

BAND-GAPS ELECTROMAGNÉTICOS CON CELDAS UNIDAD DE TRES DIELÉCTRICOS

A. Gómez⁽¹⁾, J. Herrán⁽²⁾, D. Cordobés⁽³⁾, A. Vegas⁽⁴⁾, J. S. Ipiña⁽⁵⁾, M.A. Solano⁽⁶⁾ and
A. Lakhtakia⁽⁷⁾

⁽¹⁻⁶⁾ Dpto. Ingeniería de Comunicaciones, Universidad de Cantabria,
Avda. de los Castros s/n, 39005 Santander, Cantabria, SPAIN

Email⁽¹⁾: gomezal@unican.es

Email⁽²⁾: jaime.herran@alumnos.unican.es

Email⁽³⁾: david.cordobes@alumnos.unican.es

Email⁽⁴⁾: vegasa@unican.es

Email⁽⁵⁾: saizj@unican.es

Email⁽⁶⁾: solanom@unican.es

⁽⁷⁾ Department of Engineering Science and Mechanics,
The Pennsylvania State University,
University Park, PA 16802-6812, USA.
Email: akhlesh@psu.edu

Abstract– Electromagnetic band-gap structures (EBG) with Kronig-Penney morphology implemented inside rectangular waveguides are theoretically and experimentally examined using a unit cell with three dielectrics. Filtering properties of these structures are analysed, invoking the Floquet theorem for ideal structures (infinite in the propagation direction), and by means of the scattering matrix technique for real structures (i.e., of finite length). Measurements of the transmission coefficient for the fundamental mode in the *Ku*-band are presented.

I. INTRODUCCIÓN

Las estructuras denominadas Photonic Band-Gap (PBG), propuestas originalmente por Yablonovitch [1] y John [2], han recibido recientemente una gran atención debido al enorme potencial que presentan en la aplicación como base para diferentes estructuras electromagnéticas [3]-[8].

Las estructuras Photonic Band-Gap, están caracterizadas por presentar ciertas bandas de frecuencia en las que la energía se puede propagar por el interior de la estructura (bandas permitidas) y otras en las que la energía es rechazada completamente y no se puede propagar (bandas prohibidas). Un ejemplo de estructura PBG puede ser aquella que presenta una morfología del tipo Kronig-Penney [9]. Esta estructura, que se puede implementar de múltiples formas, está compuesta por un array periódico (infinito) de celdas macroscópicas formadas por láminas de materiales que presentan diferentes propiedades dieléctricas [10],[11].

Cuando la frecuencia de trabajo se corresponde con las microondas y/o ondas milimétricas, las estructuras PBG se denominan *Electromagnetic Band-Gap* o *EBG*.

En esta comunicación se van a analizar estructuras EBG en guía de onda rectangular en las que la celda unidad está compuesta de tres dieléctricos isotrópicos que llenan totalmente la sección transversal de la guía. Esta estructura posee un grado más de libertad en el diseño respecto a la celda unidad habitual compuesta de dos dieléctricos [11]. Obviamente, una estructura infinita en la dirección de propagación no se puede implementar realmente, por tanto la denotaremos con el nombre de “*estructura ideal*”. La estructura real, de longitud finita, se caracterizará por la pérdida de periodicidad ya que ésta se ve alterada por dos guías vacías que juegan el papel de puertas de entrada y salida y además, porque presentará un número finito de celdas unidad. A esta estructura la denominamos “*estructura real*”.

II. TEORÍA

La estructura ideal a analizar está formada por la celda unidad de tres dieléctricos mostrada en la figura 1. La permitividad en la celda unidad, colocada entre $\{0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$ varía de la siguiente forma

$$\varepsilon(x, y, z + d) = \varepsilon(x, y, z), 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, |z| < \infty. \quad (1)$$

La permitividad ε viene dada por

$$\varepsilon(x, y, z) = \begin{cases} \varepsilon_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_{r_1} & \text{si } -w \leq z \leq 0, \\ \varepsilon_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_{r_2} & \text{si } 0 \leq z \leq v, \\ \varepsilon_3 = \varepsilon_0 \varepsilon_{r_3} & \text{si } v \leq z \leq u, \end{cases} \quad (2)$$

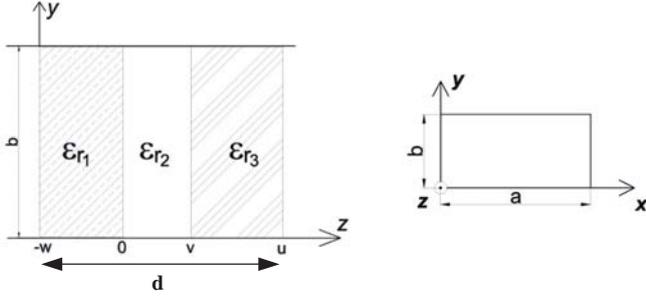


Fig. 1. Esquema de la celda unidad compuesta por tres dieléctricos. Dimensiones transversales de la guía de onda: $19.0 \times 9.5 \text{ mm}$. (Banda Ku).

donde ϵ_{ri} ($i=1,2,3$) son las permitividades relativas de los tres dieléctricos que forman la celda unidad, ϵ_0 la permitividad del vacío y $d = w + u$ el período espacial de la estructura EBG en la dirección de propagación del campo electromagnético.

En cada uno de los tres dieléctricos que forman la celda unidad, se deberá cumplir la ecuación de Helmholtz, $\nabla^2 \psi(x, y, z) + \omega^2 \epsilon(z) \mu_0 \psi(x, y, z) = 0$. Por simplicidad, hemos denotado $\epsilon(x, y, z) = \epsilon(z)$; μ_0 es la permeabilidad del vacío y $\vec{a}_z \psi(x, y, z)$ es el potencial vector eléctrico \vec{F} para los modos TE^z o el potencial vector magnético \vec{A} para los modos TM^z [12]. En guías rectangulares, vacías o completamente llenas por un medio material dieléctrico e isotrópico, los modos TE^z y TM^z son un conjunto completo de soluciones de las ecuaciones de Maxwell. En el caso en el que solamente tengamos discontinuidades en planos perpendiculares a la dirección de propagación de la onda electromagnética, un único modo que se propague en el interior de la guía de onda será capaz de verificar las condiciones de contorno en todas las interfases y, por tanto, la formulación se podrá desarrollar para un solo modo. De esta forma, si excitamos el modo TE_{10}^z , que se corresponde con el modo fundamental de la guía, la solución general para el potencial vector $\psi_h(x, y, z)$ en cada dieléctrico es

$$\psi_{h1}(x, y, z) = A_1 \cos(k_c x) e^{-j\beta_1 z} + B_1 \cos(k_c x) e^{j\beta_1 z}, \quad -w \leq z \leq 0, \quad (3)$$

$$\psi_{h2}(x, y, z) = A_2 \cos(k_c x) e^{-j\beta_2 z} + B_2 \cos(k_c x) e^{j\beta_2 z}, \quad 0 \leq z \leq v, \quad (4)$$

$$\psi_{h3}(x, y, z) = A_3 \cos(k_c x) e^{-j\beta_3 z} + B_3 \cos(k_c x) e^{j\beta_3 z}, \quad v \leq z \leq u, \quad (5)$$

donde $\beta_i^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_i + k_c^2$ ($i=1,2,3$), $k_c = \pi/a$ es el número de onda de corte para el modo TE_{10}^z y A_1, B_1, A_2, B_2, A_3 y B_3 son unos coeficientes que dan cuenta de la energía que se propaga. Las dos únicas componentes transversales del campo electromagnético diferentes de cero, para el modo TE_{10}^z son

$$\left. \begin{aligned} E_{yi} &= (1/\epsilon) \partial \psi_{hi} / \partial x \\ H_{xi} &= -j(\omega \mu_0 \epsilon)^{-1} \partial^2 \psi_{hi} / \partial x \partial z \end{aligned} \right\} (i=1,2,3) \quad (6)$$

El siguiente paso es aplicar las condiciones de contorno en las discontinuidades transversales entre cada uno de los dieléctricos que forman la celda unidad, y sólo para ella, pues la estructura ideal es infinita en la dirección de propagación. Las dos primeras condiciones en $z = 0$ y $z = v$

$$\left. \begin{aligned} E_{y1}(x, y, z = 0) &= E_{y2}(x, y, z = 0) \\ H_{x1}(x, y, z = 0) &= H_{x2}(x, y, z = 0) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} E_{y2}(x, y, z = v) &= E_{y3}(x, y, z = v) \\ H_{x2}(x, y, z = v) &= H_{x3}(x, y, z = v) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

se aplican de la forma habitual y la tercera condición en las superficies $z = u$ y $z = -w$, que debido a la periodicidad están colocadas en el mismo plano $z = \text{constante}$, se aplica utilizando el teorema de Floquet [13]; así

$$\left. \begin{aligned} E_{y3}(x, y, z = u) &= E_{y1}(x, y, z = -w) e^{j\gamma d} \\ H_{x3}(x, y, z = u) &= H_{x1}(x, y, z = -w) e^{j\gamma d} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

siendo γ el número de onda de Bloch que debe ser real en las bandas de frecuencia admitidas. Aplicando las condiciones (7)-(9) se obtiene un sistema lineal homogéneo de seis ecuaciones que en forma matricial es

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\epsilon_{r1}} & \frac{1}{\epsilon_{r1}} & -\frac{1}{\epsilon_{r2}} & -\frac{1}{\epsilon_{r2}} & 0 & 0 \\ \frac{\beta_1}{\epsilon_{r1}} & -\frac{\beta_1}{\epsilon_{r1}} & \frac{\beta_2}{\epsilon_{r2}} & \frac{\beta_2}{\epsilon_{r2}} & 0 & 0 \\ \frac{\beta_1}{\epsilon_{r1}} & -\frac{\beta_1}{\epsilon_{r1}} & \frac{\beta_2}{\epsilon_{r2}} & \frac{\beta_2}{\epsilon_{r2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{j\beta_2 v} & e^{j\beta_2 v} & -\frac{e^{-j\beta_3 v}}{\epsilon_{r3}} & -\frac{e^{j\beta_3 v}}{\epsilon_{r3}} \\ 0 & 0 & \frac{\beta_2 e^{-j\beta_2 v}}{\epsilon_{r2}} & \frac{\beta_2 e^{j\beta_2 v}}{\epsilon_{r2}} & -\frac{\beta_3 e^{-j\beta_3 v}}{\epsilon_{r3}} & \frac{\beta_3 e^{j\beta_3 v}}{\epsilon_{r3}} \\ -\frac{e^{j(\gamma d + \beta_1 w)}}{\epsilon_{r1}} & -\frac{e^{j(\gamma d - \beta_1 w)}}{\epsilon_{r1}} & 0 & 0 & \frac{e^{-j\beta_3 u}}{\epsilon_{r3}} & \frac{e^{j\beta_3 u}}{\epsilon_{r3}} \\ -\frac{\beta_1 e^{j(\gamma d + \beta_1 w)}}{\epsilon_{r1}} & \frac{\beta_1 e^{j(\gamma d - \beta_1 w)}}{\epsilon_{r1}} & 0 & 0 & \frac{\beta_3 e^{-j\beta_3 u}}{\epsilon_{r3}} & -\frac{\beta_3 e^{j\beta_3 u}}{\epsilon_{r3}} \\ \frac{\beta_1}{\epsilon_{r1}} & -\frac{\beta_1}{\epsilon_{r1}} & 0 & 0 & \frac{\beta_3}{\epsilon_{r3}} & -\frac{\beta_3}{\epsilon_{r3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \\ A_3 \\ B_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Para que el sistema tenga solución no trivial la matriz debe ser singular. Operando se obtiene la expresión

$$\gamma = \frac{1}{u + w} \arccos(L_{TE_{10}^z}) \quad (11)$$

siendo

$$L_{TE_{10}^z} = \cos(\beta_1 w) \cos(\beta_2 v) \cos(\beta_3 (u - v)) - \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2}{2\beta_1 \beta_2} \sin(\beta_1 w) \sin(\beta_2 v) \cos(\beta_3 (u - v)) - \left[\frac{\beta_1^2 + \beta_3^2}{2\beta_1 \beta_3} \sin(\beta_1 w) \cos(\beta_2 v) + \frac{\beta_2^2 + \beta_3^2}{2\beta_2 \beta_3} \cos(\beta_1 w) \sin(\beta_2 v) \right] \sin(\beta_3 (u - v)) \quad (12)$$

Como γ debe ser real en las bandas de frecuencia permitidas, el cumplimiento de la condición $-1 \leq \cos(\gamma d) \leq 1$ identifica las bandas de frecuencia admitidas y prohibidas para la propagación de la energía electromagnética.

Para la estructura real, con un número finito de celdas unidad, se pierde la periodicidad longitudinal, por lo que el

teorema de Floquet no se puede aplicar y las condiciones de contorno se tienen que aplicar a todas las discontinuidades. Además, las guías de entrada y salida son guías vacías. Cada discontinuidad transversal se trata como la unión de dos guías semi-infinitas totalmente llenas, de manera que para incidencia con el modo TE_{10} las condiciones de contorno se satisfacen únicamente para ese modo, no excitándose ningún otro. El proceso consiste en calcular la matriz de scattering para cada discontinuidad individual y su posterior enlace para obtener la matriz de scattering de la estructura completa [14].

III. RESULTADOS

La función $L_{TE_{10}^z}$ de la ecuación (12), que se denota en las figuras como $LTE(1,0)$, se ha obtenido para una guía de onda rectangular que opera en la banda Ku (10–15 GHz, $a = 19 \text{ mm}$ y $b = 9.5 \text{ mm}$).

En la figura 2 se representan la función $LTE(1,0)$ y el módulo del coeficiente de transmisión $|T|$ de la estructura ideal cuando $\epsilon_{r1} = 2.625$, $\epsilon_{r2} = 1$, $\epsilon_{r3} = 9.8$, $w = 7 \text{ mm}$, $v = 2 \text{ mm}$ y $u = 9 \text{ mm}$. En el caso en el que $|LTE(1,0)| \leq 1$, la estructura es transparente al campo electromagnético que se propague en su interior. En este caso se satisface la condición $-1 \leq \cos(\gamma d) \leq 1$, y por tanto $|T| = 1$. En caso contrario, la onda electromagnética será reflejada completamente por la estructura, y por tanto $|T| = 0$. En la figura 2a se muestran las líneas horizontales $LTE(1,0) = \pm 1$ que separan las zonas en las que la propagación de la onda electromagnética está permitida de las zonas en las que no lo está. Estas bandas prohibidas y permitidas se pueden ver mucho mejor en la figura 2b, en la que se representa la variación del módulo del coeficiente de transmisión de la estructura ideal en función de la frecuencia.

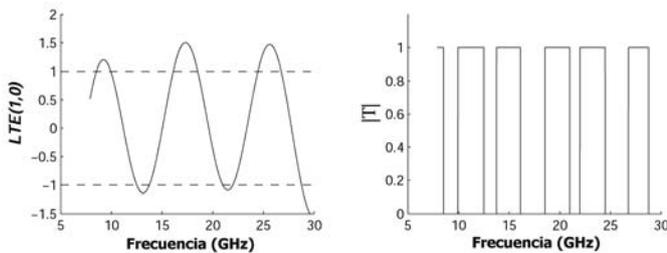


Figura 2. (a) Variación de $LTE(1,0)$ con la frecuencia para una guía rectangular en banda Ku . (b) Módulo del coeficiente de transmisión $|T|$ de la estructura EBG. Datos: $\epsilon_{r1} = 2.625$, $\epsilon_{r2} = 1$, $\epsilon_{r3} = 9.8$, $w = 7 \text{ mm}$, $v = 2 \text{ mm}$ y $u = 9 \text{ mm}$.

Los diagramas en los que se muestra la localización de las bandas prohibidas, $|T| = 0$, y de las permitidas, $|T| = 1$, según sea el valor de los diferentes parámetros que caracterizan a la estructura EBG (permitividades, dimensiones) y el de la frecuencia, se conocen como *gap maps*. Estos diagramas son muy útiles para demostrar el potencial que tienen las estructuras EBG. En la figura 3 se identifica la localización de las bandas prohibidas y permitidas en función de la frecuencia y de la longitud w de la lámina dieléctrica de permitividad relativa ϵ_{r1} , para cuatro valores diferentes del cociente $\epsilon_{r2} / \epsilon_{r1}$, cuando se fija la longitud d de la celda unidad y además $u = v$ (celda con dos

dieléctricos). En los *gap maps*, las zonas blancas se corresponden con las zonas permitidas y las negras con las prohibidas.

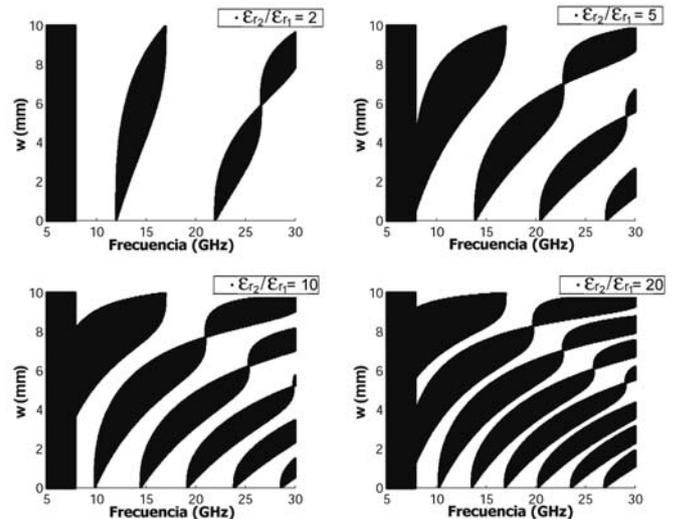


Figura 3. Localización de las bandas prohibidas y permitidas de la estructura EBG en función de la frecuencia y de la anchura w para diferentes valores del contraste de permitividades $\epsilon_{r2} / \epsilon_{r1}$, siendo $d = w + v = 10 \text{ mm}$ ($u = v$).

En la figura 4 se muestran *gap maps* análogos a los anteriores (celda unidad con dos dieléctricos) para cuatro valores diferentes de la longitud d de la celda unidad pero tomando esta vez como parámetro fijo el cociente $\epsilon_{r2} / \epsilon_{r1} = 2.625$.

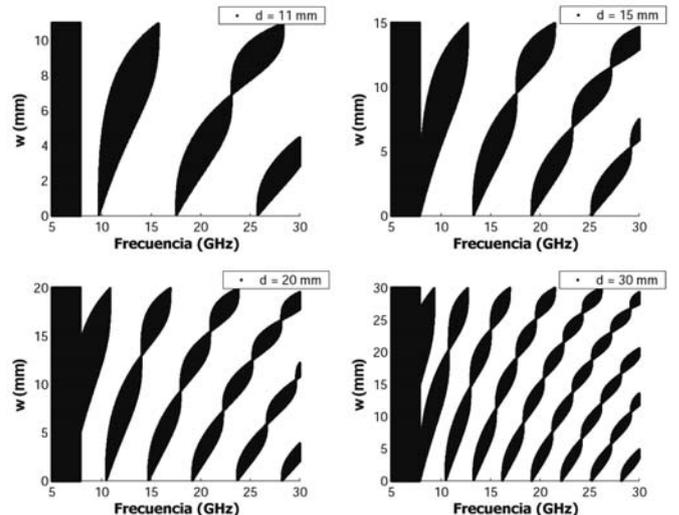


Figura 4. Gap-maps de la estructura EBG en función de la frecuencia y de la anchura w para diferentes valores de d , siendo $\epsilon_{r2} / \epsilon_{r1} = 2.625$.

Tanto en el caso en el que $w = 0$ ó $w = d$, la estructura completa está compuesta por un sólo medio material y es electromagnéticamente transparente a la propagación de la onda electromagnética.

A la vista de los *gap maps* de las figuras 3 y 4 se puede ver cómo a medida que aumenta la frecuencia, van apareciendo nuevas ramas de frecuencias prohibidas y permitidas, teniendo cada una de ellas un punto más de frecuencia que la rama anterior en el que la estructura se comporta como si fuera transparente. A medida que aumenta el contraste de permitividades (figura 3) o la anchura d de la

celda unidad (figura 4), las ramas con las bandas prohibidas y permitidas se comprimen, ya que va aumentando su número mientras que sus anchura van disminuyendo.

Finalmente, siguiendo el esquema de la figura 1, y a partir de la misma celda unidad, se construyeron dos estructuras EBG con distinto número de celdas para operar en la banda de frecuencias Ku . La primera estructura cuenta con 10 celdas mientras que la segunda con 20. Como primer y tercer dieléctrico, se eligieron dos tipos de policarbonato diferentes cuyas permitividades dieléctricas, $\epsilon_{r1} = 2.625 (1-j 9 \times 10^{-3})$ y $\epsilon_{r3} = 3.035 (1-j 7.9 \times 10^{-3})$, fueron caracterizadas en la Universidad de Cantabria, mientras que el aire fue el material elegido para el segundo dieléctrico.

Previamente a la realización de las medidas en el laboratorio, se simuló el problema para predecir el comportamiento de ambas estructuras. Para ello, con estos tres dieléctricos y manteniendo fijas las dimensiones $w = 7 \text{ mm}$ y $v = 2 \text{ mm}$ se representó gráficamente un *gap map* en el que el parámetro variable, además de la frecuencia, fue la longitud $u - v$. El resultado se muestra en la Fig. 5a. Fijándonos como objetivo la implementación de un filtro de tipo rechazo de banda cuya frecuencia central esté en torno a los 12.6 GHz y el ancho de banda sea, aproximadamente, de 1.2 GHz, a partir del *gap map* de la figura 5a se ve que tomando $u - v = 7 \text{ mm}$ se podría conseguir.

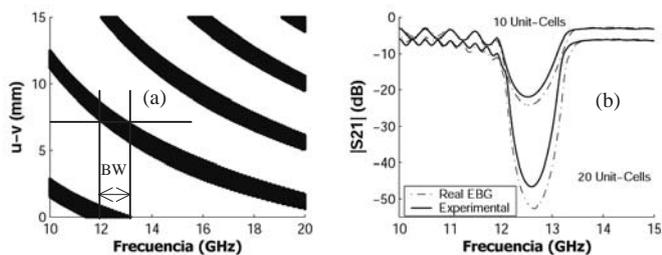


Figura 5. (a) Gap-maps de la estructura EBG ideal en función de la frecuencia y de la anchura ($u - v$) del dieléctrico de permitividad relativa ϵ_{r3} . Datos: $w = 7 \text{ mm}$, $v = 2 \text{ mm}$, $\epsilon_{r1} = 2.625$, $\epsilon_{r2} = 1$ and $\epsilon_{r3} = 3.035$. (b) Módulo del coeficiente de transmisión S_{21} para dos estructuras EBG reales, en guía de onda Ku , compuestas por tres dieléctricos (10 y 20 celdas unidad). Datos: $w = 7 \text{ mm}$, $v = 2 \text{ mm}$, $u = 9 \text{ mm}$, $\epsilon_{r1} = 2.625 (1-j 9 \times 10^{-3})$, $\epsilon_{r2} = 1$ and $\epsilon_{r3} = 3.035 (1-j 7.9 \times 10^{-3})$. Las guías de onda de entrada y salida son vacías.

Con estas características, se construyeron las estructuras EBG reales para, posteriormente, medir sus parámetros de scattering en el laboratorio. En la figura 5b, se muestran los resultados teóricos y los experimentales para las dos estructuras elegidas, de 10 y 20 celdas unidad. Claramente se puede ver cómo a medida que aumenta el número de celdas unidad el rechazo de banda es mayor. Una vez más se ha puesto de manifiesto la concordancia entre los resultados teóricos y experimentales es excelente.

IV. CONCLUSIONES

En esta comunicación, se ha presentado el análisis teórico de dos estructuras EBG, cuyas celdas unidad están compuestas por tres láminas dieléctricas, en el interior de una guía rectangular que opera en la banda de frecuencias Ku . Para estudiar la primera de ellas, la *estructura ideal*, nos hemos basado en el teorema de Floquet, mientras que la

estructura real ha sido tratada con el método de la matriz de scattering circuital. Se han introducido los diagramas que hemos llamado *gap maps* que muestran las diferentes bandas prohibidas y permitidas en función de la geometría y de los parámetros dieléctricos que dan lugar a la celda unidad. Para mostrar el potencial de los *gap maps* a la hora de diseñar filtros, se implementó una estructura EBG real a partir de los datos que obtuvimos en dichos diagramas y pudimos comprobar como los resultados medidos concordaban con los experimentales.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado por la Dirección General de Investigación, MCyT, a través del proyecto TIC2003-09677-C03-01.

REFERENCIAS

- [1] E. Yablonovitch, "Inhibited spontaneous emission in solid-state physics and electronics," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 58, pp.2059-2062, 1987.
- [2] S. John, "Strong localization of photons in certain disordered dielectric superlattices," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 58, pp.2486-2589, 1987.
- [3] A. Scherer, T. Doll, E. Yablonovitch, H.O. Everitt and J. A. Higgins, "Introduction to electromagnetic crystal structures, design, synthesis and applications," *J. Lightwave Technol. Special section on electromagnetic crystal structures, design, synthesis and applications*, vol. 17, pp. 1928, Nov. 1999.
- [4] R. Coccioli, F. R. Yang, K. P. Ma, and T. Itoh, "Aperture-coupled patch antenna on UC-PBG substrate," *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. 47, pp. 2123-2130, Nov. 1999.
- [5] J. G. Maloney, M. P. Kesler, B. L. Shirley, and G. S. Smith, "A simple description for waveguiding in photonic bandgap materials," *Microw. Opt. Technol. Lett.*, vol. 14, pp. 261-266, Apr. 1997.
- [6] C. Y. Chang and W. C. Hsu, "Photonic bandgap dielectric waveguide filter," *IEEE Microw. Wireless Comp. Lett.*, vol. 12, pp. 137-139, Apr. 2002.
- [7] H. Y. D. Yang, "Theory and applications of electromagnetic band-gap structures in microwaves", *Proc. APMC2001, Taipei, Taiwan*, pp. 641-646, 2001.
- [8] L. C. Andreani and M. Agio "Photonic band gaps and gap maps in a photonic crystal slab", *IEEE J. Quantum Electronics*, vol. 38, pp. 891-898, Jul. 2002.
- [9] O. S. Heavens, "Optical properties of thin solid films", Butterworths, London, UK, 1955, Chapter 7.
- [10] S. K. Srivastava, S. P. Ojha, and K. S. Ramesh "Design of an ultraviolet filter based on photonic band-gap materials", *Microw. Opt. Technol. Lett.*, vol. 33, no. 4, pp. 308-314, May 2002; corrections: *Microw. Opt. Technol. Lett.*, vol. 36, no. 2, p. 147, Jan. 2003.
- [11] A. Gómez, M. A. Solano, A. Lakhtakia, and A. Vegas, "Circular waveguides with Kronig-Penney morphology as photonic band-gap filters," *Microw. Opt. Technol. Lett.*, vol. 37, pp. 316-321, Jun. 2003.
- [12] C. A. Balanis, "Advanced engineering electromagnetics," Wiley, New York 1989, Chapters 6 and 8.
- [13] C. Kittel, *Introduction to solid state physics*, John Wiley & Sons, New York, 1971, 306
- [14] G. F. Van Blaricum and R. Mittra, "A modified residue-calculus technique for solving a class of boundary value problems-Part II: waveguide phased arrays, modulated surfaces, and diffraction gratings," *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. 17, pp. 310-319, Jun. 1969.