIC2003-09677-C03-01.

de la estabilidad del esquema TWA y hemos obtenido también su ecuación numérica de dispersión. A partir de esta última, se identifica el valor numérico de la permitividad compleja y se obtienen expresiones para calcular los valores numéricos de las longitudes de onda, $\tilde{\lambda}_c$, y de penetración por efecto pelicular, $\tilde{\delta}_s$.

Todo el estudio de estabilidad y dispersión se realiza con valores de a y b genéricos. Los valores particulares, de estos coeficientes, a emplear en una simulación FDTD se obtienen minimizando el error en $\tilde{\lambda}_c$ y $\tilde{\delta}_s$ para la conductividad de cada material. Los resultados analíticos obtenidos se han validado mediante simulaciones FDTD.

II. ESQUEMA DE DISCRETIZACIÓN

Consideremos las ecuaciones de Maxwell del rotacional para medios conductores

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -\mu_0 \frac{d\vec{H}}{dt}, \\ \nabla \times \vec{H} &= \epsilon \frac{d\vec{E}}{dt} + \sigma \vec{E}. \end{aligned}$$

Aproximando los operadores diferenciales anteriores por operadores en diferencias, obtenemos

$$\mathbf{R} \vec{E}^n = -\mu_0 \frac{\delta_t}{\Delta_t} \vec{H}^n \quad (1a)$$

$$\mathbf{R} \vec{H}^{n+\frac{1}{2}} = \epsilon \frac{\delta_t}{\Delta_t} \vec{E}^{n+\frac{1}{2}} + \sigma \left(a \mathbf{S}_t^{\frac{1}{2}} + b \mathbf{S}_t^{-\frac{1}{2}} \right) \vec{E}^{n+\frac{1}{2}} \quad (1b)$$

donde

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\delta_z}{\Delta_z} & \frac{\delta_y}{\Delta_y} \\ \frac{\delta_z}{\Delta_z} & 0 & -\frac{\delta_x}{\Delta_x} \\ -\frac{\delta_y}{\Delta_y} & \frac{\delta_x}{\Delta_x} & 0 \end{pmatrix}$$

representa el operador rotacional en su forma discreta. En las expresiones anteriores, \mathbf{S}_t es el operador desplazamiento definido como

$$\mathbf{S}_t^m F^n = F^{n+m}$$

y $\delta_\alpha = \mathbf{S}_\alpha^{\frac{1}{2}} - \mathbf{S}_\alpha^{-\frac{1}{2}}$, es el operador diferencia centrada respecto a la coordenada indicada en el subíndice.

Las ecuaciones (1a) y (1b) han sido obtenidas empleando el esquema de Yee y la aproximación TWA para el término de pérdidas. En principio, los coeficientes a y b con desconocidos. En lo que sigue, el objetivo será determinar qué

valores de a y b minimizan el error de esta aproximación en la resolución de problemas con medios conductores mediante FDTD. Es este estudio, emplearemos la restricción

$$b = 1 - a.$$

Para determinar los valores óptimos de a y b , necesitamos realizar antes un análisis de la estabilidad y obtener las expresiones numéricas de la longitud de onda y de penetración por efecto pelicular asociada al esquema TWA con a y b genéricos.

III. ESTABILIDAD

Para estudiar la estabilidad del esquema TWA emplearemos el método de von Neumann. Esta técnica establece que, para que un esquema en diferencias finitas sea estable, todas las raíces Z_i del polinomio de estabilidad $S(Z)$ deben estar situadas dentro o sobre el círculo unidad del plano complejo Z , esto es, $|Z_i| \leq 1 \forall i$.

Para obtener $S(Z)$ seguimos el desarrollo descrito en [5], lo que nos conduce al siguiente polinomio de estabilidad:

$$S(Z) = \left(1 + \frac{a}{\bar{\tau}}\right) Z^2 + \left(4\nu^2 - 2 - \frac{a-b}{\bar{\tau}}\right) Z + 1 - \frac{b}{\bar{\tau}}, \quad (2)$$

con $\bar{\tau} = \tau/\Delta_t$, siendo $\tau = \epsilon/\sigma$ la constante de relajación del medio conductor, y

$$\nu^2 = \frac{\Delta_t^2}{\epsilon\mu_0} \sum_{\alpha=x,y,z} \frac{\sin^2\left(\frac{\tilde{k}_\alpha \Delta_\alpha}{2}\right)}{\Delta_\alpha^2}.$$

A partir de la condición $|Z_{1,2}| \leq 1$ se obtiene el siguiente criterio de estabilidad:

$$\Delta_t \leq \Delta_{t_{\max}} = \sqrt{\epsilon\mu_0} \left(\sum_{\alpha=x,y,z} \frac{1}{\Delta_\alpha^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(A + \sqrt{A^2 + 1} \right), \quad (3)$$

donde

$$A = \frac{(a-b)\sqrt{\epsilon\mu_0}}{4\tau} \left(\sum_{\alpha=x,y,z} \frac{1}{\Delta_\alpha^2} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (4)$$

Además, deben verificarse las siguientes restricciones adicionales

$$\begin{aligned} \sigma &\geq 0, \\ a + b &\geq 0. \end{aligned}$$

Como puede observarse en (4), A es función de σ a través de τ ; en consecuencia, el paso temporal máximo permitido, $\Delta_{t_{\max}}$, es también función de σ . Además, A es función de a y b de tal forma que para $b > a$ se verifica $A < 0$ y $(A + \sqrt{A^2 + 1}) < 1$, con lo cual $\Delta_{t_{\max}}$ es menor que el del caso sin pérdidas; sin embargo, para $b < a$ entonces $A > 0$ y $(A + \sqrt{A^2 + 1}) > 1$, con lo cual $\Delta_{t_{\max}}$ en el conductor es mayor que en el caso sin pérdidas.

IV. DISPERSIÓN NUMÉRICA

A. Ecuación de dispersión

A continuación, obtenemos la ecuación numérica de dispersión para el esquema TWA evaluando, simplemente, el polinomio de estabilidad (2) sobre el círculo unidad del plano complejo Z e igualando el resultado a cero:

$$|S(Z)|_{Z=\exp(j\omega\Delta_t)} = 0.$$

A partir de la expresión anterior, obtenemos la siguiente ecuación numérica de dispersión:

$$\tilde{\epsilon}_r \frac{\sin^2\left(\frac{\omega\Delta_t}{2}\right)}{c^2\Delta_t^2} = \sum_{\alpha=x,y,z} \frac{\sin^2\left(\frac{\tilde{k}_\alpha\Delta_\alpha}{2}\right)}{\Delta_\alpha^2}, \quad (5)$$

donde

$$\tilde{\epsilon}_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \left[1 + \frac{a-b}{2\bar{\tau}} - \frac{j(a+b)}{2\bar{\tau} \tan\left(\frac{\omega\Delta_t}{2}\right)} \right]$$

representa la constante dieléctrica compleja numérica.

B. Constante de propagación numérica

Consideraremos, por sencillez, el caso 1D consistente en ondas polarizadas en la dirección x y propagándose en la dirección z . Para este caso, la ecuación numérica de dispersión sigue siendo (5), pero con el sumatorio extendido solamente a z . A partir de esta ecuación, la constante de propagación numérica resulta

$$\tilde{k}_z = \frac{2}{\Delta_z} \sin^{-1} \left[\sqrt{\tilde{\epsilon}_r} \frac{\Delta_z}{c\Delta_t} \sin\left(\frac{\omega\Delta_t}{2}\right) \right].$$

La longitud de onda numérica en el conductor y el valor numérico de la longitud de penetración por efecto pelicular valen, respectivamente,

$$\tilde{\lambda}_c = \frac{2\pi}{\Re[\tilde{k}_z]}, \quad \tilde{\delta}_s = \frac{1}{\Im[-\tilde{k}_z]}.$$

V. DETERMINACIÓN DE LOS COEFICIENTES ÓPTIMOS

A. Simulaciones de banda estrecha

Consideramos, en primer lugar, simulaciones de banda estrecha. En este caso, nuestro objetivo es determinar, para una frecuencia fija, el valor óptimo de a , a_{opt} , de cada uno de los materiales conductores presentes en la simulación. Para ello definimos los errores relativos

$$\mathcal{E}_{\lambda_c} = \frac{\tilde{\lambda}_c - \lambda_c}{\lambda_c}, \quad \mathcal{E}_{\delta_s} = \frac{\tilde{\delta}_s - \delta_s}{\delta_s},$$

y buscamos el valor de a que minimice el error total:

$$\mathcal{E} = |\mathcal{E}_{\lambda_c}| + |\mathcal{E}_{\delta_s}|. \quad (6)$$

Este cálculo se hace para una resolución espacial fija, la cual se define como el número de celdas por longitud de onda exacta en el interior del conductor

$$N_\lambda = \frac{\lambda_c}{\Delta_z}.$$

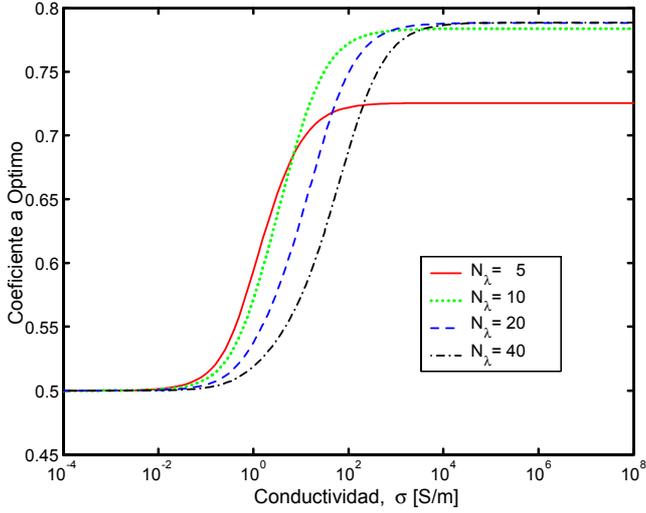


Fig. 1. Coeficiente a óptimo, en función de la conductividad, para $f = 10$ GHz. El paso temporal empleado es el máximo permitido para cada a_{opt} y σ , Δt_{max} .

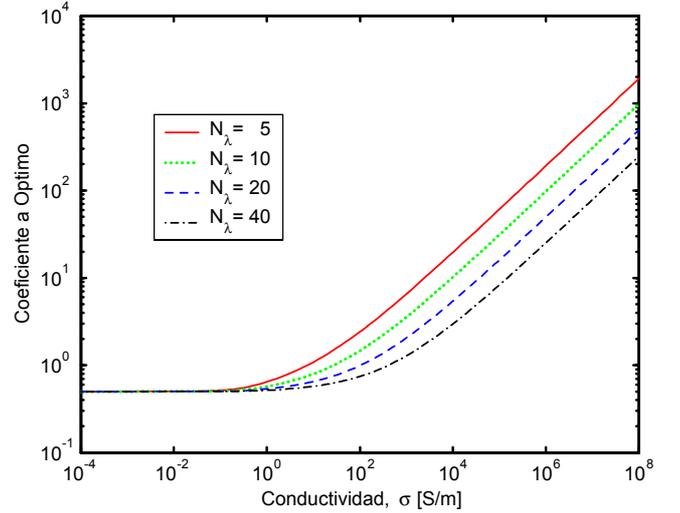


Fig. 3. Coeficiente a óptimo, en función de la conductividad, para $f = 10$ GHz. El paso temporal utilizado el máximo permitido en el espacio libre $\Delta t = \Delta z/c$.

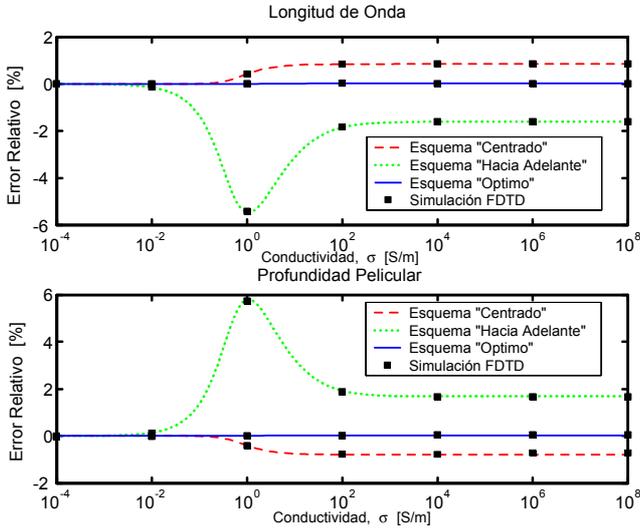


Fig. 2. Error relativo para $\tilde{\lambda}_c$ y $\tilde{\delta}_s$, en función de la conductividad, para $f = 10$ GHz y $N_\lambda = 20$. El paso temporal empleado es el máximo permitido para cada a_{opt} y σ , Δt_{max} .

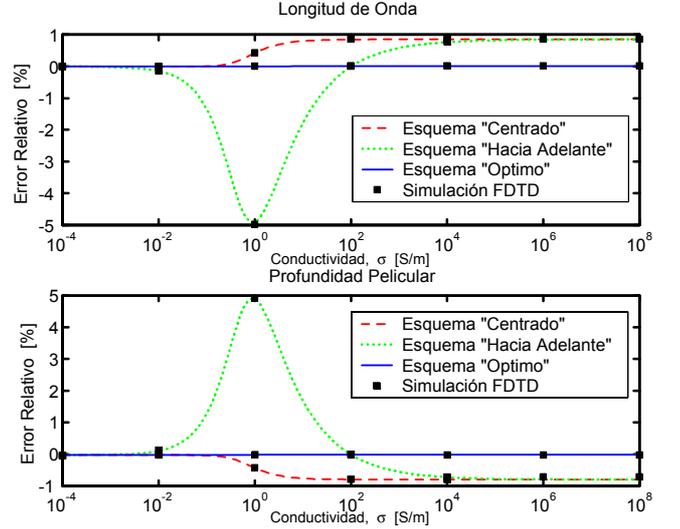


Fig. 4. Error relativo para $\tilde{\lambda}_c$ y $\tilde{\delta}_s$, en función de la conductividad, para $f = 10$ GHz y $N_\lambda = 20$. Todos los esquemas utilizan el paso temporal máximo permitido para el espacio libre, $\Delta t = \Delta z/c$.

En la figura 1 se muestran los valores de a_{opt} obtenidos para $f = 10$ GHz y para conductividades en el rango $10^{-4} - 10^8$ S/m, lo cual, a la frecuencia de trabajo, cubre un rango de materiales que va desde buenos dieléctricos hasta buenos conductores. Se observa que para buenos dieléctricos el valor de a_{opt} tiende a 0.5 y a medida que aumenta σ también lo hace a_{opt} hasta estabilizarse en valores cercanos a 0.8. Estos resultados se han obtenidos utilizando el Δt_{max} para cada σ .

En la figura 2 se muestran los errores relativos obtenidos mediante los esquemas TA, TF y TWA para una resolución espacial $N_\lambda = 20$. Las curvas son valores obtenidos analíticamente, mientras que los puntos se han calculado mediante simulaciones FDTD. Se observa cómo los erro-

res para el esquema TWA son prácticamente nulos. Al igual que en la figura 1, estos resultados se han obtenido empleando el paso temporal máximo correspondiente a cada a_{opt} y σ , dado en (3).

Hay que tener en cuenta que, en una simulación FDTD convencional, el paso temporal es un parámetro global, por lo que si tenemos varios conductores distintos no podremos utilizar, en la práctica, el Δt_{max} correspondiente a cada uno de ellos. En consecuencia, resulta conveniente fijar el paso temporal a su valor máximo en el caso sin pérdidas y calcular los valores de a_{opt} en estas condiciones.

En la figura 3 se muestran los valores de a_{opt} en función de la conductividad para varios valores de N_λ , para una frecuencia fija de $f = 10$ GHz y para el paso temporal

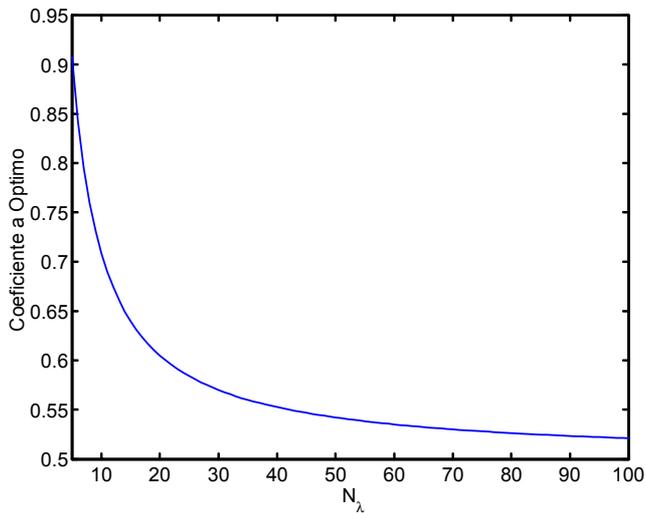


Fig. 5. Coeficiente a óptimo en función de la resolución espacial, para una banda frecuencial [2–20] GHz y un material de conductividad $\sigma = 10$ S/m. Se ha empleado el paso temporal del espacio libre.

del espacio libre, $\Delta_t = \Delta_z/c$. Se observa ahora cómo el valor de a_{opt} aumenta rápidamente con la conductividad, sobrepasando ampliamente el valor unidad para la región de buen conductor.

Los errores relativos para una resolución de $N_\lambda = 20$, calculados tanto analíticamente como mediante simulaciones FDTD, se muestran en la figura 4. Se observa nuevamente cómo el esquema TWA con $a = a_{\text{opt}}$ mantiene los errores prácticamente nulos.

B. Simulaciones de banda ancha

Una de las ventajas del método FDTD es la posibilidad de realizar simulaciones de banda ancha. En este caso, el valor de a_{opt} a emplear será aquel que minimiza el error (6) en un ancho de banda predeterminado. Según esto, para simulaciones de banda ancha definimos el error en banda como

$$\mathcal{E} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M [|\mathcal{E}_{\lambda_c}(f_m)| + |\mathcal{E}_{\delta_z}(f_m)|] \quad (7)$$

donde M es el número de puntos frecuenciales tomados en la banda de interés. En la práctica tomamos estos puntos equiespaciados.

Como ejemplo, consideramos una banda frecuencial de [2–20] GHz y un medio conductor de $\sigma = 10$ S/m. Nuestro propósito es calcular el valor de a que minimice (7) tomando como paso temporal el del espacio libre y suponiendo la malla uniforme.

En la figura 5 representamos el valor de a_{opt} en función de la resolución espacial dentro del conductor. Se puede observar como a medida que mejoramos la resolución el esquema TWA óptimo tiende al esquema TA.

En la figura 6 se muestra el error relativo (6) en función de la frecuencia, para una resolución de $N_\lambda = 20$. Estos resultados se han obtenido para los esquemas TA, TF y TWA

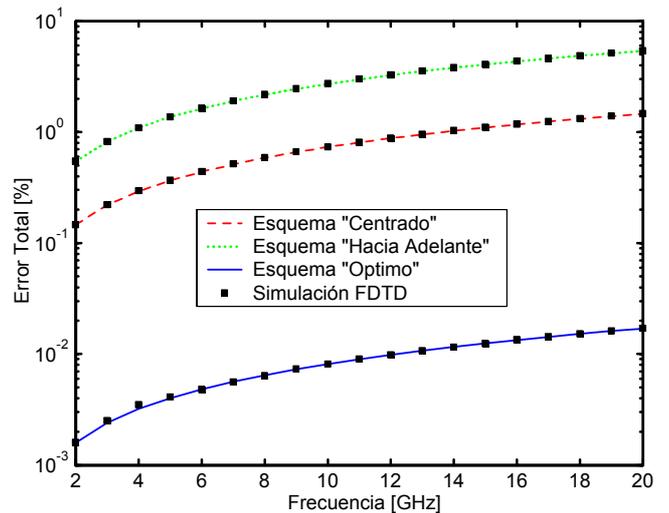


Fig. 6. Error relativo, en función de la frecuencia, para $N_\lambda = 20$ y $\sigma = 10$ S/m. Se utiliza el paso temporal máximo del espacio libre.

óptimo, tanto analíticamente como mediante simulaciones FDTD. Se aprecia cómo el esquema TWA óptimo reduce sensiblemente el error en toda la banda considerada.

VI. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado un nuevo esquema de discretización para la incorporación de medios conductores en simuladores FDTD. Este esquema se basa en la aproximación del término de corriente de conducción mediante un promedio ponderado. Los valores de los coeficientes del promedio se determinan minimizando el error de dispersión en el conductor problema. Se han obtenido valores óptimos tanto para simulaciones de banda estrecha como de banda ancha. En todo los casos se ha visto que el esquema propuesto es superior a otros esquemas utilizados normalmente.

REFERENCES

- [1] A. Taflov, *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method*, Artech House, London, 1995.
- [2] K. S. Kunz and R. J. Luebbers, *The Finite-Difference Time-Domain Method for Electromagnetics*, CRC Press, Boca Raton, 1993.
- [3] R. Luebbers, K. K. Kumagai, S. Adachi and T. Uno, "FDTD Calculation of Transient Propagation Through a Nonlinear Magnetic Sheet", *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 35, pp. 90-94, Feb. 1993.
- [4] P. G. Petropoulos, "Analysis of Exponential Time-Diferencing for FDTD in Lossy Dielectrics", *IEEE Trans. on antennas and Propagat.*, Vol. 45, no. 6, pp. 1054-1057, June 1997.
- [5] J. A. Pereda, O. García, A. Vegas and A. Prieto, "Numerical Dispersion and Stability Analysis of the FDTD Technique in Lossy Dielectrics", *IEEE Microwave and Guided Wave Lett.*, vol. 8, no.7, pp. 245-247, July 1998.
- [6] C. Schuster, A. Christ and W. Fichtner, "Review of FDTD Time-Stepping Schemes for Efficient Simulation of Electric Conductive Media", *Microwave and Optical Technology Lett.*, vol. 25, no. 1, pp. 16-21, Apr. 2000.
- [7] L. F. Velarde, A. Vegas, A. Prieto and J. A. Pereda, "Propiedades Numéricas de Distintas Formulaciones para la Incorporación de Dieléctricos con Pérdidas en Simuladores FDTD", *XVIII Simposium Nacional de la Unión Científica Internacional de Radio (URSI)*, La Coruña, 10-12 de septiembre de 2003.