FACULTAD
DE
CIENCIAS

Conjetura de Collatz

(Collatz Conjeture)

Trabajo de fin de Grado
para acceder al

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autora: Paula Sánchez Monar

Director: Daniel Sadornil Renedo

Junio-2024

Agradecimientos

Siempre supe que esta etapa llegaría a su fin, pero nunca pensé que sería tan duro despedirme de estos cuatro años universitarios. Cuatro años llenos de aprendizaje que jamás olvidaré.

En primer lugar, me gustaría dar las gracias a Daniel Sadornil. Ha sido un auténtico placer realizar este trabajo a tu lado. Compartir contigo esta etapa final de mi vida universitaria ha hecho que no solo te valore como profesor, sino como persona. Gracias por tu implicación y por dedicar tu tiempo en una conjetura que ambos sabíamos que no íbamos a resolver.

Me gustaría dar las gracias también a mis amigos, tanto a los que me conocen desde siempre, como a los que me llevo de esta experiencia. Siempre tendréis un hueco en mi corazón. Todo esto no hubiese sido igual sin vosotros. Os habéis convertido en una familia para mi y estoy segura de que nos queda mucho por vivir juntos.

Gracias a ti, Jairo, por no soltarme la mano nunca, desde el primer día que comencé esta aventura, hasta el último. Y por último, pero no menos importante, gracias a mi familia, porque desde pequeña habéis confiado en mí y siempre vais a ser mi pilar fundamental. En especial dar las gracias a mis abuelos, porque siempre han sido mi motivación para seguir. A mi compañera de vida, Carlota, por todas las experiencias vividas. Estoy muy orgullosa de lo mucho que hemos logrado juntas. Y a mis padres y a mi hermano, lo sois todo para mi, nunca podré agradecéroslo lo suficiente. Gracias mamá por ser mi mayor apoyo, esto es todo en gran parte gracias a ti.

RESUMEN:

La conjetura de Collatz es considerada como uno de los problemas matemáticos más fáciles de enunciar, pero más difíciles de demostrar. La conjetura afirma que para cualquier número natural n, si se aplica repetidamente la siguiente regla: dividir entre 2 si n es par, o multiplicar por 3 y sumar 1 si n es impar, se llegará eventualmente al ciclo 1, 4, 2, 1, 4, 2... y así sucesivamente. Lothar Collatz planteó esta conjetura en 1937, y desde entonces varios matemáticos han tratado de probarla o refutarla (de forma general o encontrando un contraejemplo). No obstante si se han demostrado ciertos resultados referentes a ella.

Este trabajo pretende profundizar la conjetura de Collatz desde distintos enfoques matemáticos. En primer lugar se realizará una introducción histórica de la conjetura desde sus inicios hasta sus últimos avances en la actualidad. A continuación, se enuncia la conjetura y propiedades esenciales, así como diversas propiedades o resultados concernientes a lo que se denomina tiempo de parada. Se estudiará el comportamiento de las iteraciones tanto desde un punto estadístico o probabilista como desde un punto de vista algebraico.

Palabras clave: Conjetura de Collatz, trayectoria, tiempo de parada e iteración.

ABSTRACT:

The Collatz conjecture is considered one of the easiest mathematical problems to state, but most difficult to prove. The conjecture states that for any natural number n, if you repeatedly apply the following rule: divide by 2 if n is even, or multiply by 3 and add 1 if n is odd, you will eventually reach cycle 1, 4, 2, 1, 4, 2... and so on. Lothar Collatz proposed this conjecture in 1937, and since then several mathematicians have tried to prove or disprove it (generally or by finding a counterexample). However, certain results regarding it have been demonstrated.

This work aims to deepen Collatz's conjecture from different mathematical approaches. Firstly, a historical introduction of the conjecture will be made from its beginnings to its latest advances today. The conjecture and essential properties are stated below, as well as various properties or results concerning what is called stop time. The behavior of the iterations will be studied both from a statistical or probabilistic point of view and from an algebraic point of view.

Key words: Collatz conjecture, trajectory, stop time and iteration.

Índice general

1. Introducción **1**

2. Definición y propiedades esenciales **5**

3. Tiempo de parada **15**

4. Cota superior de las trayectorias **27**

5. Modelos probabilísticos **31**

6. Comportamiento modular **37**

Bibliografía **45**

Apéndice: Códigos R y Python **49**

Capítulo 1

Introducción

La conjetura de Collatz es uno de los problemas más elementales sin resolver en matemáticas, o al menos en la matemática recreativa. El problema se le atribuye tradicionalmente a Lothar Collatz, quien nació el 6 de julio de 1910 en Arnsberg (Alemania) y murió en Varna (Bulgaria) en 1990. Fue un destacado matemático conocido por su trabajo en diversas áreas, incluyendo teoría de números, análisis matemático y probabilidad. Su interés por las funciones de la teoría de números se vio fomentado en su época de estudiante gracias a las conferencias de tres matemáticos alemanes: Edmund Landau (Berlín, 1877 - ibídem, 1938), Oskar Perron (Frankenthal, 1880 - Múnich, 1975) e Issai Schur (Mogilev, 1875 - Tel Aviv, 1941). Su curiosidad por la teoría de grafos le llevó a la idea de representar dichas funciones como grafos dirigidos ([18]). A pesar de sus numerosos artículos matemáticos (en Mathscinet aparecen 189 publicaciones suyas), su conjetura sobre la secuencia de números enteros planteada en 1937 es probablemente su contribución más difundida y conocida en la comunidad matemática general.

La conjetura de Collatz establece que, para cualquier número natural n, si se aplica repetidamente la siguiente regla: dividir entre 2 si n es par, o multiplicar por 3 y sumar 1 si n es impar, se llegará eventualmente al ciclo 1, 4, 2, 1, 4, 2... y así sucesivamente. A pesar de su simplicidad aparente, esta conjetura aún no ha sido probada ni refutada de manera general para todos los números naturales, lo que la convierte en uno de los problemas abiertos más conocidos y estudiados en matemáticas, tanto por profesionales como por aficionados (una rápida búsqueda en Internet produce numerosas "demostraciones" que son erróneas). A lo largo de los años, se ha demostrado que la conjetura es cierta para muchos números. De hecho, se sabe que la conjetura es cierta para todos los números menores que 10^{20}, pero no existe una demostración general que confirme su validez para todos los enteros positivos.

La conjetura de Collatz también es conocida como el problema 3x+1, el problema de Siracusa, el problema de Kakutani, el algoritmo de Hasse o el problema de Ulam. En 1950, Lothar Collatz presentó su conjetura durante una reunión matemática en la Universidad de Siracusa, Nueva York. Durante este evento, la conjetura fue de gran interés para los matemáticos y académicos presentes en esa reunión, y esto hizo que tomase el nombre de "problema de Siracusa". Fue en 1952, en Hamburgo, cuando explicó el problema a Helmut Hasse (Kassel, 1898 - Ahrensburg, 1979), matemático alemán que trabajó en teoría alge-

braica de números. Este se interesó por el problema y discutió sus generalizaciones entre la comunidad matemática, y es por ello por lo que se conoce como el algoritmo de Hasse ([18]). El problema llegó a los oídos de Shizuo Kakutani (Osaka, 1911 – New Haven, 2004), matemático japonés conocido por sus contribuciones significativas en diversos campos de las matemáticas, particularmente en teoría de la medida, teoría ergódica, análisis funcional y geometría. Este se interesó por el tema y difundió la conjetura, y es por ello por lo que se conoce también como el problema de Kakutani. El propio Katutani ([26]) llegó a afirmar que:

"Durante aproximadamente un mes todos en Yale trabajaron en ello, sin resultado alguno. Un fenómeno similar ocurrió cuando lo mencioné en la Universidad de Chicago. Se bromeó diciendo que este problema era parte de una conspiración para frenar la investigación matemática en Estados Unidos."

Ocurrió algo similar con Stanislaw Ulam (Lemberg, 1909 - Santa Fe, 1984), un matemático polaco que hizo circular el problema. Otro personaje importante en relación con la conjetura es Jeffrey Lagarias, que en 2010, junto con varios colaboradores, demostró resultados importantes relacionados con la conjetura de Collatz, que se encuentran en [18]. Este afirmó ([26]): *"Este es un problema extraordinariamente difícil, completamente fuera del alcance de las matemáticas actuales".*

El problema de 3x+1 se puede abordar desde distintos campos relacionados con las matemáticas. A continuación se mencionarán y se explicará brevemente su relación con algunos de ellos ([17]).

1. *Teoría de números:* La relación con la teoría de números es inmediata ya que el problema $3x + 1$ es un problema en aritmética, y por tanto pertenece a la teoría elemental de números. De hecho, R.K. Guy ([10]) lo clasificó como un problema no resuelto en teoría de números. El estudio de los ciclos de la función $3x + 1$ conduce a problemas que involucran ecuaciones exponenciales diofánticas. Por otro lado, las funciones generalizadas de Collatz se han definido en un marco de teoría de números, en el que las operaciones aritméticas sobre el dominio de los números enteros se reemplazan con operaciones similares en el anillo de números enteros de un campo de números algebraico.

2. *Sistemas dinámicos:* La teoría de los sistemas dinámicos discretos se refiere al comportamiento de funciones en cada iteración. Fue Wirsching ([29]) quien vio el problema $3x + 1$ como la iteración de una aplicación, por lo tanto es un sistema dinámico discreto en el espacio de estados $\mathbb{Z}$. La operación importante para la iteración es la composición de funciones, y se pueden formular preguntas de iteración y composición en el contexto general de álgebra universal. Ver el problema de esta manera sugiere que sería útil en el estudio de la función $3x + 1$ obtener sistemas dinámicos en dominios más grandes, incluyendo los números reales y los números complejos. Cuando se consideran funciones generalizadas $3x + 1$ en dominios más grandes, una amplia variedad de comportamientos puede ocurrir. Una referencia para obtener un marco general sobre dinámica topológica es [2].

3. *Teoría ergódica:* La conexión con la teoría ergódica surge como resultado de la perspectiva de los sistemas dinámicos, incorporando el requisito adicional de contar con una medida invariante. En un principio se observó que ciertas medidas finitas se conservan a través de la función $3x + 1$ en los números enteros. Al generalizar funciones de Collatz a enteros d-ádicos, se obtienen aplicaciones que son invariantes bajo medidas estándar (medidas contablemente aditivas). Por ejemplo, la extensión (continua y única) de la función $3x + 1$ a los enteros 2-ádicos presenta una medida 2-ádica como invariante, y la aplicación resulta ser ergódica en relación con dicha medida. Para explorar estos conceptos en profundidad se recomienda consultar "The Ultimate Challenge"([18]). Un problema abierto consiste en clasificar todas las medidas invariantes para funciones generalizadas $3x + 1$ en los enteros d-ádicos.

4. *Lógica matemática y teoría de la computación:* La interrelación con la lógica y la teoría de la computación se origina en el descubrimiento de Conway, quien demostró que existe una función $3x+1$ generalizada cuya iteración puede emular una computadora universal. En su trabajo ([5]), Conway presentó un problema irresoluble relacionado con la iteración de una función específica: siendo n, un número entero y positivo, el elemento de entrada, se busca determinar si alguna iteración de esta función con dicha entrada llega a ser alguna vez una potencia de 2.

   La iteración de funciones similares a $3x+1$ ya era objeto de estudio para comprender la eficacia de ciertas teorías lógicas a finales de la década de 1960. En ese contexto, se exploraron funciones parcialmente definidas que llevaban enteros a enteros, con resultados no definidos para algunos enteros, según Isard y Zwicky ([12]). Más recientemente, se han investigado estas funciones al estudiar la capacidad computacional de máquinas de Turing "pequeñas", que son demasiado limitadas para codificar una computadora universal. Estos aspectos se analizan en detalle en el artículo de Michel y Margenstern en [18].

5. *Teoría de la probabilidad y procesos estocásticos:* La relación con la teoría de la probabilidad y los procesos estocásticos se establece al intentar modelar el comportamiento de la iteración $3x + 1$ en conjuntos extensos de enteros, lo que conduce a la formulación de modelos probabilísticos heurísticos para las iteraciones, permitiendo anticipar su comportamiento. La iteración puede concebirse como un generador de números pseudoaleatorios al considerar la entrada como establecida por una distribución de probabilidad, y luego examinar cómo esta distribución evoluciona durante la iteración. Además, se pueden explorar árboles de iteraciones inversas. En este contexto, se puede indagar sobre propiedades relacionadas con la estructura de tales árboles, cuyo nodo raíz es un número entero seleccionado de alguna distribución de probabilidad. Este fenómeno puede modelarse mediante un enfoque estocástico que refleje el crecimiento aleatorio de árboles. Estos temas se analizan en detalle en el artículo de Kontorovich y Lagarias ([13]).

Hasta la fecha, la conjetura de Collatz sigue siendo un problema abierto, considerándose un desafío en la comunidad matemática. A pesar de su simplicidad, la conjetura de Collatz ha desconcertado a matemáticos durante décadas. Se ha comprobado computacionalmente

para números extremadamente grandes, como se puede ver en el artículo de Oliveira ([25]). El último avance fue en el año 2017, cuando un proyecto de computación distribuida ([11]) verificó la conjetura de Collatz para todos los valores hasta 10^{20}. Sin embargo, no hay una prueba matemática general que demuestre que este patrón se cumpla para todos los números naturales.

Riho Terras fue un matemático estonio conocido por dar una solución parcial a la conjetura. En 1976 ([28]) demostró que casi para cualquier valor de n, al aplicar sucesivamente la función de Collatz, en algún momento se llega a un número menor que n. La idea de Terras prosperó con el tiempo, y fue Allouche ([1]), en 1978 , quien demostró que realizando suficientes (dependiendo del valor de n) iteraciones de la función de Collatz se alcanza un valor menor que $n^{0.869}$. Esta cota fue mejorada por Korec ([14]), en 1994, pasando a valer $n^{0.7925}$.

En 1987, John H. Conway ([5]) desarrolló un lenguaje informático llamado "FRACTRAN", en el que cada programa era una variante de la función de Collatz. El programa "FRACTRAN" es una lista ordenada de fracciones positivas junto con una entrada entera positiva inicial n, que se ejecuta actualizando el número entero n de una forma concreta, y se espera que pueda ayudar a obtener avances para probar si la conjetura es cierta o no.

En 1993, Eliahou ([6]) demostró que cualquier ciclo, es decir, cualquier patrón de comportamiento que se repite al iterar la función, distinto del trivial, que se siga de emplear la función de Collatz debe tener como poco longitud 17 087 915. Con ello se afirma que no es una tarea sencilla encontrar un ciclo distinto del trivial que refute la conjetura. Por otra parte, Krasikov y Lagarias en 2003 ([15]) demostraron que para todo número n, al menos $n^{0.84}$ valores entre 1 y n alcanzan el valor 1 iterando la función de Collatz. El último gran avance hasta la fecha es de Terence Tao. Este, en 2019, demostró ([27]) que para toda función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que tienda a infinito, se cumple que el mínimo elemento de la trayectoria de n, es decir, de la secuencia formada al iterar la función de Collatz con valor inicial n, es menor que $f(n)$ para casi todo valor n en los naturales. De hecho, casi todos los valores iniciales n, una vez iterados toman un valor menor que $\log(\log(\log(\log(n))))$.

Como se evidencia, la conjetura de Collatz se encuentra inmersa en un extenso contexto histórico y abarca diversas áreas. En los próximos capítulos se explorarán en detalle ciertos aspectos relevantes. El Capítulo 2 se dedicará a enunciar el problema, realizar generalizaciones del mismo, y proporcionar definiciones y propiedades útiles. Por otro lado, el Capítulo 3 se centra en el concepto del tiempo de parada, y se demuestran teoremas de gran importancia. En el Capítulo 4 se pretende dar una cota superior sobre las trayectorias de la función de Collatz y se demuestra que valdría con probar la conjetura para los números congruentes con 2 módulo 6. Además, la conjetura de Collatz puede ser vista desde un aspecto más probabilístico, y es en eso en lo que se centra el Capítulo 5. Por último, en el Capítulo 6 se aborda el comportamiento modular de las iteraciones.

Los ejemplos y las gráficas han sido programados usando R y Python. Estos códigos se encuentran en el Apéndice, así como unas tablas con diversos resultados obtenidos.

Capítulo 2

Definición y propiedades esenciales

Para el desarrollo de este capítulo se han utilizado principalmente las siguientes referencias: [9] y [18].

La función de Collatz $C : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ se define como:

$$C(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & x \equiv 0 \ \text{ mód } 2 \\ \\ 3x+1 & x \equiv 1 \text{ mód } 2 \end{cases} \tag{2.1}$$

En numerosas ocasiones, para ahorrarse iteraciones eliminando cuando sea posible un factor 2, es más común definir la función de Collatz de la siguiente forma:

$$T(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & x \equiv 0 \ \text{ mód } 2 \\ \\ \frac{3x+1}{2} & x \equiv 1 \text{ mód } 2 \end{cases} \tag{2.2}$$

Si se denota por trayectoria de un número n a la sucesión $\Omega(n) = (n, C(n), C^2(n)...)$, y se toma por ejemplo $n = 43$, la trayectoria resultante sería:

$$\Omega(43) = (43, 130, 65, 196, 98, 49, 148, 74, 37, 112, 56, 28, 14, 7, 22, 11, 34,$$

$$17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1...).$$

Si en lugar de emplear $C(n)$, se calcula con la función $T(n)$, se puede observar que de esta forma se reducen las iteraciones a realizar, pues la trayectoria es:

$$\Omega(43) = (43, 65, 98, 49, 74, 37, 56, 28, 14, 7, 11, 17, 26, 13, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1, 2, 1, 2, 1...).$$

En la siguiente figura se representan gráficamente las trayectorias anteriores empleando la misma escala, para de esta forma apreciar mejor le ventaja numérica de emplear $T(n)$ en lugar de $C(n)$.

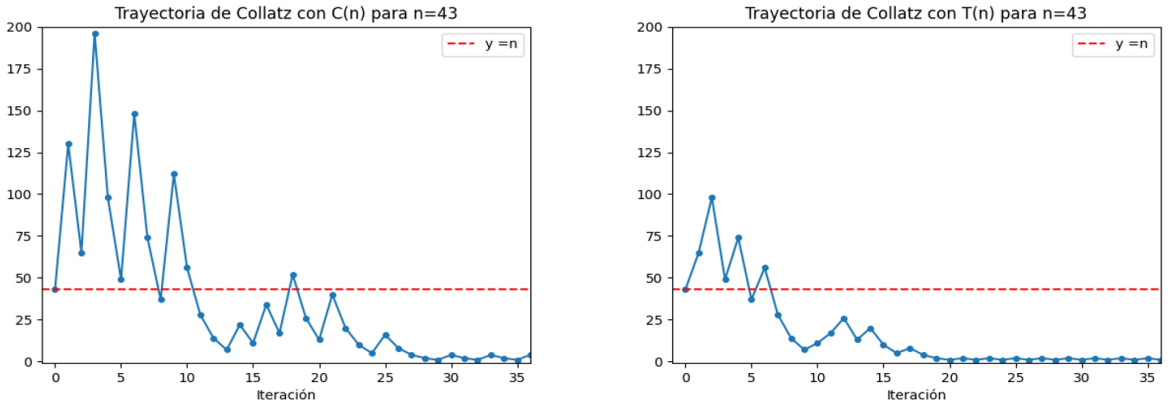

Figura 2.1: Las trayectorias de C y T para n=43.

Con esta notación, la conjetura de Collatz establece que, para cualquier número natural positivo n, si se sigue la regla de aplicar repetidamente la función $C(n)$, se llegará eventualmente al ciclo (1, 4, 2), denominado trivial, y en el caso en el que se aplique la función $T(n)$ se llega al ciclo (1, 2).

Un concepto importante a la hora de hablar de la conjetura de Collatz es el tiempo de parada. Aunque se tratará con más profundidad en el capítulo siguiente, es fácil de definir y ver algunas propiedades.

Definición 2.1. *Dado n un entero mayor que 1, se define tiempo de parada, $\sigma(n)$, como $\sigma(n) = \text{mín}\{k \in \mathbb{N} \mid T^k(n) < n\}$, es decir, el menor número k tal que al aplicar k veces la función $T(n)$, resulta un número menor que el inicial.*

En algunos casos, dependiendo de la congruencia de n para ciertos módulos 2^k, es posible determinar el valor del tiempo de parada como se demuestra a continuación.

Lema 2.2. *Dado $n \in \mathbb{N}$, $\sigma(n) \leq 8$ en los siguientes casos:*
$\sigma(n) = 1$ *si y solo si* $n \equiv 0 \mod 2$
$\sigma(n) = 2$ *si y solo si* $n \equiv 1 \mod 4$
$\sigma(n) = 4$ *si y solo si* $n \equiv 3 \mod 16$
$\sigma(n) = 5$ *si y solo si* $n \equiv 11,\ 23 \mod 32$
$\sigma(n) = 7$ *si y solo si* $n \equiv 7, 15,\ 59 \mod 128$
$\sigma(n) = 8$ *si y solo si* $n \equiv 39, 79, 95, 123, 175, 199,\ 219 \mod 256$

Demostración. A la hora de demostrar estos casos se irá observando que sucede en cada iteración.

Primera iteración:

$$T(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \equiv 0 \mod 2 \\ \frac{3n+1}{2} & \text{si } n \equiv 1 \text{ mód } 2 \end{cases}$$

Podemos observar que $T(n) < n$ si y solo si n es par, pues $\frac{3n+1}{2} > n$ para todo natural.

Segunda iteración: teniendo en cuenta que $\sigma(n) \neq 1$, es decir que $n \equiv 1$ mód 2 :

$$T^2(n) = T\left(\frac{3n+1}{2}\right) = \begin{cases} \frac{3n+1}{4} & \text{si } \frac{3n+1}{2} \equiv 0 \text{ mód } 2 \\ \frac{9n+5}{4} & \text{si } \frac{3n+1}{2} \equiv 1 \text{ mód } 2 \end{cases} = \begin{cases} \frac{3n+1}{4} & \text{si } n \equiv 1 \text{ mód } 4 \\ \frac{9n+5}{4} & \text{si } n \equiv 3 \text{ mód } 4 \end{cases}$$

De la misma forma que en el primer caso, podemos observar que $T^2(n) < n$ si y solo si $n \equiv 1$ mód 4.

Tercera iteración: teniendo en cuenta que $\sigma(n) \neq 1, 2$:

$$T^3(n) = T\left(\frac{9n+5}{4}\right) = \begin{cases} \frac{9n+5}{8} & \text{si } \frac{9n+5}{4} \equiv 0 \text{ mód } 2 \\ \frac{27n+19}{8} & \text{si } \frac{9n+5}{4} \equiv 1 \text{ mód } 2 \end{cases} = \begin{cases} \frac{9n+5}{8} & \text{si } n \equiv 3 \text{ mód } 8 \\ \frac{27n+19}{8} & \text{si } n \equiv 7 \text{ mód } 8 \end{cases}$$

Podemos ver que $T^3(n) > n$ en ambos casos, por tanto ningún número cumple que $\sigma(n) = 3$.

Cuarta iteración: teniendo en cuenta que $\sigma(n) \neq 1, 2, 3$:

$$T^4(n) = \begin{cases} T\left(\frac{9n+5}{8}\right) = \begin{cases} \frac{9n+5}{16} & \text{si } n \equiv 3 \text{ mód } 16 \\ \frac{27n+23}{16} & \text{si } n \equiv 11 \text{ mód } 16 \end{cases} \\ \\ T\left(\frac{27n+19}{8}\right) = \begin{cases} \frac{27n+19}{16} & \text{si } n \equiv 7 \text{ mód } 16 \\ \frac{81n+65}{16} & \text{si } n \equiv 15 \text{ mód } 16 \end{cases} \end{cases}$$

Podemos observar que en esta situación $T^4(n) < n$ si y solo si $n \equiv 3$ mód 16.

Quinta iteración: teniendo en cuenta que $\sigma(n) \neq 1, 2, 3, 4$:

$$T^5(n) = \begin{cases} T\left(\frac{27n+23}{16}\right) = \begin{cases} \frac{27n+23}{32} & \text{si } n \equiv 11 \text{ mód } 32 \\ \frac{81n+85}{32} & \text{si } n \equiv 27 \text{ mód } 32 \end{cases} \\ \\ T\left(\frac{27n+19}{16}\right) = \begin{cases} \frac{27n+19}{32} & \text{si } n \equiv 23 \text{ mód } 32 \\ \frac{81n+73}{32} & \text{si } n \equiv 7 \text{ mód } 32 \end{cases} \\ \\ T\left(\frac{81n+65}{16}\right) = \begin{cases} \frac{81n+65}{32} & \text{si } n \equiv 15 \text{ mód } 32 \\ \frac{243n+211}{32} & \text{si } n \equiv 31 \text{ mód } 32 \end{cases} \end{cases}$$

Podemos observar que $\sigma(n) = 5$ si y solo si $n \equiv 11$ *o* 23 mód 32.
Realizando el mismo proceso para más iteraciones, se llega al resto de relaciones. □

Se puede observar que, tal y como se mostró al principio del capítulo, el tiempo de parada de 43 empleando $T(n)$ es 5, coincidiendo con nuestro ejemplo, pues $43 \equiv 11 \mod 32$. Sin embargo, hay valores cuyos tiempos de parada no están cubiertos por el lema, como puede ser 59, cuyo tiempo de parada es 15, o 155 con tiempo de parada 40.

Cabe mencionar que el Lema 2.2 se podría extender para estudiar los números que tienen tiempo de parada fijo. Observando las congruencias obtenidas se puede ver que son siempre de la forma 2^k. Sin embargo, a la vista de los resultados, parece ser que cada dos valores de k se omite uno, pues para $k = 1, 2, 4, 5, 7, 8$ si tenemos tiempo de parada fijo, pero para $k = 3, 6$ no. Por tanto, podría conjeturarse que en nuestras congruencias no aparecerá 2^{3q}.

El interés de estudiar el tiempo de parada se debe a que, el hecho de que este sea finito para cualquier número natural es equivalente a nuestra conjetura inicial.

Conjetura 2.3. *Para todo n natural se cumple que $\sigma(n)$ es finito.*

Veamos que esta conjetura es equivalente a la conjetura de Collatz por doble implicación. Según esta última, para todo n natural existe un i tal que $T^i(n) = 1$, y por tanto se necesita que su tiempo de parada sea finito.

El recíproco se demuestra empleando inducción. Es claro que para $n \leq 4$ se cumple que el tiempo de parada es finito y la conjetura de Collatz es cierta, pues o bien se está directamente en el ciclo $(1, 2, 1, 2, ...)$, o si $n = 4$, entonces $(4, 2, 1, 2, 1, ...)$, o finalmente si $n = 3$, que entonces $\sigma(3) = 4$, es decir, en 4 iteraciones se toma o 1 o 2 y se alcanza el ciclo. Suponemos la conjetura de Collatz cierta para todo número natural menor o igual que n. Veamos que si $n + 1$ cumple que su tiempo de parada es finito, entonces iterando se obtiene el valor 1. Como $\sigma(n + 1) = h$ es finito, $T^h(n + 1) = s < n$, luego por la hipótesis de inducción existe i tal que $T^i(s) = 1$. Concluyendo que $T^{h+i}(n + 1) = 1$.

Otro concepto importante son las iteraciones necesarias para llegar a 1, pues de esta forma se alcanza el ciclo. En la siguiente figura se representan las iteraciones necesarias con T, tomando como valores iniciales los números del 1 al 100.

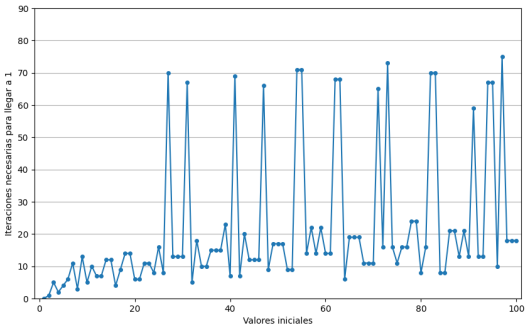

Figura 2.2: Iteraciones hasta llegar al ciclo con valores iniciales desde 1 hasta 100

Definición 2.4. *Dado n un entero mayor que 1 se define el tiempo total de parada, $\sigma_\infty(n)$, como $\sigma_\infty(n) = \text{mín}\{k \in \mathbb{N} \mid T^k(n) = 1\}$, es decir, el menor número k tal que al aplicar k veces la función $T(n)$, se alcanza el ciclo. Se denomina altura de n, $h(n)$, como $h(n) = \text{mín}\{k \in \mathbb{N} \mid C^k(n) = 1\}$, es decir, el mínimo entero k tal que $C^k(n) = 1$.*

Retomando el ejemplo para $n = 43$, se tiene que $\sigma_\infty(n) = 20$ y $h(n) = 29$.

A continuación, se enunciarán dos lemas ([20]) que establecen la diferencia entre emplear la función $C(n)$ y $T(n)$. El primer lema establece que las iteraciones de T son una subsecuencia de las iteraciones de C, con la propiedad de que cada número par en la secuencia de iteraciones de C puede ser emparejado con un número en la secuencia de iteraciones de T. El segundo lema establece que siendo k un número en la secuencia de iteraciones de C, o bien k o $\frac{k}{2}$ ocurren en la secuencia de iteraciones de T.

Lema 2.5. *Para todo $i, n, k > 0$, si $T^i(n) = k$, entonces existe algún $j \geq 0$ tal que $C^j(n) = 2k$, y $C^{j+1}(n) = k$.*

Demostración. Se demostrará por inducción en i. Para el caso base, con $i = 1$, si n es impar, entonces $T(n) = \frac{3n+1}{2}$, $C(n) = 3n+1$, y $C^2(n) = \frac{3n+1}{2}$. Si n es par, entonces $T(n) = \frac{n}{2}$, $C^0(n) = n$, y $C(n) = \frac{n}{2}$.

Supongamos que el lema se cumple para $i > 0$ y veamos si se cumple para $i + 1$. Dados $n, k > 0$. Sea $k_i = T^i(n)$, por la hipótesis de inducción existe algún $j_i \geq 0$ tal que $C^{j_i}(n) = 2k_i$, y $C^{j_i+1}(n) = k_i$. Nos encontramos ante dos casos, si k_i es impar o par. Si k_i es impar, entonces $T^{i+1}(n) = \frac{3k_i+1}{2} = k$, $C^{j_i+1}(n) = 3k_i + 1 = 2k$, y $C^{j_i+2}(n) = \frac{3k_i+1}{2} = k$. Si k_i es par, entonces $T^{i+1}(n) = \frac{k_i}{2} = k$, $C^{j_i}(n) = k_i = 2k$, y $C^{j_i+1}(n) = \frac{k_i}{2} = k$. □

Lema 2.6. *Para todo $j, n, k > 0$, si $C^j(n) = k$, entonces existe algún $i \geq 0$ tal que $T^i(n) = k$, o $T^i(n) = \frac{k}{2}$.*

Demostración. Se demostrará por inducción en j. Para el caso base, con $j = 1$, si n es impar, entonces $C(n) = 3n + 1$ es par, y por tanto, $C^2(n) = \frac{3n+1}{2} = T(n)$. Si n es par, entonces $C(n) = \frac{n}{2} = T(n)$.

Supongamos que el lema se cumple para $j > 0$. Dados $n, k > 0$ y sea $k_j = C^j(n)$. Por la hipótesis inductiva, existe algún $i_j \geq 0$ tal que $T^{i_j}(n) = k_j$, o $T^{i_j}(n) = \frac{k_j}{2}$. Hay dos casos posibles, que k_j sea par o impar. Si k_j es impar, entonces $C^{j+1}(n) = 3k_j + 1$ es par, y por tanto $C^{j+2}(n) = \frac{3k_j+1}{2} = T^{i_j+1}(n)$. Si k_j es par, entonces $C^{j+1}(n) = \frac{k_j}{2} = T^{i_j+1}(n)$. □

A partir de los resultados anteriores, puede comprobarse que $\sigma_\infty(n)$ es exactamente el número de divisiones entre 2 tomadas para alcanzar 1 mediante la función $C(n)$. Analizando las funciones $C(n)$ y $T(n)$ se tiene que si dos números n_1 y n_2 cumplen que $\sigma_\infty(n_1) = \sigma_\infty(n_2)$ entonces $h(n_1) = h(n_2)$ y recíprocamente, dos enteros positivos con igual altura tienen tiempo total de parada igual. Esto se debe a que, por lo visto anteriormente, se tiene que las iteraciones de T son una subsucesión de las de C, ahorrándose una iteración cuando el número es impar.

Otros conceptos interesantes que relacionan la función $C(n)$ con $T(n)$ son los siguientes:

$$MaxC(n) = \text{máx}\{C^k(n) \mid 0 \leq k \leq h(n)\} \text{ y } MaxT(n) = \text{máx}\{T^k(n) \mid 0 \leq k \leq \sigma_\infty(n)\}$$

Es decir, son los valores máximos de las trayectorias de la iteraciones para la función $C(n)$ y $T(n)$ respectivamente. Por ejemplo, $MaxC(43) = 196$ y $MaxT(43) = 98$.

Para mostrar la relación entre $MaxC(n)$ y $MaxT(n)$ es necesario tener en cuenta que si un valor ocurre en la secuencia de iteración de un número mayor que dos, entonces debe ocurrir antes de que las iteraciones lleguen a uno. Más formalmente, para todo $n > 2$, y para todo k, si existe algún $i \geq 0$ tal que $C^i(n) = k$, entonces existe algún $0 \leq j \leq h(n)$ tal que $C^j(n) = k$. Además, si existe algún $i \geq 0$ tal que $T^i(n) = k$, entonces existe algún $0 \leq j \leq \sigma_\infty(n)$ tal que $T^j(n) = k$.

Lema 2.7. *Si n es un número natural mayor que 2, entonces $MaxC(n) = 2 \cdot MaxT(n)$*

Demostración. Supongamos que $MaxT(n) = k$. Sea $i \leq \sigma_\infty(n)$ tal que $T^i(n) = k$, entonces, por el Lema 2.5, existe algún $j \geq 0$ tal que $C^j(n) = 2k$. Por el comentario anterior, se puede elegir $j \leq h(n)$. Por tanto, $MaxC(n) \geq 2 \cdot MaxT(n)$.

Supongamos ahora que $MaxC(n) = m$. Sea $j \leq h(n)$ tal que $C^j(n) = m$, entonces m es par, porque de lo contrario $C^{j+1}(n) = 3m + 1 > m$. Por el Lema 2.6, existe algún $i \geq 0$ tal que $T^i(n) = m$ o $T^i(n) = \frac{m}{2}$. Pero el primer caso es una contradicción, ya que entonces, por el Lema 2.5, habría algún $p \geq 0$ tal que $C^p(n) = 2m > m$. Así que debe ser que $T^i(n) = \frac{m}{2}$. Por el comentario anterior, se puede elegir $i \leq \sigma_\infty(n)$ y entonces se cumple la otra desigualdad. □

El tiempo de parada total varía, en general, en números consecutivos. En la Figura 2.2 se puede apreciar esta idea. Sin embargo, esto no sucede siempre, existen números consecutivos con igual tiempo total de parada. Por ejemplo, los valores iniciales 28, 29 y 30 tienen todos tiempo total de parada 13. Por otro lado, los números entre 98 y 102 alcanzan el ciclo en la iteración 25. Es decir, se han encontrado 5 números consecutivos con el mismo tiempo total de parada.

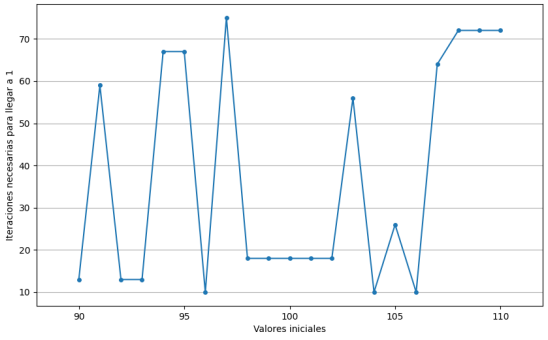

Figura 2.3: σ_∞ para valores iniciales desde desde 90 hasta 110.

En la siguiente tabla se muestra el número máximo de números consecutivos con el mismo tiempo de parada para distintos intervalos.

Intervalo	Valor inicial	Número de consecutivos	Tiempo total de parada	Altura
$[1, 10^3]$	943	7	26	36
$[10^3, 10^6]$	596 310	40	67	97
$[10^6, 10^9]$	722 067 240	176	128	190

Tabla 2.1: En la primera columna aparecen los intervalos de los valores iniciales. En la segunda columna aparece el valor inicial para el cual se obtiene que hay un número máximo de valores consecutivos (tercera columna) con un tiempo total de parada y altura igual. El tiempo total de parada y la altura se muestran en la cuarta y última columna respectivamente.

En la tabla anterior se puede ver que el máximo número de valores consecutivos entre 1 y 10^9 con tiempo total de parada igual son 176. Aumentando los valores iniciales ([23]), se pueden encontrar también 67 108 863 números consecutivos con la misma característica, que son los que se encuentran en el siguiente intervalo $[2^{1812} + 1, 2^{1812} + 2^{26} - 1]$.

Con respecto a este tema, se presentan los siguientes resultados ([8]). El siguiente lema se demostrará en el Capítulo 3, pues se necesitan conocimientos que se explicarán más adelante.

Lema 2.8. *Sea n un número natural con tiempo total de parada d, y altura h, entonces se tiene que*

$$C^h(n + r2^d) = 1 + r3^{h-d}.$$

Proposicion 2.9. *Si existe una k-tupla de enteros consecutivos $(n, n+1, \ldots, n+k-1)$ con el mismo tiempo total de parada, entonces existen infinitas k-tuplas de números consecutivos con igual altura y tiempo de parada.*

Demostración. Supongamos que existe una k-tupla de enteros consecutivos $(n, n+1, ..., n+k-1)$ todos con el mismo tiempo total de parada d y por tanto misma altura h. Para cada $r \geq 0$, se consideran los siguientes enteros consecutivos $n + r \cdot 2^d, ..., n + k - 1 + r \cdot 2^d$. Por el lema anterior se tiene que estos alcanzan el entero $1 + r \cdot 3^{h-d}$ después de h iteraciones. Sea $r = \frac{2^{3^{h-d-1}2n}-1}{3^{h-d}}$ para todo $n \geq 1$, como $2^{3^{h-d-1}2n} \equiv 1$ mód 3^{h-d}, entonces r es un entero y el número $1 + r \cdot 3^{h-d}$ es siempre una potencia de dos. Luego, los enteros consecutivos de la k-tupla $(n + r2^d, n + r2^d + 1, ..., n + r2^d + k - 1)$ tienen igual tiempo total de parada, y misma altura. □

De esta proposición se puede concluir que hay infinitas 67 108 863-tuplas tal que 67 108 863 números enteros consecutivos tengan el mismo tiempo de parada total y altura.

En relación a este resultado, se tiene el siguiente, que en cierta forma lo generaliza viendo como es posible encontrar enteros consecutivos que tengan el mismo valor en una iteración dada a partir de otros dos consecutivos con la misma propiedad.

Definición 2.10. *Sea n un número natural, se dice que n y $n+1$ se fusionan si $C^k(n) = C^k(n+1)$, con ambos teniendo el mismo número de divisiones por 2 en las primeras k iteraciones, y si ni n ni $n+1$ han alcanzado el valor 1 en la iteración k.*

Lema 2.11. *Si n y $n+1$ se fusionan en k iteraciones, entonces $2^k r + n$ y $2^k r + n + 1$, con $r \geq 1$, también se fusionan en k iteraciones.*

Demostración. Supongamos que n y $n+1$ se fusionan en n^* en k iteraciones con d divisiones por 2, entonces consideremos dos enteros consecutivos $2^k r + n$ y $2^k r + n + 1$, para $r \geq 1$. Después de k iteraciones, por el Lema 2.8 ambos se fusionan en un entero común $n^* + r2^{k-d}3^{k-d}$ con $k > d$. □

Las funciones de Collatz pueden generalizarse fácilmente tal y como se muestra a continuación.

Definición 2.12. *Sea $d \geq 2$ un número natural, $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ es una función de Collatz generalizada si es de la forma:*

$$f(x) = \frac{a_i x + b_i}{d} \text{ si } x \equiv i \text{ mód } d,\ 0 \leq i \leq d-1$$

con a_i y b_i enteros e $ia_i + b_i \equiv 0$ mód d para todo $0 \leq i \leq d-1$.

En efecto, la condición $ia_i + b_i \equiv 0$ mód d es necesaria y suficiente para que la expresión de la función anterior envíe enteros en enteros. Sea $x \in \mathbb{Z}$ tal que $x \equiv i$ mód d, entonces $x = kd+i$ para cierto $k \in \mathbb{Z}$. Entonces, $f(x) = \frac{a_i x + b_i}{d} = t \in \mathbb{Z}$ si y solo si $a_i(x+i-i)+b_i = dt$, o equivalentemente si $ia_i + b_i = dt + ia_i - a_i x = dt + (i-x)a_i$. Finalmente, teniendo en cuenta que $x - i = kd$, se demuestra que esto ocurre si y solo si, $ia_i + b_i$ es múltiplo de d para todo $0 \leq i \leq d-1$.

Ejemplo 2.13. *Una función de Collatz generalizada sería tomar $a_0 = 6$, $b_0 = 0$, $a_1 = 3$, $b_1 = 3$ y $d = 2$, es decir, multiplicar por 3 si el número inicial es par, o multiplicar por 3, sumar 3 y dividir entre 2 si el número es impar. Esta función, por como está definida, es creciente siempre. Con $n = 43$ se obtiene que la trayectoria es* $(43, 66, 198, 594, 1782, 5346, 16038, 48114, 144342, 433026...)$.

Dentro de las funciones generalizadas se encuentran las funciones de tipo relativamente primo, que deben cumplir que $mcd(a_0 a_1 ... a_{d-1}, d) = 1$. Observando la función anterior, se tiene que $mcd(6 \cdot 3, 2) = 2$. Por tanto, esta función generalizada no pertenece a este subconjunto. Por otro lado, analizando la función del problema $3x+1$ tenemos que $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, $a_1 = 3$, $b_1 = 1$ y $d = 2$, luego $mcd(3, 2) = 1$, y por tanto pertenece a las funciones de tipo relativamente primo.

Tomando un problema análogo, como por ejemplo:

$$T_5(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & x \equiv 0 \text{ mód } 2 \\ \frac{5x+1}{2} & x \equiv 1 \text{ mód } 2 \end{cases}$$

Para esta función se cumple también que $mcd(5,2) = 1$, sin embargo, para esta función se conjetura que tiene trayectorias divergentes. Luego parece que para ciertas funciones generalizadas se piensa que tienen trayectorias convergentes, mientras que para otras no. Sobre este tipo de situaciones existen diversas conjeturas como la que aparece a continuación de Matthews y Watts ([22]).

Conjetura 2.14. *Sea f una función de Collatz generalizada de tipo relativamente primo, entonces:*

1. *Si $|a_0a_1a_2...a_{d-1}| > d^d$ entonces $(T^k(n))_{k\geq 0}$ no alcanzará un ciclo para casi todo n natural.*
2. *Si $|a_0a_1a_2...a_{d-1}| < d^d$ entonces $(T^k(n))_{k\geq 0}$ alcanzará un ciclo para todo n natural.*
3. *El número de ciclos es finito.*
4. *Si la trayectoria $(T^k(n))_{k\geq 0}$ no alcanza un ciclo, entonces las iteraciones están distribuidas uniformemente* $\text{mód } d^\alpha$ *para cada $\alpha \geq 1$, es decir, para $0 \leq j \leq d^\alpha - 1$ se tiene que:*
$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \#\{K \leq N \mid T^K(n) \equiv j \text{ mód } d^\alpha\} = \frac{1}{d^\alpha}.$$

El caso $|a_0a_1a_2...a_{d-1}| = d^d$ no queda cubierto por la conjetura pues teniendo en cuenta la condición de relativamente primo, $mcd(a_0a_1...a_{d-1}, d) = 1$, no puede darse nunca.

Podemos observar que para $T_5(x)$ se tiene $|5 \cdot 1| > 2^2$, mientras que para la función de Collatz $T(x)$ se verifica $|3| < 2^2$, coincidiendo con la idea previamente mencionada.

Al comienzo del capítulo se representó la trayectoria para $n = 43$ con $C(n)$ y $T(n)$, a continuación se muestra empleando $T_5(n)$.

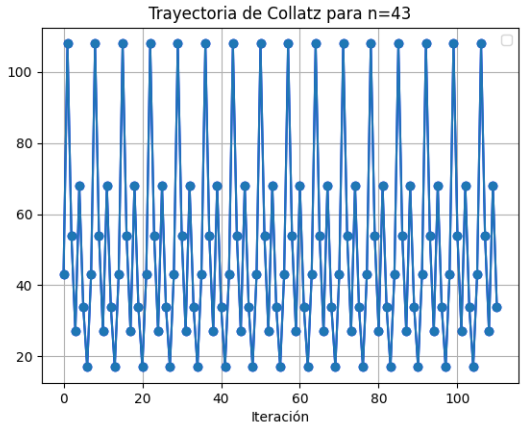

Figura 2.4: Trayectoria para $n = 43$ con $T_5(n)$

Observando esta gráfica podemos afirmar que con esta función se alcanza el ciclo $(43, 108, 54, 27, 68, 34, 17)$. Por tanto, con este valor inicial no podemos intuir que se cumpla

la conjetura anterior.

A continuación, se ha representado la trayectoria de $n = 7$ para 15 iteraciones, tanto con la función $T(n)$ como con $T_5(n)$.

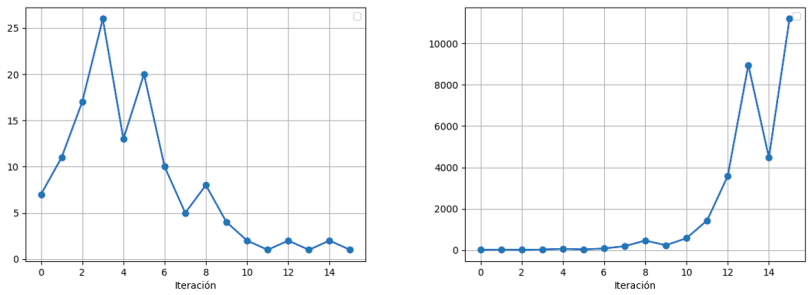

Figura 2.5: Trayectorias para $n = 7$ con $T(n)$ y $T_5(n)$

En la figura de la izquierda se puede observar como para $T(n)$ se alcanza el ciclo con 11 iteraciones. Sin embargo, el valor de la función $T_5(n)$ en la iteración 11 es 1 433, y sigue aumentado hasta superar 10 000 en la última iteración.

Otra variación de la función de Collatz que se puede realizar es extender la función $T(n)$ para los números enteros. Algunas trayectorias resultantes son las siguientes:

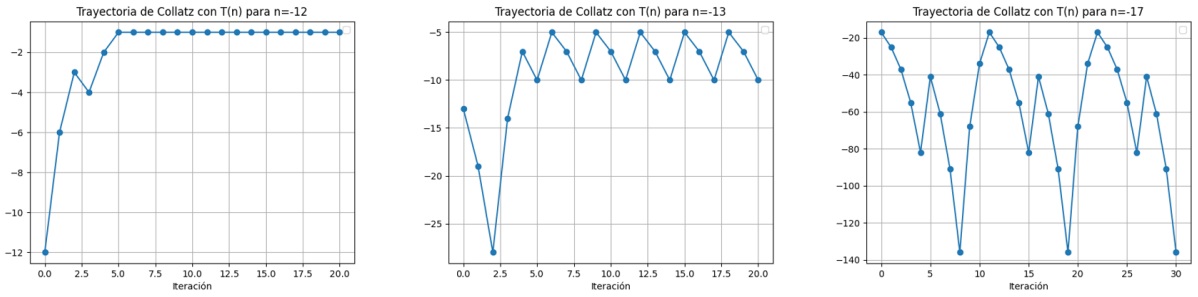

Figura 2.6: Trayectorias para $n = -12, -13$ y -17

Se puede observar que para estos valores iniciales se alcanzan ciclos distintos del $(1, 2)$. En efecto, se conjetura que extendiendo la función de Collatz a los números enteros, se tienen también los siguientes ciclos:

$$(-68, -34, -17, -25, -37, -55, -82, -41, -61, -91, -136),$$

$$(-1), (0) \text{ y } (-5, -7, -10).$$

Capítulo 3

Tiempo de parada

En este capítulo nos centraremos en hablar sobre el tiempo de parada, pues como se ha mencionado en el capitulo anterior, es un concepto útil a la hora de trabajar con la conjetura. Las principales referencias seguidas son [4], [17] y [28].

Previamente se van a definir conceptos que se emplearán posteriormente en resultados importantes.

Definición 3.1. *Sea $n > 1$ natural, se define como vector de paridad al vector $v(n) = (x_0(n), x_1(n), ...)$ donde para cada i entero no negativo, $x_i(n) \equiv T^i(n)$ mód 2. Se denomina vector de paridad k-truncado al vector de paridad hasta la iteración $k-1$, es decir, el vector de tamaño k dado por $v_k(n) = (x_0(n), x_1(n), ..., x_{k-1}(n))$.*

Por ejemplo, con los datos calculados previamente, se tiene que el vector de paridad de tamaño 5 para $n = 43$ es $v_5(43) = (1, 1, 0, 1, 0)$.

A continuación, se expresan los iterados en función de los vectores de paridad.

Teorema 3.2. *Para el k-ésimo iterado de n se cumple que dados:*

$$\lambda_k(n) = \frac{3^{x_0(n)+x_1(n)+...+x_{k-1}(n)}}{2^k}, \qquad \rho_k(n) = \sum_{i=0}^{k-1} x_i(n) \frac{3^{x_{i+1}(n)+...+x_{k-1}(n)}}{2^{k-i}},$$

se tiene que

$$T^k(n) = \lambda_k(n)n + \rho_k(n).$$

Demostración. Se demostrará por inducción.
Para $k = 1$,

$$T(n) = \frac{3^{x_0(n)}}{2}n + \frac{x_0(n)}{2}.$$

Si n es par, entonces $x_0(n) = 0$, y por tanto $\lambda_1(n) = \frac{1}{2}$, $\rho_1(n) = 0$ y se cumple que $T(n) = \lambda_1(n)n + \rho_1(n) = \frac{n}{2}$. Por otro lado, si n impar entonces $x_0(n) = 1$ y por tanto $\lambda_1(n) = \frac{3}{2}$, $\rho_1(n) = \frac{1}{2}$, luego $T(n) = \frac{3}{2}n + \frac{1}{2}$, obteniendo la expresión de la función T.

Se supone la igualdad cierta hasta $k-1$. Para verificar que se cumple para k, se tendrán en cuenta dos casos, si $T^{k-1}(n)$ es par o impar.
Si $T^{k-1}(n) = x_{k-1}(n) \equiv 0$ mód 2, entonces

$$T^k(n) = T(T^{k-1}(n)) = T(\lambda_{k-1}(n)n + \rho_{k-1}(n)) = \frac{\lambda_{k-1}(n)n + \rho_{k-1}(n)}{2}.$$

Para que se cumpla $T^k(n) = \lambda_k(n)n+\rho_k(n)$, hay que probar que $\frac{\lambda_{k-1}(n)}{2} = \lambda_k(n)$ y $\frac{\rho_{k-1}(n)}{2} = \rho_k(n)$, que es trivial teniendo en cuenta que $x_{k-1}(n) \equiv 0$ mód 2.
Si $T^{k-1}(n) = x_{k-1}(n) \equiv 1$ mód 2, entones

$$T^k(n) = T(T^{k-1}(n)) = \frac{3(\lambda_{k-1}(n)n + \rho_{k-1}(n)) + 1}{2}.$$

Para que se cumpla $T^k(n) = \lambda_k(n)n + \rho_k(n)$, hay que probar que $\frac{3\lambda_{k-1}(n)}{2} = \lambda_k(n)$ y $\frac{3\rho_{k-1}(n)+1}{2} = \rho_k(n)$, que de nuevo se verifica empleando $x_{k-1}(n) \equiv 1$ mód 2. □

Se pueden expresar las iteraciones de la función $C(n)$ de forma similar ([9]).

Teorema 3.3. *Sea $C_k(n)$ la secuencia de Collatz formada por los primeros k términos para n. Sea h y d la altura y el tiempo total de n respectivamente. Y sea d_i el número de términos pares consecutivos que siguen inmediatamente al i-ésimo término impar. Sea d_0 el número de términos pares que preceden al primer término impar.*

Para el k-ésimo iterado de n se cumple que dados:

$$\lambda_k^C(n) = \frac{3^{h-d}}{2^{k-h+d}}, \qquad \rho_k^C(n) = \sum_{i=1}^{h-d} \frac{3^{h-d-i}}{2^{d_i+\ldots+d_{h-d}}},$$

se tiene que

$$C^k(n) = \lambda_k^C(n)n + \rho_k^C(n).$$

Los valores $\lambda_k(n)$ y $\rho_k(n)$ son precisamente los valores que aparecen en la demostración del Lema 2.2. Por tanto, $\lambda_k(n)$ está íntimamente relacionado con el tiempo de parada.

Definición 3.4. *Se denomina coeficiente del tiempo de parada, $\omega(n)$, al menor entero positivo k tal que $\lambda_k(n) < 1$.*

Ejemplo 3.5. *Para $n = 5$ se tiene que $x_0(n) = 1$, $x_1(n) = 0$, por tanto $\lambda_1(n) = \frac{3}{2} > 1$ y $\lambda_2(n) = \frac{3}{2^2} < 1$, luego $\omega(n) = 2$.*

Por otro lado, tomando $n = 7$ se tiene que $\omega(n) = 7$ pues la primera iteración k en la que $\lambda_k(n)$ es menor que 1 es $k = 7$, $\lambda_7(n) = \frac{3^4}{2^7}$.

Teniendo en cuenta que $T^k(n) = \lambda_k(n)n + \rho_k(n)$ y la Definición 2.1, se tiene que

$$\omega(n) \leq \sigma(n).$$

Usando la expresión $T^k(n)$ se podría simplificar la demostración del Lema 2.2. Si $n \equiv 0$ mód 2, ya se ha visto que $\sigma(n) = 1$. En este caso, $\lambda_1(n) = \frac{1}{2} < 1$ y se tiene que $\omega(n) = \sigma(n)$. Para $n \equiv 1$ mód 4, se sabe que $\sigma(n) = 2$, en este caso $\lambda_1 = \frac{3}{2} > 1$, pero $\lambda_2 = \frac{3}{4} < 1$, luego $\omega(n) = 2$.

Proposicion 3.6. *Sea k un número natural, $T^k(n) < n$ si y solo si $\frac{\rho_k(n)}{1-\lambda_k(n)} < n$.*

Demostración. Es directo empleando la expresión para $T^k(n)$ del Teorema 3.2. □

A continuación, se demostrarán algunos resultados en relación a los vectores de paridad.

Teorema 3.7. *Sea $v_k(n)$ vector de paridad k-truncado. Entonces se satisface $v_k(n) = v_k(m)$ si y solo si $n \equiv m$ mód 2^k.*

Demostración. Se demostrará por doble implicación. Supongamos primero que $v_k(n) = v_k(m)$, luego se cumple que $\lambda_k(n) = \lambda_k(m)$ y $\rho_k(n) = \rho_k(m)$, y por tanto

$$T^k(n) - T^k(m) = \lambda_k(n)n - \lambda_k(m)m = \lambda_k(n)(n-m) = \frac{3^{x_0(n)+x_1(n)+...+x_{k-1}(n)}}{2^k}(n-m),$$

como este valor debe ser un entero, entonces se debe cumplir que $n - m \equiv 0$ mód 2^k pues el numerador es impar.

Por otro lado, si $n \equiv m$ mód 2^k, entonces se va a demostrar por inducción en k que $v_k(n) = v_k(m)$, o lo que es lo mismo, que $x_i(n) = x_i(m)$ para todo $0 \leq i \leq k$. Si $k = 0$, entonces es inmediato pues $v_0(t) = t$ mód 2. Supongamos ahora que para todo entero i menor o igual que k, $x_i(n) = x_i(m)$ y por tanto $v_k(n) = v_k(m)$. Veamos que $v_{k+1}(n) = v_{k+1}(m)$. Para ello sólo hay que comprobar si $x_{k+1}(n) = x_{k+1}(m)$. Por definición, $x_{k+1}(n) \equiv T^{k+1}(n)$ mód 2, y como $\lambda_{k+1}(n)$ y $\rho_{k+1}(n)$ dependen únicamente de $x_r(n)$ con $1 \leq r \leq k$, aplicando la hipótesis de inducción, se tiene que $\lambda_{k+1}(n) = \lambda_{k+1}(m)$, y $\rho_{k+1}(n) = \rho_{k+1}(m)$. Por tanto, se tiene $x_{k+1}(n) - x_{k+1}(m) \equiv T^{k+1}(n) - T^{k+1}(m) = \lambda_{k+1}(n)(n-m) \equiv 0$ mód 2^k. □

El teorema anterior puede enunciarse de otra forma.

Corolario 3.8. *Sean k, n y h tres números naturales fijos, entonces*

$$\#\{v_k(n) = (x_0(n), x_1(n), ..., x_{k-1}(n)) \mid n = h, h+1, ..h+2^k-1\} = 2^k.$$

Es decir, dados n_0 y n_1 dentro de una lista de 2^k valores consecutivos, se cumple que $v_k(n_0) \neq v_k(n_1)$.

Demostración. Si $n_0, n_1 \in \{h, h+1, ..., h+2^k-1\}$ con $n_0 \neq n_1$ entonces $n_0 \neq n_1$ mód 2^k y por el teorema anterior, $v_k(n_0) \neq v_k(n_1)$. □

Una vez vistos estos resultados, es momento de demostrar el Lema 2.8, que dice lo siguiente: Sea n un número natural con tiempo total de parada d, y altura h, entonces se tiene que

$$C^h(n + r2^d) = 1 + r3^{h-d}.$$

Demostración. De modo similar a la demostración del Teorema 3.7, es posible ver que si $m \equiv n$ mód 2^d entonces los vectores de paridad, en este caso de la función C, coinciden hasta la posición h. Teniendo en cuenta esto, se tiene que

$$\lambda_h^C(n + r2^d) = \lambda_h^C(n) \text{ y } \rho_h^C(n + r2^d) = \rho_h^C(n).$$

Luego por el Teorema 3.3 se tiene que

$$C^h(n+r2^d) = \lambda_h^C(n+r2^d)(n+r2^d) + \rho_h^C(n+r2^d) = \lambda_h^C(n)n + \rho_h^C(n) + \lambda_h^C(n)r2^d.$$

Como h es la altura, entonces $C^h(n) = \lambda_h^C(n)n + \rho_h^C(n) = 1$, luego $C^h(n+r2^d) = 1 + \lambda_h^C(n)r2^d$. Y por definición de $\lambda_h^C(n) = \frac{3^{h-d}}{2^d}$, se cumple la igualdad. □

Terras ([28]) consideraba que analizar el número de iteraciones necesarias para alcanzar el ciclo era una tarea dura, y por ello analizó el tiempo de parada. Demostró que casi todos los enteros tienen tiempo de parada finito, y en ello se trabajará en el resto del capítulo. En la Definición 3.1 se expresa el vector de paridad en función de n. Sin embargo, la idea de Terras fue justo la contraria, expresar n en función de su vector de paridad v, y para ello se emplearán los siguientes resultados.

Teorema 3.9. *La función $Q_k(n) : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}$ definida como*

$$Q_k(n) = \sum_{i=0}^{k-1} x_i(n)2^i$$

es periódica con periodo 2^k. La función inducida $\bar{Q}_k : \mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}$ es una permutación, y su orden es una potencia de dos.

Demostración. Demostrar que $Q_k(n)$ es periódica de periodo 2^k es equivalente a ver que $v_k(m) = v_k(m+2^k)$ para todo m natural. Sea $A_m = \{v_k(n) \mid m \leq n < m+2^k\}$ y $B_m = \{v_k(n) \mid m < n \leq m+2^k\}$. Por el corolario anterior, $|A_m| = |B_m| = 2^k$ y ambos conjuntos son iguales a todas las tuplas de tamaño k sobre $\mathbb{F}_2$. Además, $A_m \cap B_m = \{v_k(n) \mid m < n < m+2^k\}$ tiene cardinal $2^k - 1$ por el Corolario 3.8. Entonces $A_m \backslash (A_m \cap B_m) = v_k(m)$ y $B_m \backslash (A_m \cap B_m) = v_k(m+2^k)$ concluyendo así que ambos elementos son el mismo y por tanto la función es periódica de periodo 2^k.

Por otro lado veamos que $\bar{Q}_k$ es una permutación con orden una potencia de dos. Como $Q_k(n)$ es biyectiva en $[0, 2^k-1]$, induce una aplicación biyectiva $\bar{Q}_k : \mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}$ tal que $\bar{Q}_k(n) = Q_k(n)$ cumpliendo $Q_k(n) = \bar{Q}_k(n \text{ mód } 2^k)$, y por ser una biyección en un conjunto finito, entonces es una permutación.

Veamos ahora que es una permutación de orden una potencia de 2. Lo probamos por inducción en k y para ello primero veamos que se cumple para $k = 1$ y $k = 2$. Si k=1 entonces $\bar{Q}_1(0) = 0$ y $\bar{Q}_1(1) = 1$ luego es la identidad y es de orden 1. Si k=2 entonces $\bar{Q}_2(0) = 0$, $\bar{Q}_2(1) = 1$, $\bar{Q}_2(2) = 2$ y $\bar{Q}_2(3) = 3$, por tanto vuelve a tener orden 1 al ser la identidad. Al tratarse de una demostración por inducción, bastaría con haberlo probado para k=1, pero el caso k=2 también es interesante por si mismo al ser los únicos con orden exactamente 1.

Supongamos que para cierto k se cumple que $\bar{Q}_k$ tiene orden una potencia de 2 y veamos que se cumple para $k+1$. Sea $(r_1, r_2, ..., r_t)$ un ciclo en el que descompone la permutación $\bar{Q}_k$. Veamos como se comporta este ciclo en $\mathbb{Z}/2^{k+1}\mathbb{Z}$ por $\bar{Q}_{k+1}$. En primer

lugar $\bar{Q}_{k+1}(r_i) = \sum_{j=0}^{k} x_j(r_i)2^j \equiv \bar{Q}_k(r_i)$ mód 2^k, es decir, $\bar{Q}_{k+1}(r_i) \in \{\bar{Q}_k(r_i), \bar{Q}_k(r_i)+2^k\}$. Como $r_i + 2^k \equiv r_i$ mód 2^k, se tiene también que $\bar{Q}_{k+1}(r_i + 2^k) \in \{\bar{Q}_k(r_i), \bar{Q}_k(r_i) + 2^k\}$ y teniendo en cuenta que $\bar{Q}_{k+1}$ es una permutación, entonces $\bar{Q}_{k+1}(r_i + 2^k) \neq \bar{Q}_{k+1}(r_i)$. Por tanto se cumple que

$$\bar{Q}_{k+1}(r_i + 2^k) \equiv \bar{Q}_{k+1}(r_i) + 2^k \text{ mód } 2^{k+1}.$$

Teniendo esto en cuenta y tomando el ciclo $(r_1, r_2, ..., r_t)$, a través de $\bar{Q}_{k+1}$ entonces r_1 pasa a valer r_2 o r_2+2^k, sea $s_2 = \bar{Q}_{k+1}(r_1)$. En general, la imagen de r_i por $\bar{Q}_{k+1}$ es r_{i+1} o $r_{i+1}+2^k$ hasta que o se llegue a r_t y entonces $\bar{Q}_{k+1}(r_t)$ sea r_1 o r_1+2^k, o si se llega a r_t+2^k que tiene las mismas opciones. Si la opción es r_1, entonces el ciclo $(r_1, r_2, ...r_t)$ se transforma por $\bar{Q}_{k+1}$ en $(r_1, s_2, ..., s_t)$ con $s_t \in \{r_t, r_t + 2^k\}$, y es un ciclo de la descomposición de $\bar{Q}_{k+1}$ y tiene el mismo orden que $(r_1, ..., r_t)$. Si en cambio la opción es $r_1 + 2^k$, entonces $\bar{Q}_{k+1}(r_1 + 2^k)$ pertenece a $\{\bar{Q}_{k+1}(r_1), \bar{Q}_{k+1}(r_1) + 2^k\}$, siendo la opción que no fue para $\bar{Q}_{k+1}(r_1)$. Se repite este proceso sucesivamente hasta que $\bar{Q}_{k+1}^{2t}(r_1) = r_1$. Es decir, para $\bar{Q}_{k+1}$ se tiene en su descomposición un ciclo de longitud el doble del inicial. □

Un conjunto importante a la hora de hablar de vectores de paridad es el dado por el número de enteros con vector de paridad fijo, es decir, dado $v \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k$, sea

$$S(v) = \{n \in \mathbb{N} \mid v = (x_0(n), ..., x_{k-1}(n))\}.$$

Corolario 3.10. *Sea $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $v \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k$. Sea $n_0(v) = (\bar{Q}_k)^{-1}\left(\sum_{i=0}^{k-1} x_i 2^i\right)$ mód 2^k entonces*

$$S(v) = \{n_0(v) + 2^k i \mid i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

Es decir, $n_0(v)$ es el mínimo entero con vector de paridad k-truncado v.

Demostración. En primer lugar, por construcción, es evidente que $v_k(n_0(v)) = v$, pues $\bar{Q}_k(n_0(v)) = \sum_{i=0}^{k-1} x_i 2^i$ mód 2^k.

Sea $L(v) = \{n_0(v) + 2^k i \mid i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$, se va a demostrar por doble inclusión que $S(v) = L(v)$. Primero se demostrará que $L(v) \subseteq S(v)$. Si $n \in L(v)$, entonces $n = n_0(v)+2^k i$ para algún $i \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ y por el Teorema 3.7, $v_k(n) = v_k(n_0(v)) = v$ y por tanto $n \in S(v)$. Por otro lado, si $n \in S(v)$, como $v_k(n_0(v)) = v$, de nuevo por el Teorema 3.7, $n \equiv n_0(v)$ mód 2^k y $n = n_0(v) + 2^k i$ para algún $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Por lo tanto, $n \in L(v)$ y se concluye que $S(v) = L(v)$. □

Definición 3.11. *Sea $\gamma = \log_3 2$. Un vector de paridad k-truncado $v_k = (x_0, x_1, ..., x_{k-1})$ se dice admisible si*

$$x_0 + x_1 + ... + x_{i-1} > i\gamma \text{ para todo } 1 \leq i \leq k-1 \quad y \quad x_0 + x_1 + ... + x_{k-1} < k\gamma.$$

Se denomina vector preadmisible a v_k si cumple las desigualdades para $1 \leq i \leq k-1$.

Ejemplo 3.12. *Tomando $n = 23$, se tiene que su trayectoria empleando la función $T(n)$ es $(23, 35, 53, 80, 40, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1...)$, por tanto $v_5(23) = (1, 1, 1, 0, 0)$. Veamos si este*

vector es admisible o no. Para i desde 1 a 4 se cumple que, $1 > 1 \cdot \gamma$, $1 + 1 > 2 \cdot \gamma$, $1 + 1 + 1 > 3 \cdot \gamma$, $1 + 1 + 1 + 0 > 4 \cdot \gamma$, *y además,* $1 + 1 + 1 + 0 + 0 < 5 \cdot \gamma$, *cumpliendo por tanto las condiciones de ser vector admisible. Sin embargo, si tomamos* $v_4(43) = (1, 1, 0, 1)$, *para* $k = 4$ *se tiene* $1 + 1 + 0 + 1 > 4 \cdot \gamma$, *es decir, falla en la última desigualdad, por tanto no es un vector admisible pero si es preadmisible.*

Se denominan vectores preadmisibles porque añadiendo términos al vector se puede crear un vector de dimensión mayor, pero admisible. Sin embargo, un vector admisible no será prefijo de otro admisible.

Relacionando el coeficiente de parada, $\omega(n)$, con la admisibilidad de los vectores de paridad se llega al siguiente teorema.

Teorema 3.13. *El conjunto de enteros con coeficiente de parada k son aquellos con congruencia* $n \bmod 2^k$ *para los cuales hay un vector admisible* v *de longitud k con* $n = n_0(v)$.

Demostración. Sea $\lambda_k(v) = \frac{3^{x_0+x_1+\ldots+x_{k-1}}}{2^k}$, entonces por ser v admisible se cumple que $\lambda_k(v) < \frac{3^{k\gamma}}{2^k} = 1$, y $\lambda_i(v) > 1$ para $1 \leq i \leq k-1$. Por tanto, se verifica que $\omega(n) = k$. □

Ejemplo 3.14. *Sea el coeficiente de parada igual a 2, entonces hay que buscar un vector de paridad admisible de longitud 2. Teniendo en cuenta la Definición 3.11 entonces* $x_0 > \gamma$ *y* $x_0 + x_1 < 2\gamma$. *Luego* $x_0 = 1$ *y* $x_1 = 0$. *Por tanto, se debe cumplir que* $n \equiv 1 \bmod 2$ *y* $\frac{3n+1}{2} \equiv 0 \bmod 2$. *Concluyendo así que* $n \equiv 1 \bmod 4 = 2^2$, *tal y como señalaba el Lema 2.2 para el tiempo de parada. Si por otro lado el coeficiente de parada es 5, entonces hay dos opciones para que el vector de paridad de longitud 5 sea admisible. Si* $v_5 = (1, 1, 1, 0, 0)$, *que con cálculos directos empleando la definición de la función* $T(n)$, *se llega a que es lo mismo que* $n \equiv 23 \bmod 32 = 2^5$, *o si* $v_5 = (1, 1, 0, 1, 0)$, *equivalente a que* $n \equiv 11 \bmod 32 = 2^5$. *En ambos casos estos resultados son acordes al Lema 2.2, donde el tiempo de parada para estas congruencias era exactamente 5. Sin embargo, en este enunciado no se cubría la posibilidad de que el tiempo de parada fuese 3. Veamos si en este caso podría darse que el coeficiente de parada sea 3. Para esto debe encontrarse un vector de paridad admisible de longitud 3, es decir, se debe cumplir* $x_0 > \gamma$, $x_0 + x_1 > 2\gamma$ *y* $x_0 + x_1 + x_2 < 3\gamma$. *Para las dos primeras desigualdades se debe cumplir* $x_0 = x_1 = 1$, *impidiendo así que se cumpla la última desigualdad. Concluyendo que no se pueden encontrar números congruentes con n módulo* 2^3 *con coeficiente de parada 3.*

Para que existan valores con coeficiente de parada k, por el Teorema 3.13 se necesita que $x_0 + x_1 + \ldots + x_{i-1} > i\gamma$ para $1 \leq i \leq k-1$ y $x_0 + x_1 + \ldots + x_{k-1} < k\gamma$, es decir, encontrar un vector de paridad k-truncado admisible. Si $k = 6$ entonces necesitamos que suceda al mismo tiempo que $x_0 + x_1 + \ldots + x_4 > 5\gamma \approx 3.1546$ y $x_0 + x_1 + \ldots + x_5 < 6\gamma \approx 3.7855$, y esto es imposible porque x_5 es 0 o 1.

Desarrollando esta idea, tendría sentido fijarse en los múltiplos de γ y ver cuándo hay dos múltiplos consecutivos con la misma parte entera. Pues si esto sucede, entonces no se podrá encontrar un vector admisible como ocurre en el caso de k=6. Los múltiplos de γ son: 0.63092975, 1.26185951, 1.89278926, 2.52371901, 3.15464877, 3.78557852, 4.41650828, 5.04743803...Observando los múltiplos se puede ver que, tal y como se ha demostrado

previamente, como $\lfloor 2\gamma \rfloor = \lfloor 3\gamma \rfloor$, si $k = 3$ sucede lo mismo. De hecho, sucede para las siguientes k:

$$3, 6, 9, 11, 14, 17, 19, 22, 25, 28, 30, 33, 36, 38, 41, 44, 47, 49...$$

Demostrando así que no hay enteros con coeficiente de parada 3,6,9,11... Intentando buscar una relación entre las k, se tiene que las distancias son siempre 2 o 3. De hecho, son: 3, 3, 2, 3, 3, 2, 3, 3, 3, 2, 3, 3, 2, 3, 3, 3... Esto se debe a que no puede haber dos enteros consecutivos que fallen, pues $2\gamma > 1$ y por tanto, no existen tres valores k, $k+1$ y $k+2$ con la misma parte entera $\lfloor k\gamma \rfloor$. Asimismo, se establece que al menos uno de cada tres consecutivos falla. Dado que $1/3 < \gamma < 2/3$, si se divide cada intervalo $[n, n+1]$ en tres partes, si $k\gamma$ está entre $\lfloor k\gamma \rfloor$ y $\lfloor k\gamma \rfloor + \frac{1}{3}$, entonces $\lfloor (k+1)\gamma \rfloor = \lfloor k\gamma \rfloor$, lo que implica que $k+1$ falla (no hay vector admisible de longitud $k+1$). Si $k\gamma$ está entre $\lfloor k\gamma \rfloor + \frac{1}{3}$ y $\lfloor k\gamma \rfloor + \frac{2}{3}$, entonces $\lfloor (k+2)\gamma \rfloor = \lfloor (k+1)\gamma \rfloor$, lo que implica que $k+2$ falla. Si $k\gamma$ está entre $\lfloor k\gamma \rfloor + \frac{2}{3}$ y $\lfloor k\gamma \rfloor + 1$, entonces $\lfloor (k+2)\gamma \rfloor = \lfloor (k+3)\gamma \rfloor$, y por tanto $k+3$ falla.

A continuación se establecerá la relación entre el tiempo de parada, $\sigma(n)$, y los vectores de paridad.

Teorema 3.15. *Sea $n = n_0(v)$ para un vector v de longitud k. Si v es admisible, existe M (dependiendo de k y de v) tal que si $m > M$ y $m \equiv n$ mód 2^k, entonces m tiene tiempo de parada k. Si v es no admisible, entonces solo un número finito de enteros congruentes con n mód 2^k tienen tiempo de parada k.*

Demostración. Si v es admisible entonces $x_0 + x_1 + ... + x_{k-1} = \lfloor k\gamma \rfloor$, pues la suma es un número entero y debe verificarse que $x_0 + x_1 + ... + x_{k-1} < k\gamma$ y $x_0 + x_1 + ... + x_{k-2} > (k-1)\gamma$. Además, se cumple que

$$T^i(n) \geq \frac{3^{x_0+x_1+...+x_{i-1}}}{2^i} n \geq n \text{ para } 1 \leq i \leq k-1,$$

por tanto, los elementos de $S(v)$ tienen tiempo de parada mayor o igual que cierto k. Sea $\epsilon_k = 1 - \frac{3^{\lfloor k\gamma \rfloor}}{2^k}$ siendo $\lfloor x \rfloor$ el mayor entero menor que x. Si v es admisible, se cumple que

$$\epsilon_k = 1 - \frac{3^{x_0+x_1+...+x_{k-1}}}{2^k} = 1 - \lambda_k(v).$$

Esto es un abuso de notación, $\lambda_k(v) = \frac{3^{x_0+x_1+....x_{k-1}}}{2^k}$. De la misma forma, se escribirá $\rho_k(v) = \rho_k(n)$.

Sea $m \equiv n$ mód 2^k, por el Corolario 3.10, $m \in S(v)$ y por tanto tiene tiempo de parada al menos k, pues del Teorema 3.13 se tiene que $\omega(m) = k$ y como se indicó tras la definición del coeficiente de parada, $\omega(m) \leq \sigma(m)$. Como v admisible, se puede escribir la iteración k-ésima de la función de Collatz como

$$T^k(m) = \lambda_k(m)m + \rho_k(m) = \rho_k(m) - \epsilon_k m + m = m + (\rho_k(v) - \epsilon_k m).$$

Si

$$m > M = \frac{\rho_k(v)}{\epsilon_k},$$

entonces $\rho_k(v) - \epsilon_k m < 0$ y por tanto $T^k(m) < m$, con lo que el tiempo de parada es k y en este caso $\omega(m) = \sigma(m)$.

Por otro lado, si v no es admisible, entonces hay dos situaciones posibles, que algún vector truncado de v, $(x_0, ...x_i)$ con $i < k-1$, sea admisible o no. Para que no haya vector truncado de v que sea admisible, debe cumplirse que $(x_0 + ... + x_{i-1}) > i\gamma, 1 \leq i \leq k-1$. En este caso se tendría que $\lambda_k(v) > 1$, luego $T^k(n) > n$ para todo n en $S(v)$, y por tanto ningún elemento tendría tiempo de parada menor o igual que k. En el otro caso, si existe un vector inicial de v admisible, es decir, $w = (x_0, ..., x_i)$ con $i < k-1$ admisible, entonces se tendría que $S(v) \subseteq S(w)$ y por tanto, por lo expuesto anteriormente, cuando $m \in S(w)$ es suficientemente grande (mayor que $\frac{\rho_i(x_0,x_1,...x_i)}{\epsilon_i}$), su tiempo de parada es $i+1 < k$ y solo para los números menores que M podría ser exactamente k. □

Suponiendo que el tiempo de parada de n es 3, previamente se ha establecido que no hay un vector de longitud 3 que sea admisible. Por tanto, nos encontramos en la segunda parte del teorema enunciado anteriormente. Ahora procedamos a examinar cómo se aplica la demostración de este. Los vectores de paridad con los que se va a trabajar pertenecen a $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$, por lo tanto hay 8 opciones posibles. Para cada una de las opciones posibles puede suceder que no haya un vector truncado admisible, y que entonces el tiempo de parada sea mayor que k. Y la otra opción es que haya un vector truncado que si sea admisible, donde entonces el tiempo de parada es menor que k, y solo si el número es menor que $M = \frac{\rho_i(v)}{\epsilon_i}$ podría ser k. Por tanto, tendríamos solo un número finito de posibilidades de tiempo de parada 3. Veamos qué sucede con estas 8 opciones de vector:

Con (0,0,0), (0,0,1), (0,1,1), (0,1,0) se tiene que $w = (0)$ es admisible y $n_0((0)) = 0$. Por tanto, por el Teorema 3.15, si $n > 0$ y $n = 0$ mód 2 entonces n tiene tiempo de parada 1. Por otro lado, si el vector de paridad es (1,0,0) o (1,0,1), entonces $w = (1,0)$ es admisible y $n_0((1,0)) = 1$, $\epsilon_2 = 1/4$ y $\rho_2(w) = 1/4$. Por el Teorema 3.15, Si $n > 1$ y $n \equiv 1$ mód 4 entonces el tiempo de parada es 2 (para $n = 1$, no tiene sentido definir el tiempo de parada pues nunca $T^k(1) < 1$). Por último, para (1,1,0) y (1,1,1) no hay vector truncado w admisible, luego para ningún n se cumple que el tiempo de parada sea 3.

Si $k = 6$, entonces tenemos 64 opciones posibles de vector de paridad. 32 de esos vectores empiezan por 0, y por tanto tienen tiempo de parada 1. Para otros 16 vectores se tiene que $w = (1,0)$ es un vector truncado admisible, y como se vio en el caso de $k = 3$, si $n > 1$ y $n \equiv 1$ mód 4 entonces el tiempo de parada es 2. Para otros 4 vectores se cumple que el vector truncado $w = (1,1,0,0)$ es admisible. Por el Teorema 3.15, como $n_0(w) = 3$, $\epsilon_4 = \frac{5}{16}$ y $\rho_4(w) = \frac{5}{16}$, entonces si $n > 1$ y $n \equiv 3$ mód 16 el tiempo de parada es 4. Para (1,1,0,1,0,0) y (1,1,0,1,0,1) se tiene que $w = (1,1,0,1,0)$ es admisible. Luego como $n_0(w) = 11$, $\epsilon_5 = \frac{5}{32}$ y $\rho_5(w) = \frac{23}{32}$, entonces si $n > \frac{23}{5} = 4.6$ y $n \equiv 11$ mód 32 el tiempo de parada es 5. Por último, para (1,1,1,0,0,0) y (1,1,1,0,0,1) se tiene que $w = (1,1,1,0,0)$ es admisible y que $n_0(w) = 23$, $\epsilon_5 = \frac{5}{32}$ y $\rho_5(w) = \frac{19}{32}$. Por tanto, si $n > \frac{19}{5} = 3.8$ y $n \equiv 23$ mód 32 el tiempo de parada es 5. Para los otros 8 vectores de paridad no hay vectores truncados admisibles, luego su tiempo de parada es mayor que 6. Concluyendo así, que, como se demostró en el Lema 2.2, no existe n natural con tiempo de parada 3 y 6.

En el Lema 2.2 no se llegó a demostrar que no hubiese valores con tiempo de parada 9, sin embargo, si se ha probado que no los hay con coeficiente de parada 9. Si se trata de demostrar que no existe n con tiempo de parada 9 de la misma forma que se ha hecho para $k = 3$ y 6, tendrían que comprobarse $2^9 = 512$ vectores de paridad. Teniendo en cuenta los resultados obtenidos para los casos anteriores, se sabe que la mitad de ellos tienen tiempo de parada 1 por tener como vector truncado $w = (0)$. Otros 128 restantes tienen tiempo de parada 2 por tener como vector truncado $w = (1, 0)$. 64 de los restantes tienen tiempo de parada 4 o 5 por tener como vector truncado (1,1,0,0), (1,1,0,1,0) y (1,1,1,0,0). Luego faltaría ver qué ocurre con los 64 restantes. Los vectores admisibles de dimensión 7 son $w_1 = (1, 1, 1, 0, 1, 0, 0)$ con $n_0(w_1) = 7$, $w_2 = (1, 1, 1, 1, 0, 0, 0)$ con $n_0(w_2) = 15$, y $w_3 = (1, 1, 0, 1, 1, 0, 0)$ con $n_0(w_3) = 59$. Luego hay 12 vectores de dimensión 9 que admiten vector truncado admisible de longitud 7. Si nos fijamos por ejemplo en w_1, por el Teorema 3.15, como $n_0(w_1) = 7$, $\epsilon_7 = \frac{47}{2^7}$ y $\rho_5(w) = \frac{73}{2^7}$, entonces si $n > \frac{73}{47} \approx 1.55$ y $n \equiv 7$ mód 2^7 el tiempo de parada es 7. Siguiendo esta misma idea, tanto para el resto de vectores admisibles de longitud 7 como para los de longitud 8, se puede demostrar que no existe n con tiempo de parada 9.

Entonces, la idea para comprobar que no hay enteros positivos con tiempo de parada $k = 11, 14...$ sería comprobar que, al igual que se ha hecho para 3, 6 y 9, no hay vectores de paridad de longitud k que sean admisibles, o que, siguiendo la demostración del Teorema 3.15, admitan vector truncado admisible de longitud i pero no haya $n < M = \frac{\rho_i(v)}{\epsilon_i}$ con tiempo de parada k.

Si nos centramos en la relación entre el tiempo de parada, $\sigma(n)$, y el coeficiente de parada, $\omega(n)$, para un k natural fijo, como mucho un número finito de de valores iniciales n tienen coeficiente de parada $\omega(n) \leq k$ y $\sigma(n) \neq \omega(n)$. De hecho, fue Terras ([28]) quien conjeturó que no es posible encontrar un valor que lo cumpla.

Conjetura 3.16. *Para todo n natural y mayor que 2, se cumple que el tiempo de parada, $\sigma(n)$, es igual al coeficiente de parada, $\omega(n)$.*

El siguiente teorema, debido a Lagarias ([18]), y cuya demostración se omite pues utiliza herramientas que se salen del objetivo del trabajo, demuestra que podría parecer que la conjetura sea cierta.

Teorema 3.17. *Existe una constante k_0 tal que si v es admisible de longitud $k \geq k_0$, entonces todos los elementos de $S(v)$ tienen tiempo de parada k excepto posiblemente el menor elemento $n_0(v)$ de S.*

Además, a partir de él es posible determinar una cota para el número de elementos que no tienen tiempo de parada finito. Sea $\pi^*(x) = \{n \mid n \leq x \text{ y } \sigma(n) < \infty\}$. El siguiente teorema de Lagarias ([18]) determina cuál sería el tamaño del conjunto de elementos con tiempo parada no finito.

Teorema 3.18. *Existe una constante positiva c tal que*

$$|\pi^*(x) - x| \leq cx^{1-\eta}$$

con $\eta \approx 0.05004$.

Para demostrar el teorema fundamental de este capítulo se necesitan previamente ciertos enunciados.

Definición 3.19. *Dados a y k enteros no negativos. Se definen las siguientes cantidades:*

$$n(a,k) = \begin{cases} \textit{Número de vectores preadmisibles de longitud } k \textit{ con } a \textit{ ceros, si } a \in [0,k] \\ 0, \ \textit{si } a \notin [0,k] \end{cases}$$

$$c(a,k) = \begin{cases} 1, & \textit{si } a < k(1-\gamma) \\ 0, & \textit{si } a \geq k(1-\gamma) \end{cases}$$

Si llamamos b al número de unos del vector de paridad de longitud k, entonces $a < k(1-\gamma)$ es equivalente a decir $b > k\gamma$. Por ello, si un vector es admisible, entonces se cumple que $c(a,k) = 0$.

Teorema 3.20. *Sea $n(0,1) = 1$ y $n(1,1) = 0$. Entonces $n(a,k)$ cumple la siguiente recurrencia:*

$$n(a,k+1) = c(a,k)n(a,k) + c(a-1,k)n(a-1,k).$$

Demostración. Consideremos un vector preadmisible de longitud $k+1$ con a ceros. Si eliminamos la última componente de este vector, obtenemos un vector de longitud k con a o $a-1$ ceros, dependiendo de si la última componente era cero o uno. Es decir, sea v_{k+1} vector preadmisible con a ceros, entonces el vector k-truncado v_k debe ser preadmisible pero no admisible con a o $a-1$ ceros. El número de vectores de paridad de longitud k preadmisibles pero no admisibles con a ceros es $c(a,k)n(a,k)$. Por otro lado, el número de vectores de paridad de longitud k preadmisibles pero no admisibles con $a-1$ ceros es $c(a-1,k)n(a-1,k)$. Es decir, $n(a,k+1) \geq c(a,k)n(a,k) + c(a-1,k)n(a-1,k)$. Como todo preadmisible de longitud $k+1$ con a ceros puede obtenerse a partir de vectores preadmisibles de longitud k con a ceros añadiendo un 1, o con $a-1$ ceros al que se añade un 1, entonces se cumple la igualdad. □

Corolario 3.21. *Se tiene que $n(a,k) \leq \binom{k}{a}$.*

Demostración. Por inducción en k. Se tiene que $1 = n(a,1) \leq \binom{1}{a} = 1$, se supone cierta la desigualdad para k, es decir $n(a,k) \leq \binom{k}{a}$, y se probará para $k+1$. Por la recursión del teorema anterior se tiene que $n(a,k+1) \leq n(a,k) + n(a-1,k)$. Luego por la hipótesis de inducción $n(a,k+1) \leq \binom{k}{a} + \binom{k}{a-1}$. Teniendo en cuenta que $\binom{k+1}{a} = \binom{k}{a} + \binom{k}{a-1}$, entonces se cumple la desigualdad para $k+1$, es decir, $n(a,k+1) \leq \binom{k+1}{a}$ □

Corolario 3.22. *Sea $P[\omega = k] = \frac{1}{2^k}\#\{n \in [1,2^k] \mid \omega(n) = k\}$, se cumple que*

$$P[\omega \geq k] = \sum_{a=0}^{k} \frac{n(a,k)}{2^k}$$

.

Demostración. Directo teniendo en cuenta la definición de $n(a,k)$ y de $P[\omega \geq k]$. Pues $\omega(n) \geq k$ si $\lambda_i(n) > 1$, $1 \leq i \leq k-1$ y de la definición de $\lambda_i(n)$ se deduce que esto es equivalente a determinar el número de vectores de longitud k preadmisibles. □

Definición 3.23. *Un conjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ tiene densidad asintótica $\delta > 0$ si cumple que:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A \cap [1,n]}{n} = \delta$$

Esto significa que a medida que n tiende a infinito, la proporción de elementos de A dentro del rango $[1,n]$ respecto a n converge a δ.

Con estos resultados se prueba el siguiente teorema de Terras.

Teorema 3.24. *El conjunto $S_k = \{n \mid \sigma(n) < k\}$ tiene función de densidad asintótica*

$$F(k) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \#\{n \mid \ n \leq x \text{ y } \sigma(n) < k\}.$$

Es decir, el límite existe, y además verifica que $F(k)$ tiende a 1 cuando k tiende a infinito. Dicho de otro modo, casi todos los enteros tienen tiempo de parada finito.

Demostración. Primero veamos que el límite existe. Por el Teorema 3.7 se tiene que el coeficiente de parada es periódico, y por ello se tiene que $P[\omega = k] = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\#\{n \mid \ n \leq x \text{ y } \omega(n) = k\}$. Por el Teorema 3.13 y 3.15 se deduce que el conjunto de números con coeficiente de parada igual a k es igual al conjunto de números con tiempo de parada k, con la excepción de un conjunto finito de números. Por ello, $P[\sigma = k] = P[\omega = k] = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\#\{n \mid \ n \leq x \text{ y } \sigma(n) = k\}$, obteniendo por tanto que el límite del teorema existe.

Veamos ahora que el limite tiende a uno cuando k tiende a infinito. Por el Corolario 3.22 se cumple que

$$P[\omega \geq k] = \sum_{a=0}^{k} \frac{n(a,k)}{2^k}.$$

Sea v_k un vector preadmisible de longitud k, y sea a el número de ceros y $b = k-a$ el número de unos. Si v_k es preadmisible pero no admisible, entonces por definición $x_0+...+x_{k-1} > k\gamma$, es decir, $b > k\gamma$. Luego se tiene que $\frac{3^b}{2^k} > 1$, y a su vez que $a < k(1-\gamma)$. Si por el contrario es admisible, entonces $\frac{3^b}{2^k} < 1$. Como se debe cumplir que $x_0+...+x_{k-2} < (k-1)\gamma$, entonces $\frac{3^b}{2^{k-1}} > 1$ y por tanto $a < (k-1)(1-\gamma)$. Teniendo en cuenta las ideas previas, entonces $n(a,k) = 0$ si $a > \lfloor k(1-\gamma)\rfloor$. Por esto, y por el Corolario 3.21, entonces:

$$P[\omega \geq k] = \sum_{a=0}^{\lfloor k(1-\gamma)\rfloor} \frac{n(a,k)}{2^k} \leq \sum_{a=0}^{\lfloor k(1-\gamma)\rfloor} \binom{k}{a} \frac{1}{2^k}.$$

Esta expresión se corresponde con $P[S_k \leq \lfloor k(1-\gamma)\rfloor]$, donde S_k es la suma de k variables independientes que se distribuyen como una Bernoulli con $p = \frac{1}{2}$. Por ello S_k sigue una distribución binomial. Entonces:

$$\sum_{a=0}^{\lfloor k(1-\gamma)\rfloor} \binom{k}{a} \frac{1}{2^k} = P[S_k \leq k(1-\gamma)] = P\left[\frac{S_k - \frac{k}{2}}{\sqrt{\frac{k}{4}}} \leq \frac{k(1-\gamma) - \frac{k}{2}}{\sqrt{\frac{k}{4}}} = \sqrt{k}(1-2\gamma)\right].$$

Ahora, por el teorema central del límite se tiene que

$$\lim_{k\to\infty} P\left[\frac{S_k - \frac{k}{2}}{\sqrt{\frac{k}{4}}} \leq x\right] = \Phi(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{x} \exp^{-t^2/2}\, dt.$$

Dado $\epsilon > 0$, podemos encontrar x tal que $\Phi(x) < \epsilon$ y como $(1-2\gamma) < 0$, también existe $K > 0$, suficientemente grande para que

$$\sqrt{k}(1-2\gamma) < x \text{ para todo } k \geq K$$

y

$$\frac{S_k - k/2}{\sqrt{\frac{k}{4}}} \leq x \text{ para todo } k \geq K.$$

Por lo que finalmente se tiene que

$$P[\omega \geq k] = \sum_{a=0}^{\lfloor k(1-\gamma)\rfloor} \binom{k}{a}\frac{1}{2^k} = P\left[\frac{S_k - \frac{k}{2}}{\sqrt{\frac{k}{4}}} \leq \sqrt{k}(1-2\gamma)\right] < \epsilon \text{ para todo k } \geq K$$

luego $1 - F(k) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\#\{n : n \leq k \text{ y } \sigma(n) \geq x\} = 0$ cuando k tiende a infinito. Concluyendo por tanto que $F(k)$ tiende a 1 cuando k tiende a infinito. □

Este teorema demostraría que, en un sentido de densidad asintótica, casi todos los enteros positivos verifican la conjetura de Collatz.

Capítulo 4

Cota superior de las trayectorias

Las referencias empleadas en este capítulo son [4] y [16].

Analizando la función de Collatz, es directo ver que si el valor n al que se le aplica la función es par, entonces $T(n)$ es menor que n, mientras que si es impar entonces $T(n)$ es mayor que n. A continuación se representan gráficamente y en una tabla, los valores de las trayectorias para ciertos valores iniciales.

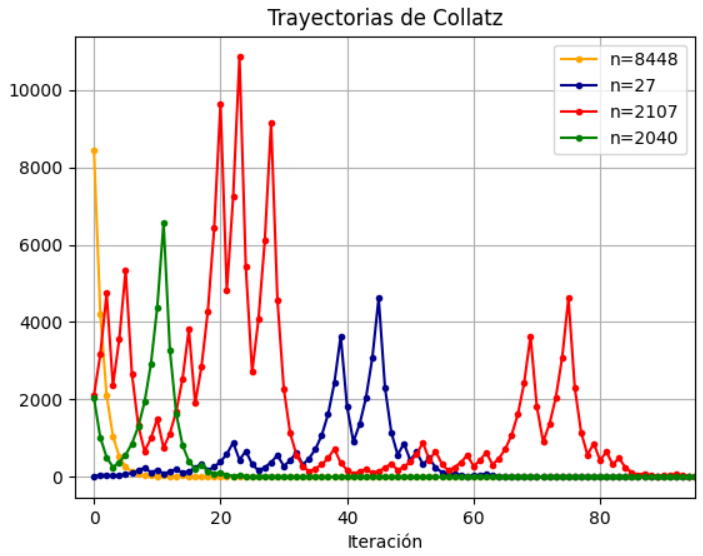

Figura 4.1: Trayectorias para distintos valores iniciales

Observando las gráficas de cada n, se ve que para 27, 2107 y 2040, el valor de la función crece de manera progresiva (salvo en algunas iteraciones) hasta alcanzar un máximo absoluto y luego decrece (aunque en algún momento puntual puede crecer pero sin alcanzar el máximo anterior). Teniendo esto en cuenta, se quiere ver si es posible encontrar una cota superior para cada iteración, es decir, controlar el crecimiento. En el caso $n = 8448 = 2^8 \cdot 3 \cdot 11$, las diferentes potencias de 2 hacen que en las 8 primeras iteraciones de la función $T(n)$ su valor decrezca.

n	$T^1(n)$	$T^2(n)$	$T^3(n)$	$T^4(n)$	$T^5(n)$	$T^6(n)$	$T^7(n)$
8448	4224	2112	1056	528	264	132	66
27	41	62	31	47	71	107	161
2107	3161	4742	2371	3557	5336	2668	1334
2040	1020	510	255	383	575	863	1295

Tabla 4.1: Trayectorias para los valores iniciales $n = 8448, 27, 2107$ y 2040.

Considerando la idea mencionada anteriormente, la cota más directa es considerar $T(n)$ cuando n es impar, es decir, $\alpha(n) = \frac{3n+1}{2}$ e iterarla hasta obtener:

$$\alpha^k(n) = \left(\frac{3}{2}\right)^k n + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{3^i 2^{k-i-1}}{2^k} = \left(\frac{3}{2}\right)^k n + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{3}{2}\right)^i = \left(\frac{3}{2}\right)^k (n+1) - 1 \tag{4.1}$$

Luego se cumple que $T^k(n) \leq \alpha^k(n)$.

Veamos ahora si esta cota obtenida es alcanzada por algún valor n. Para ello se emplearán ciertos resultados.

Proposicion 4.1. *Para cualquier k y n naturales*

$$T^k(2^k n - 1) = 3^k n - 1 = \alpha^k(2^k n - 1).$$

Demostración. El caso $k = 1$ es directo, pues $T(2n-1) = \frac{3(2n-1)+1}{2} = 3n-1$. Se demostrará por inducción suponiendo que se verifica para todo k, y viendo si para $k+1$ se cumple. Se tiene que $T^k(2^k n - 1) = 3^k n - 1$ y sustituyendo n por $2n$ se obtiene $T^k(2^{k+1}n - 1) = 3^k 2n - 1$, y, por ser un número impar, $T^{k+1}(2^{k+1}n - 1) = \frac{3(3^k 2n-1)+1}{2} = 3^{k+1}n - 1$. □

A continuación, se definirá un concepto importante en relación a la función $\alpha(n)$ definida anteriormente.

Definición 4.2. *Dado $n \in \mathbb{N}$, sea $\phi(n) = \text{mín}\{k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid \alpha^k(n) \equiv 0 \text{ mód } 2\}$, es decir, se define $\phi(n)$ como el primer valor k, tal que $\alpha^k(n)$ es un valor par.*

Para poder emplear este concepto primero hay que ver si está bien definido. Para ello, se probará que el conjunto es no vacío y por el Principio de Buena Ordenación tendrá un mínimo.

Lema 4.3. *El conjunto $\{k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid \alpha^k(n) \equiv 0 \text{ mód } 2\ \} \neq \emptyset$*

Demostración. Por reducción al absurdo supongamos que para todo k se tiene que $\alpha^k(n)$ es impar. Por tanto, como $\alpha^k(n) = \left(\frac{3}{2}\right)^k (n+1) - 1$, entonces $\left(\frac{3}{2}\right)^k (n+1)$ es par para todo k. Luego existe $h_k \geq 1$ y m impar tal que $\left(\frac{3}{2}\right)^k (n+1) = 2^{h_k} m$, entonces $3^k(n+1) = 2^{h_k+k} m$ para todo k. Se llega a un absurdo pues se debería cumplir que 2^{k+h_k} divida a $n+1$ para todo k. □

Antes de llegar al resultado importante, se darán dos resultados en relación a este concepto.

Proposicion 4.4. *Dado $n \in \mathbb{N}$, sea $h(n) = \text{máx}\ \{k \geq 0 \mid n \equiv -1 \text{ mód } 2^k\}$. Entonces $\phi(n) = h(n)$ (si n par se toma, por abuso de notación, $k = 0$, $n \equiv -1$ mód 1).*

Demostración. Se tiene que $n + 1 \equiv 0$ mód 2^k para algún $k \geq 0$. Como k es el mayor valor para el que se tiene la congruencia, entonces $n+1 = 2^k q$ con q entero impar. Luego teniendo en cuenta que $\alpha^k(n) = \left(\frac{3}{2}\right)^k (n + 1) - 1$, se tiene que $\alpha^k(n) = 3^k q - 1$, y por tanto $\alpha^k(n)$ es par. Ahora falta ver que para cualquier número $i \geq 0$ menor que k se tiene que $\alpha^i(n)$ es impar. En la iteración i se tiene que $\alpha^i(n) = \left(\frac{3}{2}\right)^i (n + 1) - 1 = 3^i 2^{k-i} q - 1$, que es impar, demostrando así que el menor valor para el cual la función α es par es exactamente k. □

Lema 4.5. *Para todo k entero no negativo existen infinitos números n tal que $\phi(n) = k$*

Demostración. Sea $n = m2^k - 1$, con m impar, por la proposición anterior $h(n) = k$ independientemente del valor de m. □

De la expresión (4.1) se tiene que $\alpha^k(n) \equiv 2$ mód 3, y por la Definición 4.2, $\alpha^{\phi(n)}(n) \equiv 0$ mód 2. Luego, por el teorema chino del resto, $\alpha^{\phi(n)}(n) \equiv 2$ mód 6.

A partir de los resultados anteriores, es posible simplificar el número de casos a comprobar para demostrar la conjetura de Collatz.

Teorema 4.6. *Para demostrar la conjetura de Collatz basta con probarlo para cada número congruente con 2 módulo 6.*

En relación a $\phi(n)$ se define el siguiente concepto.

Definición 4.7. *Dado $m \in \mathbb{N}$, se define la valoración 2-ádica de m como $\nu_2(m) = \text{máx}\{k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \ : \ 2^k \mid m\}$, es decir, la mayor potencia de 2 que divide a m.*

Para los primeros valores de m se tiene la tabla siguiente:

m	$\phi(m)$	n	$\nu_2(n)$
1	1	2	1
3	2	4	2
5	1	6	1
7	3	8	3
9	1	10	1
11	2	12	2
13	1	14	1
15	4	16	4
17	1	18	1
19	2	20	2
21	1	22	1

Tabla 4.2: $\phi(n)$ y $\nu_2(n)$ de distintos números naturales

Observando la tabla se puede ver cierta relación entre los valores de $\phi(n)$ con n impares y $\nu_2(n)$ con n pares. Los siguientes resultados establecen esta relación.

Proposicion 4.8. *Sea $n \in \mathbb{N}$ se tiene que*

$$\phi(2n-1) = \nu_2(2n)$$

Demostración. Sea $m = 2n-1$ un número impar, veamos si el mínimo valor de k para el cual $\alpha^k(m) = \left(\frac{3}{2}\right)^k (m+1) - 1$ es par, coincide con la valoración 2-ádica de $m+1 = 2n$. Supongamos ahora que $\nu_2(m+1) = k_1$, es decir, que $m+1 = 2^{k_1}z$ con z un número natural impar. Por tanto, $\alpha^k(m) = \left(\frac{3}{2}\right)^k 2^{k_1}z - 1 = 3^k 2^{k_1-k}z - 1$. Para que $\alpha^k(m)$ sea par, se debe cumplir que $3^k 2^{k_1-k}z$ sea impar. Luego se debe cumplir que $k_1 - k = 0$, demostrando así que $\phi(m) = k_1$. □

Teorema 4.9. *Sea $n \in \mathbb{N}$ se cumple que*

$$\phi(2n-1) = \nu_2(5^n - 1) - 1.$$

Demostración. Sea $n = 2^k n_1$ con k natural y n_1 impar, entonces por la proposición anterior se tiene que

$$\phi(2n-1) = \nu_2(2n) = \nu_2(2 \cdot 2^k n_1) = k+1.$$

Para demostrar la igualdad se debe cumplir que $\nu_2(5^n - 1) = k+2$. Teniendo en cuenta que por el binomio de Newton se cumple que:

$$(4+1)^n = 1 + \binom{n}{1}4 + \binom{n}{2}4^2 + \cdots \equiv 1 \text{ mód } 2^{k+2},$$

entonces $\nu_2(5^n - 1) = \nu_2\left((4+1)^n - 1\right) = \nu_2\left(1 + \binom{n}{1}4 - 1\right) = \nu_2\left(\binom{2^k n_1}{1}4\right) = k+2$. Estas igualdades se deben a que el resto de términos del binomio de Newton son divisibles por potencias de dos mayores que $kn_1 + 2$. □

Corolario 4.10. *Dados m y n dos números naturales se tiene que*

$$\phi(2m-1) = \nu_2((2^n+1)^m - 1) - n + 1.$$

Dado $I \subset \mathbb{N}$ el conjunto de los impares, se define a continuación una modificación de la función de Collatz.

Definición 4.11. *Se define la aplicación $\bar{T} : I \to I$ como*

$$\bar{T}(n) = \frac{3n+1}{2^{\nu_2(3n+1)}}$$

En relación a esta función, se conjetura que 1 es el único punto fijo, y que todas las trayectorias alcanzan el ciclo (1).

Capítulo 5

Modelos probabilísticos

Las referencias empleadas en este capítulo son [7], [13] y [19].

Una característica del problema $3x + 1$ es la diferencia que se puede observar entre su comportamiento en casos particulares o lo que puede ser comprobado experimentalmente. Intentar comprender y predecir características de la experimentación empírica han llevado al uso de modelos probabilísticos para describir un proceso determinista. Esto da otro tema de investigación sobre este problema: la construcción y análisis de métodos probabilísticos y modelos estocásticos para diversos aspectos del proceso de iteración.

Se verá a continuación si en los vectores de paridad aparecen distribuidos uniformemente ceros y unos. Sea $\{v_{k_n+1}(n) = (x_0(n), x_1(n), ..., x_{k_n}(n)) \mid k_n = \text{mín}\{i \mid T^i(n) = 1\}\}$, es decir, el vector de paridad hasta alcanzar el ciclo para cierto n.

Definición 5.1. *Sea $n > 1$ y $k_n = \text{mín}\{i \mid T^i(n) = 1\}$, se definen*

$$C_n = \frac{\#\{x_i(n) = 0,\ i \leq k_n\}}{k_n} \qquad y \qquad U_n = \frac{\#\{x_i(n) = 1,\ i \leq k_n\}}{k_n}.$$

Es decir, los conjuntos C_n y U_n representan la frecuencia de ceros y unos del vector de paridad de cierto n.

Calculados los vectores de paridad para $2 \leq n \leq 10^5$, se determina C_n y U_n para cada n. Se obtiene que el mayor valor de C_n se alcanza con $n = 65536$, siendo la frecuencia de ceros igual a 0.941176. Esto sucede debido a que $65536 = 2^{16}$ (de hecho, sólo hay un 1 en el vector de paridad que es justamente el último, y $k_n = 17$). Por el contrario, el menor valor de C_n es 0.4084507, con $n = 27$. En este caso $k_n = 71$ y en el vector de paridad hay 29 ceros y 42 unos. Al contrario ocurre con U_n, alcanzando el máximo con $n = 27$ y el mínimo con $n = 65536$. Observando estos resultados, podría afirmarse que al menos, aproximadamente, un 40 % de los elementos del vector de paridad son ceros.

Para visualizar esta idea, en la Figura 5.1 aparecen representados los valores de C_n para $2 \leq n \leq 10^5$. Observando los valores representados, se podría concluir que la mayor parte de las frecuencias de ceros se encuentran entre 0.4 y 0.6.

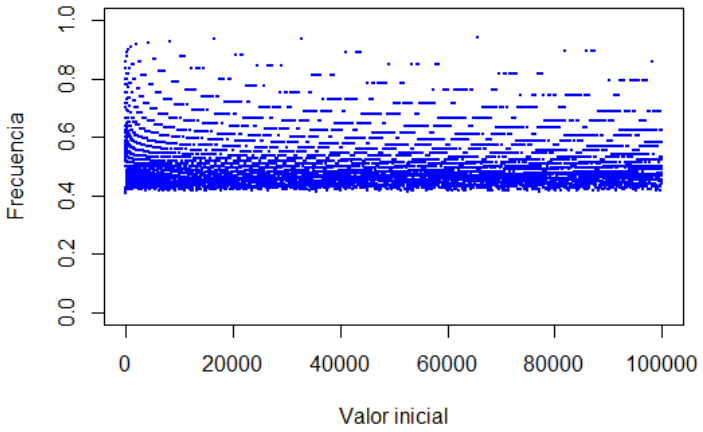

Figura 5.1: Frecuencias de ceros en los vectores de paridad

Para determinar de forma más rigurosa la tendencia central tanto de la frecuencia de ceros como de la frecuencia de unos, se ha calculado la media de estas:

$$C = \frac{1}{10^5}\sum_{n=2}^{10^5} C_n \quad \text{y} \quad U = \frac{1}{10^5}\sum_{n=2}^{10^5} U_n$$

Obteniendo que $C = 0.5247976$ y $U = 0.4752024$.

Teniendo en cuenta que puede que haya valores atípicos, donde el número por ejemplo es potencia de dos, como se ha visto en el caso de $n = 65536$, y por tanto, la proporción de unos es aproximadamente 0 y de ceros es aproximadamente 1, entonces la mediana puede proporcionar una mejor representación de la tendencia central del conjunto de frecuencias. Se obtiene que la mediana de las proporciones de ceros es 0.5072464 y la mediana de proporciones de unos es 0.4927536.

Observando los resultados obtenidos se podría pensar que en la mayoría de trayectorias hay tantos pares como impares. En efecto, un modelo probabilístico básico de iteraciones de la función de Collatz propone que la mayoría de las trayectorias de las iteraciones de $T(n)$ tienen aproximadamente el mismo número de iteraciones en los que el resultado es par que las que dan un número impar. Una observación clave de Terras y Everett de este modelo probabilístico fue que la paridad de iteraciones sucesivas se comporta en algún sentido como un lanzamiento de moneda independiente.

Otro argumento heurístico relativo a la función de Collatz sirve para sugerir que, el factor de crecimiento de un impar al siguiente impar iterando la función de Collatz es de $\frac{3}{4}$. Dado un número entero impar n, hay una probabilidad de $\frac{1}{2}$ de obtener un número par y una probabilidad de $\frac{1}{2}$ de obtener un número impar. Como se ha mencionado anteriormente, se asumirá que para cualquier trayectoria de Collatz dada, el número de pares en la trayectoria

de longitud k será $\frac{k}{2}$, y lo mismo para los impares. Observamos que para un número entero impar n, la probabilidad de obtener otro impar de $\frac{3n+1}{2}$ es $\frac{1}{2}$, la probabilidad de obtener una salida impar de esto (es decir, $\frac{3n+1}{4}$) es $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ y así sucesivamente hasta obtener que la probabilidad de que $T(n)^k = \frac{3n+1}{2^k}$ es $\frac{1}{2^k}$. Esto se reduce a evaluar el siguiente producto:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{8}} \cdots$$

Este producto se puede representar como $\prod_{i=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2^i}\right)^{\frac{1}{2^i}}$, que vale $\frac{3}{4}$ teniendo en cuenta que $\prod_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^i}\right)^{\frac{1}{2^i}} = \frac{1}{4}$ y $\prod_{i=1}^{\infty} (3^i)^{\frac{1}{2^i}} = 3$. Es por esto que el factor de crecimiento esperado es $\frac{3}{4}$.

Teniendo en cuenta los argumentos previos, se puede crear una igualdad para aproximar el número de iteraciones necesarias para alcanzar el valor 1 empleando $T(n)$, es decir, el tiempo de parada total (σ_∞). Sea k el número de iteraciones, entonces buscamos el k que verifique

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{k}{2}} n = 1.$$

Tomando logaritmos y despejando k de la igualdad anterior, se tiene que $k = -2 \cdot \frac{\ln(n)}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)} \approx 6.95212 \ln n$. Este modelo probabilístico sugiere que la mayoría de las trayectorias representadas en una escala vertical logarítmica aparecen cerca de una línea recta con pendiente negativa igual a $-\frac{1}{2} \log \frac{3}{4}$.

Se puede obtener una cota inferior del número de iteraciones necesarias para llegar al ciclo de forma similar. El número inicial n disminuye como mucho dividiéndose entre dos, y es por ello que despejando k de $\left(\frac{1}{2}\right)^k n = 1$ se obtiene esta cota. Es decir, $k \geq \frac{\ln(n)}{\ln(2)}$. En el Capítulo 2 se representó la gráfica del número de iteraciones necesarias para alcanzar el ciclo con valores iniciales entre 1 y 100. A continuación, se muestra esta representación incluyendo la aproximación y la cota inferior de iteraciones calculadas anteriormente.

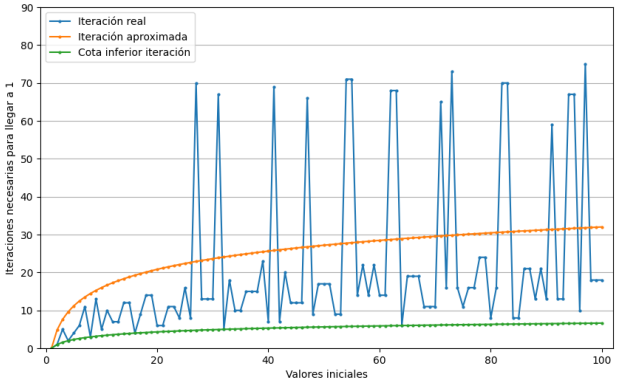

Figura 5.2: Iteraciones hasta llegar al ciclo para $n \leq 100$

Observando la figura se puede ver que la aproximación no es muy buena en algunos casos. Siendo $n < 10^5$ y comparando el valor aproximado con el real, se tiene que la aproximación es mayor 55245 veces y es menor 44754.

Se han propuesto varios modelos estocásticos con el fin de explicar las observaciones empíricas sobre ciertos factores que se definirán a continuación.

Definición 5.2. *Sea n un número natural, se define como excursión máxima a*

$$t(n) = \max_{k \geq 0}(T^{(k)}(n)).$$

Se puede considerar (pues el máximo no existiría) que $t(n) = +\infty$ si la trayectoria es divergente.

Definición 5.3. *Sea n un número natural se define como razón de excursión máxima a*

$$\rho(n) = \frac{\log(t(n))}{\log n}.$$

A continuación se muestra una tabla con los valores $t(n)$ máximos, y su respectivo valor de $\rho(n)$ en intervalos de n entre 1 y 10^6. En la primera columna aparecen los intervalos de los valores iniciales. En la segunda columna aparece el valor inicial para el cual se alcanza un $t(n)$ máximo (tercera columna). En la cuarta columna se muestra la razón de excursión máxima.

Intervalo	valor inicial	$t(n)$	$\rho(n)$
$[1, 10^2]$	27	4616	2.55998
$[10^2, 10^4]$	9663	13557212	1.78970
$[10^4, 10^6]$	704 511	28 495 741 760	1.78778

Tabla 5.1: Valores máximos de $t(n)$ y $\rho(n)$ para $1 \leq n \leq 10^6$.

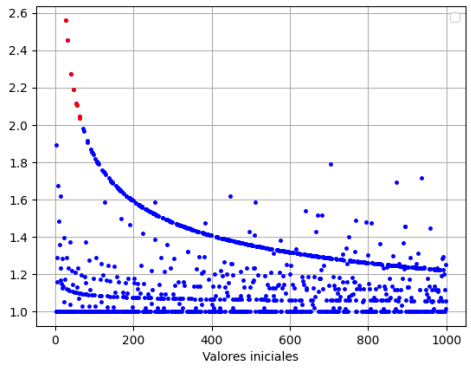

Figura 5.3: $\rho(n)$ para n desde 2 hasta 1000

En la Figura 5.3 se representa el valor de $\rho(n)$ para n entre 2 y 1000. Los puntos azules se corresponden con $\rho(n) \leq 2$, mientras que los rojos se corresponden con $\rho(n) > 2$. Los valores iniciales n para los cuales se tiene que $\rho(n)$ es mayor son: 27, 31, 41, 47, 54, 55, 62 y 63.

Para n desde 2 hasta 10^7, a excepción de los valores previamente mencionados, se tiene que el máximo valor de $\rho(n)$ es 1.97600976, que se corresponde con el valor $n = 6631675$. Oliveira e Silva ([24]) encontró el valor más grande de $\rho(n)$, con $100 \leq n \leq 10^{18}$. En este caso $n = 1980976057694878447$ y $\rho(n) = 2.04982$.

Dadas estas definiciones, se denomina a la constante de excursión máxima del problema $3x + 1$ como :

$$\rho = \limsup_{n\to\infty} \rho(n) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log(t(n))}{\log n}.$$

Por otro lado, se conoce como razón del tiempo total de parada a

$$\gamma = \limsup_{n\to\infty} \frac{\sigma_\infty(n)}{\log n}$$

Se establece que $\sigma_\infty(n) = +\infty$ si la trayectoria de n no contiene el valor 1, es decir, no alcanza el ciclo.

La gráfica siguiente muestra los valores de $\frac{\sigma_\infty(n)}{\log n}$ para $2 \leq n \leq 1000$.

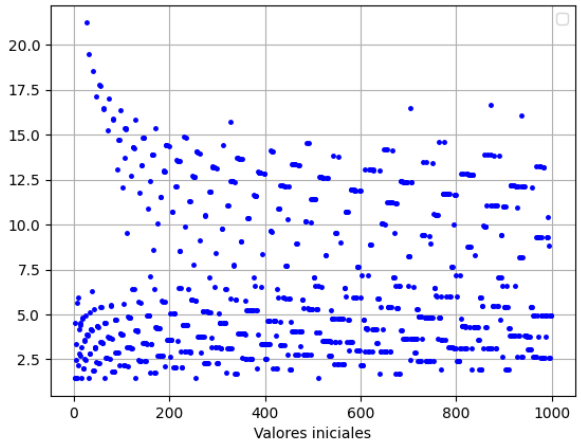

Figura 5.4: $\frac{\sigma_\infty(n)}{\log n}$ para n desde 2 hasta 1000

Además, se representa una tabla con los mayores valores de σ_∞ en ciertos intervalos. En la primera columna aparecen los intervalos de los valores iniciales. En la segunda columna aparece el valor inicial para el cual se alcanza el mayor $\sigma_\infty(n)$ (tercera columna) para cada intervalo. En la cuarta columna se muestra la razón $\frac{\sigma_\infty(n)}{\log n}$.

Intervalo	Valor inicial	$\sigma_\infty(n)$	$\frac{\sigma_\infty(n)}{\log n}$
$[1, 10^2]$	97	75	16.39447
$[10^2, 10^4]$	6171	165	18.9055
$[10^4, 10^6]$	837799	329	24.12282

Tabla 5.2: Valores máximos de $\sigma_\infty(n)$ para $1 \leq n \leq 10^6$.

El mayor valor conocido de la razón $\frac{\sigma_\infty(n)}{\log n}$ es aproximadamente 36.716, que se corresponde con $n \approx 7.21 \times 10^{21}$.

A continuación, se determinan algunas cotas para ambas razones. Teniendo en cuenta que $T(n) \geq \frac{n}{2}$, entonces se tiene que $\sigma_\infty \geq \frac{\log n}{\log 2}$. Y por la Proposición 4.1, como $T^k(2^k - 1) = 3^k - 1$, entonces

$$\gamma \geq \frac{\log 2 + \log 3}{(\log 2)^2} \approx 3.729.$$

Por otro lado, teniendo en cuenta la proposición mencionada anteriormente, se tiene que:

$$\rho \geq \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1.585.$$

En relación a estos conceptos se tiene el modelo estocástico denominado "Random Walk Forest", que dice lo siguiente: El valor $T(n)$ es o bien $\frac{n}{2}$ o aproximadamente $\frac{3n}{2}$ según la paridad de n, y después de k iteraciones se tiene la aproximación

$$T^k(n) \approx 3^{x_0(n)+\ldots+x_{k-1(n)}} 2^{-k} n$$

siendo $v_k(n) = (x_0(n), ..., x_{k-1}(n))$ el vector de paridad k-truncado.

Así, $\{\log T^k(n) : k \geq 1\}$ puede aproximarse mediante un recorrido en la recta real que comienza en $\log n$ y que en la iteración j-ésima da un paso de $\log 2$ si la paridad de $T^j(n)$ es par y $\log \frac{3}{2}$ si la paridad de $T^j(n)$ es impar. La aproximación se vuelve menos y menos precisa a medida que k aumenta, pero es razonablemente precisa para los primeros $\log n$ pasos. Además, el Teorema 3.7 establece que si un entero n se elige uniformemente del intervalo $[1, 2^k]$, entonces su vector de paridad tiene una distribución uniforme en $\{0, 1\}^k$, de modo que este recorrido se comporta como un recorrido aleatorio para los primeros k pasos.

Este modelo predice lo siguiente:

$$\gamma = \limsup_{n\to\infty} \frac{\sigma_\infty(n)}{\log n} \approx 41.677647 \qquad \text{y} \qquad \rho = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log t(n)}{\log n} = 2.$$

Capítulo 6

Comportamiento modular

Las referencias empleadas en este capítulo son [3] y [21].

La Teoría ergódica, enfocada en el análisis estadístico de sistemas dinámicos, ofrece un marco conceptual para entender la evolución a largo plazo de las sucesiones generadas por la función de Collatz. En este contexto, las Cadenas de Markov emergen como una herramienta que permite modelar y examinar la evolución probabilística de estas sucesiones numéricas. Sean n y k dos números naturales, tal que, por ejemplo, $T^k(n) \equiv 1$ mód 5, es decir, $T^k(n) \in \{1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36...\}$ entonces $T^{k+1}(n) = T(T^k(n)) \in \{2, 3, 8, 13, 17, 18, 32...\}$. Concluyendo que $T^{k+1}(n) \equiv 3$ mód 5 o $T^{k+1}(n) \equiv 2$ mód 15. Es decir, se observa que la clase de congruencia del iterado $T^{k+1}(n)$ solo está determinada por la clase en que está la iteración anterior, $T^k(n)$. Por tanto, con el objetivo de estudiar las clases de congruencias módulo m de los iterados, se construirá, a partir de las cadenas de Markov, lo que se conoce como matriz de transición. Por ello, en este capítulo nos centraremos en estudiar la función de Collatz a través de las cadenas de Markov.

Definición 6.1. *Sean j y m dos números enteros, se define $B(j, m)$ como las clases de equivalencia de enteros j módulo m. Es decir, $B(j, m) = \{k \in \mathbb{Z} \mid k \equiv j \text{ mód } m\}$.*

Ejemplo 6.2. *Tomando $j = 1$ y $m = 2$, entonces el conjunto $B(1, 2)$ son los impares. Por otro lado, tomando $j = 0$, para cualquier m entero se cumple que $B(0, m)$ son los múltiplos de m.*

Definición 6.3. *Sea $S \subseteq \mathbb{Z}$, se dice que es un conjunto T-invariante módulo m si $T(S) \subseteq S$ y se cumple que $S = B(i_1, m) \cup B(i_2, m) \cup \cdots \cup B(i_r, m)$, es decir, es una unión de r clases de congruencias módulo m. Además, diremos que S es un conjunto ergódico módulo m si $S \neq \emptyset$ y S es un conjunto T-invariante módulo m minimal.*

Esta última condición de minimalidad implica que, si existe otro conjunto ergódico módulo m, R, tal que $R \subseteq S$, entonces $R = S$.

Una propiedad que cumplen los conjuntos ergódicos es que los conjuntos ergódico módulo m tienen intersección vacía entre sí. Sean $S_1^{(m)}$ y $S_2^{(m)}$ dos conjuntos ergódicos módulo m diferentes, entonces su intersección también lo es. Además, se cumple que:

$$T(S_1^{(m)} \cap S_2^{(m)}) \subseteq S_1^{(m)} \text{ y } T(S_1^{(m)} \cap S_2^{(m)}) \subseteq S_2^{(m)}.$$

Por tanto se cumple que $T(S_1^{(m)} \cap S_2^{(m)}) \subseteq S_1^{(m)} \cap S_2^{(m)}$, luego es un conjunto ergódico. Por la condición de minimalidad debe cumplirse que $S_1^{(m)} = S_1^{(m)} \cap S_2^{(m)} = S_2^{(m)}$, concluyendo que los conjuntos ergódicos módulo m son disjuntos.

Ejemplo 6.4. *Si se considera la función de Collatz $T(n)$ para $m = 2$, entonces solo existen las clases de congruencia $B(0,2)$ y $B(1,2)$. Por un lado, se tiene que $T(B(0,2)) = \mathbb{Z}$ por ser $B(0,2)$ el conjunto de números pares. Luego $T(B(0,2)) \not\subset B(0,2)$ y por tanto no es ergódico. También se cumple que $B(1,2)$ no es ergódico por el mismo razonamiento. Luego el único conjunto ergódico es $\mathbb{Z} = B(0,2) \cup B(1,2)$.*

Observando ahora el caso de $m = 3$ se tiene que $T(B(i,3)) \not\subset B(i,3)$ para todo $i \in \{0,1,2\}$, ya que $T(3) = 5$, $T(1) = 2$ y $T(2) = 1$. Luego los posibles conjuntos ergódicos deben ser uniones de clases de congruencia módulo 3. Si se toma por ejemplo $S_3 = B(1,3) \cup B(2,3)$, entonces el conjunto está formado por números de la forma $3k+1$ o $3l+2$. Si estos números son pares entonces sus imágenes son $\frac{3k+1}{2}$ o $\frac{3l+2}{2}$, y si son impares entonces $\frac{9k+4}{2}$ o $\frac{9l+7}{2}$. En ningún caso se tiene que la imagen sea múltiplo de 3. Por tanto, S_3 es un conjunto ergódico. Por el comentario anterior se tiene que es el único conjunto ergódico, pues la intersección entre conjuntos ergódicos debe ser vacía. En general se tiene que si $3 \nmid m$, entonces el único conjunto ergódico es $\mathbb{Z}$, y si $3 \mid m$ entonces es $\mathbb{Z} - 3\mathbb{Z}$.

La razón por la que se estudian los conjuntos ergódicos es la siguiente:

Proposicion 6.5. *La inversa de la función de Collatz de una clase de residuos módulo m es la unión de clases de residuos modulo 2m. Más concretamente:*

$$T^{-1}(B(j,m)) = \begin{cases} B(2j,2m) \cup B(\frac{2j-1}{3},2m) & m \not\equiv 0 \text{ mód } 3 \\ B(2j,2m) & m \equiv 0 \text{ mód } 3 \text{ y } j \not\equiv 2 \text{ mód } 3 \\ B(2j,2m) \cup B(\frac{2j-1}{3},\frac{2m}{3}) & m \equiv 0 \text{ mód } 3 \text{ y } j \equiv 2 \text{ mód } 3 \end{cases} \tag{6.1}$$

Demostración. Consideremos la función de Collatz $T(n)$, si n es par, entonces $T(n) = T(2k) = k$ y si n es impar entonces $T(n) = T(2k+1) = \frac{3(2k+1)+1}{2} = \frac{6k+4}{2} = 3k+2$.

Luego se tiene que

$$T^{-1}(B(j,m)) = \{2k \mid k \equiv j \text{ mód } m\} \cup \{2k+1 \mid 3k+2 \equiv j \text{ mód } m\}.$$

Sea n par, entonces se tiene que $n = 2k$ y $k \equiv j$ mód m, luego equivalentemente tenemos que $\frac{n}{2} \equiv j$ mód m. Por tanto, para algún h se tiene que $n = 2j + 2hm$. Luego para todo j, m se tiene que $B(2j,2m) \subseteq T^{-1}(B(j,m))$.

Por otro lado, si n es impar, entonces $n = 2k+1$ y $3k+2 \equiv j$ mód m. Para esta parte de la demostración se emplearán los siguiente resultados: Sean $a, b, m \in \mathbb{Z}$, y $m > 1$, entonces se tiene que $ax \equiv b$ mód r tiene solución si y solo si $mcd(a,r)$ divide a b. Por otro lado, si $d = mcd(a,r) \neq 1$, las soluciones son las de la ecuación $\frac{a}{d}x \equiv \frac{b}{d}$ mód $\frac{r}{d}$.

Veamos cuales son las soluciones de $3k \equiv j-2$ mód m. Por el enunciado anterior, si $mcd(3,m)=1$, es decir, si $m \not\equiv 0$ mód 3, entonces la ecuación tiene solución para cualquier j. Luego para este caso tenemos que $k \equiv \frac{j-2}{3}$ mód m, y teniendo en cuenta que $n=2k+1$, entonces $n \equiv \frac{2j-1}{3}$ mód $2m$. Por tanto se tiene que $B(\frac{2j-1}{3}, 2m) \subseteq T^{-1}(B(j,m))$.

Por otro lado, si se tiene que $mcd(3,m)=3$, es decir, si $m \equiv 0$ mód 3, la congruencia $3k \equiv j-2$ mód m tiene solución si y solo si 3 es divisible entre $j-2$. Esto ocurre si $j \equiv 2$ mód 3. Empleando la segunda parte del resultado, como $mcd(m,3)=3 \neq 1$, entonces las soluciones son las de la ecuación $k \equiv \frac{j-2}{3}$ mód $\frac{m}{3}$. Teniendo en cuenta que $n=2k+1$, entonces se cumple que $n \equiv \frac{2j-1}{3}$ mód $\frac{2m}{3}$. Concluyendo por tanto que $B(\frac{2j-1}{3}, \frac{2m}{3}) \subseteq T^{-1}(B(i,j))$. □

A continuación se definirán las matrices de Markov y se proporcionarán varios resultados y ejemplos para comprender mejor su función.

Definición 6.6. *Sea $p_{ij}(m)$ el número de clases de congruencias módulo $2m$ en el conjunto $T^{-1}(B(i,m)) \cap B(j,m)$ y sea $q_{ij}(m) = \frac{p_{ij}(m)}{2}$. Se define como matriz de Markov de la función de Collatz a la matriz $m \times m$ definida de la siguiente forma:*

$$Q_T(m) = [q_{ij}(m)] = \begin{pmatrix} q_{00}(m) & q_{01}(m) & \dots & q_{0(m-1)}(m) \\ q_{10}(m) & q_{11}(m) & \dots & q_{1(m-1)}(m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{(m-1)0}(m) & q_{(m-1)1}(m) & \dots & q_{(m-1)(m-1)}(m) \end{pmatrix} \tag{6.2}$$

Teorema 6.7. *La matriz de Markov es una matriz estocástica, es decir, se cumple que es una matriz cuadrada con coeficientes no negativos, y la suma de los elementos de sus columnas es 1.*

Demostración. Por definición $q_{ij} \geq 0$. Por otro lado,

$$B(j,m) = \mathbb{Z} \cap B(j,m) = T^{-1}(\mathbb{Z}) \cap B(j,m) = \bigcup_{i=0}^{m-1} [T^{-1}(B(i,m)) \cap B(j,m)].$$

Por lo tanto, $B(j,m)$ es unión disjunta de $\sum_{i=0}^{m-1} p_{ij}(m)$ clases de congruencias módulo $2m$. Por otro lado, como

$$B(j,m) = B(j,2m) \cup B(j+m,2m),$$

entonces $B(j,m)$ es la unión de exactamente dos clases de congruencia módulo $2m$. Luego se debe cumplir que $\sum_{i=0}^{m-1} p_{ij}(m) = 2$, y dividiendo a ambos lados entre 2, se obtiene que $\sum_{i=0}^{m-1} \frac{p_{ij}(m)}{2} = \sum_{i=0}^{m-1} q_{ij}(m) = 1$. □

El siguiente resultado permitirá determinar cómo se comportan las sucesivas iteraciones de la función de Collatz.

Teorema 6.8. *Sea k un número natural y A una matriz cuadrada, entonces se cumple que:*

$$A^k = P \cdot J^k \cdot P^{-1},$$

donde P es una matriz invertible cuyas columnas son los vectores propios generalizados de A y J es una matriz en forma de Jordan asociada a A.

Ejemplo 6.9. *Para $m = 5$ se tiene los estados posibles son: $B(0,5)$, $B(1,5)$, $B(2,5)$, $B(3,5)$ y $B(4,5)$. Inicialmente se toman los elementos de $B(0,5)$, es decir, los múltiplos de 5. Iterando la función de Collatz para estos valores, se tiene que $T(B(0,5)) = \{8,5,23,10,38,15,53,20,68,25...\} = B(0,5) \cup B(8,15)$. Como $B(8,15) \subseteq B(3,5)$, entonces se puede afirmar que el estado $B(0,5)$ pasa al estado $B(0,5)$ con probabilidad $\frac{1}{2}$, o al estado $B(3,5)$ con la misma probabilidad.*

Por otro lado, para $B(1,5)$ se tiene que $T(B(1,5)) = \{2,3,17,8,32,13,47,18,62,23...\} = B(3,5) \cup B(2,15)$ y $B(2,15) \subseteq B(2,5)$. Luego $B(1,5)$ pasa al estado $B(3,5)$ o $B(2,5)$ con la misma probabilidad. Para el estado $B(2,5)$, es decir, para los números congruentes con 2 módulo 5, se tiene que $T(B(2,5)) = \{1,11,6,26,11,41,16,56,21,71...\} = B(1,5)$, luego $B(2,5)$ pasa al estado $B(1,5)$ con probabilidad 1. Los números congruentes con 3 módulo 5, es decir, los pertenecientes al estado $B(3,5)$, cumplen que $T(B(3,5)) = \{5,4,20,9,35,14,50,19,65,24...\}$, luego pertenece a $B(0,5)$ con probabilidad $\frac{1}{2}$ y a $B(4,5)$ con la misma probabilidad.

Por último, para $B(4,5)$ se tiene que, empleando la función de Collatz, $T(4,5) = \{2,14,7,29,12,44,17,59,22,74...\} \subseteq B(2,5) \cup B(4,5)$, por tanto, el estado $B(4,5)$ pasa al estado $B(2,5)$ y $B(4,5)$ con la misma probabilidad.

La matriz de Markov resultante es la siguiente:

$$Q_T(5) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Si se toma $m = 3$ y se sigue el mismo procedimiento que para $m = 5$, se tiene que

$$Q_T(3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La idea ahora es calcular $\{Q_T(3)\}^k$ y para ello se empleará el teorema anterior. Los valores propios de la matriz $Q_T(3)$ son $1, \frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{2}$ con vectores propios $(0,1,2), (-2,1,1)$ y $(0,1,-1)$ respectivamente. Se obtiene así que:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ y } P = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, se cumple que

$$\{Q_T(3)\}^k = P \cdot J^k \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^k} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3}\left(1 + \frac{(-1)^k}{2^{k+1}}\right) - \frac{1}{2^{k+1}} & \frac{1}{3}\left(1 + \frac{(-1)^k}{2^{k-1}}\right) & \frac{1}{3}\left(1 - \frac{(-1)^k}{2^k}\right) \\ \frac{1}{3}\left(2 - \frac{(-1)^k}{2^{k+1}}\right) - \frac{1}{2^{k+1}} & \frac{2}{3}\left(1 - \frac{(-1)^k}{2^k}\right) & \frac{1}{3}\left(2 + \frac{(-1)^k}{2^k}\right) \end{pmatrix}$$

Cuando k tiende a infinito se tiene que

$$\{Q_T(3)\}^\infty = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Algo curioso de esta matriz es que todos los elementos de la primera fila son ceros. Esto significa que la probabilidad de que se alcance $B(0,3)$, es decir, múltiplos de 3, es nula.

Por otro lado, para $m = 5$ cuando k tiende a infinito se tiene que

$$\{Q_T(5)\}^\infty = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Luego en este caso la probabilidad de que se alcance cualquier congruencia módulo 5 es $\frac{1}{5}$.

La siguiente proposición indica que la obtención de la matriz de Markov se simplifica cuando los números son pares.

Proposicion 6.10. *Si m es par, entonces:*

$$q_{ij}(m) = \begin{cases} \frac{1}{2} & si\ j \equiv T(i) \text{ mód } \frac{m}{2} \\ 0 & si\ j \not\equiv T(i) \text{ mód } \frac{m}{2} \end{cases} \tag{6.3}$$

Demostración. Cada elemento q_{ij} se corresponde con la probabilidad de que empleando la función T en los números pertenecientes al estado $B(i,m)$ alcancen valores en $B(j,m)$.

Sea i un número natural fijo y m un número par, veamos que sucede al calcular $T(B(i,m))$. Teniendo en cuenta que $B(i,m) = mk + i$ con k natural y que m es par, entonces la paridad de los valores pertenecientes a ese estado dependen de i.

Si i es par, entonces

$$T(mk+i) = \frac{mk+i}{2} = \frac{mk}{2} + \frac{i}{2} = \frac{mk}{2} + T(i).$$

Si por el contrario i es impar, entonces

$$T(mk+i) = \frac{3(mk+i)+1}{2} = \frac{3mk}{2} + \frac{3i+1}{2} = \frac{3mk}{2} + T(i).$$

De estas dos opciones se deduce el porque la probabilidad es 0 o $\frac{1}{2}$, pues siempre se alcanzan dos estados posibles con la misma probabilidad. De ambas igualdades se obtiene que $T(mk+i) = B(T(i), \frac{m}{2})$, luego para que $T(mk+i)$ tome valores en $B(j,m)$, debe cumplirse que $j \in B(T(i), \frac{m}{2})$. □

Ejemplo 6.11. *Teniendo en cuenta la proposición anterior, se va a calcular la matriz de Markov para $m = 4$.*

Primero se calculará la primera columna, es decir, los elementos q_{0j}:

$$q_{0j}(4) = \begin{cases} \frac{1}{2} & si\ j \equiv 0 \text{ mód } 2 \\ 0 & si\ j \not\equiv 0 \text{ mód } 2 \end{cases}$$

Luego q_{00} y q_{02} valen $\frac{1}{2}$, y q_{01} y q_{03} valen 0.

$$q_{1j}(4) = \begin{cases} \frac{1}{2} & si\ j \equiv 0 \text{ mód } 2 \\ 0 & si\ j \not\equiv 0 \text{ mód } 2 \end{cases}$$

Por tanto, para la columna $i = 1$, para $j = 0, 2$ vale $\frac{1}{2}$ y para el resto cero. Como $T(2) = 1 \equiv 1$ mód 2 y $T(3) = 5 \equiv 1$ mód 2, entonces q_{3j} y q_{4j} con $j = 1, 3$ son $\frac{1}{2}$, y el resto cero. Concluyendo que la matriz de Markov resultante es la siguiente:

$$Q_T(4) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Por tanto, podemos afirmar que tanto $B(0,4)$ como $B(1,4)$ pasan a los estados $B(0,4)$ y $B(2,4)$ con probabilidad $\frac{1}{2}$. Y por el contrario, $B(2,4)$ y $B(3,4)$ pasan a los estados $B(1,4)$ y $B(3,4)$.

A continuación, se va a tratar de determinar la matriz $\{Q_T(4)\}^k$. Realizando la descomposición de Jordan se obtiene que:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ y\ P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & -1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si $k \geq 2$, entonces se tiene que

$$J^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego se cumple que para $k \geq 2$:

$$\{Q_T(4)\}^k = P \cdot J^k \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Luego la probabilidad de alcanzar cualquier congruencia módulo 4 es la misma.

Para concluir estos ejemplos se tratará de comprobar computacionalmente si estos cálculos de $\{Q_T(m)\}^k$ son coherentes, pues teniendo en cuenta que la conjetura de Collatz afirma que se alcanza el ciclo (1,2), entonces todas las filas de la matriz deberían de ser un vector de ceros, excepto la segunda y la tercera (se corresponden con $B(1, m)$ y $B(2, m)$).

Se han tomado 10^6 números aleatorios entre 3 y 10^9. Inicialmente se ha mirado las congruencias módulo m de estos valores y se ha determinado su congruencia módulo m una vez iterados k veces, siendo $k = 50$, 100 y 1000.

Para $m = 3$ se obtienen los siguientes resultados:

$$\{Q_T(3)\}^{50} = \begin{pmatrix} 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.333 & 0.333 & 0.335 \\ 0.667 & 0.667 & 0.665 \end{pmatrix} \quad \{Q_T(3)\}^{100} = \begin{pmatrix} 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.363 & 0.364 & 0.364 \\ 0.636 & 0.636 & 0.636 \end{pmatrix}$$

$$\{Q_T(3)\}^{1000} = \begin{pmatrix} 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.501 & 0.497 & 0.499 \\ 0.499 & 0.503 & 0.501 \end{pmatrix}$$

Se puede ver que cuando $k = 50$, se obtiene la matriz esperada que se calculó previamente, donde la probabilidad de que un valor inicial cualquiera alcance en la iteración 50 un valor congruente con 1 módulo 3 es aproximadamente $\frac{1}{3}$, y un valor congruente con 2 módulo 3 es $\frac{2}{3}$. Por otro lado, cuando el número de iteraciones empieza a aumentar se tiene que las probabilidades de que el número pertenezca a $B(1, 3)$ y $B(2, 3)$ empiezan a ser similares.

Para $m = 4$:

$$\{Q_T(4)\}^{50} = \begin{pmatrix} 0.250 & 0.249 & 0.250 & 0.249 \\ 0.250 & 0.251 & 0.251 & 0.250 \\ 0.252 & 0.251 & 0.250 & 0.253 \\ 0.248 & 0.249 & 0.249 & 0.248 \end{pmatrix} \{Q_T(4)\}^{100} = \begin{pmatrix} 0.169 & 0.186 & 0.186 & 0.200 \\ 0.329 & 0.311 & 0.310 & 0.299 \\ 0.316 & 0.302 & 0.303 & 0.291 \\ 0.186 & 0.201 & 0.201 & 0.210 \end{pmatrix}$$

$$\{Q_T(4)\}^{1000} = \begin{pmatrix} 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.497 & 0.500 & 0.499 & 0.499 \\ 0.503 & 0.500 & 0.501 & 0.501 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \end{pmatrix}$$

En este caso sucede algo similar al anterior, pues con $k = 50$ se tiene que la probabilidad de que un valor itere en cualquier congruencia es la misma, es decir, se sigue una distribución uniforme. Sin embargo, elevar el número de iteraciones hace que la probabilidad de que el valor pertenezca a $B(0,4)$ y $B(3,4)$ vaya disminuyendo hasta obtener el valor 0 con $k = 1000$ (cosa lógica pues si la conjetura de Collatz es cierta, la función T alcanza el ciclo (1, 2)).

Para $m = 5$

$$\{Q_T(5)\}^{50} = \begin{pmatrix} 0.198 & 0.199 & 0.199 & 0.199 & 0.202 \\ 0.202 & 0.202 & 0.201 & 0.202 & 0.200 \\ 0.202 & 0.201 & 0.200 & 0.200 & 0.201 \\ 0.200 & 0.199 & 0.200 & 0.201 & 0.199 \\ 0.198 & 0.199 & 0.199 & 0.197 & 0.199 \end{pmatrix}$$

$$\{Q_T(5)\}^{100} = \begin{pmatrix} 0.163 & 0.162 & 0.163 & 0.162 & 0.164 \\ 0.262 & 0.263 & 0.261 & 0.262 & 0.260 \\ 0.276 & 0.275 & 0.277 & 0.276 & 0.277 \\ 0.150 & 0.150 & 0.150 & 0.149 & 0.150 \\ 0.149 & 0.151 & 0.149 & 0.151 & 0.150 \end{pmatrix}$$

$$\{Q_T(5)\}^{1000} = \begin{pmatrix} 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.501 & 0.500 & 0.499 & 0.499 & 0.500 \\ 0.499 & 0.500 & 0.501 & 0.501 & 0.499 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \end{pmatrix}$$

Como conclusión, se puede ver que cuando k es un valor lo suficientemente grande, como por ejemplo 1000, los valores iniciales ya han alcanzado el ciclo para esta iteración, y por ello se obtiene que la probabilidad de que salga 1 es aproximadamente $\frac{1}{2}$, y lo mismo para 2.

Tratando de generalizar estos resultados para las funciones de Collatz generalizadas, se cumple lo siguiente ([21]).

Teorema 6.12. *Sea T la función de Collatz generalizada con módulo d. El conjunto $T^{-1}(B(j,m))$ es una unión disjunta de $N_{j,m}$ clases de congruencia módulo md donde*

$$N_{j,m} = \sum_{\substack{i=0 \\ mcd(m_i,m)|j-T(i)}}^{d-1} mcd(m_i, m)$$

con $T(i) = \frac{m_i i - r_i}{d}$. En concreto, para las funciones de tipo relativamente primo, como se tiene que $mcd(m_i, m) = 1$ para $i = 0...d-1$, entonces $N_{j,m} = d$.

Bibliografía

[1] Allouche, J. P. Sur la conjecture de "Syracuse-Kakutani-Collatz", Seminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux, 8:1-16. 1978. <http://eudml.org/doc/182044> [Consulta: 3 abril 2024].

[2] Akin, E. The general topology of dynamical systems. Graduate Studies in Mathematics, American Mathetmatical Society, Providence. 1993.

[3] Buttsworth, R. y Matthews, K. On some Markov matrices arising from the generalized Collatz mapping, Acta Arithmetica, 55:43-57. 1990. <http://eudml.org/doc/206268> [Consulta: 30 abril 2024].

[4] Charles, F. Roscoe, H. Aparecido, T. An analysis of the Collatz Conjecture. Department of Mathematics, IMECC/UNICAMP. 2022. <https://www.csun.edu/~vcmth02i/Collatz.pdf> [Consulta: 30 abril 2024].

[5] Conway, J. H. FRACTRAN: A simple universal programming language for arithmetic. Open Problems in Communication and Computation, Springer-Verlag, 2:4-26. 1987.

[6] Eliahou, S. The 3x+ 1 problem: new lower bounds on nontrivial cycle lengths, Discrete Mathematics, 118:45-56. 1993.<https://doi.org/10.1016/0012-365X(93)90052-U> [Consulta: 22 de mayo 2024].

[7] Everett, C. J. Iteration of the number theoretic function $f(2n) = n, f(2n+1) = 3n+2$, Advances in Math, 25:42-45. 1977. <https://doi.org/10.1016/0001-8708(77)90087-1> [Consulta: 22 de mayo 2024].

[8] Gao, G. On consecutive numbers of the same height in the Collatz problem. Discrete Mathematics, 112:261-267. 1993. <https://doi.org/10.1016/0012-365X(93)90240-T> [Consulta: 30 de mayo 2024].

[9] Garner, L. E. On the Collatz $3n+1$ Algorithm. Proceedings of the American Mathematical Society, 82:19-22. 1981. < https://doi.org/10.2307/2044308 > [Consulta: 22 de mayo 2024].

[10] Guy, R. K. Unsolved Problems in Number Theory. Problem Books in Mathematics, Springer-Verlag. 2004.

[11] Hercher, C. Über die Länge nicht-trivialer Collatz-Zyklen. Die Wurzel 6 7. 2018.

[12] Isard, S. D. y Zwicky, H. M. Three open questions in the theory of one-symbol Smullyan systems, SIGACT News. 1970. <https://doi.org/10.1145/1247059.1247061 > [Consulta: 31 de mayo 2024].

[13] Kontorovich, A.V. y Lagarias, J. C. Stochastic models for the 3x + 1 problem and generalizations. En The ultimate challenge: the $3x+1$ problem. Ed. por Lagrarias, J. C. American Mathematical Society, 131-188. 2010.

[14] Korec, I. A density estimate for the 3x + 1 problem. Mathematica Slovaca, 44:85-89. 1994. < http://eudml.org/doc/32414 > [Consulta: 22 de mayo 2024].

[15] Krasikov, I y Lagarias, J. C. Bounds for the 3x + 1 problem using difference inequalities, Acta Arithmetica 109:237–258. 2003. < https://doi.org/10.48550/arXiv.math/0205002 > [Consulta: 22 de mayo 2024].

[16] Kuttler, J. R. On the $3x+1$ Problem. Advances in applied mathematics, 15:183-185. 1994. <https://doi.org/10.1006/aama.1994.1006> [Consulta: 25 de mayo 2024].

[17] Lagarias, J. C. The 3x + 1 problem and its generalizations. The American Mathematical Monthly, vol. 92, 3-23. 1985. <https://doi.org/10.2307/2322189> [Consulta: 21 mayo 2024].

[18] Lagarias, J. C. The Ultimate Challenge: The $3x+1$ Problem. American Mathematical Society. 2010.

[19] Lagrarias J.C. y Weiss A. The $3x+1$ Problem: Two Stochastic Models. The Annals of Applied Probability, 229-261. 1992. <https://doi.org/10.1214/aoap/1177005779> [Consulta: 25 de mayo 2024].

[20] Leavens, G.T. A Distributed Search Program for the 3x + 1 Problem. Department of Computer Science, Iowa State University. 1989. <https://dr.lib.iastate.edu/handle/20.500.12876/19951> [Consulta: 21 mayo 2024].

[21] Matthews, K. R. Generalized $3x+1$ mappings: Markov chains and ergodic theory. En The ultimate challenge: the $3x+1$ problem. Ed. por Lagrarias, J. C. American Mathematical Society, 79-103. 2010.

[22] Matthews, K. R. y Watts, A. M. A generalization of Hasse's generalization of the Syracuse algorithm. Acta Arithmetica, 167-175. 1984. < http://eudml.org/doc/205897 > [Consulta: 15 mayo 2024].

[23] OEIS Foundation Inc. Length of the longest sequence of consecutive numbers which all take the same number of steps to reach 1 in the Collatz (or '3x+1') problem starting from 2^n+1, A277109 in The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. 2024. < https://oeis.org/A277109 > [Consulta: 1 mayo 2024].

[24] Oliverira e Silva, T. Empirical Verification of the $3x+1$ and Related Conjectures, En The Ultimate Challenge: The $3x+1$ Problem, American Mathematical Society, 189-207. 2010.

[25] Oliveira e Silva, T. Maximum excursion and stopping time record-holders for the $3x+1$ problem: computational results, Math Comput 68 (225):371–384. 1999. <https://doi.org/10.1090/S0025-5718-99-01031-5> [Consulta: 21 mayo 2024].

[26] Tao, T. The Notorious Collatz conjecture. UCLA. 2020. <https://terrytao.files.wordpress.com/2020/02/collatz.pdf> [Consulta: 1 junio 2024].

[27] Tao, T. Almost all Collatz orbits attain almost bounded values. Forum of Mathematics, Pi, 10. 2022. <https://doi.org/10.1017/fmp.2022.8> [Consulta: 11 mayo 2024].

[28] Terras, R. A stopping time problem on the positive integers. Acta Arithmetica, 241-252. 1976. <http://eudml.org/doc/205476> [Consulta: 27 mayo 2024].

[29] Wirsching, G. J. The Dynamical System Generated by the $3n+1$ Function. Springer-Verlag. 1998.

Apéndice: Códigos R y Python

Los códigos de Python y R empleados para distintos ejemplos y gráficas han sido los siguientes:

```
import math
import matplotlib.pyplot as plt
def collatz_trayectoriaC(n):
    trayectoria = [n]
    while n != 1:
        if n % 2 == 0:
            n = n // 2
        else:
            n = (3 * n + 1)
        trayectoria.append(n)
    return trayectoria

def collatz_trayectoriaT(n):
    trayectoria = [n]
    while n != 1:
        if n % 2 == 0:
            n = n // 2
        else:
            n = (3 * n + 1)//2
        trayectoria.append(n)
    return trayectoria

def plot_collatz(n):
    trayectoriaC = (collatz_trayectoriaC(n))
    trayectoriaT= (collatz_trayectoriaT(n))
    plt.plot(trayectoriaC, marker='o', linestyle='-')
    plt.plot(trayectoriaT, marker='o', linestyle='-')
    plt.title(f'Secuencia de Collatz para n={n}')
    plt.xlabel('Paso')
    plt.ylabel('Valor')
    plt.legend()
    plt.grid(True)
    plt.show()
```

```
def tiempo_de_parada(n):
    tiempo=1
    m=collatz_trayectoriaT(n)[1]
    while m>n:
        tiempo=tiempo+1
        m=collatz_trayectoriaT(n)[tiempo]
    return tiempo


plot_collatz(numero_inicial)
print(f'Trayectoria para T(n) de {numero_inicial}:
{collatz_trayectoriaT(numero_inicial)}')
print(f'Trayectoria para C(n) de {numero_inicial}:
{collatz_trayectoriaC(numero_inicial)}')
print("Tiempo de parada:",tiempo_de_parada(numero_inicial),
" / Tiempo total de parada:
",len(collatz_trayectoriaT(numero_inicial))-1,"
/ Altura:",len(collatz_trayectoriaC(numero_inicial))-1)
```

Si se toma por ejemplo "*numero_inicial* = 13", entonces el programa devuelve lo siguiente:

```
Trayectoria para T(n) de 13:[13, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1]
Trayectoria para C(n) de 13:[13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1]
Tiempo de parada: 2 / Tiempo total de parada: 7  / Altura: 9
```

Para la Figura 5.2 se ha empleado al siguiente código de Python:

```
import matplotlib.pyplot as plt
import math

def collatz_tiempo_total(n):
    tiempototal = 0
    while n != 1:
        if n % 2 == 0:
            n = n // 2
        else:
            n = (3 * n + 1) // 2
        tiempototal += 1
    return tiempototal

# Calcular los tiempos totales para los numeros del 1 al 100
numeros = list(range(1, 101))
tiempos_total = [collatz_tiempo_total(n) for n in numeros]
aproximacion = [-2 * math.log(n) / math.log(3/4) for n in numeros]
cota_inferior = [math.log(n) / math.log(2) for n in numeros]
```

```
# Crear el grafico
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(numeros, tiempos_total, marker='o', markersize=2,
linestyle='-', label='Tiempo total real')
plt.plot(numeros, aproximacion, marker='o', markersize=2,
linestyle='-', label='Aproximacion del tiempo total')
plt.plot(numeros, cota_inferior, marker='o', markersize=2,
linestyle='-', label='Cota inferior del tiempo total')
plt.xlabel('Valores iniciales')
plt.ylabel('Tiempo total de parada')
plt.grid(axis='y')
plt.xlim(-1, 102)
plt.ylim(0, 90)
plt.legend(loc='upper left')
plt.show()
```

Para la Figura 5.3:

```
n = range(2, 1000)
rho=[math.log(max(collatz_trayectoriaT(num)))/math.log(num)
for num in n]
print([val for val in rho if val > 2])
# Marca en rojo los puntos donde rho > 2
plt.plot(n,rho, marker='.', linestyle='', markersize=5,
color='blue')
plt.plot([i+2 for i, val in enumerate(rho) if val > 2],
[val for val in rho if val > 2], marker='.', markersize=5,
color='red', linestyle='')
plt.xlabel('Valores iniciales')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

Para la Figura 5.4:

```
numeros = range(2, 1000)
gamma= [collatz_tiempo_total(n)/math.log(n) for n in numeros]
plt.plot(numeros,gamma, marker='.', linestyle='', markersize=5)
plt.xlabel('Valores iniciales')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

El código de R empleado para las frecuencias de ceros y unos de los vectores de paridad y para la Figura 5.1 es el siguiente:

```
proporcionceros <- numeric(100000)
proporcionunos <- numeric(100000)
for (i in 2:100001) {
  n <- i
  ceros <- 0
  unos <- 0
  if (n %% 2 == 0) {
    ceros <- ceros + 1
  } else {
    unos <- unos + 1
  }

  while (n != 1) {
    if (n %% 2 == 0) {
      n <- n / 2
    } else {
      n <- (3 * n + 1)/2
    }

    if (n %% 2 == 0) {
      ceros <- ceros + 1
    } else {
      unos <- unos + 1
    }
  }
  proporcionceros[i-1] <- ceros / (ceros + unos)
  proporcionunos[i-1] <- unos / (ceros + unos)
}

cat("Media de proporciones de ceros:", mean(proporcionceros))
cat("Media de proporciones de unos:", mean(proporcionunos))
cat("Mediana de proporciones de ceros:", median(proporcionceros))
cat("Mediana de proporciones de unos:", median(proporcionunos))

plot(proporcionceros, type = "p", col = "blue", xlab = "Valor
inicial", ylab = "Frecuencia",ylim = c(0, 1),cex=0.5,pch=20)
```

Para los ejemplos del último capítulo, en concreto para calcular $\{Q_T(3)\}^k$ con $k = 50, 100, 1000$, se he empleado el siguiente código de Python. Para $m = 4, 5$ el código es equivalente.

```
import random
def collatzT(n,k):
    for _ in range(k):
        if n % 2 == 0:
            n //= 2
        else:
            n = (3 * n + 1) // 2
    return n

def main():
    numeros = [random.randint(3, 10**9) for _ in range(1000000)]

    modulo_3_inicial = {0: 0, 1: 0, 2: 0}
    modulo_3_final = {0: [0, 0, 0], 1: [0, 0, 0], 2: [0, 0, 0]}

    for numero in numeros:
        modulo = numero % 3
        modulo_3_inicial[modulo] += 1

        iteracionfinal= collatzT(numero,k)
        modulo_3_final[modulo][iteracionfinal % 3] += 1

    print("Distribucion de las congruencias modulo 3:")
    for modulo, valores in modulo_3_inicial.items():
        print("Numeros congruentes con", modulo, " modulo 3:",
        valores)
        print("Probabilidades de las soluciones modulo 3 despues de",
        k,"iteraciones:")
        for solucion_modulo, solucion_valor in enumerate
        (modulo_3_final[modulo]):
            frecuencia= solucion_valor / valores
            print("Proporcion de ", solucion_modulo, "modulo 3:",
            frecuencia)

if __name__ == "__main__":
    main()
```

Por último, se han creado varias tablas, que se mostrarán a continuación, empleando el siguiente código:

```
Intervalo = range(1,10**5+1)

max_trayectoria_valor = 0
max_trayectoria_n = 0

max_tiempo_valor = 0
max_tiempo_n = 0
max_tiempo_trayectoria_valor = 0

for num in Intervalo:
    trayectoria = collatz_trayectoriaT(num)
    max_valor = max(trayectoria)
    tiempo_total = len(trayectoria) - 1

    if max_valor > max_trayectoria_valor:
        max_trayectoria_valor = max_valor
        max_trayectoria_n = num

    if tiempo_total > max_tiempo_valor:
        max_tiempo_valor = tiempo_total
        max_tiempo_n = num
        max_tiempo_trayectoria_valor = max_valor

print("Maximo valor de la trayectoria mayor:", max_trayectoria_valor)
print("Correspondiente valor de n:", max_trayectoria_n)
print("Tiempo de parada:", tiempo_de_parada(max_trayectoria_n),
" / Tiempo total de parada:", len(collatz_trayectoriaT(
max_trayectoria_n))- 1, " / Altura:",
len(collatz_trayectoriaC(max_trayectoria_n)) - 1)

print("\nMaximo valor de tiempo total:", max_tiempo_valor)
print("Correspondiente valor de n:", max_tiempo_n)
print("Maximo valor de la trayectoria:", max_tiempo_trayectoria_valor)
print("Tiempo de parada:", tiempo_de_parada(max_tiempo_n),
" / Tiempo total de parada:", len(collatz_trayectoriaT(max_tiempo_n))
- 1," / Altura:", len(collatz_trayectoriaC(max_tiempo_n)) - 1)
```

Dado n un valor inicial, entonces se tiene que $t(n)$ es el valor máximo de la trayectoria de n, $\sigma(n)$ es el tiempo de parada, $\sigma_\infty(n)$ es el tiempo total de parada y $h(n)$ es la altura. Para cada intervalo se ha calculado el valor inicial para el cual se obtiene un valor de $t(n)$ superior y el valor inicial para el cual el tiempo total de parada es superior. Además, para ambos valores se han calculado los parámetros anteriores.

Para intervalos de tamaño 10^5:

Intervalo	Valor inicial n	$t(n)$	$\sigma(n)$	$\sigma_\infty(n)$	$h(n)$
$[1, 10^5]$	77 671	785 412 368	105	148	231
	77 031	10 966 508	89	221	350
$[10^5, 2 \cdot 10^5]$	159 487	8 601 188 876	72	119	183
	156 159	20 581 856	37	241	382
$[2 \cdot 10^5, 3 \cdot 10^5]$	270 271	12 324 038 948	164	256	406
	230 631	38 389 004	73	278	442
$[3 \cdot 10^5, 4 \cdot 10^5]$	360 361	12 324 038 948	2	258	409
	345 947	38 389 004	70	277	440
$[4 \cdot 10^5, 5 \cdot 10^5]$	405 407	12 324 038 948	162	255	404
	410 011	38 389 004	75	282	448
$[5 \cdot 10^5, 6 \cdot 10^5]$	540 542	12 324 038 948	1	257	407
	511 935	38 389 004	16	295	469
$[6 \cdot 10^5, 7 \cdot 10^5]$	665 215	26 241 642 656	140	278	441
	626 331	3 611 141 594	176	319	508
$[7 \cdot 10^5, 8 \cdot 10^5]$	704 511	28 495 741 760	73	156	242
	704 623	3 611 141 594	173	316	503
$[8 \cdot 10^5, 9 \cdot 10^5]$	886 953	26 241 642 656	2	280	444
	837 799	1 487 492 288	105	329	524
$[9 \cdot 10^5, 10^6]$	997 823	26 241 642 656	138	277	439
	939 497	3 611 141 594	2	318	506

A continuación se muestran dos tablas para intervalos de tamaño 10^6 y 10^7.

Intervalo	Valor inicial n	$t(n)$	$\sigma(n)$	$\sigma_\infty(n)$	$h(n)$
$[10^6, 2 \cdot 10^6]$	1 988 859	78 457 189 112	135	270	427
	1 723 519	23 285 935 970	176	349	556
$[2 \cdot 10^6, 3 \cdot 10^6]$	2 684 647	176 308 906 472	99	253	399
	2 298 025	23 285 935 970	2	351	559
$[3 \cdot 10^6, 4 \cdot 10^6]$	3 873 535	429 277 584 788	124	206	322
	3 732 423	147 237 796 160	8	374	596
$[4 \cdot 10^6, 5 \cdot 10^6]$	4 637 979	659 401 147 466	156	360	573
	4 723 849	147 237 796 160	2	368	586
$[5 \cdot 10^6, 6 \cdot 10^6]$	5 656 191	1 206 246 808 304	200	254	400
	5 649 499	508 943 330	116	384	612
$[6 \cdot 10^6, 7 \cdot 10^6]$	6 631 675	30 171 305 459 816	222	362	576
	6 649 279	7 604 364 104	146	416	664
$[7 \cdot 10^6, 8 \cdot 10^6]$	7 460 635	30 171 305 459 816	219	359	571
	7 332 399	75 155 868 980	138	386	615
$[8 \cdot 10^6, 9 \cdot 10^6]$	8 393 215	30 171 305 459 816	214	356	566
	8 400 511	79 712 307 440	214	429	685
$[9 \cdot 10^6, 10^7]$	9 947 513	30 171 305 459 816	2	361	574
	9 973 919	7 604 364 104	121	415	662

Intervalo	Valor inicial n	$t(n)$	$\sigma(n)$	$\sigma_\infty(n)$	$h(n)$
$[10^7, 2 \cdot 10^7]$	19 638 399	153 148 462 601 876	264	381	606
	15 733 191	79 712 307 440	8	441	704
$[2 \cdot 10^7, 3 \cdot 10^7]$	29 457 599	153 148 462 601 876	260	380	604
	23 599 787	79 712 307 440	5	440	702
$[3 \cdot 10^7, 4 \cdot 10^7]$	38 595 583	237 318 849 425 546	181	306	483
	36 791 535	79 712 307 440	34	466	744
$[4 \cdot 10^7, 5 \cdot 10^7]$	41 378 025	153 148 462 601 876	2	390	620
	46 564 287	79 712 307 440	27	460	734
$[5 \cdot 10^7, 6 \cdot 10^7]$	51 460 777	23 731 884 9425 546	2	308	486
	55 187 303	79 712 307 440	32	465	742
$[6 \cdot 10^7, 7 \cdot 10^7]$	64 253 419	237 318 849 425 546	5	321	507
	63 728 127	483 308 017 730	376	592	949
$[7 \cdot 10^7, 8 \cdot 10^7]$	72 285 097	237 318 849 425 546	2	318	502
	73 583 070	79 712 307 440	1	467	745
$[8 \cdot 10^7, 9 \cdot 10^7]$	80 049 391	1 092 571 914 585 050	243	361	572
	86 010 015	1 588 650 472 988	216	499	797
$[9 \cdot 10^7, 10^8]$	93 596 391	1 092 571 914 585 050	267	385	611
	95 592 191	483 308 017 730	368	591	947