

*Facultad  
de  
Ciencias*

Teoría de Sturm:  
Teoremas de Separación y Comparación  
(Sturmian Theory: Separation and Comparison Theorems)

TRABAJO DE FIN DE GRADO  
PARA ACCEDER AL  
GRADO EN MATEMÁTICAS

Autor: Jose María Soriano Rodríguez

Directora: Delfina Gómez Gandarillas

Junio - 2024



## Agradecimientos

Me gustaría comenzar dando las gracias a toda mi familia que me ha acompañado a lo largo de estos años en mis estudios universitarios. Especialmente dar gracias a mi madre que me ha aguantado en todas las épocas de exámenes cuando estaba agobiado y ella conseguía tranquilizarme.

Además, dar gracias a todos mis amigos pues sin ellos estos años no hubiesen sido iguales. Gracias por todas las risas que hemos compartido, por las fiestas que hemos vivido y por todos los planes que hemos hecho juntos y que espero que todo esto siga durante muchos años más.

También quiero dar las gracias a todos mis amigos a los que conocí en mi tercer curso, en mi paso por Italia, gracias a ellos viví nuevas experiencias que siempre recordaré. En definitiva, gracias a todas las personas que he conocido a lo largo de estos años y que de una manera u otra han marcado mi vida universitaria, sin ellos no sería la persona que soy hoy en día.

Finalmente, quería agradecer a todos los profesores que me han impartido clase en todos estos años, han sabido compartir su pasión por las matemáticas y me han ayudado a ver la belleza en ellas. En especial, quiero dar las gracias a mi tutora Delfina por toda su ayuda a la hora de realizar este trabajo y por todo lo que he aprendido gracias a ella.

## Resumen

Este trabajo se centra en el estudio cualitativo de ciertas ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden. En particular, aborda propiedades relacionadas con los ceros de las soluciones de dichas ecuaciones. Tales resultados son de gran importancia ya que en muchas ocasiones no se puede obtener una función explícita que verifique la ecuación diferencial. Las propiedades a estudiar pueden ser de diversos tipos como el entrelazamiento de los ceros de unas soluciones con otras, si poseen una cantidad infinita de ellos o no, o la distancia que existe entre ellos. Como caso particular se analizará el problema de Sturm-Liouville con distintas condiciones, recogiendo sus principales rasgos. A lo largo de toda la memoria se ilustrarán los distintos resultados con ejemplos clásicos y originales.

**Palabras clave:** Teoremas de Separación y Comparación, Entrelazamiento y distancia entre ceros, Teoría de Oscilación, Transformación de Prüfer, Problema de Sturm-Liouville.

## *Abstract*

*This work focuses on the qualitative study of certain second-order ordinary differential equations. In particular, it addresses properties related to the zeros of the solutions of these equations. Such results are of great importance since in many cases, an explicit function that satisfies the differential equation cannot be obtained. The properties to be studied can be of various types, such as the interlacing of the zeros of some solutions with others, whether they have an infinite number of zeros or not, or the distance between them. As a particular case, the Sturm-Liouville problem will be analyzed with different conditions, highlighting its main features. Throughout the entire document, the various results will be illustrated with both classical and original examples.*

**Keywords:** *Separation and Comparison Theorems, Interlacing and distance between zeros, Oscillation Theory, Prüfer Transformation, Sturm-Liouville Problem.*

# Índice general

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Introducción</b>                                  | <b>1</b>  |
| <b>1. Teoría de Sturm</b>                            | <b>3</b>  |
| 1.1. Preliminares . . . . .                          | 3         |
| 1.2. Formas autoadjunta y normal . . . . .           | 5         |
| 1.3. Primeras propiedades . . . . .                  | 8         |
| 1.4. Teorema de Separación de Sturm . . . . .        | 14        |
| 1.5. Teorema de Comparación de Sturm . . . . .       | 19        |
| <b>2. Teoremas de oscilación</b>                     | <b>24</b> |
| 2.1. Algunas condiciones suficientes . . . . .       | 24        |
| 2.2. Distancia entre ceros . . . . .                 | 31        |
| 2.3. Transformación de Prüfer . . . . .              | 36        |
| <b>3. Problema de Sturm-Liouville</b>                | <b>39</b> |
| 3.1. Problema Regular de Sturm-Liouville . . . . .   | 39        |
| 3.2. Problema Periódico de Sturm-Liouville . . . . . | 45        |
| 3.3. Problema Singular de Sturm-Liouville . . . . .  | 47        |
| <b>Bibliografía</b>                                  | <b>51</b> |



# Introducción

Las ecuaciones diferenciales, desde su origen, han sido siempre una de las ramas más importantes de las matemáticas aplicadas y de la física. Son determinantes a la hora de modelizar diversos fenómenos en disciplinas como la ingeniería, la física o la economía. Los inicios de esta rama de las matemáticas se remontan al siglo XVII con los primeros estudios de Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz, quienes introdujeron las bases del cálculo. Más tarde, en los siglos XVIII y XIX, algunos matemáticos como Jean le Rond d'Alembert, Joseph-Louis Lagrange, Pierre-Simon Laplace o Leonhard Euler investigaron sobre métodos analíticos para encontrar solución a las ecuaciones diferenciales. Asentando así las bases de la teoría que conocemos hoy en día.

Es muy conocido por todos el hecho de que en la inmensa mayoría de las ecuaciones diferenciales es muy complicado encontrar una función explícita que sea solución de la ecuación. Es por ello, que en el siglo XIX, el matemático Henri Poincaré escribe acerca de la conocida como Teoría Cualitativa. Dicha teoría se centra en el estudio de diversas propiedades de las soluciones basándose únicamente en las funciones que definen a la ecuación. Tales propiedades pueden ser de muchos tipos como por ejemplo el comportamiento asintótico de las soluciones o la existencia y unicidad de solución del conocido como problema de Cauchy o de valores iniciales.

En esta memoria nos centraremos en el estudio de propiedades cualitativas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales homogéneas de segundo orden. En particular, dichas propiedades versarán sobre los ceros de las soluciones de tales ecuaciones. Estas propiedades son de una gran importancia puesto que, como ya hemos mencionado, la resolución explícita de las ecuaciones es, en ocasiones, muy difícil. En consecuencia, los resultados que veremos nos serán de ayuda a la hora de analizar el comportamiento de las soluciones de las ecuaciones sin necesidad de resolverlas y observando únicamente sus coeficientes. A pesar de que solo trabajaremos con ecuaciones de segundo orden, muchos de los resultados se pueden extender a órdenes mayores, para ello se puede consultar el libro [13].

El trabajo gira en torno a la llamada Teoría de Sturm. Dicha teoría nace con la publicación de un artículo original (ver [12]) publicado en el año 1836 por el matemático francés Jacques Charles François Sturm. Los resultados principales de la teoría desarrollada por Sturm son los conocidos como Teoremas de Separación y Comparación. Ambos teoremas hablan de cómo se distribuyen los ceros de unas soluciones con otras. En el primer caso las soluciones son linealmente independientes y referentes a una misma ecuación. Sin embargo, en el segundo las soluciones son de ecuaciones distintas cuyos coeficientes verifican ciertas condiciones. Además, estos resultados nos serán de gran utilidad a la hora de demostrar otras propiedades como por ejemplo la distancia que existe entre dos ceros

consecutivos de una solución o si esta posee un número infinito de ceros o no.

El objetivo de esta memoria es presentar los resultados que forman parte de la Teoría de Sturm junto con otras propiedades cualitativas referentes a los ceros de las soluciones de las ecuaciones. Dichos teoremas serán ilustrados con ejemplos clásicos y originales.

El primer capítulo, titulado Teoría de Sturm, aborda los teoremas más importantes de dicha teoría, el de Separación y el de Comparación. En una primera sección de preliminares, se enuncian unos resultados básicos ya vistos a lo largo del grado en los cuales nos apoyaremos a lo largo de la memoria. Posteriormente introduciremos dos formas nuevas de reescribir las ecuaciones, denominadas forma autoadjunta y normal. Estas formas nos serán de ayuda a la hora de enunciar y demostrar nuevos resultados. Seguidamente, daremos unas primeras propiedades cualitativas de las soluciones que usaremos en repetidas ocasiones. Finalmente, se expondrán los Teoremas de Separación y Comparación de Sturm, ilustrándolos con numerosos ejemplos. En dichos ejemplos, aplicaremos los resultados a funciones especiales, como por ejemplo, a las funciones de Bessel o a los polinomios de Hermite.

En segundo lugar, veremos un capítulo sobre la teoría de oscilaciones. Dicha teoría estudia el carácter oscilatorio de las soluciones, es decir, si estas poseen un número infinito de ceros o no. En una primera sección, enunciaremos tres teoremas que ofrecen condiciones para que las soluciones de una cierta ecuación sean oscilatorias o no. Las demostraciones de dichos teoremas se basan en el Teorema de Comparación visto en el primer capítulo. Seguidamente, hablaremos sobre las distancias que existen entre dos ceros consecutivos de las soluciones de nuestra ecuación. Asimismo, daremos cotas acerca del número de ceros que puede haber en un cierto intervalo. Para acabar el capítulo, introduciremos una nueva perspectiva para estudiar el número de ceros de una solución. Realizaremos un cambio de variable, conocido como transformación de Prüfer, que nos ayudará a estudiar las propiedades cualitativas de las ecuaciones.

Finalmente, abordaremos el conocido como problema de Sturm-Liouville, el cual surge al modelizar situaciones físicas, como por ejemplo, la difusión del calor en un alambre. Trataremos distintas condiciones en los extremos y daremos sus principales propiedades, prestando especial atención a los ceros de las funciones propias. A lo largo de toda la memoria, hemos trabajado bajo ciertas hipótesis de regularidad y positividad sobre los coeficientes de la ecuación. En la última sección relajaremos dichas condiciones y veremos qué se puede decir acerca de las soluciones, ilustrándolo con las funciones especiales conocidas como polinomios de Legendre.

# Capítulo 1

## Teoría de Sturm

En este capítulo abordaremos los teoremas conocidos como Teoremas de Separación y Comparación, que forman parte de la conocida como Teoría de Sturm. Para ello, introduciremos previamente otros resultados y nociones que necesitaremos, como por ejemplo la forma autoadjunta y normal de una ecuación. Dicha teoría se centra principalmente en el estudio cualitativo de las soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales. En particular, analiza propiedades de los ceros de dichas soluciones, tales como el número de ellos o la disposición de los mismos respecto a otros ceros de distintas soluciones. Este capítulo se basa en el contenido de los libros [5], [8], [9], [10] y [11].

### 1.1. Preliminares

Este trabajo se centra en el estudio de los ceros de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) lineales homogéneas de segundo orden, es decir, ecuaciones de la forma:

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0, \quad (1.1)$$

donde  $a_0, a_1, a_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones continuas,  $I$  es un intervalo de  $\mathbb{R}$  y  $a_2(x) \neq 0$  para todo  $x \in I$ . Puesto que el coeficiente  $a_2$  no se anula en dicho intervalo podemos dividir, si fuera necesario, por dicha función y así obtenemos la ecuación equivalente

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0, \quad (1.1b)$$

donde  $p(x) = a_1(x)/a_2(x)$  y  $q(x) = a_0(x)/a_2(x)$ . Por ello, en esta primera sección introduciremos algunos conceptos y resultados ya conocidos, relativos a ecuaciones de la forma (1.1) o (1.1b), y que utilizaremos a lo largo de la memoria. Daremos los resultados y definiciones aplicados al caso que nos interesa. Sin embargo, estos se pueden extender a órdenes superiores de una manera análoga. Para mayor información sobre cómo generalizar estos resultados a órdenes superiores, se pueden consultar libros como [8] o [9].

Comenzamos enunciando el conocido teorema de existencia y unicidad de solución del problema de Cauchy o de condiciones iniciales asociado a (1.1).

**Teorema 1.1. (Teorema de Existencia y Unicidad)** *Consideramos el siguiente problema de Cauchy:*

$$\begin{cases} y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0 \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1 \end{cases} \quad (1.2)$$

Si las funciones  $a_0$  y  $a_1$  son continuas en un intervalo  $I \subset \mathbb{R}$  tal que  $x_0$  pertenece a dicho intervalo, entonces para cada  $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2$  existe y es única la solución de (1.2) y está definida en todo  $I$ .

Dicho resultado permite probar que el conjunto de soluciones de (1.1) es un espacio vectorial de dimensión dos. En consecuencia, basta encontrar dos soluciones linealmente independientes de (1.1) para hallar su solución general. Ahora introduciremos la noción de wronskiano que usaremos para determinar la dependencia o independencia entre soluciones de una ecuación lineal homogénea.

**Definición 1.2.** Dadas  $f, g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funciones continuas con derivada en  $I$ , se define el wronskiano de  $f, g$  en el punto  $x_0 \in I$ , y se denota por  $W[f, g](x_0)$ , como el determinante

$$W[f, g](x_0) = \begin{vmatrix} f(x_0) & g(x_0) \\ f'(x_0) & g'(x_0) \end{vmatrix} = f(x_0)g'(x_0) - f'(x_0)g(x_0).$$

**Proposición 1.3.** Sean  $f$  y  $g$  soluciones de

$$y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0 \tag{1.3}$$

en un intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ , con  $a_0$  y  $a_1$  funciones continuas. Se tiene que  $f$  y  $g$  son linealmente dependientes en  $I$  si y solo si  $W[f, g](x) = 0$  para todo  $x$  en  $I$ .

*Demostración.* Primero supongamos que las soluciones  $f$  y  $g$  son linealmente dependientes en  $I$ , esto quiere decir que existen dos constantes  $C_1$  y  $C_2$  no ambas nulas tales que  $C_1f(x) + C_2g(x) = 0$  para todo  $x$  en  $I$ . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $C_1 \neq 0$ , y despejando obtenemos que  $f(x) = \frac{-C_2}{C_1}g(x)$ . En estas condiciones, el wronskiano de  $f$  y  $g$  es:

$$W[f, g](x) = \begin{vmatrix} \frac{-C_2}{C_1}g(x) & g(x) \\ \frac{-C_2}{C_1}g'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = \frac{-C_2}{C_1}g(x)g'(x) + \frac{C_2}{C_1}g(x)g'(x) = 0, \quad \forall x \in I$$

Para la otra implicación, supondremos que el wronskiano de  $f, g$  es cero para todo  $x$  en el intervalo  $I$ . Fijado  $x_0 \in I$ , consideramos el siguiente sistema

$$\begin{cases} c_1f(x_0) + c_2g(x_0) = 0 \\ c_1f'(x_0) + c_2g'(x_0) = 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Se ve claramente que  $c_1 = c_2 = 0$  es una solución del sistema. Sin embargo, ya que el determinante de la matriz de coeficientes del sistema coincide con el wronskiano de  $f$  y  $g$  en el punto  $x_0$ , y este vale 0 por hipótesis, se tiene que el sistema posee soluciones no triviales. Sea ahora  $c_1$  y  $c_2$  una solución no trivial de (1.4), definimos la siguiente función

$$\hat{y}(x) = c_1f(x) + c_2g(x).$$

Puesto que la ecuación (1.3) es lineal, se tiene que  $\hat{y}$  es solución de dicha ecuación, ya que es combinación lineal de dos soluciones. Además por (1.4),  $\hat{y}$  satisface las condiciones iniciales siguientes

$$\hat{y}(x_0) = 0, \hat{y}'(x_0) = 0.$$

En base al Teorema 1.1 se tiene que la solución  $\hat{y}$  tiene que ser la solución nula. En consecuencia, se llega a que

$$c_1 f(x) + c_2 g(x) = 0 \quad \forall x \in I,$$

donde  $c_1$  y  $c_2$  son dos constantes ambas no nulas. Concluimos entonces que  $f$  y  $g$  son soluciones linealmente dependientes en el intervalo  $I$ .  $\square$

Podemos ver que la primera implicación es cierta para funciones  $C^2$  cualesquiera, puesto que en la demostración no se ha usado el hecho de que  $f$  y  $g$  sean soluciones de una ecuación diferencial. Sin embargo, para la otra implicación es fundamental el hecho de que  $f$  y  $g$  sean las soluciones de una ecuación diferencial. Para mostrar esto podemos considerar el siguiente contraejemplo. Tomamos las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Es fácil comprobar que  $W[f, g](x) = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , pero sin embargo  $f$  y  $g$  son linealmente independientes.

## 1.2. Formas autoadjunta y normal

En esta sección introduciremos dos formas en las que la ecuación (1.1) puede aparecer: la forma autoadjunta y la forma normal. Además enunciaremos y demostraremos algunos resultados útiles que nos permitirán reescribir o transformar la ecuación (1.1) de dicha manera, lo cual será conveniente a lo largo de la memoria. Estas formas de escribir la ecuación (1.1) junto con los resultados que veremos se pueden encontrar, por ejemplo, en [2], [9] o [10].

Primero veremos la forma autoadjunta de una ecuación.

**Definición 1.4.** *Se dice que una ecuación lineal homogénea de segundo orden está en forma autoadjunta si aparece como*

$$(P(x)y'(x))' + Q(x)y(x) = 0,$$

para ciertas funciones  $P$  y  $Q$ .

Es fácil comprobar que (1.1) es autoadjunta si y sólo si  $a_2'(x) = a_1(x)$  para todo  $x \in I$ , y en ese caso  $P(x) = a_2(x)$  y  $Q(x) = a_0(x)$ . No obstante, bajo ciertas hipótesis de regularidad, se puede demostrar que toda ecuación en la forma (1.1) admite una forma autoadjunta. Esto resulta muy relevante puesto que el hecho de considerar las ecuaciones en forma autoadjunta no supondrá una gran limitación a la hora de estudiar las ceros de sus soluciones. Además, la demostración es constructiva y proporciona un método para escribir dichas ecuaciones de orden 2 en su forma autoadjunta.

**Proposición 1.5.** *Toda ecuación lineal homogénea de segundo orden de la forma (1.1) con  $a_0, a_1, a_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$  funciones continuas en el intervalo  $I$  y  $a_2(x) \neq 0$  para todo  $x$  en dicho intervalo, se puede escribir en forma autoadjunta.*

*Demostración.* Para demostrar este resultado basta con multiplicar la ecuación (1.1) por el factor integrante

$$\mu(x) = \exp\left(\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)} dx\right) \frac{1}{a_2(x)},$$

donde  $\int f(x)dx$  denota una primitiva cualquiera de la función  $f$ . Así obtenemos la EDO equivalente

$$\exp\left(\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)} dx\right) y''(x) + \exp\left(\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)} dx\right) \frac{a_1(x)}{a_2(x)} y'(x) + \exp\left(\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)} dx\right) \frac{a_0(x)}{a_2(x)} y(x) = 0.$$

Juntando los dos primeros términos llegamos a que

$$\left(\exp\left(\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)} dx\right) y'(x)\right)' + \exp\left(\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)} dx\right) \frac{a_0(x)}{a_2(x)} y(x) = 0.$$

Llamando  $P(x) = \exp\left(\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)} dx\right)$  y  $Q(x) = \exp\left(\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)} dx\right) \frac{a_0(x)}{a_2(x)}$  en la Definición 1.4 concluimos el resultado.  $\square$

**Ejemplo 1.6.** Consideramos la siguiente ecuación lineal homogénea:

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + y(x) = 0 \quad x > 0. \quad (1.5)$$

Multiplicamos dicha ecuación por el factor integrante  $\mu(x) = \exp(\ln(x))/x^2 = 1/x$ , obteniendo así la forma autoadjunta

$$xy''(x) + y'(x) + \frac{1}{x}y(x) = 0 \quad \text{i.e.} \quad (xy'(x))' + \frac{1}{x}y(x) = 0.$$

De ahora en adelante, cuando hablemos de una ecuación en su forma autoadjunta, nos referiremos a la siguiente expresión

$$(P(x)y'(x))' + Q(x)y(x) = 0, \quad (1.6)$$

donde  $P$  es una función con derivada continua tal que  $P(x) > 0$  para todo  $x \in I$  y  $Q$  es una función continua en el mismo intervalo. A no ser que se especifique lo contrario, siempre consideraremos que estamos bajo estas hipótesis de regularidad.

La Proposición 1.5 resultará muy útil ya que enunciaremos y demostraremos la mayoría de resultados usando la forma autoadjunta. Sin embargo, a veces usaremos otra manera de transformar la ecuación (1.1). Esta nueva expresión se conoce como forma normal y puede verse como un caso particular de ecuación autoadjunta con  $P = 1$ .

**Definición 1.7.** *Se dice que una ecuación lineal homogénea de segundo orden está en forma normal si aparece como*

$$y''(x) + Q(x)y(x) = 0, \quad (1.7)$$

para cierta función  $Q$ .

Como en la Proposición 1.5 para la forma autoadjunta, bajo ciertas hipótesis de regularidad podemos transformar, mediante un cambio de variable, toda ecuación a otra en forma normal.

**Proposición 1.8.** *Toda ecuación lineal homogénea de segundo orden de la forma (1.1) con  $a_0, a_1, a_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$  funciones continuas en el intervalo  $I$ ,  $a_2(x) \neq 0$  para todo  $x$  en dicho intervalo y tal que  $a_1$  y  $a_2$  posean derivadas, se puede transformar, mediante un cambio de variable, en una ecuación en forma normal.*

*Demostración.* Como  $a_2(x) \neq 0$  en el intervalo  $[a, b]$ , podemos dividir la ecuación por  $a_2$  y, renombrando los coeficientes de  $y$  e  $y'$ , obtenemos la ecuación  $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$ , donde  $p = a_1/a_2$  y  $q = a_0/a_2$ . Introducimos ahora el cambio de variable  $y = uv$  con  $u$  y  $v$  funciones a determinar. Derivando y sustituyendo en la ecuación obtenemos que

$$vu'' + (2v' + pv)u' + (v'' + pv' + qv)u = 0. \quad (1.8)$$

Puesto que en la forma normal el término de la derivada primera no aparece, igualamos a cero dicho coeficiente, es decir, imponemos que  $2v' + pv = 0$ . Vemos que es una ecuación lineal de primer orden con

$$v(x) = \exp\left(-\frac{1}{2} \int p(x) dx\right)$$

una solución. Observamos que la función  $v$  se trata de una exponencial y por ello, se puede dividir entre ella puesto que no se anula nunca. En consecuencia, despejando  $u$  en el cambio realizado  $y = uv$  y sustituyendo los valores de  $v$  y  $p$ , se obtiene que

$$u(x) = y(x) \exp\left(\frac{1}{2} \int \frac{a_1(x)}{a_2(x)} dx\right),$$

y este es el cambio de variable que se necesita realizar para llegar a la ecuación normal. Ahora, como  $v' = -pv/2$ , se tiene que  $v'' = -(p'v + pv')/2$  y  $v'' + pv' + qv = -p'v/2 + pv'/2 + qv = -p'v/2 - p^2v/4 + qv$ . Por tanto, sustituyendo en la ecuación (1.8) dividida por  $v$  se obtiene que la ecuación en forma normal es

$$u''(x) + (-p'(x)/2 - p(x)^2/4 + q(x))u(x) = 0 \quad (1.9)$$

que, escrita en términos de las funciones originales  $a_i$ , resulta

$$u''(x) + \left(-\frac{a_1'(x)a_2(x) - a_1(x)a_2'(x)}{2a_2(x)^2} - \frac{1}{4} \frac{a_1(x)^2}{a_2(x)^2} + \frac{a_0(x)}{a_2(x)}\right) u(x) = 0.$$

□

Cabe destacar que ambas ecuaciones (1.1) y (1.9) no tienen las mismas soluciones puesto que hemos introducido un cambio de variable en la ecuación. Sin embargo, conocida la solución de una de ellas, la otra se puede obtener mediante el cambio  $y = uv$ . Como hemos visto, la función  $v$  no se anula nunca puesto que se trata de una exponencial. Este hecho es muy importante puesto que, a pesar de que ambas ecuaciones no tengan las mismas soluciones, lo que sí se cumple es que las soluciones  $y, u$  de dichas ecuaciones se anulan en los mismos puntos, es decir, las soluciones de ambas ecuaciones tienen los mismos ceros. Puesto que este trabajo se centra principalmente en el estudio de los ceros de las soluciones, el hecho de considerar las ecuaciones en su forma normal no supondrá una gran limitación.

Para ilustrar esta última proposición vamos a considerar la misma ecuación que en el Ejemplo 1.6 y vamos a transformarla en una ecuación en forma normal.

**Ejemplo 1.9.** Consideramos la ecuación (1.5). En este caso, el cambio que debemos realizar es

$$y = uv, \text{ donde } v(x) = \exp\left(-\frac{1}{2} \int \frac{a_1(x)}{a_2(x)} dx\right) = \frac{1}{\sqrt{x}},$$

es decir,  $y(x) = u(x)x^{-1/2}$ . Derivando en el cambio, tenemos que  $y'(x) = u'(x)x^{-1/2} - u(x)x^{-3/2}/2$  e  $y''(x) = u''(x)x^{-1/2} - u'(x)x^{-3/2} + 3u(x)x^{-5/2}/4$ . Ahora sustituyendo en (1.5) obtenemos

$$x^2(u''(x)x^{-1/2} - u'(x)x^{-3/2} + 3u(x)x^{-5/2}/4) + x(u'(x)x^{-1/2} - u(x)x^{-3/2}/2) + u(x)x^{-1/2} = 0.$$

Dividiendo ahora por  $x^{3/2}$ , se llega a la forma normal

$$u''(x) + \frac{5}{4x^2}u(x) = 0.$$

### 1.3. Primeras propiedades

En esta sección enunciaremos y demostraremos ciertos resultados acerca de las soluciones de la ecuación autoadjunta (1.6). Algunos de ellos nos servirán a lo largo de la memoria para deducir otros. Estos resultados los podemos encontrar en libros como [10] y [11].

El primer resultado es conocido como fórmula de Abel y relaciona el wronskiano de dos soluciones de la ecuación autoadjunta (1.6) junto con la función  $P$  de manera que el resultado es constante. Este resultado nos será de utilidad para demostrar la dependencia lineal entre soluciones de dicha ecuación.

**Lema 1.10. (Fórmula de Abel)** Sean  $f$  y  $g$  dos soluciones cualesquiera de (1.6) en el intervalo  $[a, b]$ . Entonces para todo  $x$  del intervalo  $[a, b]$  se verifica la siguiente igualdad

$$P(x)W[f, g](x) = k,$$

donde  $k$  es una constante.

*Demostración.* Como  $f$  y  $g$  son dos soluciones de la ecuación, se tiene que

$$(P(x)f'(x))' + Q(x)f(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b], \quad (1.10)$$

$$(P(x)g'(x))' + Q(x)g(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b]. \quad (1.11)$$

Multiplicando (1.10) por  $-g(x)$  y (1.11) por  $f(x)$ , y sumando ambas expresiones, se obtiene

$$f(x)(P(x)g'(x))' - g(x)(P(x)f'(x))' = 0.$$

Integramos ahora en ambos miembros de  $a$  hasta  $x \in [a, b]$ , y utilizando el método de integración por partes llegamos a que

$$f(x)P(x)g'(x) \Big|_a^x - \int_a^x P(t)g'(t)f'(t)dt - g(x)P(x)f'(x) \Big|_a^x + \int_a^x P(t)f'(t)g'(t)dt = 0.$$

Observamos que las integrales se cancelan consiguiendo que

$$P(x)[f(x)g'(x) - f'(x)g(x)] = P(a)[f(a)g'(a) - f'(a)g(a)].$$

Vemos que el miembro de la derecha es una constante y por tanto, se concluye la demostración de la fórmula de Abel.  $\square$

En el siguiente ejemplo, que ilustra la Fórmula de Abel, tomaremos una sencilla ecuación cuyas soluciones son muy conocidas.

**Ejemplo 1.11.** Consideramos la ecuación  $y''(x) + y(x) = 0$ , que ya está en forma auto-adjunta (basta escoger  $P(x) = Q(x) \equiv 1$ ). La solución general de esta ecuación es

$$y(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x), \text{ con } C_1 \text{ y } C_2 \text{ constantes reales.}$$

Tomando ahora dos soluciones  $f$  y  $g$  cualesquiera, estas serán de la forma siguiente

$$f(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) \text{ y } g(x) = C_3 \cos(x) + C_4 \sin(x) \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R} .$$

Operando se llega a que  $P(x)W[f, g](x) = C_1C_4 - C_2C_3$  que es una constante como afirma el lema.

La siguiente proposición muestra algunas propiedades del conjunto de ceros de una solución no trivial de la ecuación (1.6). En particular, afirma que el conjunto de ceros de una solución no trivial en cualquier intervalo compacto es finito.

**Proposición 1.12.** *Sea  $y$  una solución no trivial de (1.6), donde  $P \in C^1(I)$ ,  $Q \in C(I)$  y  $P(x) > 0$  para todo  $x \in I$ , con  $I$  intervalo de  $\mathbb{R}$ . Entonces se tiene que sus ceros son simples y el conjunto de tales ceros no posee puntos de acumulación. En consecuencia, en cada intervalo cerrado y acotado  $[a, b] \subset I$ ,  $y$  posee un número finito de ceros.*

*Demostración.* Primero veamos que los ceros de una solución no trivial de (1.6) son simples. Por reducción al absurdo, suponemos que  $x_0$  es un cero con multiplicidad algebraica mayor o igual que dos. En este caso se tendría que  $y(x_0) = y'(x_0) = 0$  y en base al teorema de existencia y unicidad de solución del problema de Cauchy (Teorema 1.1), dicha solución debe ser la función nula, en contradicción con las hipótesis.

Veamos ahora que los ceros de dicha solución no pueden poseer puntos de acumulación. Supongamos por el contrario que  $x_0$  es un punto de acumulación del conjunto de ceros de  $y$ , entonces existirá una sucesión  $(x_n)_n$  de ceros de  $y$  tal que  $x_n$  converge a  $x_0$  cuando  $n$  tiende a infinito. En virtud del Teorema de Rolle, podemos afirmar que entre dos ceros de  $y$  existe un cero de  $y'$ , por tanto existirá una sucesión  $(s_n)_n$  tal que  $y'(s_n) = 0$  y  $s_n \rightarrow x_0$ . Pero, por la continuidad de  $y$  y de su derivada concluimos que  $y(x_0) = y'(x_0) = 0$ , que ya habíamos visto que no se puede dar simultáneamente.

Finalmente, si en un intervalo  $[a, b]$  hubiese una cantidad infinita de ceros de  $y$ , en base al teorema de Bolzano-Weierstrass, dicha familia de ceros tendría un punto de acumulación, cosa que se ha demostrado falsa.  $\square$

Para ilustrar esta proposición vamos a volver al Ejemplo 1.11.

**Ejemplo 1.13.** Consideramos de nuevo la ecuación,  $y''(x) + y(x) = 0$ , cuya solución general es  $y(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)$  con  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ . Tomamos como solución la función  $y(x) = \cos(x)$ , y es conocido por todos que los ceros de dicha función son los puntos de la forma  $x = \pi/2 + k\pi$  con  $k \in \mathbb{Z}$ , es decir, la función  $\cos(x)$  posee una cantidad finita de ceros en cualquier intervalo  $[a, b]$  como afirma la proposición. Además, cabe señalar que los ceros son simples que era otra de las propiedades que enunciaba. El hecho de que sean simples es fácil de ver puesto que  $\cos(x)' = -\sin(x)$  que no se anula en tales puntos.

Como observación, cabe destacar que esta proposición no afirma que todas las soluciones de la ecuación (1.6) posean ceros en algún intervalo cerrado  $[a, b]$ , basta considerar la función  $e^x$  que es solución de  $y''(x) - y(x) = 0$ , y no posee ningún cero en toda la recta real.

En virtud de la Proposición 1.12 sabemos que en cada intervalo de la forma  $[a, b]$  existe un número finito de ceros. De aquí podemos deducir que el número de ceros en  $\mathbb{R}$  será numerable. Este hecho resultará importante más adelante puesto que hablaremos de ceros consecutivos, cosa que no podríamos hacer en caso contrario.

Aplicando los resultados previos podemos demostrar la siguiente proposición que afirma que dos soluciones de (1.6) con un cero común en un intervalo  $[a, b]$  han de ser linealmente dependientes en dicho intervalo.

**Proposición 1.14.** *Sean  $f$  y  $g$  dos soluciones no nulas de (1.6), donde  $P \in C^1[a, b]$ ,  $Q \in C[a, b]$  y  $P(x) > 0$  para todo  $x \in [a, b]$ . Supongamos que existe un punto  $x_0 \in [a, b]$  tal que  $f(x_0) = g(x_0) = 0$ . Se verifica entonces que  $f$  y  $g$  son linealmente dependientes en dicho intervalo  $[a, b]$ .*

*Demostración.* Aplicamos la fórmula de Abel (Lema 1.10)

$$P(x)W[f, g](x) = P(x)[f(x)g'(x) - f'(x)g(x)] = k \quad \forall x \in [a, b].$$

En particular tomando  $x = x_0$  concluimos que  $k = 0$ . Por tanto, se tiene que

$$P(x)[f(x)g'(x) - f'(x)g(x)] = 0, \quad \forall x \in [a, b].$$

Como hemos impuesto que  $P(x) > 0$  para todo  $x \in [a, b]$ , la expresión entre corchetes que es igual a  $W[f, g](x)$  tiene que ser igual a 0 para todo  $x$  en  $[a, b]$ , y aplicando la Proposición 1.3 a  $f$  y  $g$ , concluimos que las funciones son linealmente dependientes en el intervalo  $[a, b]$ .  $\square$

Acabamos de ver que si dos soluciones tienen un cero común, estas son dependientes la una de la otra. La siguiente proposición está relacionada con la anterior puesto que la conclusión de la primera es la hipótesis de la segunda. En particular, afirma que si dos soluciones no triviales son dependientes en un intervalo cerrado  $[a, b]$ , entonces tienen los mismos ceros en dicho intervalo.

**Proposición 1.15.** *Sean  $f$  y  $g$  dos soluciones no nulas de la ecuación (1.6) en el intervalo  $[a, b]$  linealmente dependientes, y tal que  $f(x_0) = 0$  con  $x_0$  en el intervalo  $[a, b]$ . Entonces se tiene que  $g(x_0) = 0$ .*

*Demostración.* Como  $f$  y  $g$  son linealmente dependientes quiere decir que existen constantes  $C_1$  y  $C_2$  no ambas nulas tales que,

$$C_1f(x) + C_2g(x) = 0, \quad \forall x \in [a, b].$$

Veamos que ninguna de las constantes  $C_1$  y  $C_2$  son nulas. Suponemos lo contrario, es decir, consideramos que  $C_1 = 0$ , en este caso se tendría que  $C_2g(x) = 0$  para todo  $x$  en el intervalo  $[a, b]$ , y puesto que por hipótesis ninguna de las soluciones  $f, g$  es la solución nula, así  $C_2 = 0$  llegando a una contradicción ya que ambas constantes no son nulas. En consecuencia, se tiene que  $C_1 \neq 0$  y análogamente se deduce que  $C_2 \neq 0$ . Tomando ahora  $x = x_0$  vemos que  $C_1f(x_0) + C_2g(x_0) = 0$ , es decir,  $C_2g(x_0) = 0$ , y se concluye que  $g(x_0) = 0$ .  $\square$

La Proposición 1.15 no se trata exactamente del recíproco de la Proposición 1.14 puesto que dos soluciones  $f$  y  $g$  pueden ser dependientes en un intervalo  $[a, b]$  pero no tener ceros en dicho intervalo. Si se tratase del recíproco, la Proposición 1.15 afirmarí­a que si dos soluciones son dependientes en un intervalo  $[a, b]$  entonces necesariamente tienen un cero en común, cosa que no es cierta. Como ejemplo, basta considerar las funciones  $e^x$  y  $2e^x$ , ambas son soluci3n de la ecuaci3n  $y''(x) - y(x) = 0$ . Estas soluciones son linealmente dependientes en cualquier intervalo  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , pero sin embargo, ambas funciones son siempre positivas por lo que no se anulan en ningún punto.

El siguiente resultado que vamos a tratar, conocido como Teorema de Sonin-Polya, difiere mucho de todos los que vamos a ver, puesto que la mayor­a de los resultados que enunciaremos hablan de propiedades acerca de los ceros de las soluciones de (1.6). Este, sin embargo, habla de los valores máximos y m­nimos relativos de las soluciones de dicha ecuaci3n. En particular afirma que, bajo ciertas hip3tesis, la sucesi3n formada por los valores absolutos de los valores máximos y m­nimos relativos de las soluciones posee un carácter creciente o decreciente.

**Teorema 1.16. (Teorema de Sonin-Polya)** *Sea la ecuaci3n autoadjunta (1.6) tal que las funciones  $P$  y  $Q$  verifican  $P, Q \in C^1(I)$ , y no se anulan en un cierto intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ . Sea  $y$  una soluci3n no trivial de la ecuaci3n en tal intervalo. Si  $PQ$  es (estrictamente) decreciente en  $I$ , entonces los valores absolutos de los máximos y m­nimos relativos de  $y$  son (estrictamente) crecientes. Análogamente, si  $PQ$  es (estrictamente) creciente en  $I$ , entonces los valores absolutos de los máximos y m­nimos relativos de  $y$  son (estrictamente) decrecientes.*

*Demostraci3n.* Solamente vamos a demostrar el caso en el que  $PQ$  es decreciente pero no estrictamente puesto que los casos en los que  $PQ$  es estrictamente decreciente o  $PQ$  es (estrictamente) creciente, se demuestran de manera totalmente análoga.

Consideramos la funci3n

$$F(x) = y(x)^2 + \frac{(P(x)y'(x))^2}{P(x)Q(x)} = y(x)^2 + (P(x)y'(x))^2 \frac{1}{P(x)Q(x)}.$$

Derivando llegamos a que

$$F'(x) = 2y(x)y'(x) + \frac{2y'(x)}{Q(x)} (P(x)y'(x))' - \frac{(P(x)Q(x))'}{P(x)^2Q(x)^2} (P(x)y'(x))^2$$

y puesto que, despejando de la ecuaci3n (1.6) tenemos que  $(P(x)y'(x))' = -Q(x)y(x)$ , se cancelan los dos primeros términos, y simplificando el tercero, obtenemos que

$$F'(x) = -\frac{y'(x)^2}{Q(x)^2} (P(x)Q(x))'.$$

Ahora por hip3tesis, tenemos que  $PQ$  es decreciente, esto quiere decir que  $(PQ)' \leq 0$  en  $I$ . Por tanto, se satisface que  $F'(x) \geq 0$  para todo  $x \in I$  y así  $F$  es creciente en tal intervalo. En particular, si  $(x_n)$  es una sucesi3n de puntos en  $I$  tales que  $x_n \leq x_{n+1}$  para todo  $n$ , se tendrá que  $F(x_n) \leq F(x_{n+1})$ . Si tomamos ahora la sucesi3n formada por los puntos  $x_n \in I$  en los que  $y$  tiene un máximo o un m­nimo relativo, se tiene que  $F(x_n) = y(x_n)^2$  puesto que la derivada de  $y$  se anula en dichos puntos. Por consiguiente, podemos concluir que  $y(x_n)^2 \leq y(x_{n+1})^2$  para todo  $n$ , o equivalentemente que  $|y(x_n)| \leq |y(x_{n+1})|$  como afirma el teorema.  $\square$

**Corolario 1.17.** *Si en la ecuación (1.6) se tiene que  $PQ$  es una función constante, entonces la sucesión de valores máximos y mínimos relativos de cualquier solución de dicha ecuación es también constante. Esto quiere decir que los valores máximos y mínimos relativos de cada solución se encuentran a la misma altura en valor absoluto.*

*Demostración.* Se tiene que si  $PQ$  es una función constante, en particular será creciente y decreciente. Aplicando el Teorema 1.16 concluimos que los valores absolutos de los máximos y mínimos relativos de cualquier solución de (1.6), forman una sucesión creciente y decreciente. En particular, dicha sucesión es constante.  $\square$

Antes de ilustrar el Corolario 1.17 con un ejemplo, vamos a recordar lo que es una ecuación de Euler.

**Definición 1.18.** *Se dice que una ecuación de segundo orden lineal homogénea es de Euler, si es de la siguiente forma:*

$$a_2x^2y''(x) + a_1xy'(x) + a_0y(x) = 0, \quad a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}, a_2 \neq 0 \quad (1.12)$$

Una forma de resolver estas ecuaciones se basa en la búsqueda de soluciones del tipo  $y(x) = x^m$  con  $m$  escalar. Sustituyendo  $y$  en la ecuación, se llega a la ecuación de segundo grado en la variable  $m$ ,  $a_2m(m-1) + a_1m + a_0 = 0$ , llamada ecuación indicial. Hallando las soluciones  $m_1$  y  $m_2$  de dicha ecuación indicial, obtenemos que una candidata a base de la solución de (1.12) es  $\{x^{m_1}, x^{m_2}\}$ . Dependiendo de los valores de  $m_1, m_2$  la base será esa o habrá que modificarla adecuadamente, cuando  $m_1 = m_2$  o  $m_1$  y  $m_2$  son complejos. Para más detalle se puede consultar, por ejemplo, el capítulo 3 del libro [3].

Consideramos entonces el siguiente ejemplo que ilustra el carácter constante de los extremos relativos de las soluciones cuando  $PQ$  es una función constante.

**Ejemplo 1.19.** Consideramos la ecuación de Euler

$$x^2y''(x) + xy'(x) + 100y(x) = 0, \quad x > 0.$$

Utilizando la Proposición 1.5, la escribimos en su forma autoadjunta y obtenemos

$$(xy'(x)/100)' + y(x)/x = 0.$$

En este caso se tiene que  $P(x)Q(x) \equiv 1/100$ , es decir,  $PQ$  es constante. En virtud del Corolario 1.17, todos los valores máximos y mínimos relativos de cualquier solución, se encontrarán a la misma altura en valor absoluto. Por otro lado, siguiendo el método enunciado, probamos con soluciones del tipo  $y(x) = x^m$ . Derivando y sustituyendo llegamos a la ecuación indicial  $m^2 + 100 = 0$ , cuyas raíces son trivialmente  $m_1 = 10i$  y  $m_2 = -10i$ . En este caso, obtenemos que una posible base para la solución de la ecuación de Euler es  $\{x^{10i}, x^{-10i}\}$ . Puesto que en esta memoria solo consideramos soluciones reales, podemos escribir las funciones en forma exponencial, es decir,  $x^{10i} = \exp(10 \log(x)i)$ , y aplicando la fórmula de Euler para la exponencial de un número complejo, obtenemos que la solución general real es

$$y(x) = C_1 \cos(10 \log(x)) + C_2 \sin(10 \log(x)) \quad \text{con} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

En la Figura 1.1 hemos representado la función  $|\sin(10 \log(x))|$ . Podemos ver cómo todos los valores máximos y mínimos relativos de la solución  $y(x) = \sin(10 \log(x))$  tienen el mismo valor absoluto como habíamos afirmado aplicando el Corolario 1.17.

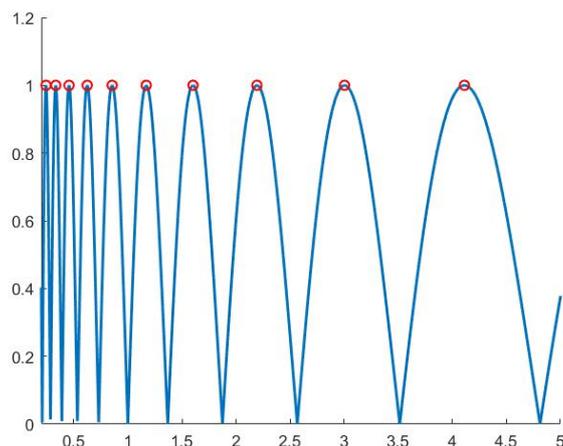


Figura 1.1: Gráfica de la función  $|\sin(10 \log(x))|$ .

En el siguiente ejemplo vamos a considerar una ecuación en la que no se satisfaga que  $PQ$  sea una constante, pero sí estrictamente decreciente.

**Ejemplo 1.20.** Consideramos la siguiente ecuación de Euler

$$x^2 y''(x) + \frac{401}{4} y(x) = 0, \quad x > 0.$$

Escribiéndola en su forma autoadjunta obtenemos  $y''(x) + 401y(x)/4x^2 = 0$ . Vemos que  $P(x)Q(x) = 401/4x^2$  y entonces se satisface que  $PQ$  es una función estrictamente decreciente en el intervalo  $(0, +\infty)$ . Por tanto, en base al Teorema de Sonin-Polya, se tendrá que las soluciones de dicha ecuación cumplirán que los valores absolutos de los máximos y mínimos relativos forman una sucesión estrictamente creciente.

Veamos que esto es cierto resolviendo dicha ecuación con el método descrito anteriormente. Probamos con soluciones del tipo  $y(x) = x^m$ ; derivando y sustituyendo llegamos a la ecuación indicial  $m^2 - m + 401/4 = 0$  cuyas raíces son  $m_1 = 1/2 + 10i$  y  $m_2 = 1/2 - 10i$ . Reescribiendo las soluciones de manera análoga al ejemplo anterior, llegamos a que la solución general de esta ecuación de Euler es

$$y(x) = C_1 \sqrt{x} \cos(10 \log(x)) + C_2 \sqrt{x} \sin(10 \log(x)) \quad \text{con } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

En la Figura 1.2 hemos representado la función  $|\sqrt{x} \cos(10 \log(x))|$ . Se puede observar que, efectivamente los valores máximos y mínimos relativos, en valor absoluto, de la solución  $y(x) = \sqrt{x} \cos(\log(x))$  forman una sucesión estrictamente creciente como afirma el Teorema 1.16.

Como observación final al Teorema de Sonin-Polya (Teorema 1.16) y al Corolario 1.17, destacamos que la sucesión formada por los puntos  $x_n \in I$  en los que  $y$  tiene un máximo o mínimo relativo, puede ser una sucesión finita, es decir, no tiene que cumplirse que la solución  $y$  tenga una cantidad infinita de máximos y mínimos para que el resultado sea cierto. Por ejemplo, basta considerar la ecuación  $y''(x) - y(x) = 0$ , en este caso se tiene que  $PQ \equiv -1$ , es decir, la función  $PQ$  es constante. Aplicando el Corolario 1.17 se tendría que la sucesión de los valores máximos y mínimos relativos en valor absoluto debería ser constante. Sin embargo, tomando  $e^x$  como solución de la ecuación, vemos que esta no posee ningún extremo relativo, verificándose de forma trivial el Corolario 1.17.

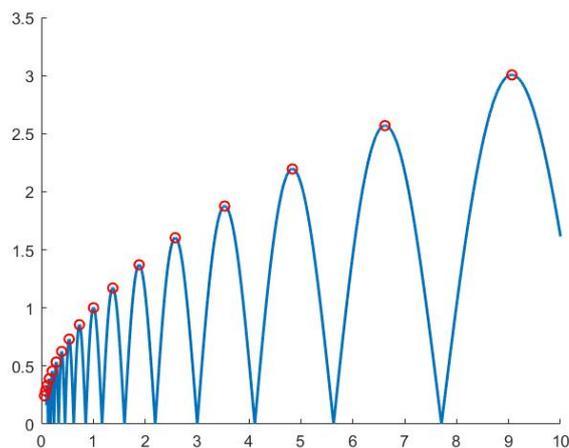


Figura 1.2: Gráfica de la función  $|\sqrt{x} \cos(10 \log(x))|$ .

## 1.4. Teorema de Separación de Sturm

El siguiente resultado es uno de los más importantes de la Teoría de Sturm, es conocido como Teorema de Separación de Sturm y habla de cómo se distribuyen los ceros de dos soluciones linealmente independientes de la misma ecuación. En particular, afirma que entre dos ceros de una solución hay exactamente un cero de la otra, por lo que los ceros de cada solución se van alternando. Este teorema se puede encontrar en libros como [8], [9], [10] o [11].

**Teorema 1.21. (Teorema Separación de Sturm)** Sean  $f$  y  $g$  dos soluciones reales linealmente independientes de la ecuación autoadjunta (1.6) en el intervalo  $[a, b]$ , donde  $P \in C^1[a, b]$ ,  $Q \in C[a, b]$  y  $P(x) > 0$  para todo  $x \in [a, b]$ . Entonces se cumple que entre dos ceros consecutivos cualesquiera de  $f$  hay un y solo un cero de  $g$ .

*Demostración.* Llamemos  $x_1$  y  $x_2$  a dos ceros consecutivos de  $f$  en el intervalo  $[a, b]$ . En base al Teorema 1.14 se tiene que  $g(x_1) \neq 0$  y  $g(x_2) \neq 0$  puesto que si en alguno de los ceros de  $f$ , la función  $g$  se anula deduciríamos que  $f$  y  $g$  son linealmente dependientes, en contradicción con las hipótesis.

En primer lugar probaremos que existe al menos un cero de  $g$  en el intervalo  $(x_1, x_2)$ . Por reducción al absurdo, supongamos que  $g$  no tiene ningún cero en el intervalo abierto  $(x_1, x_2)$ . Debido a que las soluciones  $f$  y  $g$  poseen derivadas continuas en  $[a, b]$  y  $g(x) \neq 0$  para todo  $x$  en el intervalo  $[x_1, x_2]$ , la función  $f/g$  también posee derivada continua en el intervalo  $[x_1, x_2]$ . Además puesto que  $x_1, x_2$  son ceros de  $f$  se tiene que el cociente  $f/g$  se anula en los extremos del intervalo  $[x_1, x_2]$ . En virtud del teorema de Rolle, podemos afirmar que existe un punto del intervalo  $(x_1, x_2)$  tal que la derivada de la función  $f/g$  se anula. Esto quiere decir que existe un punto  $\xi \in (x_1, x_2)$  tal que

$$\left( \frac{f(x)}{g(x)} \right)' \Big|_{x=\xi} = 0.$$

Por otro lado, tenemos que

$$\left( \frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} = \frac{W[g, f](x)}{g(x)^2}.$$

Puesto que  $f$  y  $g$  son linealmente independientes en  $[a, b]$  se tiene, en virtud de la Proposición 1.3, que  $W[g, f](x) \neq 0$  y por tanto

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' \neq 0 \quad \forall x \in (x_1, x_2),$$

llegando así a una contradicción. En consecuencia, podemos concluir que  $g$  tiene al menos un cero en el intervalo abierto  $(x_1, x_2)$ .

Veamos ahora que tiene exactamente uno. Supongamos que  $g$  posee más de un cero dentro del intervalo  $(x_1, x_2)$  y llamemos  $x_3$  y  $x_4$  a dos de esos ceros consecutivos; es decir,  $x_1 < x_3 < x_4 < x_2$  con  $f(x_1) = f(x_2) = 0$  y  $g(x_3) = g(x_4) = 0$ . Ahora intercambiando los papeles de  $f$  y  $g$  hemos demostrado en el paso anterior que cada dos ceros consecutivos de  $g$  hay al menos un cero de  $f$ . En consecuencia tendría que haber al menos un cero  $x_5$  de  $f$  en el intervalo abierto  $(x_3, x_4)$  pero esto va en contra de que  $x_1$  y  $x_2$  eran dos ceros consecutivos de  $f$ . Por todo ello,  $g$  posee exactamente un solo cero en el intervalo abierto  $(x_1, x_2)$  como afirma el teorema.  $\square$

Como primer ejemplo vamos a considerar una ecuación de orden 2 sencilla pero cuyas soluciones ilustran muy bien el Teorema de Separación de Sturm.

**Ejemplo 1.22.** Consideramos la ecuación  $y''(x) + y(x) = 0$ . En este caso, podemos considerar cualquier intervalo cerrado  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  puesto que  $P(x) = 1 = Q(x)$  satisfacen todas las hipótesis impuestas en tal intervalo. Se tiene que la solución general de esta ecuación es  $y(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)$  con  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ . Es conocido el hecho de que los ceros de las funciones seno y coseno se van alternado (ver Figura 1.3(a)). Sin embargo, un hecho menos obvio es que dos funciones cualesquiera de la forma

$$f(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x), \quad g(x) = C_3 \cos(x) + C_4 \sin(x)$$

tienen los ceros alternados siempre y cuando dichas soluciones sean linealmente independientes. Para ver cuándo son independientes podemos calcular su wronskiano. Como vimos en el Ejemplo 1.11, tenemos que  $W[f, g](x) = C_1 C_4 - C_2 C_3$ . En consecuencia, podemos concluir que las soluciones son independientes siempre que se cumpla que  $C_1 C_4 \neq C_2 C_3$  y así las soluciones tendrán sus ceros entrelazados, en caso de que estos existan. Por el contrario, si  $C_1 C_4 = C_2 C_3$  los ceros de  $f$  y  $g$  coinciden en virtud de la Proposición 1.15. Para poner de manifiesto el Teorema de Separación con una representación gráfica, vamos a considerar como soluciones linealmente independientes las funciones  $f(x) = 2 \cos(x) - \sin(x)$  y  $g(x) = -2 \cos(x) + 3 \sin(x)$  y como intervalo  $[a, b]$  tomamos el  $[0, 8\pi]$ . En base a lo calculado anteriormente, tenemos que el wronskiano de estas soluciones vale 4 y por ello, ambas soluciones son linealmente independientes. En la Figura 1.3(b) se puede ver claramente el entrelazamiento entre los ceros de las soluciones  $f$  y  $g$ .

Notemos que el Teorema de Separación de Sturm no aborda el caso en que alguna de las soluciones  $f$  o  $g$  no tengan ningún cero en el intervalo  $[a, b]$ . De esta forma, supongamos que  $f$  y  $g$  son dos soluciones linealmente independientes de (1.6) en el intervalo  $[a, b]$ , y además consideramos que  $f$  no tiene ningún cero en dicho intervalo. En virtud del Teorema de Separación de Sturm si  $g$  tuviese al menos dos ceros en el intervalo  $[a, b]$ ,  $f$  tendría al menos un cero entre dos ceros consecutivos de  $g$  pero esto es absurdo puesto que hemos supuesto que  $f$  no tiene ceros en tal intervalo. En consecuencia, en base a dicho teorema podemos concluir que si  $f$  y  $g$  son dos soluciones independientes en el intervalo  $[a, b]$  y

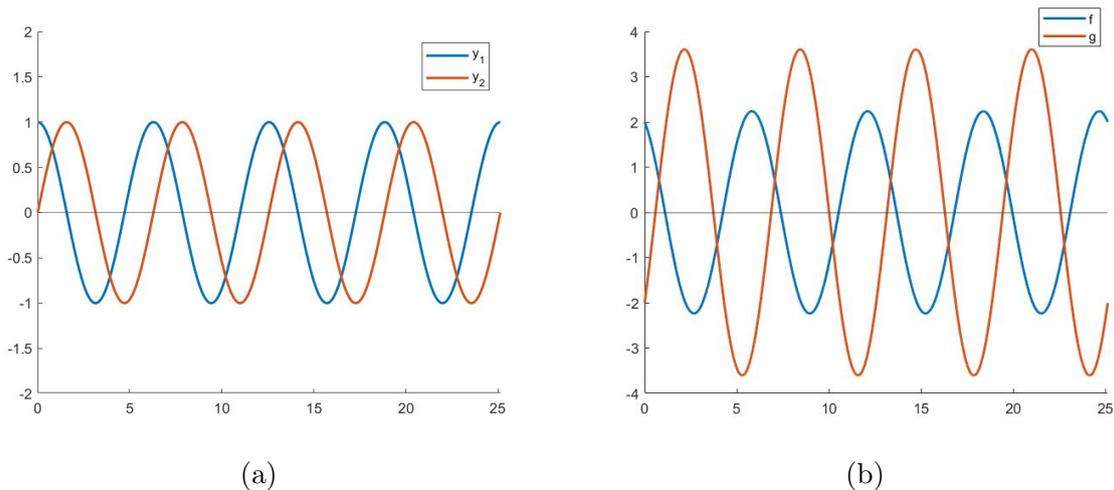


Figura 1.3: Gráfica de distintas soluciones de  $y''(x) + y(x) = 0$ . (a) Las funciones  $y_1(x) = \cos(x)$  e  $y_2(x) = \sin(x)$  (b) las funciones  $f(x) = 2 \cos(x) - \sin(x)$  y  $g(x) = -2 \cos(x) + 3 \sin(x)$ .

una de ellas no tiene ceros en dicho intervalo, se puede afirmar que la otra solución tiene como mucho un cero en el mismo intervalo. Para ilustra esta reflexión vamos a considerar el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 1.23.** Consideramos la ecuación  $y''(x) - y(x) = 0$ , donde  $P = 1$  y  $Q = -1$  satisfacen las hipótesis impuestas para cualquier intervalo  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ . Una base para la solución de esta ecuación es la formada por las funciones  $e^x$  y  $e^{-x}$ . Ambas funciones son siempre positivas para cualquier intervalo  $[a, b]$ , es decir, no tienen ceros. Por otra parte, se tiene que otra posible base para la solución es la formada por las funciones  $\sinh(x)$  y  $\cosh(x)$ . Ahora, se tiene que el  $\cosh(x)$  no se anula para ningún  $x \in \mathbb{R}$ . Sin embargo, el  $\sinh(x)$  sí que se anula para  $x = 0$ , por tanto, si consideramos el intervalo  $[-a, a]$  con  $a \in \mathbb{R}^+$ , se tendrá que una solución,  $\sinh(x)$ , sí que tendrá un cero en  $x = 0$ , mientras que la otra,  $\cosh(x)$ , no tendrá ningún cero en todo el intervalo. Este hecho no contradice al Teorema 1.21 puesto que para que el  $\cosh(x)$  tuviese algún cero en tal intervalo, la función  $\sinh(x)$  debería tener dos ceros, cosa que no es cierta.

Antes de proponer el siguiente ejemplo, vamos a definir unas funciones especiales conocidas como funciones de Bessel, estas funciones nos serán útiles para ilustrar diferentes resultados de la Teoría de Sturm. Las siguientes nociones se pueden consultar más a fondo, por ejemplo, en libros como [1] o [4].

**Definición 1.24.** (Ecuación de Bessel de orden  $\alpha$ )  
Se llama ecuación de Bessel de orden  $\alpha$  a la ecuación

$$x^2 y''(x) + x y'(x) + (x^2 - \alpha^2) y(x) = 0,$$

donde  $\alpha$  es un número real o complejo.

En general  $\alpha$  puede ser un número real o complejo, sin embargo, en esta memoria solo trabajamos con ecuaciones reales por lo que consideraremos que  $\alpha$  solo toma valores reales, en particular que  $\alpha \geq 0$ .

La ecuación de Bessel se puede resolver aplicando el método de Frobenius que consiste en buscar soluciones del tipo

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\lambda}$$

con  $\lambda$  y  $a_n$  escalares por determinar. Dicho método es una mezcla entre el de series de potencias y el utilizado para resolver las ecuaciones de Euler. De esta manera se llega a una solución, denominada función de Bessel de orden  $\alpha$  de primera clase y que se denota por  $J_\alpha$ :

$$J_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + \alpha + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\alpha},$$

donde  $\Gamma(z)$  denota la función Gamma de Euler. Recordemos que, cuando  $\alpha$  es un número entero  $\Gamma(k + \alpha + 1) = (k + \alpha)!$

Si  $\alpha > 0$  no es entero,  $J_\alpha$  y  $J_{-\alpha}$  son linealmente independientes y la solución general vendrá dada por  $y(x) = C_1 J_\alpha(x) + C_2 J_{-\alpha}(x)$  con  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ . Por el contrario, si  $\alpha$  es entero se cumple que

$$J_{-\alpha}(x) = (-1)^\alpha J_\alpha(x).$$

Esto quiere decir que ambas funciones son linealmente dependientes y debemos construir otra solución de la ecuación de Bessel de orden  $\alpha$  que sea linealmente independiente a  $J_\alpha$ . Esta función se conoce como función de Bessel de segunda clase y orden  $\alpha$ , y se denota por  $Y_\alpha(x)$ . Si  $n$  es un número entero, la función  $Y_n$  se puede expresar como

$$Y_n(x) = \lim_{\alpha \rightarrow n} Y_\alpha(x),$$

donde

$$Y_\alpha(x) = \frac{J_\alpha(x) \cos(\alpha\pi) - J_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)} \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}.$$

En consecuencia, la solución general de la ecuación de Bessel de orden  $\alpha = n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  se puede escribir como:

$$y(x) = C_1 J_\alpha(x) + C_2 Y_\alpha(x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad (1.13)$$

Aplicando ahora la Proposición 1.5, podemos escribir la ecuación de Bessel de orden  $\alpha$  en su forma autoadjunta multiplicando por el factor  $\mu(x) = 1/x$ , obteniendo así

$$(xy'(x))' + \left(x - \frac{\alpha^2}{x}\right) y(x) = 0. \quad (1.14)$$

Se observa que en este caso  $P(x) = x$ . En consecuencia, trabajaremos en intervalos  $[a, b] \subset \mathbb{R}^+$ , ya que una de nuestras hipótesis era que  $P(x) > 0$  para todo  $x \in [a, b]$ .

**Ejemplo 1.25.** Consideramos la ecuación de Bessel de orden  $\alpha = 0$  es su forma autoadjunta

$$(xy'(x))' + xy(x) = 0. \quad (1.15)$$

Como hemos visto anteriormente se tiene que la solución general de (1.15) es

$$y(x) = C_1 J_0(x) + C_2 Y_0(x) \quad \text{con } C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

donde  $J_0$  e  $Y_0$  representan las funciones de Bessel de orden 0, de primera y segunda clase respectivamente.

Para ilustrar con una gráfica el Teorema de Separación de Sturm con las soluciones de la ecuación (1.15), tomaremos como funciones linealmente independientes a  $f(x) = J_0(x)$  y  $g(x) = Y_0(x)$ , que representamos en la Figura 1.4. Dicha figura se ha realizado usando la implementación que tiene el programa Matlab acerca de las funciones de Bessel. Como podemos apreciar en dicha figura, se observa que entre dos ceros consecutivos de la función de Bessel de primera clase y orden 0,  $J_0$ , hay exactamente un cero de la función de Bessel de segunda clase y orden 0,  $Y_0$ , y viceversa como afirma el Teorema de Separación.

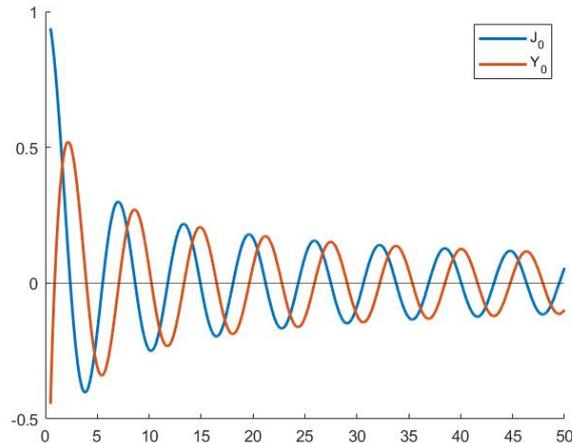


Figura 1.4: Funciones de Bessel de orden 0 de primera,  $J_0$ , y segunda clase,  $Y_0$ .

De la Figura 1.4 podemos intuir que las funciones de Bessel poseen un número infinito de ceros, este hecho se probará más adelante en el capítulo 2 (ver Teorema 2.5 y Ejemplo 2.6). En consecuencia, hasta el momento hemos visto dos ejemplos, que ilustran el Teorema de Separación de Sturm, en los cuales todas las soluciones tienen un número infinito de ceros en el intervalo  $(0, +\infty)$ . Sin embargo, el Teorema 1.21 también se aplica a ecuaciones cuyas soluciones poseen un número finito de ceros, puesto que en las hipótesis de dicho resultado no se habla del cardinal de ceros que han de poseer dichas funciones.

Antes de analizar un ejemplo en el cual las soluciones posean un número finito de ceros, vamos a introducir un tipo de polinomios, conocidos como polinomios de Hermite. Estos polinomios son solución de la ecuación diferencial con el mismo nombre. Dichas funciones son muy conocidas y se pueden encontrar en libros como [1] o [6].

**Definición 1.26.** *Se dice ecuación de Hermite de orden  $\alpha$  a*

$$y''(x) - 2xy'(x) + 2\alpha y(x) = 0,$$

donde  $\alpha$  es un parámetro real.

Dicha ecuación se puede resolver mediante el método de series de potencias. Se puede demostrar que para  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  una de las soluciones linealmente independientes es un polinomio de grado  $n$ . Al único polinomio con coeficiente de  $x^n$  igual a  $2^n$ , que satisface

la ecuación de Hermite de orden  $\alpha = n$ , se le conoce como polinomio de Hermite de grado  $n$ .

Aplicando ahora la Proposición 1.5, podemos escribir la ecuación de Hermite en su forma autoadjunta, obteniendo

$$(e^{-x^2} y'(x))' + 2\alpha e^{-x^2} y(x) = 0. \quad (1.16)$$

Lo primero que observamos es que en este caso, la función  $P$  es igual a  $e^{-x^2}$  y dicha función es siempre positiva. En consecuencia, podemos trabajar con cualquier intervalo cerrado de la recta real,  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ . Sabemos que una solución de (1.16) es un polinomio de grado  $\alpha$ , cuando  $\alpha$  es un número natural. La otra solución linealmente independiente no es tan fácil de encontrar y su expresión no es tan sencilla. Sin embargo, en virtud del Teorema 1.21, podemos asegurar que el número de ceros de esa solución es finito puesto que en caso contrario tendríamos que el polinomio de Hermite debería tener también un número infinito de ceros, cosa que es absurda puesto que se trata de un polinomio. Podemos decir más, si llamamos  $H_n$  al polinomio de Hermite de grado  $n$  y sea  $y_n$  una solución linealmente independiente a  $H_n$  de la ecuación de Hermite de orden  $n$ , en base al Teorema 1.21 podemos afirmar que la solución  $y_n$  posee una cantidad de ceros en el conjunto  $\{n-1, n, n+1\}$  puesto que el polinomio  $H_n$  posee exactamente  $n$  ceros en toda la recta real. Para ilustrar gráficamente estos resultados, consideramos el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 1.27.** Tomamos la ecuación  $(e^{-x^2} y'(x))' + 6e^{-x^2} y(x) = 0$ , que se trata de la ecuación de Hermite de orden 3 en forma autoadjunta. Se puede comprobar fácilmente que el polinomio  $H_3(x) = 8x^3 - 12x$  es una solución. Por tanto, tenemos que el polinomio de Hermite de grado 3 es  $H_3$ . Los ceros de dicho polinomio son  $x_1 = 0$  y  $x_{2,3} = \pm\sqrt{3/2}$ . Aplicando ahora el Teorema 1.21, podemos afirmar que cualquier solución  $y_3$  de la ecuación, linealmente independiente de  $H_3$  ha de poseer un cero en el intervalo  $(-\sqrt{3/2}, 0)$  y otro en el intervalo  $(0, +\sqrt{3/2})$ . Además, se puede garantizar que tanto en el intervalo  $(-\infty, -\sqrt{3/2})$  como en  $(+\sqrt{3/2}, +\infty)$ , la solución  $y_3$  posee como mucho un cero en cada uno de ellos.

En la Figura 1.5 están dibujados el polinomio de Hermite de grado 3 ( $H_3$ ) y otra solución ( $y_3$ ) de la ecuación de Hermite de orden 3 linealmente independiente con  $H_3$ . Dicha solución ha sido hallada mediante el método de diferencias finitas, en particular, la función ha sido calculada resolviendo el problema de contorno con las condiciones  $y_3(-2) = 20$  e  $y_3(2) = 20$ . En la figura se puede observar cómo se entrelazan los ceros del polinomio de Hermite de grado 3 con  $y_3$ .

## 1.5. Teorema de Comparación de Sturm

Al igual que el Teorema de Separación de Sturm, el siguiente teorema del que vamos a tratar es esta sección es uno de los más relevantes de toda la teoría. Este teorema, conocido como el Teorema de Comparación de Sturm, también habla de cómo se distribuyen los ceros de las soluciones de ciertas ecuaciones escritas en su forma autoadjunta. A diferencia del Teorema de Separación, el Teorema de Comparación relaciona las soluciones de la ecuación (1.6) cuando  $Q$  es distinto, es decir, en este teorema no se comparan dos soluciones de la misma ecuación. En particular, bajo ciertas hipótesis, afirma que entre dos ceros consecutivos de una solución existe al menos un cero de la otra solución. Este teorema se puede encontrar en libros como [8], [9], [10] o [11].

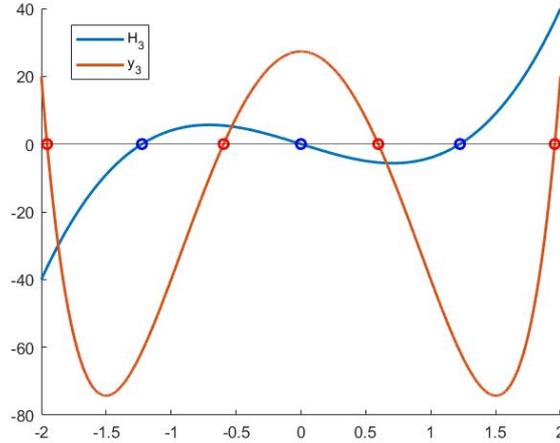


Figura 1.5: Soluciones de la ecuación de Hermite de orden 3.

**Teorema 1.28. (Teorema de Comparación de Sturm)** Sea  $f$  una solución real no trivial de la ecuación

$$(P(x)y'(x))' + Q_1(x)y(x) = 0$$

y sea  $g$  una solución real no trivial de

$$(P(x)y'(x))' + Q_2(x)y(x) = 0,$$

ambas definidas en el intervalo  $[a, b]$ . Además, supongamos que  $P \in C^1[a, b]$ ,  $Q_1, Q_2 \in C[a, b]$ , y tales que  $P(x) > 0$  y  $Q_2(x) > Q_1(x)$  para todo  $x \in [a, b]$ . Entonces se cumple que entre dos ceros consecutivos de  $f$  existe al menos un cero de  $g$ .

*Demostración.* Suponemos por reducción al absurdo que  $g$  no tiene ningún cero en el intervalo  $(x_1, x_2)$ . Como  $x_1$  y  $x_2$  son dos ceros consecutivos de  $f$ ,  $f$  toma siempre el mismo signo en  $(x_1, x_2)$ ; lo mismo ocurre con  $g$  puesto que estamos suponiendo que no se anula en dicho intervalo. Sin pérdida de generalidad, suponemos que  $f(x)$  y  $g(x)$  son mayores que 0 para todo  $x \in (x_1, x_2)$ . Si no fuera así, bastaría considerar las soluciones  $-f$  y/o  $-g$ . Por hipótesis se cumple que

$$(P(x)f'(x))' + Q_1(x)f(x) = 0 \tag{1.17}$$

y

$$(P(x)g'(x))' + Q_2(x)g(x) = 0 \tag{1.18}$$

Multiplicando (1.17) por  $g(x)$  y (1.18) por  $f(x)$  y restando obtenemos

$$g(x)(P(x)f'(x))' - f(x)(P(x)g'(x))' = (Q_2(x) - Q_1(x))f(x)g(x) \tag{1.19}$$

Desarrollando la derivada de la función  $P(x)(f'(x)g(x) - f(x)g'(x))$ , obtenemos la siguiente expresión

$$g(x)(P(x)f'(x))' - f(x)(P(x)g'(x))' = (P(x)(f'(x)g(x) - f(x)g'(x)))'$$

De esta manera, la igualdad (1.19) se transforma en

$$(P(x)(f'(x)g(x) - f(x)g'(x)))' = (Q_2(x) - Q_1(x))f(x)g(x).$$

Integrando en ambos miembros entre  $x_1$  y  $x_2$  obtenemos la siguiente igualdad

$$P(x)(f'(x)g(x) - f(x)g'(x)) \Big|_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} [Q_2(x) - Q_1(x)] f(x)g(x)dx.$$

Puesto que  $x_1$  y  $x_2$  son ceros de la función  $f$ , la igualdad se convierte en

$$P(x_2)f'(x_2)g(x_2) - P(x_1)f'(x_1)g(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} [Q_2(x) - Q_1(x)] f(x)g(x)dx. \quad (1.20)$$

Ahora, por hipótesis se tiene que  $P(x)$  es mayor que cero en  $[a, b]$ . Además,  $f(x)$  es mayor que 0 en  $(x_1, x_2)$  y  $f(x_2) = 0$ , por tanto, se tiene que  $f'(x_2)$  es menor que 0. Por otro lado,  $g(x)$  es mayor que cero en  $(x_1, x_2)$ , así se tiene que  $g(x_2)$  es mayor o igual que cero por ser  $g$  continua. En consecuencia se tiene que  $P(x_2)f'(x_2)g(x_2) \leq 0$ . Análogamente se tiene que  $P(x_1)f'(x_1)g(x_1) \geq 0$  ya que  $P(x_1) > 0$ ,  $f'(x_1) > 0$  y  $g(x_1) \geq 0$ . Por tanto, el término de la izquierda de (1.20) es no positivo. Sin embargo, por hipótesis  $Q_2(x) - Q_1(x) > 0$  y además  $f$  y  $g$  son positivas en  $(x_1, x_2)$  y así, el término de la derecha de (1.20) es positivo. En consecuencia, habiendo llegado a una contradicción por el hecho de suponer que  $g$  no tenía ceros en  $(x_1, x_2)$ , podemos afirmar que  $g$  tiene al menos un cero en el intervalo abierto  $(x_1, x_2)$  como afirmaba el teorema.  $\square$

El siguiente teorema es una versión más general del Teorema de Comparación 1.28. Dicho teorema junto con su demostración se puede encontrar, por ejemplo, en [10].

**Teorema 1.29.** Sean  $f$  y  $g$  soluciones reales no triviales de

$$(P_1(x)y'(x))' + Q_1(x)y(x) = 0 \quad \text{y} \quad (P_2(x)y'(x))' + Q_2(x)y(x) = 0,$$

respectivamente, ambas definidas en el intervalo  $[a, b]$ . Además, supongamos que  $P_1, P_2 \in C^1[a, b]$  y  $Q_1, Q_2 \in C[a, b]$ , tales que  $P_1(x) \geq P_2(x) > 0$  y  $Q_2(x) \geq Q_1(x)$  para todo  $x \in [a, b]$ . Entonces se cumple que entre dos ceros consecutivos de  $f$  existe al menos un cero de  $g$ .

Como primer ejemplo vamos a considerar dos ecuaciones cuyas soluciones son combinaciones de senos y cosenos.

**Ejemplo 1.30.** Tomamos las ecuaciones  $y_1''(x) + y_1(x) = 0$  e  $y_2''(x) + 25y_2(x) = 0$ . Vemos que ambas están escritas en su forma autoadjunta donde  $Q_2(x) = 25 > 1 = Q_1(x)$ . En consecuencia, estamos bajo las hipótesis del Teorema 1.28 y sin resolver, podemos concluir que entre dos ceros de cualquier solución no trivial de la primera ecuación, toda solución de la segunda poseerá al menos un cero. En efecto, es fácil ver que, las soluciones generales de ambas ecuaciones son  $y_1(x) = C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x)$  e  $y_2(x) = C_3 \sin(5x) + C_4 \cos(5x)$ , con  $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$ . En la Figura 1.6 se han tomado dos soluciones particulares de  $y_1$  e  $y_2$ . En ella, se puede observar claramente cómo entre dos ceros de  $y_1$  hay al menos uno de  $y_2$ . En este caso concreto, puesto que las funciones  $y_1$  e  $y_2$  son periódicas, se puede ver que entre dos ceros consecutivos de  $y_1$  hay exactamente cinco ceros de  $y_2$ .

Para ilustrar con otro ejemplo el Teorema 1.28, vamos a volver a considerar las funciones de Bessel que definimos en la sección anterior (ver Definición 1.24 y Ejemplo 1.25).

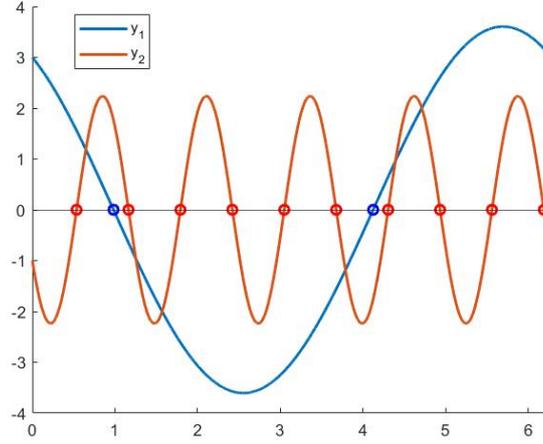


Figura 1.6: Gráficas de  $y_1(x) = 3 \cos(x) - 2 \sin(x)$  e  $y_2(x) = -\cos(5x) - 2 \sin(5x)$ .

**Ejemplo 1.31.** Consideramos las ecuaciones de Bessel de orden 10 y 0 en forma autoadjunta

$$(xy'_{10}(x))' + \left(x - \frac{100}{x}\right) y_{10}(x) = 0 \quad x > 0, \quad (1.21)$$

$$(xy'_0(x))' + xy_0(x) = 0 \quad x > 0. \quad (1.22)$$

Como ya hemos visto (ver (1.13)), las soluciones generales de las ecuaciones (1.21) y (1.22) son:

$$y_0(x) = C_1 J_0(x) + C_2 Y_0(x), \quad y_{10}(x) = C_3 J_{10}(x) + C_4 Y_{10}(x), \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R},$$

donde  $J_0, Y_0$  son las funciones de Bessel de orden 0 de primera y segunda clase respectivamente, y  $J_{10}, Y_{10}$  son las funciones de Bessel de orden 10 de primera y segunda clase. Claramente  $P(x) = x$ ,  $Q_1(x) = x$  y  $Q_2(x) = x - 100/x$  verifican las hipótesis del Teorema 1.28 en cualquier intervalo  $[a, b] \subset \mathbb{R}^+$ . Así, podemos concluir que entre dos ceros de cualquier función de  $y_{10}$  hay al menos un cero de cualquier función  $y_0$ .

Para ilustrar dicho problema, tomaremos  $C_2 = C_4 = 0$  y  $C_1 = C_3 = 1$ , es decir, las soluciones particulares  $y_0(x) = J_0(x)$  e  $y_{10}(x) = J_{10}(x)$ . En la Figura 1.7 representamos ambas funciones en el intervalo  $[1/2, 30]$ . Se puede observar que entre los dos primeros ceros de  $J_{10}$  hay dos ceros de  $J_0$  haciendo claro el resultado de la existencia de al menos uno, a diferencia del Teorema de Separación que afirmaba la existencia de exactamente un cero.

Al igual que el Teorema 1.21, el Teorema de Comparación de Sturm también se aplica a ecuaciones cuyas soluciones posean un número finito de ceros. Para ilustrar este hecho volveremos a considerar los polinomios de Hermite introducidos anteriormente.

**Ejemplo 1.32.** Consideramos la ecuación de Hermite (1.16) tomando dos valores de  $\alpha$  distintos y ambos enteros no negativos. Así, obtenemos las dos siguientes ecuaciones,

$$(e^{-x^2} y'(x))' + 2\alpha_1 e^{-x^2} y(x) = 0, \quad (1.23)$$

$$(e^{-x^2} y'(x))' + 2\alpha_2 e^{-x^2} y(x) = 0. \quad (1.24)$$

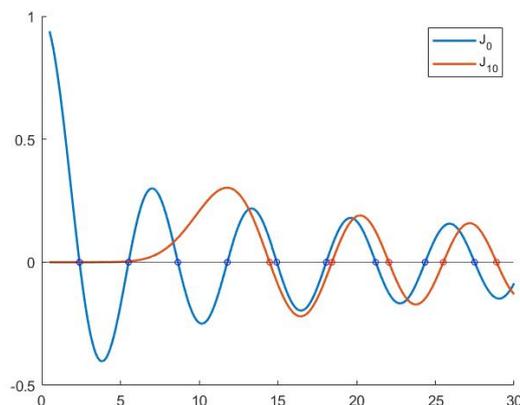


Figura 1.7: Funciones de Bessel de primera clase de orden 0 y 10.

Supongamos que  $\alpha_1 > \alpha_2$ , así tendremos que  $Q_1(x) = 2\alpha_1 e^{-x^2} > 2\alpha_2 e^{-x^2} = Q_2(x)$ . Aplicando ahora el Teorema 1.28 podemos afirmar que entre dos ceros de una solución cualquiera de (1.24) habrá al menos un cero de una solución de (1.23). En particular se puede concluir que, si  $H_{\alpha_1}$  y  $H_{\alpha_2}$  son los polinomios de Hermite de grado  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  respectivamente, se tiene que entre dos ceros de  $H_{\alpha_2}$  habrá al menos uno de  $H_{\alpha_1}$ . Este hecho es igual de válido si consideramos dos soluciones cualesquiera de (1.23) y (1.24) a pesar de que las que no son polinómicas sean difíciles de calcular explícitamente.

En la Figura 1.8 se han tomado  $\alpha_1 = 10$  y  $\alpha_2 = 8$  y como soluciones los polinomios  $H_{10}$  y  $10H_8$ . En ella se puede observar que entre dos ceros de  $10H_8$  hay al menos uno de  $H_{10}$ , en particular se puede ver que entre los dos ceros centrales de  $10H_8$  hay exactamente dos raíces de  $H_{10}$  poniendo así de manifiesto que no tiene por qué cumplirse que solo haya un cero como afirma el Teorema 1.21. Cabe destacar que los polinomios  $H_{10}$  y  $H_8$  tienen diez y ocho raíces respectivamente. Sin embargo, para una mayor claridad dichos polinomios han sido dibujados en el intervalo  $[-1.5, 1.5]$ .

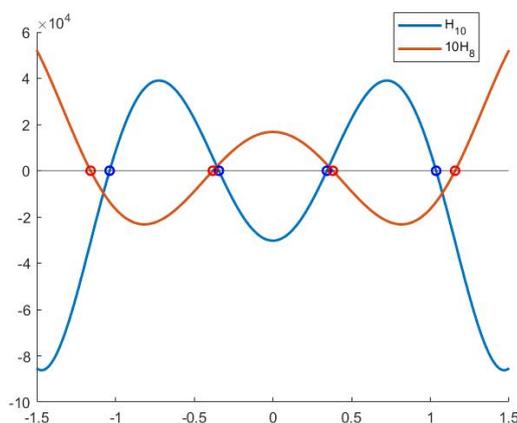


Figura 1.8: Gráfica con los polinomios de Hermite  $H_{10}$  y  $10H_8$ .

# Capítulo 2

## Teoremas de oscilación

En este capítulo abordaremos resultados que tienen que ver con el carácter oscilatorio de las soluciones de la ecuación autoadjunta (1.6); diremos que una función es oscilatoria si posee infinitos ceros. Además, veremos otras propiedades de las soluciones, como por ejemplo, la distancia que hay entre sus ceros o el número de estos. Las demostraciones de los resultados que veremos en este capítulo se basan en el Teorema de Comparación visto en el capítulo anterior (Teorema 1.28).

### 2.1. Algunas condiciones suficientes

En el capítulo anterior vimos casos en los que las soluciones tenían infinitos ceros (ecuación de Bessel (1.14)) y otros en los cuales las soluciones poseen un número finito de ceros (ecuación de Hermite (1.16)). En esta sección expondremos ciertos teoremas que ofrecen condiciones suficientes para que las soluciones de una cierta ecuación posean un carácter oscilatorio. Recordando el Teorema 1.21, podemos afirmar que si una solución de (1.6) es oscilatoria, se tendrá que todas las soluciones de dicha ecuación lo son, este hecho nos será de utilidad a la hora de demostrar el Teorema 2.5.

Los dos primeros teoremas, ofrecen condiciones suficientes para la ecuación en forma normal (1.7), de tal manera que las soluciones de la misma posean a lo sumo un cero o, en contraposición, posean una cantidad infinita de ceros, es decir, las soluciones son oscilatorias. Dichos resultados se pueden encontrar en el capítulo 3 del libro [8].

**Teorema 2.1.** *Sea  $y$  una solución no trivial de la ecuación en forma normal*

$$y''(x) + Q(x)y(x) = 0. \quad (2.1)$$

*Tal que  $Q$  sea continua en un cierto intervalo  $I \subset \mathbb{R}$  y  $Q(x) < 0$  para todo  $x \in I$ . Entonces se tiene que  $y$  posee a lo sumo un cero en  $I$ .*

*Demostración.* Para demostrar este teorema, consideraremos dos casos. Primero consideraremos un intervalo cerrado y acotado de la forma  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ . Posteriormente, extendemos el resultado a cualquier intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ .

La demostración del caso  $[a, b]$  se basa en aplicar el Teorema 1.28 comparando la ecuación  $y''(x) + Q_1(x)y(x) = 0$  con  $y''(x) = 0$  donde  $Q_1(x) = Q(x)$ . Vemos que en la primera se satisface  $Q_1(x) < 0$  para todo  $x \in [a, b]$ , por hipótesis. En contraposición, en la segunda

ecuación tenemos que  $Q_2(x) \equiv 0$  en  $[a, b]$ . En consecuencia, se cumple que  $Q_2(x) > Q_1(x)$  para todo  $x$  en tal intervalo. Resolviendo la ecuación  $y''(x) = 0$ , vemos que su solución general es  $y_2(x) = C_1x + C_2$  con  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$  y aplicando ahora el Teorema 1.28, se tendrá que entre dos ceros consecutivos de cualquier solución de  $y''(x) + Q(x)y(x) = 0$  habrá al menos un cero de una solución cualquiera de  $y''(x) = 0$ . Por reducción al absurdo, suponemos que  $y_1$  tiene al menos dos ceros en el intervalo  $[a, b]$ , donde  $y_1$  satisface la ecuación  $y''(x) + Q(x)y(x) = 0$ . Llamamos  $x_1$  y  $x_2$  a dos ceros consecutivos. En virtud del Teorema 1.28, se tendría que cualquier solución,  $y_2$ , de  $y''(x) = 0$  debería tener al menos un cero en el intervalo  $(x_1, x_2)$ . Para llegar a un absurdo, basta considerar  $y_2(x) \equiv 1$ , para ver que dicha solución no posee ningún cero en tal intervalo. Concluimos así que  $y$  no puede poseer más de un cero en el intervalo  $[a, b]$ , para cualquier solución  $y$  de  $y''(x) + Q(x)y(x) = 0$ . Vamos ahora a demostrar que el resultado es cierto también para cualquier intervalo  $I \subset \mathbb{R}$  no necesariamente acotado. Supongamos por reducción al absurdo que  $y$  posee al menos dos ceros en  $I$ , siendo  $y$  una solución cualquiera de  $y''(x) + Q(x)y(x) = 0$ . Llamamos  $x_1$  y  $x_2$  a dichos ceros. Para llegar a un absurdo basta tomar como intervalo cerrado y acotado el  $[x_1, x_2]$  y aplicar el caso anterior.  $\square$

La demostración del Teorema 2.1 se puede realizar mediante argumentos de crecimiento de las funciones  $y$  e  $y'$ , teniendo en cuenta que  $y''(x) = -Q(x)y(x)$ . Para más detalles, consultar [8].

**Teorema 2.2.** *Sea  $y$  una solución no trivial de la ecuación  $y''(x) + Q(x)y(x) = 0$ . Supongamos que  $Q$  es continua y verifica  $Q(x) > 0$  para todo  $x > 0$ . Además supongamos que*

$$\int_a^{+\infty} Q(x)dx = +\infty$$

*para cierto  $a > 0$ , entonces  $y$  posee una cantidad infinita de ceros en  $(0, +\infty)$ , es decir, es una función oscilatoria.*

*Demostración.* Por reducción al absurdo, supongamos que  $y$  tiene una cantidad finita de ceros en el intervalo  $(0, +\infty)$ . En este caso existirá un punto  $\alpha > a$  tal que  $y(x) \neq 0$  para todo  $x \geq \alpha$ . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $y(x) > 0$  para todo  $x$  en  $[\alpha, +\infty)$ . Si no se tuviera que  $y > 0$ , bastaría trabajar con la solución  $-y$  que posee los mismos ceros que  $y$ . Definimos ahora la siguiente función:

$$v(x) = -\frac{y'(x)}{y(x)} \text{ para todo } x \geq \alpha.$$

Derivando  $v$  y utilizando que  $y$  es solución de ecuación llegamos a

$$v'(x) = -\frac{y''(x)}{y(x)} + \frac{(y'(x))^2}{y(x)^2} = Q(x) + v(x)^2.$$

Integrando ahora entre  $\alpha$  y  $x > \alpha$ , obtenemos que

$$v(x) - v(\alpha) = \int_{\alpha}^x Q(x)dx + \int_{\alpha}^x v(x)^2 dx$$

Por hipótesis, tenemos que la primera integral tiende a infinito cuando  $x \rightarrow +\infty$ . La segunda integral es positiva puesto que el integrando lo es. En consecuencia,  $v(x)$  tiende a infinito cuando  $x \rightarrow +\infty$ . Esto quiere decir que existe  $M \geq \alpha$  tal que  $v(x) > 0$  para

todo  $x \geq M$ .

De esta manera, por cómo está definida nuestra función  $v$ , tenemos que  $y$  e  $y'$  han de tener signos opuestos cuando  $x$  es suficientemente grande. Puesto que habíamos supuesto que  $y > 0$ , llegamos a que  $y'$  ha de ser negativa. Esto supone una contradicción, en efecto, despejando  $y''$ , tenemos que  $y''(x) = -Q(x)y(x) < 0$  por ser  $Q(x) > 0$  e  $y(x) > 0$ . Sumando esto al hecho de que  $y'(x) < 0$  para todo  $x \geq M$  se concluye que  $y$  posee un cero a la derecha de  $\alpha$ . Absurdo puesto que habíamos supuesto que  $y$  no tenía más ceros a la derecha de  $\alpha$ .  $\square$

Notemos que las condiciones de ambos teoremas son suficientes pero no necesarias. Para ilustrar estos resultados, y poner de manifiesto que las hipótesis de ambos teoremas no son necesarias, vamos a considerar una ecuación de Euler, que ya vimos como se resuelven en secciones anteriores ( ver Ejemplos 1.19 y 1.20).

**Ejemplo 2.3.** Consideramos la siguiente ecuación de Euler en forma normal

$$y''(x) + \frac{k}{x^2}y(x) = 0, \quad k \in \mathbb{R}, x > 0 \quad (2.2)$$

Queremos analizar el número de ceros de las soluciones dependiendo del parámetro  $k \in \mathbb{R}$  en el intervalo  $(0, +\infty)$ . Vemos que el signo de la función  $Q(x) = k/x^2$  dependerá de si  $k$  es positiva o no. Si  $k$  es negativa, se tendrá que  $Q(x) < 0$  para todo  $x \in (0, +\infty)$  y aplicando el Teorema 2.1 podemos concluir que todas las soluciones poseen a lo sumo un cero en tal intervalo. Por otro lado, si  $k$  es positiva  $Q(x) > 0$  para todo  $x > 0$  pero

$$\int_a^{+\infty} Q(x)dx = \frac{k}{a} < +\infty \quad \text{para todo } k \in \mathbb{R} \text{ y } a > 0.$$

Vemos entonces que las hipótesis del Teorema 2.2 no se satisfacen. Sin embargo, vamos a ver que para algunos valores de  $k$  sí se cumple la tesis, es decir, las soluciones de la ecuación poseen infinitos ceros, mientras que para otros no se cumplirá.

Resolvemos ahora la ecuación. Aplicando el método de Euler, buscamos soluciones del tipo  $y(x) = x^m$ . Derivando y sustituyendo en la ecuación, llegamos a la ecuación indicial  $m^2 - m + k = 0$ , cuyas soluciones son

$$m_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4k}}{2} \quad \text{y} \quad m_2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4k}}{2}.$$

Para analizar las soluciones de la ecuación de Euler vamos a distinguir varios casos dependiendo del valor de  $k$ .

- i) Si  $k < 1/4$  : En este caso se tiene que  $1 - 4k > 0$ , y por ello ambas raíces  $m_1$  y  $m_2$  son reales y distintas. En consecuencia, la solución general de la ecuación es  $y(x) = C_1x^{m_1} + C_2x^{m_2}$ ,  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ . Vamos a ver cuando se anulan las soluciones, es decir,  $C_1x^{m_1} + C_2x^{m_2} = 0$ . Dividimos la ecuación por  $x^{m_1}$ , podemos hacerlo puesto que al tratarse de una potencia no se anula en  $(0, +\infty)$ . Así, obtenemos la ecuación equivalente  $C_1 + C_2x^{m_2 - m_1} = 0$ . Derivando el término de la izquierda obtenemos  $(m_2 - m_1)C_2x^{m_2 - m_1 - 1}$ , cuyo valor es siempre positivo o negativo, dependiendo del signo de  $(m_2 - m_1)C_2$ . En consecuencia, la función es estrictamente creciente o decreciente en  $(0, +\infty)$  y por ello la ecuación  $C_1x^{m_1} + C_2x^{m_2}$  posee al máximo una solución. En el caso particular en que  $k$  sea menor que cero hemos visto, aplicando

el Teorema 2.1, que las soluciones se anulan como mucho una vez en el intervalo  $(0, +\infty)$  (ver Figura 2.1(a)).

Con ello ponemos de manifiesto que las hipótesis del Teorema 2.1 son suficientes y no necesarias.

Para ilustrar este caso podemos tomar  $k = 3/16$ . Calculando las raíces  $m_1$  y  $m_2$  se llega a que una base para la solución de la ecuación es la formada por las funciones  $y_1(x) = x^{3/4}$  e  $y_2(x) = x^{1/4}$ . Esto quiere decir que la solución general es  $y(x) = C_1x^{3/4} + C_2x^{1/4}$ . En la Figura 2.1(b) vemos una solución particular  $y$ .

Dentro de  $k < 1/4$  está el caso particular de que  $k = 0$ . Aquí  $Q \equiv 0$ , y la solución general será  $y(x) = C_1x + C_2$  con  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ . Es fácil ver que toda solución no trivial tiene a lo más un solo cero en  $(0, +\infty)$ , puesto que son rectas.

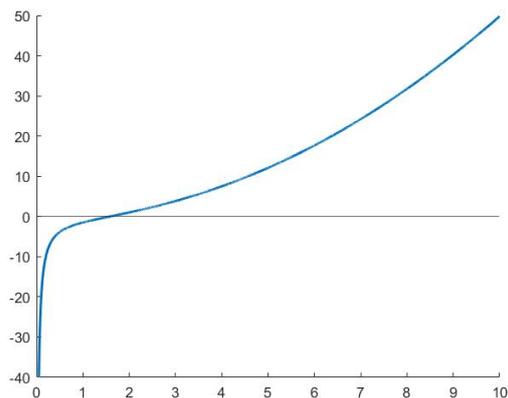
ii) Si  $k = 1/4$  : En este caso vemos que el discriminante de la ecuación de segundo grado es cero. Ahora no podemos tomar como base  $\{x^{m_1}, x^{m_2}\}$  puesto que ambas funciones son la misma. En este caso debemos buscar otra solución linealmente independiente con  $x^{m_1} = x^{1/2}$ . La buscamos de la forma  $\tilde{y}(x) = c(x)x^{m_1}$ , donde  $c(x)$  es una función a determinar. Derivando y sustituyendo en la ecuación es fácil de ver que  $c$  satisface la ecuación diferencial  $c''(x) + c'(x)/x = 0$ , y resolviéndola obtenemos que  $c(x) = \log(x)$  es una solución. En consecuencia, se tiene que la solución general es  $y(x) = C_1\sqrt{x} + C_2\sqrt{x}\log(x) = \sqrt{x}(C_1 + C_2\log(x))$  con  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ . Vemos que la función  $\sqrt{x} \neq 0$  para todo  $x$  en  $(0, +\infty)$ . Por ello, la solución  $y$  se anulará si y solo si  $C_1 + C_2\log(x) = 0$ . Suponemos que  $C_2 \neq 0$ , si fuera al contrario,  $y(x) = C_1\sqrt{x}$  no tendría ceros a no ser que la solución fuese nula. Despejando entonces, vemos que  $y$  solo se anula en el punto  $x = \exp(-C_1/C_2)$ . En consecuencia, toda solución no trivial posee como mucho un cero en  $(0, +\infty)$  (ver Figura 2.1(c)). Poniendo de nuevo de manifiesto que se satisface la tesis del Teorema 2.1 a pesar de que no se cumplen sus hipótesis.

iii) Si  $k > 1/4$  : Ahora tenemos que  $1 - 4k < 0$ , por ello, las raíces  $m_1$  y  $m_2$  son complejas conjugadas. Escribiendo  $m_1 = \alpha + i\beta$  y  $m_2 = \alpha - i\beta$ , tenemos que una base para la solución es la formada por las funciones  $y_1(x) = x^{\alpha+i\beta}$  e  $y_2(x) = x^{\alpha-i\beta}$ . Escribiendo estas funciones en forma exponencial y aplicando la fórmula de Euler para la exponencial de un número complejo, obtenemos otra base de la solución formada por las funciones reales  $\tilde{y}_1(x) = x^\alpha \cos(\beta \log(x))$  e  $\tilde{y}_2(x) = x^\alpha \sin(\beta \log(x))$ . Ahora, puesto que las funciones seno y coseno tienen infinitos ceros, tenemos que toda combinación lineal de  $y_1$  e  $y_2$  poseerá también infinitos ceros (ver Figura 2.1(d)). En consecuencia, en este caso se tiene que toda solución de la ecuación será oscilatoria. Con este ejemplo se pone de manifiesto que las hipótesis del Teorema 2.5 son suficientes y no necesarias.

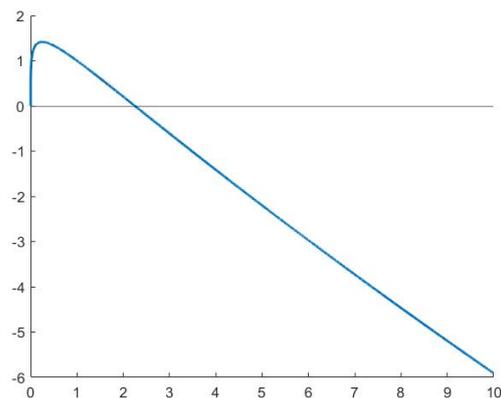
En el siguiente ejemplo vamos a considerar una ecuación cuya solución no es fácil de obtener. Sin embargo, podremos aplicar los Teoremas 2.1 y 2.2 para estudiar el comportamiento oscilatorio de sus soluciones.

**Ejemplo 2.4.** Consideramos la ecuación

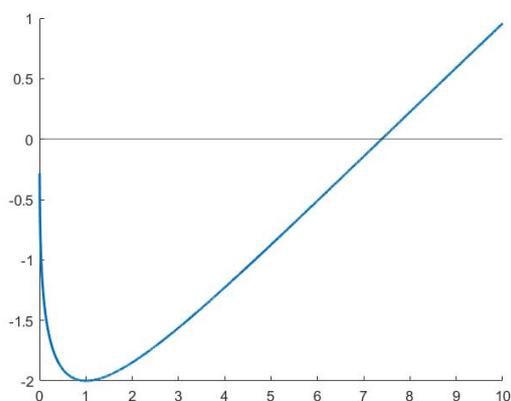
$$y''(x) + \frac{k}{x}y(x) = 0, \quad k \in \mathbb{R} \text{ y } x > 0. \quad (2.3)$$



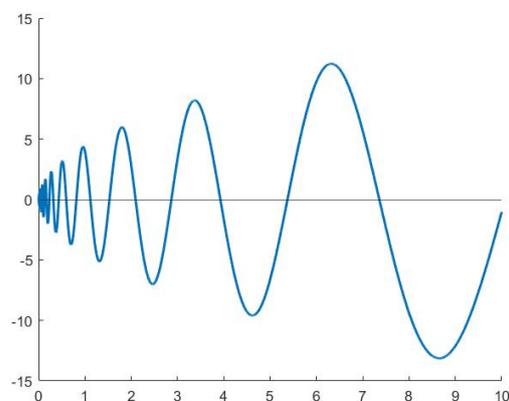
(a)  $k = -2$ .



(b)  $k = 3/16$ .



(c)  $k = 1/4$ .



(d)  $k = 401/4$ .

Figura 2.1: Gráficas con ciertas soluciones de la Ecuación de Euler (2.2) para distintos valores de  $k$ . (a) Para  $k = -2$ ,  $y(x) = x^2/2 - 2x^{-1}$  (b) Para  $k = 3/16$ ,  $y(x) = 3x^{1/4} - 2x^{3/4}$  (c) Para  $k = 1/4$ ,  $y(x) = \sqrt{x}(-2 + \log(x))$  (d) Para  $k = 401/4$ ,  $y(x) = 4\sqrt{x} \cos(10 \log(x)) - 2\sqrt{x} \sin(10 \log(x))$ .

En esta ocasión, tenemos que  $Q(x) = k/x$ . Diferenciamos entre los siguientes caso dependiendo del signo de  $k$ .

- i) Si  $k < 0$ , se tiene que  $Q(x) < 0$  para todo  $x > 0$ . En virtud del Teorema 2.1, podemos afirmar que cualquier solución de (2.3) poseerá a lo más un cero en el intervalo  $(0, +\infty)$ .
- ii) Si  $k = 0$ , la ecuación resultante es  $y''(x) = 0$ . Al igual que lo visto en el Ejemplo 2.3, podemos concluir que toda solución no trivial posee como mucho un cero en el intervalo  $(0, +\infty)$ .
- iii) Si  $k > 0$ , tenemos que  $Q(x) > 0$  para todo  $x > 0$ . Además se verifica que  $\int_1^{+\infty} Q(x) dx = \int_1^{+\infty} k/x dx = +\infty$ . Por tanto, aplicando el Teorema 2.2 (con  $a = 1$ ), se puede concluir que cualquier solución de (2.3) será oscilatoria en  $(0, +\infty)$ .

El siguiente teorema, conocido como Teorema de Leighton es una generalización del Teorema 2.2. Dicho teorema ofrece igualmente unas condiciones suficientes para que las soluciones de la ecuación autoadjunta (1.6) sean oscilatorias, pero dichas condiciones también

afectan esta vez a la función  $P$ . Este teorema se puede encontrar en el capítulo 10 del libro [7].

**Teorema 2.5. (Teorema de Leighton)** *Sea  $y$  una solución no trivial de (1.6). Si se satisfacen las siguientes condiciones:*

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{P(x)} = +\infty \quad y \quad \int_a^{+\infty} Q(x)dx = +\infty$$

(donde  $a$  es una constante arbitraria) entonces se tiene que  $y$  posee una cantidad infinita de ceros en el intervalo  $[a, +\infty)$ , es decir, es oscilatoria

*Demostración.* Supongamos por el contrario que existe una solución  $y$  de (1.6) que no es oscilatoria en  $[a, +\infty)$ , de este modo existirá un punto  $x = x_1$  con  $a < x_1$  tal que  $y(x) \neq 0$  para todo  $x \geq x_1$ . Sin pérdida de generalidad suponemos que  $y(x) > 0$  para todo  $x \geq x_1$ . Puesto que  $y$  no se anula en el intervalo  $[x_1, +\infty)$  podemos escribir la ecuación (1.6) en la forma siguiente,

$$\frac{(P(x)y'(x))'}{y(x)} + Q(x) = 0.$$

Integrando por partes entre  $x_1$  y  $x \in (x_1, +\infty)$ , obtenemos la siguiente expresión

$$\frac{P(x)y'(x)}{y(x)} - \frac{P(x_1)y'(x_1)}{y(x_1)} + \int_{x_1}^x \frac{P(t)y'(t)^2}{y(t)^2} dt = - \int_{x_1}^x Q(t)dt.$$

Puesto que siempre estamos bajo la hipótesis de que  $P > 0$ , se tiene que la integral de la izquierda es no negativa y por ello se da la siguiente desigualdad

$$\frac{P(x)y'(x)}{y(x)} \leq \frac{P(x_1)y'(x_1)}{y(x_1)} - \int_{x_1}^x Q(t)dt.$$

Como por hipótesis sabemos que  $\int_{x_1}^x Q(t)dt \rightarrow +\infty$  a medida que  $x \rightarrow +\infty$ , se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)y'(x)}{y(x)} = -\infty.$$

En consecuencia, para  $x$  suficientemente grande,  $y$  e  $y'$  tienen signos opuestos. Supongamos que esto ocurre a partir de un punto  $x_2 > x_1$ . Como habíamos supuesto que  $y$  era positiva, se tendrá que  $y'$  es negativa y así,  $y$  será decreciente y acotada en el intervalo  $[x_2, +\infty)$ . Así, se tendrá que  $y(x_2) > y(x) > 0$  cuando  $x \in (x_2, +\infty)$ .

Sea ahora  $z$  otra solución de (1.6) linealmente independiente de  $y$ , tal que  $z$  sea también positiva en el intervalo  $(x_1, +\infty)$ ; señalemos que es posible tomar  $z$  de esta forma puesto que al igual que  $y$ ,  $z$  es no oscilatoria, puesto que si lo fuese en base al Teorema de Separación (Teorema 1.21) tendríamos que  $y$  también lo sería. Supongamos además que la constante  $k$  de la fórmula de Abel (Lema 1.10)  $P(x)W[y, z](x) = P(x)[y(x)z'(x) - z(x)y'(x)] = k$  es positiva. Si no fuese así, bastaría con cambiar  $y, z$  de orden. Usando un razonamiento totalmente análogo,  $z$  también satisface la desigualdad  $z(x_2) > z(x) > 0$  para todo  $x$  en el intervalo  $(x_2, +\infty)$ .

Ahora definimos la función  $v$  como sigue:

$$v(x) = \arctan(z(x)/y(x)).$$

Derivando  $v$  y multiplicando el numerador y el denominador por  $P$ , obtenemos que

$$v'(x) = \frac{P(x)(y(x)z'(x) - z(x)y'(x))}{P(x)(y(x)^2 + z(x)^2)} = \frac{k}{P(x)(y(x)^2 + z(x)^2)} > 0 \quad \text{en } (x_1, +\infty).$$

Ahora, integrando desde  $x_2$  hasta  $x \in (x_2, +\infty)$  y usando el hecho de que  $y(x_2)^2 + z(x_2)^2 > y(x)^2 + z(x)^2$ , obtenemos que

$$v(x) - v(x_2) = \int_{x_2}^x \frac{k}{P(x)(y(x)^2 + z(x)^2)} dx > \frac{k}{y(x_2)^2 + z(x_2)^2} \int_{x_2}^x \frac{dx}{P(x)}.$$

Tomando ahora el límite cuando  $x$  tiende a infinito y aplicando las hipótesis, vemos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) - v(x_2) \geq \frac{k}{y(x_2)^2 + z(x_2)^2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{x_2}^x \frac{dx}{P(x)} = +\infty.$$

Esto supone un absurdo puesto que la función  $v$  esta acotada al tratarse de la función arcotangente. Dicha contradicción nace de haber supuesto que existía una solución no oscilatoria y por tanto, concluimos que toda solución ha de serlo como anunciaba el teorema.  $\square$

Para ilustrar el Teorema de Leighton con un ejemplo, vamos a recuperar las funciones de Bessel que habíamos visto en las secciones precedentes (ver Definición 1.24).

**Ejemplo 2.6.** Consideramos la ecuación de Bessel de orden  $\alpha$  (1.14), con  $\alpha \geq 0$ . En este caso tenemos que

$$P(x) = x \quad \text{y} \quad Q(x) = x - \frac{\alpha^2}{x}.$$

Tomando  $a = 1$ , tenemos que

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{P(x)} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = +\infty, \quad \int_1^{+\infty} Q(x)dx = \int_1^{+\infty} \left(x - \frac{\alpha^2}{x}\right) dx = \frac{x^2}{2} - \alpha^2 \log(x) \Big|_1^{+\infty} = +\infty.$$

Esto es cierto para todo  $\alpha \geq 0$ . Por tanto, se satisfacen las hipótesis del Teorema de Leighton y podemos asegurar que cualquier solución de la ecuación (1.14), es decir, cualquier función de Bessel es oscilatoria en el intervalo  $[1, +\infty)$ . En la Figura 2.2 observamos el carácter oscilatorio de las funciones de Bessel de primera clase y orden  $\alpha$  con  $\alpha = 0, 1, 2, 3$ .

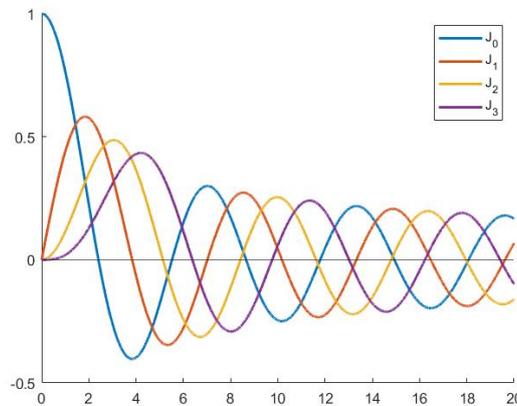


Figura 2.2: Gráfica con algunas funciones de Bessel de primera clase.

Como cabía esperar, al igual que los dos teoremas previos, las hipótesis del Teorema de Leighton son suficientes y no necesarias. Para ilustrarlo consideraremos el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.7.** Consideramos la ecuación,  $y''(x) + y'(x) + y(x) = 0$ . Vemos que se trata de una ecuación de coeficientes constantes. En particular, todos ellos son iguales a 1. Para resolver la ecuación, calculamos las raíces del polinomio característico  $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ . Se puede comprobar fácilmente que dichas raíces son  $\lambda = (-1 \pm \sqrt{3}i)/2$ . En consecuencia, llegamos a que la solución general de la ecuación es

$$y(x) = C_1 e^{-x/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2 e^{-x/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

donde  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ . Escribimos ahora la ecuación en su forma autoadjunta. Utilizando la Proposición 1.5, multiplicamos por el factor  $\mu(x) = e^x$  y obtenemos  $(e^x y'(x))' + e^x y(x) = 0$ . En este caso vemos que  $P(x) = e^x = Q(x)$ , por tanto se cumple que

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{P(x)} = e^{-a} < +\infty \text{ para todo } a \in \mathbb{R}.$$

Esto quiere decir que no estamos bajo las hipótesis del Teorema de Leighton. Sin embargo, vemos que todas las soluciones de la ecuación son oscilatorias. En conclusión, la ecuación que hemos considerado posee soluciones con infinitos ceros en el intervalo  $[a, +\infty)$  para cualquier  $a \in \mathbb{R}$ , a pesar de que las hipótesis del Teorema 2.5 no se satisfacen.

## 2.2. Distancia entre ceros

En esta sección no nos centraremos solo en estudiar el carácter oscilatorio de las soluciones de ciertas ecuaciones. Analizaremos otra propiedad de los ceros, la distancia que existe entre dos ceros consecutivos. En particular, bajo ciertas hipótesis, proporcionaremos cotas inferiores y superiores de esa distancia. Tales cotas nos ayudarán a determinar el número de ceros existentes en un intervalo acotado. Recordemos que por la Proposición 1.12, sabemos que el número de ceros en  $[a, b]$  es finito.

El siguiente teorema ofrece las cotas anteriormente nombradas. Dicho resultado se puede encontrar en [2].

**Teorema 2.8.** *Sea la ecuación normal siguiente*

$$y''(x) + Q(x)y(x) = 0, \tag{2.4}$$

*tal que  $Q(x)$  es continua en el intervalo  $(0, +\infty)$ . Supongamos que existen números reales positivos  $A, B$  tales que*

*i)  $A^2 \leq Q(x)$  para todo  $x > 0$ .*

*ii)  $Q(x) \leq B^2$  para todo  $x > 0$ .*

Si se cumple *i*), entonces toda solución de la ecuación (2.4) tiene infinitos ceros en  $(0, +\infty)$ . Además se cumple que la distancia  $d$  entre dos ceros consecutivos de cualquier solución no trivial satisface que  $d$  es menor o igual que  $\pi/A$ .

Si se satisface *ii*), entonces  $d$  es mayor o igual que  $\pi/B$ .

En particular, si se verifica *i*) y *ii*), la distancia  $d$  satisface

$$\frac{\pi}{B} \leq d \leq \frac{\pi}{A}.$$

*Demostración.* Supongamos que se satisface *i*). Para demostrar que toda solución de la ecuación (2.4) tiene infinitos ceros en el intervalo  $(0, +\infty)$ , basta aplicar el Teorema 2.2. Por hipótesis sabemos que  $Q(x) > 0$  para todo  $x > 0$ , y por otra parte sabemos que  $Q(x) \geq A^2$  y por tanto

$$\int_1^{+\infty} Q(x)dx \geq \int_1^{+\infty} A^2 dx = +\infty,$$

satisfaciéndose así las hipótesis de dicho teorema y concluyendo que toda solución ha de poseer infinitos ceros en  $(0, +\infty)$ .

Demostremos ahora la desigualdad  $d \leq \pi/A$ . Sean  $x_1$  y  $x_2$  dos ceros consecutivos de una solución no trivial de (2.4),  $0 < x_1 < x_2$ . Para estimar una cota de la distancia  $d = x_2 - x_1$ , vamos a emplear el Teorema de Comparación de Sturm. En particular, vamos a comparar la ecuación (2.4) con

$$y''(x) + A^2 y(x) = 0. \quad (2.5)$$

Se puede ver fácilmente que la solución general de (2.5) es

$$y_A(x) = C_1 \sin(Ax) + C_2 \cos(Ax) \quad \text{con} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad (2.6)$$

Aplicando ahora el Teorema 1.28 con las ecuaciones (2.4) y (2.5), deducimos que entre cada dos ceros consecutivos de una solución de la ecuación (2.5) hay al menos un cero de cualquier solución de (2.4). Sean ahora  $x_1$  y  $x_2$  dos ceros consecutivos de una solución de la ecuación (2.4). Tomamos ahora, como solución particular de la ecuación (2.5), la función  $y_a(x) = \sin(A(x - x_1))$  que se anula en  $x = x_1$  y es fácil ver que el siguiente cero es el punto  $x = x_1 + \pi/A$ . En consecuencia, en base al Teorema 1.28 se tiene que  $x_2 \leq x_1 + \pi/A$ , es decir,  $x_2 - x_1 = d \leq \pi/A$ .

Suponemos ahora que se satisface *ii*). Para ver que  $d \geq \pi/B$  basta razonar de manera análoga al caso *i*). En esta ocasión, vamos a comparar la ecuación (2.4) con

$$y''(x) + B^2 y(x) = 0. \quad (2.7)$$

Ahora tomamos como solución de (2.7) la función  $y_b(x) = \sin(B(x - x_1))$ , donde  $x_1$  es un cero de una solución de (2.4), por el Teorema 1.28, se tiene que entre dos ceros de una solución de (2.4) hay al menos un cero de la solución  $y_b$  que hemos tomado. Llegamos así a que  $x_1 + \pi/B \leq x_2$ , es decir,  $x_2 - x_1 \geq \pi/B$ .  $\square$

En la demostración, hemos visto, aplicando el Teorema 2.2, que si se satisface *i*), entonces las soluciones son oscilatorias. Este hecho también se podría haber demostrado aplicando el Teorema 1.28 comparando la ecuación (2.4) con (2.5). Como hemos visto en la demostración (2.5) posee soluciones oscilatorias (ver (2.6)). En consecuencia, en cualquier

intervalo de  $\mathbb{R}^+$  de tamaño mayor o igual a  $\pi/A$ , existe un cero de las soluciones de (2.4).

Como corolario al Teorema 2.8, conociendo las cotas inferior y superior de las distancias entre dos ceros consecutivos, podemos deducir otras cotas acerca del número de ceros que tiene cualquier solución en un cierto intervalo  $[a, b]$ .

**Corolario 2.9.** *Suponemos que estamos bajo las misma hipótesis del Teorema 2.8. Llamamos  $n$  al número de ceros de cualquier solución no trivial de la ecuación (2.4) en el intervalo  $[a, b] \subset \mathbb{R}^+$ .*

*Si se satisface i), entonces  $n$  cumple la desigualdad*

$$n \geq \frac{A(b-a)}{\pi} - 1.$$

*Si se satisface ii), entonces  $n$  cumple la desigualdad*

$$n \leq \frac{B(b-a)}{\pi} + 1.$$

*Demostración.* Empezamos demostrando la primera desigualdad. Llamamos  $d$  a la distancia entre dos ceros consecutivos de cualquier solución no trivial de (2.4). Por hipótesis, aplicando el Teorema 2.8, sabemos que  $d \leq \pi/A$ . Dividimos ahora el intervalo  $[a, b]$  en subintervalos de tamaño  $\pi/A$ . En cada uno de ellos, salvo tal vez en el último, deberá existir al menos un cero de cualquier solución no trivial de (2.4). Puesto que el número de subintervalos es mayor o igual que  $(b-a)A/\pi - 1$ , concluimos la desigualdad buscada. Para la otra desigualdad, denotamos por  $x_i$  al  $i$ -ésimo cero en el intervalo  $[a, b]$  de una solución cualquiera de (2.4). Así, de esta manera, se tendrá que la distancia entre el último y el primer cero será menor o igual que la distancia del intervalo, es decir,  $b-a \geq x_n - x_1$ . Ahora, la distancia entre dichos ceros será igual a la suma de las distancias entre dos ceros consecutivos y sabiendo que cada una de dichas longitudes es mayor o igual a  $\pi/B$ , obtenemos que

$$b-a \geq x_n - x_1 = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \dots + (x_2 - x_1) \geq (n-1) \frac{\pi}{B}.$$

Despejando ahora el valor de  $n$  obtenemos la desigualdad que queríamos probar.  $\square$

Cabe destacar, que las hipótesis *i)* y *ii)* del Corolario 2.9 basta con que se satisfagan en el intervalo  $[a, b]$ . Es decir, las desigualdades de las hipótesis del Teorema 2.8 es suficiente con que se den en tal intervalo y no para todo  $x > 0$ .

Para el primer ejemplo, vamos a considerar una ecuación cuya solución es difícil de obtener explícitamente. Sin embargo, podremos aplicar el Teorema 2.8 y proporcionar información acerca del carácter oscilatorio de las soluciones y de la distancia entre los ceros de las mismas.

**Ejemplo 2.10.** Consideramos la siguiente ecuación,

$$y''(x) + (\sin(x) + 3)y(x) = 0 \quad \text{con } x > 0. \quad (2.8)$$

En este caso, tenemos que  $Q(x) = \sin(x) + 3$  y puesto que la función  $\sin(x)$  toma valores en el intervalo  $[-1, 1]$ , podemos concluir que  $2 \leq Q(x) \leq 4$  para todo  $x \in (0, +\infty)$ . Ahora, aplicando el Teorema 2.8, lo primero que podemos deducir acerca de las soluciones de la

ecuación es que todas poseen infinitos ceros en  $(0, +\infty)$ , es decir, son oscilatorias. Por otro lado, usando la notación de dicho teorema, tenemos que  $A = \sqrt{2}$  y  $B = 2$  y en consecuencia, en virtud de dicho teorema, podemos afirmar que la distancia  $d$  entre dos ceros consecutivos de cualquier solución de nuestra ecuación, satisface que  $\pi/2 \leq d \leq \pi/\sqrt{2}$ . Además aplicando el Corolario 2.9 con  $(b - a) = 20$ ,  $A = \sqrt{2}$  y  $B = 2$ , podemos afirmar que el número de ceros  $n$  de cualquier solución de la ecuación en el intervalo  $[0, 20]$ , satisface la desigualdad  $8.003 \leq n \leq 13.73$ .

Observamos que a pesar de que no conozcamos explícitamente la solución general de la ecuación, podemos proporcionar datos acerca de los ceros de la soluciones.

En ocasiones podemos aplicar métodos numéricos para obtener aproximaciones de las soluciones. Así, en la Figura 2.3 hemos representado una solución de la ecuación (2.8), obtenida mediante el método de diferencias finitas. En particular, es la solución que satisface las condiciones de contorno  $y(0) = 0$  e  $y(20) = 5$ . Lo primero que vemos es que efectivamente, la solución es oscilatoria tal y como habíamos probado. Seguidamente, observamos que hay once ceros que satisfacen las cotas de la distancia entre ellos. Para confirmar que realmente dichas cotas son ciertas, se han calculado las distancias entre cada par de ceros consecutivos, obteniendo los resultados de la Tabla 2.1.

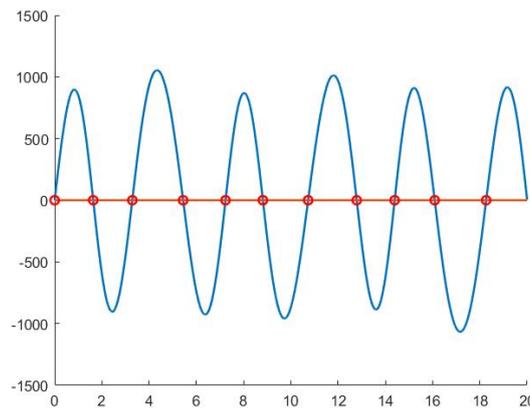


Figura 2.3: Solución aproximada de  $y''(x) + (\sin(x) + 3)y(x) = 0$ .

| $d_{1,2}$ | $d_{2,3}$ | $d_{3,4}$ | $d_{4,5}$ | $d_{5,6}$ | $d_{6,7}$ | $d_{7,8}$ | $d_{8,9}$ | $d_{9,10}$ | $d_{10,11}$ |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|------------|-------------|
| 1.6330    | 1.6542    | 2.1514    | 1.7956    | 1.5815    | 1.9153    | 2.0560    | 1.6072    | 1.6949     | 2.1781      |

Tabla 2.1: Distancias entre cada par de ceros consecutivos.

En la Tabla 2.1, se muestran las distancias entre ceros consecutivos en el intervalo  $[0, 20]$  de la aproximación obtenida numéricamente. En dicha tabla se tiene que  $d_{i,i+1}$  representa la distancia entre el  $i$ -ésimo cero y el posterior. Aplicando el Teorema 2.8, habíamos concluido que  $\pi/2 \leq d \leq \pi/\sqrt{2}$ , y puesto que  $\pi/2 \approx 1,5708$  y  $\pi/\sqrt{2} \approx 2,2214$  se puede ver que la cota para  $d$  obtenida con dicho teorema se satisface para esta solución particular.

Para el siguiente ejemplo vamos a recuperar los polinomios de Hermite (ver Sección 1.3). Daremos una cota inferior de la distancia existente entre dos ceros consecutivos de dichos polinomios. Para poder aplicar el Teorema 2.8 primero debemos transformar la ecuación de Hermite a su forma normal.

**Ejemplo 2.11.** Consideramos la ecuación de Hermite de orden  $\alpha$   $y''(x) - 2xy'(x) + 2\alpha y(x) = 0$ . Aplicando la Proposición 1.8, vemos que el cambio que debemos realizar es  $y = uv$ , donde

$$v(x) = \exp\left(-\frac{1}{2} \int \frac{a_1(x)}{a_2(x)} dx\right) = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right).$$

Derivando en el cambio obtenemos que  $y'(x) = u'(x) \exp(x^2/2) + xu(x) \exp(x^2/2) = \exp(x^2/2)(u'(x) + xu(x))$  y por otro lado,  $y''(x) = u''(x) \exp(x^2/2) + 2xu'(x) \exp(x^2/2) + u(x) \exp(x^2/2)(1 + x^2) = \exp(x^2/2)(u''(x) + 2xu'(x) + 1 + x^2)$ . Sustituyendo ahora en la ecuación y dividiendo entre  $\exp(x^2/2)$ , obtenemos

$$u''(x) + (1 + 2\alpha - x^2)u(x) = 0. \quad (2.9)$$

Puesto que hemos introducido un cambio de variable, las soluciones de (2.9) y de la ecuación de Hermite no serán las mismas. Sin embargo, como el cambio realizado es  $y = uv$  donde  $v$  es una función que no se anula nunca, se tendrá que las soluciones de ambas ecuaciones poseerán los mismos ceros.

Ahora, aplicamos el Teorema 2.8 a la ecuación (2.9). Vemos que  $Q(x) = 1 + 2\alpha - x^2 \leq 1 + 2\alpha$  para todo  $x$  y además es continua en el intervalo  $(0, +\infty)$ . En consecuencia, estamos bajo las hipótesis del caso *ii*) del Teorema 2.8 con  $B = \sqrt{1 + 2\alpha}$ . Así, se tendrá que la distancia  $d$  entre dos ceros consecutivos de cualquier solución de (2.9) satisface que

$$d \geq \frac{\pi}{\sqrt{2\alpha + 1}}.$$

Dicha cota es igualmente válida para los ceros de las soluciones de la ecuación de Hermite de orden  $\alpha$ . En particular, vimos que los polinomios de Hermite son solución. En consecuencia, podemos concluir que la distancia  $d$  entre dos ceros consecutivos de cualquier polinomio de Hermite de grado  $\alpha$  cumple  $d \geq \pi/\sqrt{2\alpha + 1}$ .

En la Tabla 2.2 se pueden apreciar las distancias existentes entre cada par de ceros consecutivos del polinomio de Hermite de grado 10. Como hemos visto anteriormente la distancia  $d$  satisface  $d \geq \pi/\sqrt{21} \approx 0,6855$ . Fijándonos en la tabla, vemos que dicha cota se cumple.

| $d_{1,2}$ | $d_{2,3}$ | $d_{3,4}$ | $d_{4,5}$ | $d_{5,6}$ | $d_{6,7}$ | $d_{7,8}$ | $d_{8,9}$ | $d_{9,10}$ |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|------------|
| 0.9034    | 0.7760    | 0.7201    | 0.6937    | 0.6858    | 0.6937    | 0.7201    | 0.7760    | 0.9034     |

Tabla 2.2: Distancia entre los ceros consecutivos del polinomio de Hermite de grado 10.

En el último ejemplo de esta sección, vamos a ver que la condición de que  $A^2 \leq Q(x)$  es muy importante. Veremos que si no se satisface, existen casos en los que la distancia entre dos ceros consecutivos no está acotado por ninguna cantidad.

**Ejemplo 2.12.** Consideramos la siguiente ecuación de Euler  $x^2y''(x) + xy'(x) + y(x) = 0$  con  $x > 0$ . Como vimos en el Ejemplo 1.9 dicha ecuación se puede transformar en su forma normal mediante el cambio  $y(x) = u(x)x^{-1/2}$ . Así obtenemos la ecuación

$$u''(x) + \frac{5}{4x^2}u(x) = 0.$$

Dicha ecuación se resolvió en el Ejemplo 2.3, con  $k = 5/4$ . En este caso tenemos que las raíces de la ecuación indicial son  $m_1 = 1/2 + i$  y  $m_2 = 1/2 - i$ . En consecuencia, tenemos que la solución general de la ecuación en forma normal es  $u(x) = C_1\sqrt{x}\sin(\log(x)) + C_2\sqrt{x}\cos(\log(x))$  con  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ . Ahora vemos que en este caso, en la ecuación normal, tenemos que  $Q(x) = 5/4x^2$  y claramente no existe ningún entero positivo  $A$  tal que  $A^2 \leq Q(x)$  para todo  $x > 0$ , es decir, no se satisfacen las hipótesis del Teorema 2.8. Veamos que tampoco se satisface la tesis de dicho teorema. Tomamos ahora como solución particular de la ecuación en forma normal la función  $u(x) = \sqrt{x}\sin(\log(x))$ . Puesto que estamos trabajando en el intervalo  $(0, +\infty)$ , vemos que los ceros de dicha función son los puntos de la forma  $x_k = \exp(k\pi)$  con  $k$  un entero positivo. En este caso se puede ver que la distancia entre dos ceros consecutivos es  $d = e^{(k+1)\pi} - e^{k\pi}$ . En conclusión, vemos que en este caso no existe una cota de la distancia entre dos ceros consecutivos para el intervalo  $(0, +\infty)$ . Sin embargo, podemos considerar el intervalo compacto  $[a, b] \subset \mathbb{R}^+$ . En dicho intervalo sí que se dan las cotas puesto que la función  $Q(x) = 5/4x^2$  es continua en  $[a, b]$  y por tanto, está acotada tanto inferior como superiormente. Por otro lado, puesto que  $Q$  es decreciente, se tiene que

$$Q(b) \leq Q(x) \leq Q(a) \quad \forall x \in [a, b].$$

En consecuencia, podemos tomar las constantes  $A^2 = Q(b) = 5/4b^2$  y  $B^2 = Q(a) = 5/4a^2$ . Aplicando ahora el Corolario 2.9, concluimos que el número de ceros,  $n$ , de cualquier solución de la ecuación en el intervalo  $[a, b]$  cumple

$$\frac{\sqrt{5}(b-a)}{2b\pi} - 1 \leq n \leq \frac{\sqrt{5}(b-a)}{2a\pi} + 1.$$

## 2.3. Transformación de Prüfer

En esta sección vamos a abordar la cuestión del cálculo de ceros de las soluciones de (1.6) desde otra perspectiva. Esta nueva manera de tratar este tema es mediante cambios de variable conocidos como transformación de Prüfer. Introduciendo estos cambios llegamos a una nueva ecuación, la cual nos aportará información acerca de los ceros de las soluciones. Esta transformación se puede encontrar en libros como [2], [7] o [9], y la aplicaremos a la ecuación (1.6). Como siempre, estamos bajo las hipótesis de regularidad de que  $P'$  continua,  $Q$  sea continua y  $P(x) > 0$  para todo  $x \in [a, b]$ . La transformación que usaremos es la siguiente:

$$y(x) = \rho(x) \sin \theta(x) \tag{2.10}$$

$$P(x)y'(x) = \rho(x) \cos \theta(x). \tag{2.11}$$

Usando (2.10) y (2.11) se pueden deducir las siguientes expresiones

$$\rho(x) = \sqrt{y(x)^2 + (P(x)y'(x))^2} \quad \rho > 0$$

$$y \quad \theta(x) = \arctan \frac{y(x)}{P(x)y'(x)}.$$

Vemos que  $\rho = 0$  solamente si  $y$  e  $y'$  son idénticamente nulas, es decir, tenemos la solución trivial. Por ello, consideramos que  $\rho \neq 0$ . Claramente si  $Py'$  e  $y$  son diferenciables en  $[a, b]$ , entonces lo es  $\rho$ . Despejando en (2.10), obtenemos que  $\sin \theta(x) = y(x)/\rho(x)$  y puesto que  $\rho$  e  $y$  son diferenciables, entonces también lo es  $\sin \theta(x)$ , lo cual implica que  $\theta(x)$  debe

ser diferenciable en el intervalo  $[a, b]$ . Aplicando la transformación (2.10) y (2.11) a la ecuación (1.6) obtenemos el siguiente sistema de primer orden

$$\rho'(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{P(x)} - Q(x) \right) \sin(2\theta(x)) \rho(x) \quad (2.12)$$

$$\theta'(x) = \frac{\cos^2 \theta(x)}{P(x)} + Q(x) \sin^2 \theta(x). \quad (2.13)$$

Nuestro objetivo en esta sección es encontrar información acerca de los ceros de las soluciones de (1.6). Observando la ecuación (2.10), y teniendo en cuenta que  $\rho \neq 0$ , se tendrá que los ceros de una solución  $y$  se encuentran en los puntos tales que  $\sin \theta(x) = 0$ , o equivalentemente, cuando  $\theta(x)$  sea un múltiplo de  $\pi$ . Volviendo ahora a la ecuación (2.13), en base al conocido Teorema de existencia y unicidad de Cauchy-Picard, se tiene que dicha ecuación junto con la condición inicial  $\theta(x_0) = K$ , donde  $K$  es una constante, tiene solución única en un cierto intervalo  $I$  que contiene a  $x_0$ . En el caso en el que podamos resolver dicha ecuación, sería posible encontrar los valores de  $x$  que hacen que  $\theta(x)$  sea un múltiplo de  $\pi$ . Dichos valores serán ceros de la solución de (1.6). Sin embargo, no siempre será posible resolver la ecuación (2.13), en tal caso, tendremos que utilizar otro tipo de argumentos para localizar los ceros de las soluciones.

El siguiente teorema se trata de un resultado de comparación al igual que el Teorema 1.28. Sin embargo, esta vez se aborda desde la perspectiva de la transformación de Prüfer. La demostración se puede encontrar en [9].

**Teorema 2.13.** Sean  $P_1', P_2', Q_1$  y  $Q_2$  funciones continuas en un intervalo  $[a, b]$  tales que  $0 < P_2(x) \leq P_1(x)$  y  $Q_2(x) \geq Q_1(x)$  en  $[a, b]$ . Sean  $f$  y  $g$  soluciones no triviales de las ecuaciones

$$(P_1(x)y'(x))' + Q_1(x)y(x) = 0,$$

$$(P_2(x)y'(x))' + Q_2(x)y(x) = 0,$$

respectivamente. Si  $\theta_2(a) \geq \theta_1(a)$ , entonces  $\theta_2(x) \geq \theta_1(x)$ . Además, si  $Q_2(x) > Q_1(x)$  en  $[a, b]$ , entonces  $\theta_2(x) > \theta_1(x)$ .

Para concluir la sección, aplicaremos la transformación de Prüfer para estudiar el carácter oscilatorio de las soluciones de dos ecuaciones ya analizadas.

**Ejemplo 2.14.** Consideramos la ecuación  $y''(x) + y(x) = 0$ . En este caso, tenemos que  $P(x) = Q(x) = 1$ . Sustituyendo estos valores en (2.13), llegamos a la ecuación  $\theta'(x) = \cos^2 \theta(x) + \sin^2 \theta(x) = 1$ . Se puede ver fácilmente que la solución es  $\theta(x) = x + C$ , con  $C \in \mathbb{R}$ . Como primera observación vemos que  $\theta$  tiende a infinito a medida que  $x$  lo hace. En consecuencia,  $\theta$  tomará valores múltiplos de  $\pi$  una cantidad infinita de veces y así se tendrá que cualquier solución  $y$  de la ecuación poseerá infinitos ceros. Por otra parte, no era necesario haber aplicado la transformación de Prüfer para deducir esta información puesto que bastaba con resolver dicha ecuación.

**Ejemplo 2.15.** Consideramos la ecuación de Bessel de orden  $\alpha = 1/3$  en su forma autoadjunta

$$(xy'(x))' + \left( x - \frac{1}{9x} \right) y(x) = 0. \quad (2.14)$$

En este caso, tenemos que  $P(x) = x$  y  $Q(x) = x - 1/(9x)$ . Sustituyendo en (2.13), obtenemos

$$\theta'(x) = \frac{\cos^2 \theta(x)}{x} + \left(x - \frac{1}{9x}\right) \sin^2 \theta(x). \quad (2.15)$$

Podemos ver que la ecuación (2.15) no es fácil de resolver. Sin embargo, se puede ver que si tomamos  $x \geq 2$ , se satisface la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} \theta'(x) &= \frac{\cos^2 \theta(x)}{x} + \left(x - \frac{1}{9x}\right) \sin^2 \theta(x) + \frac{\sin^2 \theta(x)}{x} - \frac{\sin^2 \theta(x)}{x} \\ &= \frac{1}{x} + \left(x - \frac{10}{9x}\right) \sin^2 \theta(x) \geq \frac{1}{x}, \end{aligned}$$

para todo  $x \in [2, +\infty)$ . Integramos ahora en ambos lados desde 2 hasta  $x > 2$ . Así, obtenemos que

$$\theta(x) - \theta(2) \geq \log(x) - \log(2).$$

Sabemos que la función  $\log(x)$  tiende a infinito cuando  $x \rightarrow +\infty$ . En consecuencia, se tiene que la función  $\theta$  también lo hará. Podemos entonces concluir que la función  $\theta$  tomará infinitas veces un valor múltiplo de  $\pi$ , demostrando así que las soluciones de (2.14) han de ser oscilatorias en el intervalo  $[2, +\infty)$ . Hecho que ya había sido probado aplicando el Teorema de Leighton (Teorema 2.5).

# Capítulo 3

## Problema de Sturm-Liouville

En este capítulo trabajaremos con ecuaciones diferenciales en las cuales interviene un parámetro real  $\lambda$ , y están sujetas a ciertas condiciones en los extremos. No siempre existirán soluciones no nulas del problema. En consecuencia, estaremos interesados en aquellos valores de  $\lambda$  para los cuales existan soluciones no triviales y daremos algunas propiedades de estas. Dichos problemas resultan muy útiles puesto que surgen en muchas ocasiones al modelizar situaciones físicas como, por ejemplo, la distribución del calor en un alambre o en las vibraciones de una cuerda. Los resultados que veremos pueden encontrarse en libros como [5], [9] o [10].

A lo largo del capítulo, consideraremos la ecuación, denominada de Sturm-Liouville

$$(P(x)y'(x))' + (Q(x) + \lambda S(x))y(x) = 0, \quad x \in [a, b], \quad (3.1)$$

donde  $\lambda$  es un parámetro. Además,  $Q$  y  $S$  son funciones continuas en el intervalo  $[a, b]$  y  $P \in C^1[a, b]$ . La función  $S$  es positiva y suele ser referida como función peso.

### 3.1. Problema Regular de Sturm-Liouville

En esta sección nos centraremos en el problema de Sturm-Liouville en su caso regular. A continuación procedemos a definirlo.

**Definición 3.1.** *Se dice problema regular de Sturm-Liouville a la ecuación (3.1) junto con las condiciones*

$$a_1y(a) + a_2y'(a) = 0, \quad b_1y(b) + b_2y'(b) = 0, \quad (3.2)$$

donde  $P$  y  $S$  son funciones positivas y  $a_1, a_2, b_1, b_2$  son constantes reales tales que  $|a_1| + |a_2| > 0$ ,  $|b_1| + |b_2| > 0$ .

Es fácil ver que la solución nula satisface siempre el problema de Sturm-Liouville para cualquier valor de  $\lambda$ . Llamaremos valores propios a aquellos  $\lambda$  para los cuales el problema posea soluciones no triviales y funciones propias a las correspondientes soluciones.

Como primer ejemplo de problema regular de Sturm-Liouville vamos a considerar la ecuación de Euler.

**Ejemplo 3.2.** Consideramos la ecuación de Euler  $x^2y''(x) + xy'(x) + \lambda y(x) = 0$  con  $x \in [1, e]$  y junto a las condiciones  $y(1) = 0$  e  $y(e) = 0$ . Aplicando la Proposición 1.5, podemos escribir la ecuación en la forma de Sturm-Liouville, obteniendo así

$$(xy'(x))' + \frac{1}{x}\lambda y(x) = 0.$$

Utilizando el método visto en el capítulo 1 para resolver las ecuaciones de Euler, se puede ver fácilmente que se llega a la ecuación indicial  $m^2 + \lambda = 0$ . Si  $\lambda < 0$ , tendremos que las raíces son  $m_1 = \sqrt{\lambda}$  y  $m_2 = -\sqrt{\lambda}$ , ambas reales y distintas. En este caso, la solución general será  $y(x) = C_1x^{m_1} + C_2x^{m_2}$ ,  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ . Imponiendo ahora las condiciones en los extremos, obtenemos el sistema

$$\begin{cases} C_1 + C_2 & = 0 \\ C_1e^{m_1} + C_2e^{m_2} & = 0. \end{cases}$$

Es fácil ver que el determinante de la matriz de coeficientes de dicho sistema es igual a  $e^{m_2} - e^{m_1} \neq 0$ , puesto que  $m_1 \neq m_2$ , luego  $C_1 = C_2 = 0$  es la única solución. En consecuencia, solamente existirá una solución del problema regular de Sturm-Liouville, la trivial. Así, los valores propios no pueden ser negativos. Análogamente, si  $\lambda = 0$ , se llega a que la solución general es  $y(x) = C_1 + C_2 \log(x)$  e imponiendo las condiciones se concluye que la única solución del problema es la nula. En conclusión, solo estamos interesados en los  $\lambda$  positivos. En este caso, las raíces de la ecuación indicial serán  $m_1 = i\sqrt{\lambda}$  y  $m_2 = -i\sqrt{\lambda}$ . Así, la solución general será  $y(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda} \log(x)) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda} \log(x))$  con  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ . Imponiendo la condición de que  $y(1) = 0$ , se obtiene que  $C_1$  ha de ser 0. Ahora, aplicando que  $y(e) = 0$  junto con que  $C_2 \neq 0$  (en caso contrario la solución sería trivial) llegamos a que  $\sin \sqrt{\lambda} = 0$ . Equivalentemente, obtenemos que los valores propios son

$$\lambda_n = n^2\pi^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

y las correspondientes funciones propias son

$$C \sin(n\pi \log(x)), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad C \in \mathbb{R}.$$

En el Ejemplo 3.2 hemos visto que existe un conjunto numerable de valores propios con una única función propia (salvo constante multiplicativa) asociada a cada valor. El próximo objetivo es poner de manifiesto ciertas propiedades de los valores propios y funciones propias comunes a todos los problemas regulares de Sturm-Liouville. Comenzamos analizando la ortogonalidad de las funciones propias asociadas a valores propios distintos.

**Teorema 3.3.** *Si  $f$  y  $g$  son dos funciones propias correspondientes a los valores propios distintos  $\lambda$  y  $\mu$  del problema regular de Sturm-Liouville (3.1)-(3.2), tales que  $f, g \in C^1[a, b]$ . Entonces se tiene que  $f$  y  $g$  son ortogonales respecto a la función peso  $S$  en el intervalo  $[a, b]$ , es decir satisfacen*

$$\int_a^b f(x)g(x)S(x)dx = 0. \quad (3.3)$$

*Además se cumple que todos los valores propios son reales.*

*Demostración.* Comenzamos demostrando la ortogonalidad de las funciones propias. Puesto que  $f$  y  $g$  satisfacen la ecuación de Sturm-Liouville con los parámetros  $\lambda$  y  $\mu$  respectivamente, se tienen las siguientes igualdades

$$(Pf')' + (Q + \lambda S)f = 0, \quad (3.4)$$

$$(Pg')' + (Q + \mu S)g = 0. \quad (3.5)$$

Multiplicando la ecuación (3.4) por  $g$  y (3.5) por  $f$  y restando ambas ecuaciones, obtenemos que

$$(\lambda - \mu)Sfg = f(Pg')' - g(Pf')' = [f(Pg') - g(Pf')]',$$

e integrando ambos miembros en el intervalo  $[a, b]$ , se llega a

$$(\lambda - \mu) \int_a^b Sfg dx = P(b)(f(b)g'(b) - f'(b)g(b)) - P(a)(f(a)g'(a) - f'(a)g(a)). \quad (3.6)$$

Las condiciones en  $a$  implican que

$$a_1 f(a) + a_2 f'(a) = 0,$$

$$a_1 g(a) + a_2 g'(a) = 0.$$

Suponiendo que  $a_2 \neq 0$ , si multiplicamos la primera condición por  $g(a)$  y la segunda por  $f(a)$ , y restamos, se obtiene que

$$f'(a)g(a) - g'(a)f(a) = 0.$$

Si  $a_2 = 0$ , la igualdad anterior es inmediata, puesto que  $a_1$  sería no nula y  $f(a) = g(a) = 0$ . Análogamente, tenemos que

$$f'(b)g(b) - g'(b)f(b) = 0.$$

Finalmente, sustituyendo en la ecuación (3.6), llegamos a que

$$(\lambda - \mu) \int_a^b Sfg dx = 0, \quad (3.7)$$

y como  $\lambda$  y  $\mu$  son distintos, se satisface (3.3), como queríamos probar.

A continuación, demostramos que los valores propios son reales. Por reducción al absurdo suponemos que existe un valor propio complejo  $\lambda_j = \alpha + i\beta$  con función propia asociada  $f_j = u + iv$ . Puesto que los coeficientes de la ecuación son reales, el conjugado de un valor propio ha de serlo también. En consecuencia, existe una función propia  $f_k = u - iv$  asociada al valor propio  $\lambda_k = \alpha - i\beta$ . Sustituyendo en la ecuación (3.7), se llega a

$$2\beta \int_a^b S(u^2 + v^2) dx = 0.$$

Puesto que la integral es positiva, concluimos que  $\beta$  debe ser cero, y con ello los valores propios han de ser reales.  $\square$

Podemos aplicar el Teorema 3.3 a las soluciones obtenidas en el Ejemplo 3.2. Así, obtenemos que

$$\int_1^e \sin(n\pi \log(x)) \sin(m\pi \log(x)) \frac{1}{x} dx = 0 \quad \text{si } n \neq m, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

La integral anterior se puede calcular realizando el cambio de variable  $t = \pi \log(x)$  y

teniendo en cuenta la identidad trigonométrica  $\sin(x)\sin(y) = (\cos(y-x) - \cos(y+x))/2$ .

En el Ejemplo 3.2 podemos ver que cada valor propio  $\lambda = n^2\pi^2$  tiene asociado una única (salvo una constante multiplicativa) función propia  $f_n(x) = \sin(n\pi \log(x))$ . Este resultado es cierto en todos los problemas regulares de Sturm-Liouville, como afirma el siguiente teorema.

**Teorema 3.4.** *Una función propia  $f$  correspondiente a un valor propio  $\lambda$  de un problema regular de Sturm-Liouville (3.1)-(3.2) es única excepto por un factor multiplicativo, es decir, si  $g$  es otra función propia correspondiente a  $\lambda$ , se cumple que  $f = Cg$ , donde  $C$  es una constante real.*

*Demostración.* Sean  $f$  y  $g$  dos funciones propias correspondientes al valor propio  $\lambda$ . Aplicando la fórmula de Abel (Lema 1.10), tenemos que  $P(x)W[f, g](x) = k$  donde  $k$  es una constante. Por lo tanto, si el wronskiano vale cero en un punto de  $[a, b]$ , puesto que  $P > 0$ , este debe anularse para todo  $x$  en dicho intervalo. Debido a que  $f$  y  $g$  son soluciones del problema, ambas satisfacen la condición en el extremo  $a$ . En consecuencia se tiene el siguiente sistema

$$\begin{cases} a_1f(a) + a_2f'(a) = 0 \\ a_1g(a) + a_2g'(a) = 0. \end{cases}$$

Las incógnitas son  $a_1$  y  $a_2$ , se puede ver que  $a_1 = a_2 = 0$  es una solución. Sin embargo, por definición del problema de Sturm-Liouville  $a_1$  y  $a_2$  no pueden ser ambas nulas. Esto implica que el sistema ha de poseer más soluciones. Así la matriz de coeficientes tendrá determinante nulo. Con ello tenemos que

$$\begin{vmatrix} f(a) & f'(a) \\ g(a) & g'(a) \end{vmatrix} = W[f, g](a) = 0.$$

En consecuencia,  $W[f, g](x) = 0$  para todo  $x \in [a, b]$ . En virtud de la Proposición 1.3, podemos concluir que  $f$  y  $g$  son linealmente dependientes, es decir, difieren por un factor constante.  $\square$

El próximo teorema habla del número de valores propios que posee un problema regular de Sturm-Liouville y además proporciona un resultado acerca del número de ceros de las funciones propias asociadas.

**Teorema 3.5.** *Sea el problema regular de Sturm-Liouville (3.1)-(3.2), entonces se tiene que los valores propios satisfacen*

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4 < \dots \quad \text{con} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = +\infty.$$

*Además, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , la correspondiente función propia  $f_n(x)$  asociada a  $\lambda_n$  posee exactamente  $n - 1$  ceros en el intervalo  $(a, b)$ . En particular, se tiene que la primera función propia no posee ceros en tal intervalo.*

*Demostración.* Comenzamos demostrando el hecho de que cada función propia posee  $n - 1$  ceros en  $(a, b)$ . Tomando constantes reales apropiadas  $\alpha$  y  $\beta$  en  $[0, \pi)$ , podemos reescribir las condiciones separadas (3.2) en la forma

$$\cos(\alpha)y(a) - P(a)\sin(\alpha)y'(a) = 0, \tag{3.8}$$

$$\cos(\beta)y(b) - P(b) \sin(\beta)y'(b) = 0, \quad (3.9)$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  pueden ser expresados en términos de  $a_1, a_2, b_1, b_2$  (para más detalle consultar [2]). Aplicando ahora, la transformación de Prüfer, es fácil ver que la condición (3.8) es equivalente a

$$\theta(a) = \alpha. \quad (3.10)$$

Sea ahora  $f(x, \lambda)$  una solución de la ecuación regular de Sturm-Liouville. En consecuencia, la función  $\theta(x, \lambda)$  tal que  $\theta(a, \lambda) = \alpha$  puede ser determinada. Por el Teorema 2.13,  $\theta(x, \lambda)$  es una función creciente de  $\lambda$  para un  $x$  fijo. Además de la ecuación

$$\theta'(x) = \frac{\cos^2(\theta(x))}{P(x)} + (Q(x) + \lambda S(x)) \sin^2(\theta(x))$$

podemos deducir que  $\theta'(x) > 0$  cuando  $\theta$  es un múltiplo de  $\pi$  ( $\theta' = 1/P > 0$ ). Ya que  $\theta(a) = \alpha \geq 0$ , tenemos que  $\theta(x, \lambda) \geq 0$ . Si denotamos por  $x_n$  el  $n$ -ésimo cero de  $f(x, \lambda)$  en  $(a, b)$ , entonces  $\theta(x_n, \lambda) = n\pi$  para  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Puesto que  $\theta(a, \lambda) = \alpha < \pi$ , el primer cero de  $f(x, \lambda)$  en  $(a, b)$  ocurre cuando  $\theta = \pi$ , y el  $n$ -ésimo cero si  $\theta = n\pi$ . Debido a que  $\theta(x_n, \lambda)$  es una función continua en  $x_n(\lambda)$  y  $\lambda$ , tenemos que

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_n} \frac{dx_n}{d\lambda} + \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} = 0. \quad (3.11)$$

Ya que  $\partial \theta / \partial \lambda \geq 0$  y  $\partial \theta / \partial x_n > 0$  cuando  $\theta$  es un múltiplo de  $\pi$ , es fácil ver que por (3.11) se tiene que  $x_n(\lambda)$  es una función continua y decreciente respecto de  $\lambda$ . Sean ahora  $\tilde{P}, \tilde{Q}$  y  $\tilde{S}$  constantes tales que  $P(x) \leq \tilde{P}, Q(x) \geq \tilde{Q}, S(x) \geq \tilde{S} > 0$ . Entonces se cumple que la ecuación

$$(\tilde{P}y'(x))' + (\tilde{Q} + \lambda \tilde{S})y(x) = 0$$

donde  $(\tilde{Q} + \lambda \tilde{S}) > 0$  tiene como solución

$$\tilde{f}(x) = \sin(kx)$$

donde  $k^2 = (\tilde{Q} + \lambda \tilde{S})/\tilde{P}$ . Los ceros consecutivos de  $\tilde{f}$  están separados a una distancia de  $\pi((\tilde{Q} + \lambda \tilde{S})/\tilde{P})^{-1/2}$ . Vemos que esta distancia tiende a cero a medida que  $\lambda$  tiende a infinito. Por el Teorema de Comparación de Sturm (Teorema 1.29), se tiene que  $f(x)$  posee un cero entre cualquier par de ceros consecutivos de  $\tilde{f}(x)$ . Ahora, es fácil ver que  $\tilde{f}(x)$  tiene  $n-1$  ceros en el intervalo  $(a, b)$  cuando  $\lambda$  es suficientemente grande. En consecuencia, tenemos que  $f(x)$  debe poseer igualmente  $n-1$  ceros en el intervalo  $(a, b)$ , como queríamos probar. □

La parte de que la sucesión de valores propios tiene a infinito no la demostraremos puesto que no forma parte de los objetivos de esta memoria. Dicha demostración se puede hacer utilizando la transformación de Prüfer (ver libros [5] o [9]). Asimismo, en el libro [10] se puede encontrar otra demostración alternativa que no usa dicha transformación.

Para ilustrar con un ejemplo el Teorema 3.5, recuperaremos las funciones propias obtenidas en el Ejemplo 3.2.

**Ejemplo 3.6.** Consideramos los valores propios  $\lambda_n = n^2\pi^2$  con sus correspondientes funciones propias  $f_n = \sin(n\pi \log(x))$   $n \in \mathbb{N}$ , obtenidas en el Ejemplo 3.2. En virtud del Teorema 3.5, se cumple que la función propia  $f_n = \sin(n\pi \log(x))$  posee exactamente  $n - 1$  ceros en  $(1, e)$ . En particular, la primera función propia  $f_1(x) = \sin(\pi \log(x))$  no tendrá ceros en tal intervalo.

En la Figura 3.1 están dibujadas las funciones propias correspondientes a los valores propios  $\lambda_2$  y  $\lambda_7$ . En la gráfica se puede apreciar claramente cómo tales funciones poseen 1 y 6 ceros respectivamente en el intervalo  $(1, e)$  como afirma el Teorema 3.5.

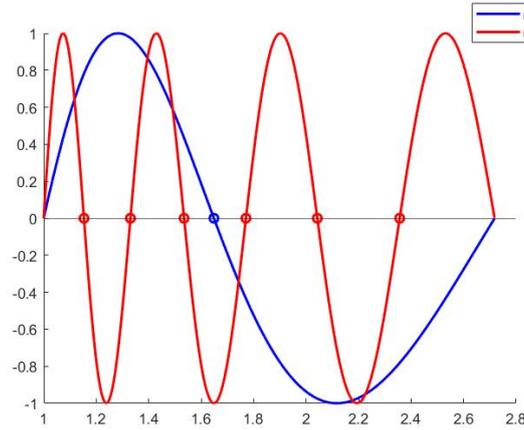


Figura 3.1: Gráfica de las funciones propias  $f_2(x) = \sin(2\pi \log(x))$  y  $f_7(x) = \sin(7\pi \log(x))$  correspondientes a los valores propios  $\lambda_2 = 4\pi^2$  y  $\lambda_7 = 49\pi^2$ .

Observamos que el Teorema 3.5 solo habla del número de ceros en el intervalo  $(a, b)$ . En este caso, el número de ceros totales de cada función propia es infinito puesto que son funciones oscilatorias. Sin embargo, pueden existir otros casos en los que las funciones propias solo posean ceros en el intervalo que estamos considerando.

El siguiente teorema es uno de los más importantes de esta teoría. Establece que el conjunto de funciones propias de un problema regular de Sturm-Liouville forman una base ortogonal en el espacio de funciones  $L^2_S(a, b)$ . Recordamos que dicho espacio es igual a

$$L^2_S(a, b) = \left\{ f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R} : \int_a^b f(x)^2 S(x) dx < +\infty \right\}$$

La demostración de una versión más general de este teorema se puede encontrar en [5].

**Teorema 3.7.** *El conjunto de las funciones propias del problema regular de Sturm-Liouville (3.1)-(3.2),  $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ , forma una base ortogonal en el espacio de funciones  $L^2_S(a, b)$ . Es decir, toda función  $g \in L^2_S(a, b)$  se puede escribir como*

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x) \quad \text{para todo } x \in (a, b),$$

donde los términos  $c_n$  vienen determinados por

$$c_n = \frac{\int_a^b g(x) f_n(x) S(x) dx}{\int_a^b f_n(x)^2 S(x) dx}. \quad (3.12)$$

La convergencia que se tiene es en  $L_S^2(a, b)$ , es decir, se satisface que

$$\int_a^b (g(x) - S_N(x))^2 S(x) dx \rightarrow 0 \quad \text{cuando } N \rightarrow +\infty,$$

donde  $S_N(x) = \sum_{n=1}^N c_n f_n(x)$ . Además, si  $g \in C^2[a, b]$  y verifica las condiciones (3.2), entonces la convergencia es uniforme en  $[a, b]$ .

Para ilustrar el Teorema 3.7 vamos a considerar las funciones propias del Ejemplo 3.2.

**Ejemplo 3.8.** Consideramos el conjunto de funciones propias del Ejemplo 3.2, es decir  $f_n(x) = \sin(n\pi \log(x))$  con  $n = 1, 2, 3, \dots$ . En virtud del Teorema 3.7 tenemos que  $(f_n)_n$  forma una base ortogonal. Tomamos ahora la función  $g(x) \equiv 1$  y vemos que  $g \in L_S^2(1, e)$ . En consecuencia,  $g \equiv 1$  se podrá escribir de la siguiente manera

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x) \quad x \in (1, e).$$

A continuación, calculamos los términos  $c_n$ . Siguiendo la igualdad (3.12) debemos calcular dos integrales. Recordamos que en el Ejemplo 3.2 la función peso es  $S(x) = 1/x$ . Primero calculamos la integral

$$\int_1^e \sin(n\pi \log(x)) \frac{1}{x} dx = \int_0^1 \sin(n\pi t) dt = \frac{1 - (-1)^n}{n\pi} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{2}{n\pi} & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Ahora para hallar el denominador de  $c_n$  debemos calcular

$$\int_1^e \sin(n\pi \log(x))^2 \frac{1}{x} dx = \int_0^1 \sin(n\pi t)^2 dt = \int_0^1 \frac{1 - \cos(2n\pi t)}{2} dt = \frac{1}{2}.$$

Destacar que para ambas integrales hemos empleado el cambio de variable  $t = \log(x)$ . Por tanto, tenemos que  $c_n = 0$  si  $n$  es par y  $c_n = 4/(n\pi)$  en el caso de que  $n$  sea impar. En resumen, hemos visto que la función  $g \equiv 1$  se puede escribir como combinación de las funciones propias  $f_n$  de la siguiente manera

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \sin((2n-1)\pi \log(x))}{(2n-1)\pi} \quad \text{para todo } x \in (1, e).$$

En la Figura 3.2(a) se puede ver la comparación entre la función  $g \equiv 1$  y la serie considerando los 10 primeros términos. Asimismo, en la Figura 3.2(b) hemos tomado 30 términos del sumatorio. Observamos que cuantos más términos de la serie tomemos más precisa será la igualdad.

## 3.2. Problema Periódico de Sturm-Liouville

En esta sección, trataremos la ecuación de Sturm-Liouville (3.1) sujeta a otras condiciones, conocidas con el nombre de periódicas. Además, veremos las principales semejanzas y diferencias entre imponer estas y las condiciones en los extremos (3.2). Comenzamos dando la definición del problema periódico de Sturm-Liouville.

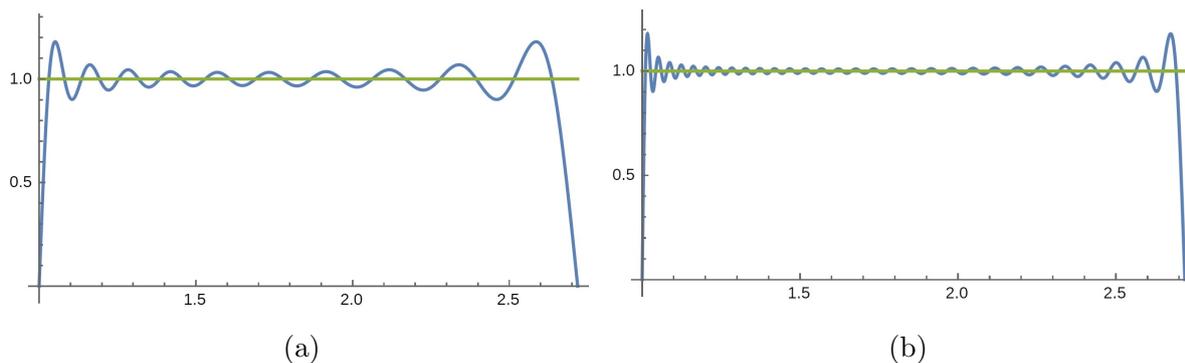


Figura 3.2: Gráficas con las comparaciones de la función constante igual a 1 y la serie obtenida con las funciones propias  $f_n(x) = \sin(n\pi \log(x))$  con diferente número de términos. (a) 10 términos (b) 30 términos.

**Definición 3.9.** Se dice problema periódico de Sturm-Liouville a la ecuación (3.1) en la cual  $P(a) = P(b)$ , junto con las condiciones periódicas

$$y(a) = y(b), \quad y'(a) = y'(b). \quad (3.13)$$

La primera diferencia entre las condiciones en los extremos (3.2) y las periódicas (3.13) es que el Teorema 3.4 no es cierto en el caso periódico. Para ilustrar este hecho consideramos el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 3.10.** Sea el problema periódico de Sturm-Liouville asociado a la ecuación  $y''(x) + \lambda y(x) = 0$ , con  $x \in [-\pi, \pi]$ . Sujeto a las condiciones periódicas  $y(-\pi) = y(\pi)$  e  $y'(-\pi) = y'(\pi)$ . Si  $\lambda > 0$ , tenemos que la solución general es  $y(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$ . Imponiendo las condiciones periódicas, y teniendo en cuenta que  $\sin(-x) = -\sin(x)$  y  $\cos(-x) = \cos(x)$ , se llega a que  $2C_2 \sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$ ,  $2\sqrt{\lambda}C_1 \sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$ . Ya que  $C_1$  y  $C_2$  no pueden ser ambas nulas, puesto que en caso contrario la solución sería trivial, obtenemos que  $\sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$ . En consecuencia los valores propios del problema son

$$\lambda_n = n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Por otro lado, es fácil ver que si  $\lambda < 0$  las soluciones de la ecuación no satisfacen las condiciones periódicas. Finalmente, en el caso  $\lambda = 0$  se obtienen las soluciones constantes. Esto quiere decir que  $\lambda_0 = 0$  es valor propio. Por cada valor propio  $\lambda_n$ ,  $n \geq 1$ , vemos que existen dos funciones propias, asociadas a este, linealmente independientes que son  $f_n = \cos(nx)$  y  $g_n = \sin(nx)$ . Por tanto, vemos que no se cumple el resultado del Teorema 3.4 para este problema.

Vimos que las funciones propias de un problema regular de Sturm-Liouville eran ortogonales respecto a la función peso (Teorema 3.3). En el caso del problema periódico de Sturm-Liouville, también se puede demostrar que las funciones propias son ortogonales (para más detalle consultar el capítulo 7 de [9]).

El siguiente teorema es el análogo al Teorema 3.5, en el caso del problema periódico de Sturm-Liouville. La demostración de este teorema se puede encontrar en [5].

**Teorema 3.11.** Los valores propios,  $\lambda_n$ , del problema periódico de Sturm-Liouville forman una sucesión tal que

$$\lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \lambda_3 \leq \lambda_4 < \dots$$

Además, existe una única función propia linealmente independiente,  $f_0$ , asociada a  $\lambda_0$ . Si  $\lambda_{2n+1} < \lambda_{2n+2}$  para  $n \geq 0$ , entonces existe una única función propia  $f_{2n+1}$  linealmente independiente correspondiente a  $\lambda_{2n+1}$  y otra única  $f_{2n+2}$  asociada a  $\lambda_{2n+2}$ . Sin embargo, si  $\lambda_{2n+1} = \lambda_{2n+2}$ , entonces existen dos funciones propias linealmente independientes asociadas al mismo valor propio  $\lambda_{2n+1}$ . En cuanto al número de ceros, se tiene que  $f_0$  no posee ninguno en el  $[a, b]$  y  $f_{2n+1}, f_{2n+2}$  tienen exactamente  $2n+2$  ceros en  $[a, b]$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

### 3.3. Problema Singular de Sturm-Liouville

A lo largo de toda la memoria hemos trabajado con  $[a, b]$  cerrado y acotado y  $P > 0$  en dicho intervalo. En cambio, en esta sección abordaremos el caso en el que esto no ocurra. En particular, trataremos el problema singular de Sturm-Liouville. Los contenidos de esta sección se basan principalmente en [9].

La ecuación de Sturm-Liouville (3.1) se dice que es singular cuando el intervalo  $[a, b]$  no está acotado o cuando  $P$  se anula en dicho intervalo. También se dice singular si alguno de los coeficientes tiende a infinito cuando  $x$  se acerca a un extremo del intervalo considerado.

Una ecuación singular de Sturm-Liouville junto con unas condiciones apropiadas en los extremos se conoce como problema singular de Sturm-Liouville. En este caso las restricciones que imponemos no son combinaciones lineales de los valores de la función y/o de su derivada en los extremos (3.2) como en el caso regular. Usualmente se requiere que las soluciones de la ecuación estén acotadas en los extremos del intervalo (para más detalle acerca del motivo de estas condiciones se puede consultar el capítulo 7 de [9]).

Antes de considerar un ejemplo de problema singular de Sturm-Liouville, vamos a introducir los denominados polinomios de Legendre. Para mayor información se puede consultar libros como [1], [6] o el capítulo 4 de [9].

**Definición 3.12.** (*Ecuación de Legendre de orden  $n$* )  
Se llama ecuación de Legendre de orden  $n$  a

$$(1 - x^2)y''(x) - 2xy'(x) + n(n + 1)y(x) = 0, \quad (3.14)$$

donde  $n$  es un número real.

La ecuación (3.14) se puede resolver mediante el método de potencias. Además, si  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , se puede demostrar que una solución linealmente independiente es un polinomio de grado  $n$ . Se define el polinomio de Legendre de grado  $n$ ,  $P_n$ , como el único polinomio que es solución de la ecuación (3.14) y que satisface  $P_n(1) = 1$ ; dicha restricción solo tiene sentido en el caso de que  $P_n$  no se anule en el punto  $x = 1$ . Este hecho ocurre para todos los polinomios de Legendre. La ecuación (3.14) se puede reescribir fácilmente en su forma autoadjunta obteniendo

$$((1 - x^2)y'(x))' + n(n + 1)y(x) = 0. \quad (3.15)$$

Observamos ahora que podemos escribir la ecuación de Legendre como un problema singular de Sturm-Liouville.

**Ejemplo 3.13.** Consideramos la ecuación singular de Sturm-Liouville

$$((1-x^2)y'(x))' + \lambda y(x) = 0, \quad x \in [-1, 1], \quad (3.16)$$

con las condiciones de que  $y$  e  $y'$  sean acotadas cuando  $x$  tiende a  $\pm 1$ . Vemos que se trata del caso singular puesto que la función  $P(x) = 1 - x^2$  se anula en los extremos del intervalo. Por lo visto anteriormente, tenemos que los valores propios de la ecuación (3.16) son  $\lambda_n = n(n+1)$  y las funciones propias asociadas son  $f_n = P_n$ , donde  $P_n$  representa el polinomio de Legendre de grado  $n$ . Señalamos que los polinomios son las únicas soluciones que están acotadas cuando  $x$  tiende a los extremos puesto que las otras soluciones linealmente independientes poseen términos logarítmicos que tienden a infinito cuando  $x$  se aproxima a 1 o -1.

En la Tabla 3.1 podemos ver los 6 primeros polinomios de Legendre.

| $n$   | 0 | 1   | 2              | 3               | 4                       | 5                         |
|-------|---|-----|----------------|-----------------|-------------------------|---------------------------|
| $P_n$ | 1 | $x$ | $(3x^2 - 1)/2$ | $(5x^3 - 3x)/2$ | $(35x^4 - 30x^2 + 3)/8$ | $(63x^5 - 70x^3 + 15x)/8$ |

Tabla 3.1: Primeros polinomios de Legendre.

En el caso regular vimos que las funciones propias son ortogonales respecto a la función peso (Teorema 3.3). Para el caso singular, existe un resultado análogo. Es decir, las funciones propias obtenidas de un problema singular de Sturm-Liouville son ortogonales respecto a la función peso. En este caso debemos imponer además la condición de que las funciones sean de cuadrado integrable. Aplicando este teorema a los polinomios de Legendre obtenemos que

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x) = 0, \quad n \neq m.$$

En particular, como  $P_0 = 1$ , tenemos que

$$\int_{-1}^1 P_n(x) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Es fácil ver que cada función propia  $P_n$  posee exactamente  $n$  ceros puesto que se trata de un polinomio de grado  $n$ . En este caso, no podemos aplicar el Teorema 3.5, puesto que no se trata de un problema regular de Sturm-Liouville. Sin embargo, se puede demostrar que los polinomios de Legendre poseen todas sus raíces en el intervalo  $(-1, 1)$ . En la Figura 3.3 se puede ver la gráfica de los primeros 6 polinomios de Legendre. En ella se puede apreciar el hecho de que el polinomio de Legendre de grado  $n$  posee sus  $n$  ceros en el intervalo  $(-1, 1)$ .

Otra propiedad importante de los polinomios de Legendre es que forman una base ortogonal en el espacio de funciones  $L^2_S(-1, 1)$ . Esto quiere decir que toda función  $f \in L^2_S(-1, 1)$  se puede escribir como combinación de los polinomios de Legendre. Este resultado siempre se tiene en los problemas regulares de Sturm-Liouville (Teorema 3.7). Además, los coeficientes  $c_n$  vienen dados por la misma expresión que en dicho Teorema. Para ilustrar este hecho vamos a considerar la función  $f(x) = \sin(x)$ .

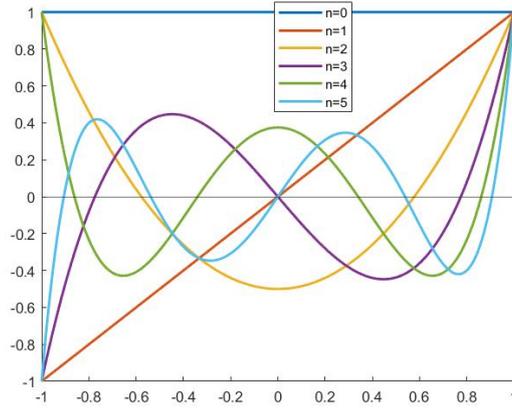


Figura 3.3: Gráfica con los primeros polinomios de Legendre.

**Ejemplo 3.14.** Consideramos la función  $f(x) = \sin(x) \in C^2[-1, 1] \subset L^2_S(-1, 1)$ . La función  $f$  se puede escribir en la siguiente forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x) \quad \forall x \in [-1, 1],$$

donde  $P_n$  representa el polinomio de Legendre de grado  $n$ . Los términos  $c_n$  vienen dados por la siguiente expresión

$$c_n = \frac{\int_{-1}^1 \sin(x) P_n(x) dx}{\int_{-1}^1 P_n(x)^2 dx} \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Sabemos que el polinomio  $P_n$  es una función par cuando  $n$  lo es. En consecuencia, debido a que la función seno es una función impar y el intervalo de integración es simétrico, se tiene que el numerador se anula cuando  $n$  es par. Es decir,  $c_{2k} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Por otra parte, se puede demostrar que

$$\int_{-1}^1 P_n(x)^2 dx = \frac{2}{2n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Reuniendo estas consideraciones, llegamos a que los términos  $c_n$  vienen dados por

$$c_{2n-1} = \frac{4n-1}{2} \int_{-1}^1 \sin(x) P_{2n-1}(x) dx \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Calculando los primeros términos obtenemos los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} c_1 &= 3(\sin(1) - \cos(1)) \\ c_3 &= 7(14 \cos(1) - 9 \sin(1)) \\ c_5 &= 11(540 \sin(1) - 841 \cos(1)) \\ c_7 &= 15(118187 \cos(1) - 75887 \sin(1)). \end{aligned}$$

En consecuencia, llegamos a

$$\sin(x) \simeq c_1 P_1(x) + c_3 P_3(x) + c_5 P_5(x) + c_7 P_7(x) \quad \forall x \in [-1, 1].$$

En la Figura 3.4(a) podemos ver la comparación entre las gráficas de la función seno y su desarrollo en polinomios de Legendre con los 8 primeros términos, en el intervalo  $[-4, 4]$ . En ella, se puede apreciar cómo en el intervalo  $[-1, 1]$  ambas funciones son indistinguibles. Por tanto, podemos afirmar que el desarrollo en serie con polinomios de Legendre de la función seno es muy precisa con tan solo considerar unos pocos términos.

Por otro lado, en la Figura 3.4(b) se muestra la gráfica de la diferencia entre la función seno y su desarrollo en polinomios de Legendre en el intervalo  $[-1, 1]$ . En ella, podemos ver que la diferencia entre ambas funciones es del orden de  $10^{-8}$ .

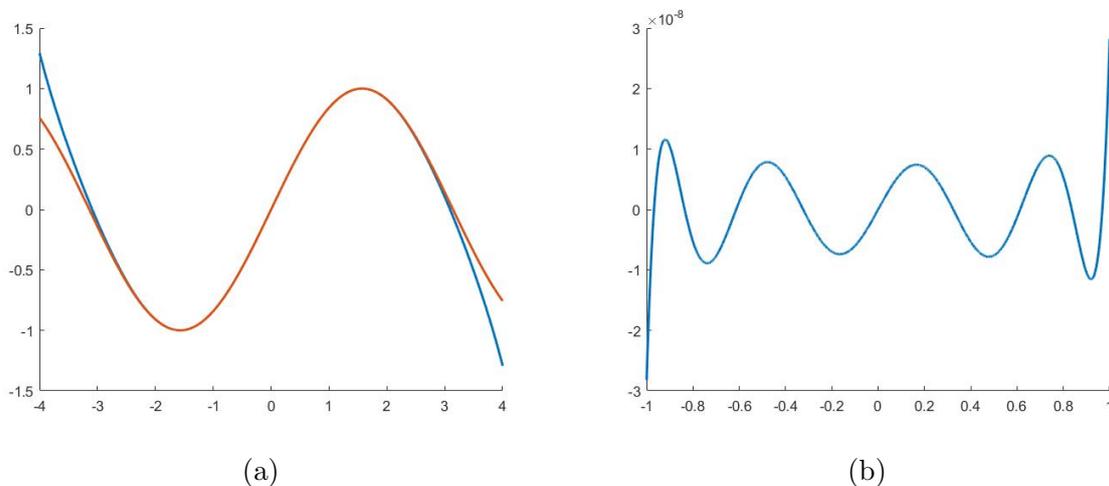


Figura 3.4: Gráficas relativas al desarrollo de la función  $\sin(x)$  en polinomios de Legendre. (a) Comparación entre la función  $\sin(x)$  y los 8 primeros términos de su desarrollo en serie de polinomios de Legendre. (b) Gráfica de la diferencia entre la función  $\sin(x)$  y los 8 primeros términos de su desarrollo en serie de polinomios de Legendre.

# Bibliografía

- [1] G.B. Arfken, H.J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, Harcourt-Academic Press, 2001.
- [2] M. Arrate, *Ecuaciones Diferenciales*, Universidad de Cantabria, 2002.
- [3] J.C. Bellido, A. Donoso, S. Lajara, *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, Paraninfo, 2014.
- [4] R.L. Borrelli, C.S. Coleman, *Ecuaciones Diferenciales, una Perspectiva de Modelización*, Oxford University Press, 2002.
- [5] E.A. Coddington, N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill Book Company, 1955.
- [6] R. Courant y D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Wiley and Sons, 1953.
- [7] M. Humi, W. Miller, *Second Course in Ordinary Differential Equations for Scientists and Engineers*, Springer-Verlag, 1988.
- [8] S.G. Krantz, G.F. Simmons, *Ecuaciones Diferenciales: Teoría, Técnica y Práctica*, McGraw Hill, 2007.
- [9] T. Myint-U, *Ordinary Differential Equations*, Elsevier North-Holland, 1978.
- [10] S. Novo, R. Obaya, J. Rojo, *Ecuaciones y Sistemas Diferenciales*, AC, 1992.
- [11] S.L. Ross, *Ecuaciones Diferenciales*, Reverté, 1980.
- [12] C. Sturm, *Mémoire Sur les Équations Différentielles Linéaires du Second Ordre*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 1<sup>re</sup> série, tome 1, p. 106-186, 1836,
- [13] C.A. Swanson, *Comparison and Oscillation Theory of Linear Differential Equations*, Academic Press New York and London, 1968.