FACULTAD
DE
CIENCIAS

Introducción a las Ecuaciones Diferenciales con Retardo

(Introduction to Delay Differential Equations)

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autor: Pablo Madrazo Presmanes

Director: Delfina Gómez Gandarillas

Junio-2024

Resumen

Resumen

Las ecuaciones diferenciales con retardo aparecen con frecuencia en diferentes problemas de diversas disciplinas como la medicina, la biología, la ingeniería o la economía. Se caracterizan por tener en cuenta la influencia de estados anteriores en el comportamiento actual del sistema. Sus soluciones no siempre son fáciles de calcular e incluso en ciertas situaciones no existen. Por eso, el objetivo de este trabajo es, por un lado, mostrar diversos ejemplos resolubles utilizando distintos métodos y, por otro lado, proporcionar ciertos resultados que garanticen la existencia y unicidad de solución de un problema de ecuaciones diferenciales con retardo y función inicial.

Palabras clave: ecuaciones diferenciales, retardo, existencia y unicidad, método de pasos.

Abstract

Delay differential equations frequently appear in different problems from various disciplines such as medicine, biology, engineering or economics. They are characterized by taking into account the influence of previous states on the current behavior of the system. Their solutions are not always easy to calculate and even in certain situations they do not exist. Therefore, the aime of this work is, on the one hand, to show various solvable examples using different methods and, on the other hand, to provide certain results that guarantee the existence and uniqueness of solution of a delay differential equations problem and initial function.

Keywords: differential equations, delay, existence and uniqueness, method of steps.

Índice general

Introducción

A inicios del siglo XVII comenzó a desarrollarse el estudio de las ecuaciones diferenciales a partir de ciertos trabajos realizados por Leibniz y Newton. Estos textos proporcionaban modelos que respondían a problemas de física como la termodinámica, ondas o mecánica.

Durante los siglos XIX y XX, Malthus, Verhulst, Lotka-Volterra, Gompertz y otros autores estudian modelos que trabajan en el crecimiento de poblaciones, los cuales suponen que los organismos reacionan inmediatamente a la presencia de estímulos. Sin embargo, esto no siempre es cierto, por ejemplo, un depredador necesita tiempo para consumir a su presa o al estudiar una epidemia no basta con conocer la cantidad de infectados en un tiempo dado, sino observar cómo fue la evolución en un periodo pasado para predecir mejor su futuro. Pero las ecuaciones diferenciales ordinarias no reflejan el comportamiento de ciertos procesos que se ven afectados por instancias pasadas, por lo que surgen las ecuaciones diferenciales con retardo para modelar dicho comportamiento (ver [1]).

Las ecuaciones diferenciales con retardo se desarrollaron durante la segunda mitad del siglo XX implicando un gran cambio de enfoque, ya que han permitido modelar diversos problemas de forma más adecuada que con las ecuaciones ordinarias. Estas ecuaciones, que se han utilizado para describir problemas de biología, ingeniería, medicina y economía (ver [4]), son aquellas que representan ciertos procesos donde la variable de estado en un tiempo determinado depende de estados asociados a tiempos anteriores (ver [1] y [9]).

De esta forma, la inclusión de los retardos en una ecuación diferencial es conveniente a la hora de modelar ciertos problemas. Sin embargo, su resolución resulta, en general, un problema matemático más complicado que las ecuaciones ordinarias. Para resolver estas ecuaciones, se necesita añadir a la ecuación diferencial con retardo una condición inicial, la cual no será un número o un vector como en el caso de ecuaciones ordinarias, sino que es una función continua en el intervalo $[t_0 - \tau, t_0]$ para $\tau > 0$. Esto provoca que los problemas de ecuaciones con retardo involucren trabajar con espacios de funciones de dimensión infinita, lo que no sucede para las ordinarias.

Al tratarse de problemas que no son fáciles de resolver, donde en múltiples ocasiones no se sabe obtener su solución, uno de los objetivos de este trabajo será estudiar resultados que garanticen la existencia y unicidad de solución de un problema de ecuaciones con retardo y una función inicial como el que se muestra a continuación

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)) & \text{para } t \geq t_0, \\ x(t) = \theta(t) & \text{para } t_0 - \tau \leq t \leq t_0. \end{cases} \tag{1}$$

Para comenzar este trabajo, en el primer capítulo, se introducen dos ejemplos de problemas matemáticos que son adecuados para ser modelados por ecuaciones diferenciales con retardo. Estos ejemplos son la mezcla de líquidos en un tanque y el crecimiento de una población. Además, se muestra el método de los pasos como técnica para resolver estos dos problemas. Y por último, se aplica la transformada de Laplace a una ecuación con retardo, proporcionando otro procedimiento para encontrar la solución.

En el segundo capítulo se estudia la existencia y unicidad para problemas de ecuaciones con retardo discreto. Se empieza introduciendo conceptos y notaciones acerca de la ecuación diferencial con retardo. Seguido, se expone un breve repaso sobre los teoremas de existencia y unicidad de solucion del problema de valores iniciales en el caso de ecuaciones ordinarias que servirá para comparar con los resultados que veremos para ecuaciones con retardo, además de introducir el concepto de función Lipschitz o la forma integral del problema que se han visto a lo largo de nuestros estudios universitarios. Una vez explicados todos estos conceptos previos, en la sección 2.3, se analiza la existencia y unicidad de solución local para un problema asociado a una ecuación con retardo discreto aplicando el método de los pasos y lo visto para ecuaciones ordinarias. Mientras que en la última sección se expondrá un resultado global para el caso de ecuaciones lineales con retardo discreto.

Y para terminar, en el último capítulo se analizarán resultados de existencia y unicidad para ecuaciones con retardo más generales. En primer lugar, se reescribe el problema de condiciones iniciales para una ecuación con retardo general de manera que se describa el valor de la función en un intervalo hasta t en lugar de solo en el punto t. En la segunda sección, se escribe el problema con retardo en forma de una ecuación integral para posteriormente estudiar la existencia y unicidad de solución que abarcará las dos últimas secciones.

Capítulo 1

Algunos ejemplos de problemas con ecuaciones con retardo

Las ecuaciones diferenciales con retardo (EDR) aparecen en modelos de diversas disciplinas como la medicina, la biología, la ingeniería o la economía, donde la variación de la variable de estado x con el tiempo depende en cada instante t no sólo de $x(t)$ sino también de valores de x en instantes anteriores. Es por eso, que en ciertos problemas su modelización es más adecuada a través de ecuaciones con retardo que con ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) que también suelen utilizarse en la modelización. (ver por ejemplo la referencia [4]).

En este primer capítulo introduciremos dos ejemplos de problemas matemáticos que son apropiados para ser modelados a través de ecuaciones diferenciales con retardo. El primero de ellos estudia la mezcla de líquidos cuando la disolución no se produce de forma instantánea, mientras que el segundo aborda modelos de poblaciones donde la reacción biológica ocurre transcurrido cierto tiempo. Ambos problemas son presentados y resueltos por el método de los pasos. Además, también se explicará otro método de resolución de problemas con retardo que es aplicando la transformada de Laplace. Todo esto resultará idóneo para comenzar a meternos de lleno en este tema. Para ello, nos basaremos principalmente en las referencias [3] y [9], con la ayuda de otras referencias como [5] y [12].

1.1. Mezcla de líquidos

El primer problema que sirve para mostrar el uso de las ecuaciones diferenciales con retardo es la mezcla de salmuera y agua dulce en un tanque (ver las referencias [3] y [9]). Consideramos un tanque con capacidad de B litros, lleno de salmuera, en el cual, desde la parte superior, se añade agua a razón de q litros por minuto. La salmuera en el tanque es removida continuamente y la disolución mezclada sale a través de un orificio en el fondo, también a razón de q litros por minuto. Estamos interesados en determinar la cantidad de sal que queda en el tanque en función del tiempo.

Denotamos por $x(t)$ la cantidad de sal (en kilogramos) en el tanque en el tiempo t (en minutos). Si suponemos que la salmuera se mezcla con el agua de forma instantánea y uniforme, entonces la mezcla que sale del tanque contiene $x(t)/B$ kg de sal por litro, de tal forma que la variación con respecto al tiempo de la cantidad de sal en el tanque es

$$x'(t) = -\frac{q}{B}x(t) \quad t \geq t_0.$$

Si llamamos $c = q/B$ y consideramos la condición inicial $x(t_0) = a$, la cual nos indica la cantidad de sal que contiene el tanque en el instante inicial t_0, se obtiene el problema

$$\begin{cases} x'(t) = -cx(t) & \text{si} \quad t \geq t_0, \\ x(t_0) = a. \end{cases} \tag{1.1}$$

Dicho problema está compuesto por una ecuación diferencial ordinaria lineal, donde la solución de (1.1) viene dada por

$$x(t) = ae^{-c(t-t_0)} \quad \text{para} \quad t \geq t_0. \tag{1.2}$$

Ahora suponemos que la mezcla no es instantánea, es decir, que el cambio de concentración del tanque en el tiempo t depende de la concentración media en un instante anterior $t - \tau$, donde τ es una constante positiva. En este caso la ecuación diferencial que define la cantidad de sal del tanque es

$$x'(t) = -cx(t - \tau) \tag{1.3}$$

es decir, una ecuación diferencial con retardo.

En primer lugar nos preguntamos qué tipos de condiciones iniciales debemos imponer para obtener un problema con solución única asociado a (1.3). La respuesta más natural que podemos encontrar a esta pregunta es tomar una función inicial en el intervalo $[t_0 - \tau, t_0]$ de longitud $\tau > 0$, e imponer que satisfaga la ecuación (1.3) para $t \geq t_0$. Es decir

$$\begin{cases} x'(t) = -cx(t - \tau) & \text{si} \ \ t \geq t_0, \\ x(t) = \theta(t) & \text{si} \ \ t_0 - \tau \leq t \leq t_0 \end{cases} \tag{1.4}$$

donde θ es una función dada.

Para resolver este problema vamos a utilizar el "método de los pasos"(ver [3] y [13]). Este método se lleva a cabo de forma iterativa, primero se considera el intervalo $[t_0, t_0 + \tau]$ y se utiliza la función inicial de tal forma que la ecuación con retardo se convierta en una EDO. Una vez resuelta la EDO en dicho intervalo, el proceso se repite para un nuevo intervalo $[t_0 + \tau, t_0 + 2\tau]$, tomando como función inicial la solución obtenida previamente. Este proceso se continúa hasta obtener la solución en un cierto intervalo o identificar un patrón que permita construir la solución en otros intervalos.

A continuación, se va a resolver el problema (1.4) eligiendo la función inicial constante $\theta(t) = a$, ya que representa el caso más sencillo. En efecto, considerando $t_0 \leq t \leq t_0 + \tau$

se obtiene que $t_0 - \tau \leq t - \tau \leq t_0$, y por tanto, utilizando la función inicial de (1.4), $x(t-\tau) = a$. Sustituyendo en la ecuación con retardo (1.4) nos lleva a la EDO

$$x'(t) = -ca, \quad t_0 \leq t \leq t_0 + \tau.$$

Integrando la expresión anterior entre t_0 y t verificando $t_0 \leq t \leq t_0 + \tau$, y teniendo en cuenta la condición inicial $x(t_0) = a$, se llega a la solución

$$x(t) = x(t_0) - \int_{t_0}^{t} ca\, ds = a - ca(t - t_0), \quad t_0 \leq t \leq t_0 + \tau. \tag{1.5}$$

Ahora determinamos la solución en el intervalo $[t_0 + \tau, t_0 + 2\tau]$. Razonando de forma análoga al caso anterior, tenemos que $t_0 \leq t - \tau \leq t_0 + \tau$, y utilizando (1.5) nos lleva a que $x(t-\tau) = a - ca(t - \tau - t_0)$. Sustituyendo esta expresión en (1.4) se obtiene la ecuación

$$x'(t) = -ca + c^2a(t - \tau - t_0), \quad t_0 + \tau \leq t \leq t_0 + 2\tau$$

y la condición inicial

$$x(t_0 + \tau) = a - ca\tau.$$

Integrando la expresión anterior entre $t_0 + \tau$ y t verificando $t_0 + \tau \leq t \leq t_0 + 2\tau$, se tiene

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_0 + \tau) + \int_{t_0+\tau}^{t} \big[-ca + c^2a(s - \tau - t_0) \big]\, ds \\ &= x(t_0 + \tau) - cas \Big|_{t_0+\tau}^{t} + \frac{c^2a(s - \tau - t_0)^2}{2} \Big|_{t_0+\tau}^{t}. \end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de $x(t_0 + \tau)$ y operando, obtenemos la expresión

$$\begin{aligned} x(t) &= a - ca\tau - ca(t - t_0 - \tau) + \frac{c^2a(t - \tau - t_0)^2}{2} \\ &= a - ca(t - t_0) + \frac{c^2a(t - \tau - t_0)^2}{2} \quad t_0 + \tau \leq t \leq t_0 + 2\tau. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Repetimos el proceso una vez más en el intervalo $[t_0 + 2\tau, t_0 + 3\tau]$. Razonando de forma análoga al caso anterior, tenemos que si $t_0 + 2\tau \leq t \leq t_0 + 3\tau$, entonces $t_0 + \tau \leq t - \tau \leq t_0 + 2\tau$, lo que nos lleva a

$$x(t - \tau) = a - ca(t - \tau - t_0) + \frac{c^2a(t - 2\tau - t_0)^2}{2}, \quad t_0 + \tau \leq t \leq t_0 + 2\tau$$

y sustituyendo esto en (1.4) se tiene

$$x'(t) = -ca + c^2a(t - \tau - t_0) - \frac{c^3a(t - 2\tau - t_0)^2}{2}, \quad t_0 + 2\tau \leq t \leq t_0 + 3\tau \tag{1.7}$$

con condición inicial

$$x(t_0 + 2\tau) = a - 2ca\tau + \frac{c^2a\tau^2}{2}.$$

Integrando la expresión (1.7) entre $t_0+2\tau$ y t verificando $t_0+2\tau \le t \le t_0+3\tau$ llegamos a

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_0+2\tau) + \int_{t_0+2\tau}^{t} [-ca + c^2a(s-\tau-t_0) - \frac{c^3a(s-2\tau-t_0)^2}{2}]\, ds \\ &= x(t_0+2\tau) - cas\Big|_{t_0+2\tau}^{t} + \frac{c^2a(s-\tau-t_0)^2}{2}\Big|_{t_0+2\tau}^{t} - \frac{c^3a(s-2\tau-t_0)^3}{6}\Big|_{t_0+2\tau}^{t}. \end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de $x(t_0+2\tau)$, se obtiene la función

$$\begin{aligned} x(t) &= a - 2ca\tau + \frac{c^2a\tau^2}{2} - ca(t-t_0-2\tau) + \frac{c^2a(t-\tau-t_0)^2}{2} - \frac{c^2a\tau^2}{2} - \frac{c^3a(t-2\tau-t_0)^3}{6} \\ &= a - ca(t-t_0) + \frac{c^2a(t-\tau-t_0)^2}{2} - \frac{c^3a(t-2\tau-t_0)^3}{6}, \quad t_0+2\tau \le t \le t_0+3\tau. \end{aligned} \tag{1.8}$$

A la vista de las expresiones (1.5), (1.6) y (1.8) podemos conjeturar que la forma de la solución en cada intervalo temporal de longitud τ es

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k ac^k (t-t_0-(k-1)\tau)^k}{k!}, \quad t_0+(n-1)\tau \le t \le t_0+n\tau, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.9}$$

Probemoslo ahora por inducción.

Claramente se verifica para $n=1$ por (1.5). Vamos a suponerlo cierto para n y lo vamos a demostrar para $n+1$.
Si t verifica $t_0+n\tau \le t \le t_0+(n+1)\tau$, tenemos que $t_0+(n-1)\tau \le t-\tau \le t_0+n\tau$ y por hipótesis

$$x(t-\tau) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k ac^k (t-\tau-t_0-(k-1)\tau)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k ac^k (t-t_0-k\tau)^k}{k!}.$$

Sustituyéndolo en (1.4) se obtiene

$$x'(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1} ac^{k+1} (t-t_0-k\tau)^k}{k!} \quad t_0+n\tau \le t \le t_0+(n+1)\tau \tag{1.10}$$

con condición inicial

$$x(t_0+n\tau) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k ac^k (n\tau-(k-1)\tau)^k}{k!}. \tag{1.11}$$

Integrando en (1.10) entre $t_0+n\tau$ y t verificando $t_0+n\tau \le t \le t_0+(n+1)\tau$ y operando llegamos a

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_0+n\tau) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1} ac^{k+1} (s-t_0-k\tau)^{k+1}}{(k+1)!}\Big|_{t_0+n\tau}^{t} \\ &= x(t_0+n\tau) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1} ac^{k+1} (t-t_0-k\tau)^{k+1}}{(k+1)!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1} ac^{k+1} ((n-k)\tau)^{k+1}}{(k+1)!}. \end{aligned}$$

Utilizando (1.11) observamos que

$$x(t_0 + n\tau) = a + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1} a c^{k+1} ((n-k)\tau)^{k+1}}{(k+1)!}.$$

De esta forma, sustituyendo el valor de $x(t_0 + n\tau)$, se tiene

$$x(t) = a + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1} a c^{k+1} (t - t_0 - k\tau)^{k+1}}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k a c^k (t - t_0 - (k-1)\tau)^k}{k!}$$

para $t_0 + n\tau \leq t \leq t_0 + (n+1)\tau$, como queríamos probar.

A pesar de haber obtenido una solución global del problema con retardo (1.9), es dificil determinar las propiedades más esenciales. Por ejemplo, $x(t)$ que representa la cantidad de sal en el tanque, debe ser siempre $x(t) \geq 0$ para todo t. Por lo tanto, de la expresión obtenida en la primera integración, ecuación (1.5), se deduce que el modelo solo tiene sentido si $c\tau \leq 1$. Además, de la ecuación (1.6), tomando $t = t_0 + 2\tau$ y resolviendo la ecuación $x(t) = 0$, las raíces son $\tau = (2 \pm \sqrt{2})/c$, luego hace falta imponer $c\tau \leq 2 - \sqrt{2}$ para garantizar que la expresión es positiva. Y aún así, esto no es una condición suficiente para garantizar que la solución siempre sea positiva.

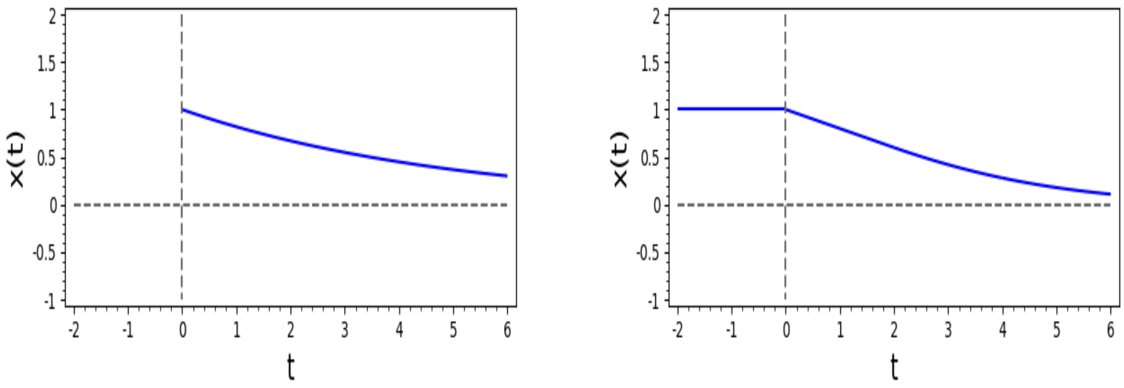
Fijando los parámetros $t_0 = 0$, $a = 1$ y $c = 1/5$ obtenemos

$$x(t) = e^{-t/5} \tag{1.12}$$

como solución del problema (1.1) relativo a la ecuación ordinaria. Con los mismos valores pero considerando un retardo $\tau = 2$ y $\theta(t) = a = 1$ para $t \in [-2, 0]$, llegamos a la solución para el problema (1.4) en los tres primeros intervalos:

$$x(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{t}{5} & \text{si } t \in [0,2], \\[2ex] \dfrac{t^2 - 14t + 54}{50} & \text{si } t \in [2,4], \\[2ex] \dfrac{874 - 258t + 27t^2 - t^3}{750} & \text{si } t \in [4,6]. \end{cases} \tag{1.13}$$

En la Figura 1.1 hemos representado las funciones (1.12) y (1.13) respectivamente. En ambas figuras, se puede observar cómo a partir de $t = 0$, la gráfica empieza a descender y la cantidad de sal se aproxima a cero cuando el tiempo aumenta. Esto se debe a que la sal va saliendo del tanque a medida que aumenta el tiempo. A diferencia de la figura de la izquierda, en la figura de la derecha la cantidad de sal que sale del tanque depende de la concentración en un instante de tiempo anterior $t - \tau$, por lo que precisa conocer la cantidad de sal en el intervalo $[-2, 0]$; en este caso, suponemos constante $x(t) = 1$, es decir, en este intervalo no sale nada de sal.

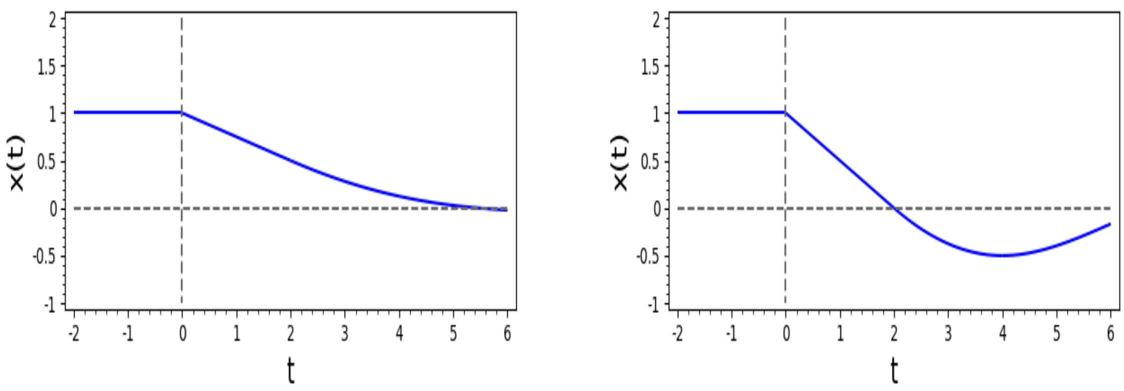


(a) (b)

Figura 1.1: (a) Solución del problema (1.1) con $t_0 = 0$, $a = 1$ y $c = 1/5$. (b) Solución de (1.4) con $t_0 = 0$, $\theta(t) = a = 1$, $c = 1/5$ y $\tau = 2$.

Por construcción se tiene la continuidad para ambas gráficas, pero se observa que en $t = t_0$ la gráfica de la Figura 1.1(b) no es derivable. En este caso se mejora la regularidad en los puntos $t = t_0 + n\tau$ al aumentar el valor de $n \in \mathbb{N}$.

En la Figura 1.2 se representa la gráfica de la solución del problema (1.4) para distintos valores de c. Se puede observar que la cantidad de sal toma valores negativos, algo poco realista ya que siempre debería ser $x(t) \geq 0$. En primer lugar, se considera la solución para el problema con retardo con parámentros $t_0 = 0$, $a = 1$, $c = 1/4$ y $\tau = 2$ (ver Figura 1.2(a)). Mientras que en la siguiente figura, se emplean los mismos valores pero tomando $c = 1/2$ (ver Figura 1.2(b)).



(a) Caso $c = 1/4$ (b) Caso $c = 1/2$

Figura 1.2: Soluciones del problema (1.4) con parámetros $t_0 = 0$, $\theta(t) = a = 1$ y $\tau = 2$

En la figura de la izquierda, se observa cómo la curva es positiva en $[0, 4]$ y levemente toma valores negativos para la variable $x(t)$ en el intervalo $[4, 6]$. En este caso, los parámetros escogidos no cumplen la condición para que en dicho intervalo la solución sea positiva como sucede para los anteriores, donde en el intervalo $[0,2]$ se cumple la condición $c\tau \leq 1$ y en el intervalo $[2,4]$ se satisface $c\tau \leq 2-\sqrt{2}$. Mientas que en la figura de la derecha se ve claramente como la cantidad de sal toma valores negativos a partir del segundo intervalo $[2,4]$. En este caso, para los parámetros escogidos no se cumple que $c\tau \leq 2-\sqrt{2}$, por lo tanto, cómo se observa en la figura al no cumplir la condición del intervalo $[2,4]$ la curva toma valores negativos los cuales son poco realistas al tratarse de la cantidad de sal.

1.2. Modelos de poblaciones

Otro problema que también sirve para ejemplificar el uso de las ecuaciones diferenciales con retardo está asociado a modelos de poblaciones (ver referencias [3] y [9]).

Si $N(t)$ representa la poblacion en el instante t de una colonia aislada de animales, el modelo de crecimiento de dicha población puede ser descrito por el modelo de Malthus

$$N'(t) = kN(t),$$

donde k es una constante positiva denominada tasa de crecimiento y si consideramos la condición inicial $N(0) = a$, llegamos al siguiente problema

$$\begin{cases} N'(t) = kN(t) & \text{para } \ t \geq 0, \\ N(0) = a. \end{cases} \tag{1.14}$$

Este problema se resulve por variables separadas donde la solución viene dada por

$$N(t) = ae^{kt} \quad \text{para } \ t \geq 0. \tag{1.15}$$

Pero al igual que sucedía con la mezcla de líquidos de la sección anterior que no era instantánea, el crecimiento de la población tampoco sucede de manera inmediata según nace la especie, precisa un tiempo de maduración, y podemos considerar la población en un instante anterior. En este caso, la ecuación diferencial que define el crecimiento de una población es

$$N'(t) = kN(t-\tau), \tag{1.16}$$

que es la misma ecuación que en la mezcla de líquidos (ecuación (1.3)) pero ahora con un crecimiento positivo. Por lo tanto, si añadimos las mismas condiciones pero con $t_0 = 0$ tenemos el problema

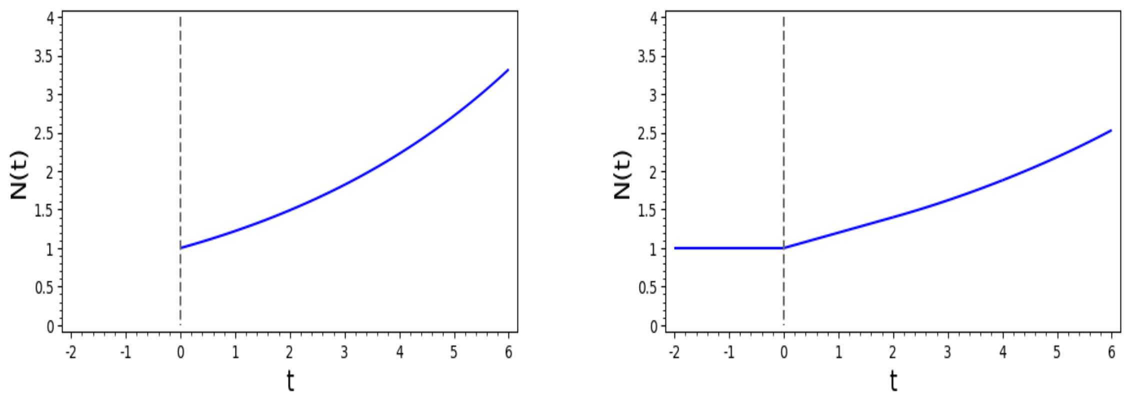
$$\begin{cases} N'(t) = kN(t-\tau) & \text{para } \ t \geq 0, \\ N(t) = \theta(t) = a & \text{para } \ -\tau \leq t \leq 0. \end{cases} \tag{1.17}$$

Aplicando el método de pasos como al problema (1.4) de la mezla de líquidos, obtenemos la solución de la forma

$$N(t) = \sum_{j=0}^{n} \frac{ak^j(t-(k-1)\tau)^j}{j!}, \quad (n-1)\tau \leq t \leq n\tau, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.18}$$

Fijando los parámetros $\theta(t) = a = 1$ y $k = 1/5$ obtenemos $N(t) = e^{t/5}$ como solución del problema (1.14) relativo a la ecuación ordinaria. Con los mismos valores pero considerando un retardo $\tau = 2$ llegamos a la solución para el problema (1.17) en los tres primeros intervalos.

$$x(t) = \begin{cases} 1 + \dfrac{t}{5} & \text{si } \ t \in [0,2], \\[2ex] \dfrac{t^2 + 6t + 54}{50} & \text{si } \ t \in [2,4], \\[2ex] \dfrac{t^3 + 3t^2 + 138t + 746}{750} & \text{si } \ t \in [4,6]. \end{cases}$$



(a) (b)

Figura 1.3: (a) Solución del problema (1.14) con $a = 1$ y $k = 1/5$. (b) Solución de (1.17) con $\theta(t) = a = 1$, $k = 1/5$ y $\tau = 2$

En la Figura 1.3 hemos representado ambas funciones. Se observa cómo a partir de $t = 0$ la gráfica empieza a crecer a medida que aumenta el tiempo. Esto significa que la densidad de población sigue un ritmo creciente. Pero, a diferencia una figura de la otra, en la Figura 1.3(a) la curva de la densidad de población crece más rápido que la curva de la Figura 1.3(b). Esto se debe a que la densidad de población se considera en un instante anterior $t - \tau$.

Al igual que sucedía en la Figura 1.1 de la mezcla de líquidos del apartado anterior, ambas gráficas son continuas, pero se observa que en $t = 0$ para la Figura 1.3(b) la curva no es derivable. Ahora como las funciones son crecientes no tenemos problemas con la positividad de las soluciones

Se obtiene un modelo más realista si suponemos que k no es un coeficiente constante sino que disminuye a medida que aumenta $N(t)$, debido a la escasez de alimentos. En este caso, el modelo de crecimiento viene dado por la ecuación diferencial no lineal, conocida como ecuación logística,

$$N'(t) = k\left[1 - \frac{N(t)}{P}\right]N(t), \tag{1.19}$$

donde k y P son parámetros positivos denominados tasa intrínseca de crecimiento y capacidad de carga, respectivamente. Esta ecuación junto con una condición inicial $N(0) = N_0$ nos lleva al problema

$$\begin{cases} N'(t) = k\left[1 - \dfrac{N(t)}{P}\right]N(t), \\ N(0) = N_0 \end{cases} \tag{1.20}$$

que puede ser resulto por variables separadas, llegando a la solución

$$N(t) = \frac{N_0 e^{kt}}{1 + (e^{kt} - 1)\frac{N_0}{P}}.$$

Si de nuevo fijamos los parámetros $N_0 = 950$, $k = 1/5$ y $P = 1000$ obtenemos

$$N(t) = \frac{950 e^{t/5}}{1 + (e^{t/5} - 1)\dfrac{950}{1000}} \tag{1.21}$$

como solución del problema (1.20) relativo a la ecuación ordinaria.

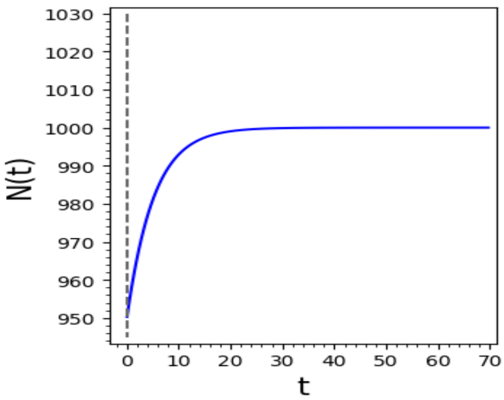


Figura 1.4: Solución para el problema logístico (1.20) con $N_0 = 950, k = 1/5$ y $P = 1000$

Si comparamos la Figura 1.4 con la Figura 1.3(a) podemos observar como en ambas figuras, la gráfica es una curva creciente pero, en el modelo logístico llegamos a un tiempo en el cual la curva deja de crecer y a partir de ese instante la población es constante. Mientras en el modelo de Malthus esto no sucede, la gráfica crece sin llegar a un periodo en el que la población se acerca a una constante.

Ahora supongamos que la reacción de autorregulación biológica representada por el factor $\left[1 - \frac{N(t)}{P}\right]$ en la ecuación del modelo logístico no es instantánea, sino que responde después de transcurrido un tiempo $\tau > 0$. Entonces este modelo viene dado por la ecuación diferencial con retardo

$$N'(t) = k\left[1 - \frac{N(t-\tau)}{P}\right]N(t). \tag{1.22}$$

Si a esta ecuación la aportamos una función inicial, tenemos el problema

$$\begin{cases} N'(t) = k\left[1 - \frac{N(t-\tau)}{P}\right]N(t) & \text{para } t \geq 0 \\ N(t) = N_0(t) & \text{para } -\tau \leq t \leq 0. \end{cases} \tag{1.23}$$

Como se afirma en [3], si introducimos el cambio

$$x(s) = \frac{N(\tau s)}{P} - 1 \quad \text{y} \quad c = k\tau, \tag{1.24}$$

en (1.23) y derivamos $x(s)$ llegamos a la ecuación con retardo

$$\begin{aligned} x'(s) &= \frac{\tau}{P}N'(\tau s) = \frac{\tau k N(\tau s)}{P}\left[1 - \frac{N(\tau(s-1))}{P}\right] = \frac{cN(\tau s)}{P}\left[1 - \frac{N(\tau(s-1))}{P}\right] \\ &= -cx(s-1)[x(s)+1]. \end{aligned}$$

Si cambiamos la s por la t y añadimos una condición inicial

$$\theta(t) = \frac{N_0(\tau t)}{P} - 1 \quad \text{para } [-1, 0]$$

e imponiendo que se satisfaga la ecuación para $t \geq 0$, tenemos el siguiente problema

$$\begin{cases} x'(t) = -cx(t-1)[x(t)+1] & t \geq 0, \\ x(t) = \theta(t) & -1 \leq t \leq 0. \end{cases} \tag{1.25}$$

Si suponemos que $\theta(t)$ es una función continua, (1.25) se puede resolver por el método de los pasos como se ha visto anteriormente. No obstante, ahora en cada paso debemos resolver una ecuación diferencial lineal.

En primer lugar, consideramos el intervalo $[0, 1]$. Como $0 \leq t \leq 1$, se tiene que $-1 \leq t - 1 \leq 0$, por lo que utilizando la función inicial $x(t-1) = \theta(t-1)$. Sustituyendo en (1.25), se tiene la ecuación ordinaria

$$x'(t) + c\theta(t-1)x(t) = -c\theta(t-1)$$

con condicional inicial $x(0) = \theta(0)$.

Para resolver este problema se emplea el factor integrante $e^{\int_0^t c\theta(s-1)\,ds}$

$$x'(t)e^{\int_0^t c\theta(s-1)\,ds} + c\theta(t-1)x(t)e^{\int_0^t c\theta(s-1)\,ds} = -c\theta(t-1)e^{\int_0^t c\theta(s-1)\,ds}$$

que es equivalente a

$$\frac{d}{dt}\left[x(t)e^{\int_0^t c\theta(s-1)\,ds}\right] = -c\theta(t-1)e^{\int_0^t c\theta(s-1)\,ds}.$$

Si integramos a ambos lados de la ecuación se obtiene

$$x(\tilde{t})e^{\displaystyle\int_0^{\tilde{t}} c\theta(s-1)\,ds}\Bigg|_{\tilde{t}=0}^{t} = -e^{\displaystyle\int_0^{\tilde{t}} c\theta(s-1)\,ds}\Bigg|_{\tilde{t}=0}^{t}$$

$$x(t)e^{\displaystyle\int_0^{t} c\theta(s-1)\,ds} - x(0) = -e^{\displaystyle\int_0^{t} c\theta(s-1)\,ds} + 1.$$

Utilizando la condición inicial y despejando $x(t)$ nos lleva a la única solución en $[0,1]$,

$$x(t) = [\theta(0)+1]e^{\displaystyle -\int_0^{t} c\theta(s-1)\,ds} - 1 \quad \text{para } t \in [0,1]. \tag{1.26}$$

Se ha encontrado la solución exacta en el intervalo $[0,1]$. Ahora consideramos el intervalo $[1,2]$. Tenemos que $1 \leq t \leq 2$, lo cual es equivalente a $0 \leq t-1 \leq 1$, por lo que

$$x(t-1) = [\theta(0)+1]e^{\displaystyle -\int_0^{t-1} c\theta(s-1)\,ds} - 1.$$

Sustituyendo en (1.25), se tiene la ecuación ordinaria

$$x'(t) = -c\Bigg([\theta(0)+1]e^{\displaystyle -\int_0^{t-1} c\theta(s-1)\,ds} - 1\Bigg)[x(t)+1] \tag{1.27}$$

con condición inicial

$$x(1) = [\theta(0)+1]e^{\displaystyle -\int_0^{1} c\theta(s-1)\,ds} - 1. \tag{1.28}$$

Para resolver este problema se emplea el factor integrante

$$e^{\displaystyle\int_1^{t} c\big([\theta(0)+1]e^{\displaystyle -\int_0^{s-1} c\theta(k-1)\,dk} - 1\big)\,ds}$$

al cual llamaremos M.
Multiplicando por el factor integrante M a cada término de la ecuación (1.27) y operando, se obtiene

$$\frac{d}{dt}\Bigg[x(t)M\Bigg] = -c\Bigg([\theta(0)+1]e^{\displaystyle -\int_0^{t-1} c\theta(s-1)\,ds} - 1\Bigg)M.$$

Integrando entre 1 y t verificando que $1 \leq t \leq 2$ a ambos lados y sustituyendo la M nos lleva a

$$x(\tilde{t})e^{\displaystyle\int_1^{\tilde{t}} c\big([\theta(0)+1]e^{-\int_0^{s-1} c\theta(k-1)\,dk} - 1\big)\,ds}\Bigg|_{\tilde{t}=1}^{t} = -e^{\displaystyle\int_1^{\tilde{t}} c\big([\theta(0)+1]e^{-\int_0^{s-1} c\theta(k-1)\,dk} - 1\big)\,ds}\Bigg|_{\tilde{t}=1}^{t}$$

esto es,

$$x(t)e^{\int_1^t c\left([\theta(0)+1]e^{-\int_0^{s-1} c\theta(k-1)\,dk}-1\right)ds} - x(1) =$$
$$= -e^{\int_1^t c\left([\theta(0)+1]e^{-\int_0^{s-1} c\theta(k-1)\,dk}-1\right)ds} + 1.$$

Despejando, se llega a la solución en el intervalo $[1, 2]$

$$x(t) = [x(1)+1]e^{-\int_1^t c\left([\theta(0)+1]e^{-\int_0^{s-1} c\theta(k-1)\,dk}-1\right)ds} - 1 \tag{1.29}$$

donde $x(1)$ viene dada por la condición (1.28). De la misma manera, se puede hallar la solución para el resto de intervalos, pero en estos casos los cálculos se complican.

A continuación, procedemos a resolver el problema (1.23) con condición inicial $N_0(t) = 950$ y fijando los parámetros $k = 1/5$, $\tau = 5$, $c = k\tau = 1$ y $P = 1000$.

En primer lugar, para poder calcular las soluciones en los intervalos tenemos que obtener la condición inicial del problema (1.25), para lo cual si realizamos el cambio (1.24) y sustituimos $N(\tau s)$ para $s = 0$ por la condición inicial de (1.23) que es $N(t) = 950$ tenemos que la condición inicial para (1.25) es $x(t) = -1/20$. Por lo tanto, el problema (1.25) queda de la siguiente forma

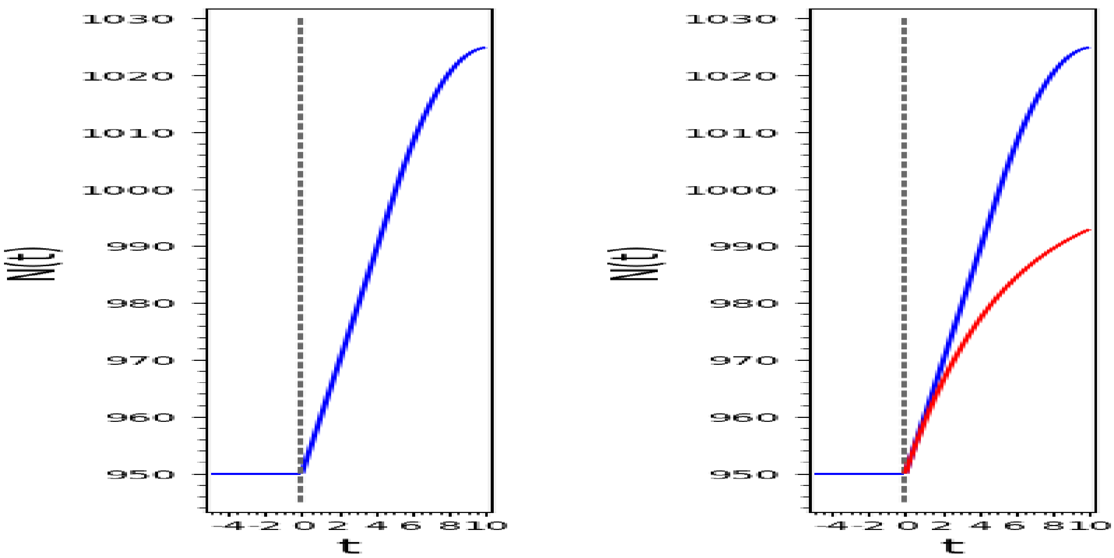
$$\begin{cases} x'(t) = -cx(t-1)[x(t)+1] & t \geq 0, \\ x(t) = -\dfrac{1}{20} & -1 \leq t \leq 0. \end{cases}$$

Sustituyendo la condición inicial en (1.26) y (1.29) llegamos a que las soluciones en los intervalos son

$$x(t) = \begin{cases} \dfrac{19}{20}e^{t/20} - 1 & \text{si } t \in [0,1], \\[2ex] \dfrac{19}{20}e^{\left[-19e^{(t-1)/20} + 18 + t + \frac{1}{20}\right]} - 1 & \text{si } t \in [1,2]. \end{cases}$$

Ahora, deshacemos el cambio (1.24) y tenemos las soluciones para (1.23) con condición inicial $N_0(t) = 950$ que son las siguientes

$$N(t) = \begin{cases} \left[19e^{t/100}\right] \cdot 50 & \text{si } t \in [0,5], \\[2ex] \left[19e^{\left[-19e^{(t/5-1)/20} + 18 + \frac{t}{5} + \frac{1}{20}\right]}\right] \cdot 50 & \text{si } t \in [5,10]. \end{cases} \tag{1.30}$$



(a) (b)

Figura 1.5: (a) Solución del problema logístico (1.23) con $N_0(t) = 950$, $k = 1/5, \tau = 5$ y $c = k\tau = 1$. (b) Soluciones de los problemas (1.20) (gráfica roja) y (1.23) (gráfica azul) en el intervalo $[0, 10]$.

En la Figura 1.5 se ha representado a la izquierda la solución (1.30) y a la derecha las soluciones (1.21) y (1.30) en el intervalo $[0, 10]$. En la Figura 1.5(a) se puede observar cómo la gráfica empieza a estabilizarse a una cierta población en un periodo concreto al igual que sucede en la Figura 1.4. Aunque esto no podemos afirmarlo con rotundidad porque para ello necesitamos calcular la solución de (1.23) para más intervalos, lo cual no ha sido posible por la laboriosidad de los cálculos.

Mientras que en la Figura 1.5(b) podemos ver cómo la gráfica correspondiente a la solución (1.30) crece más rápido que la solución (1.21). Incluso se puede observar cómo la gráfica del color azul sobrepasa el valor de la capacidad de carga $P = 1000$, mientras que la gráfica correspondiente a la solución (1.21) comienza a curvarse, dejando de crecer cuando se aproxima al valor de nuestra capacidad de carga. Aunque en ambas gráficas se observa como la curva empieza a estabilizarse a diferencia de las representadas en la Figura 1.3.

Al igual que sucedia en Malthus y en la mezcla de líquidos, cuando intoducimos el retardo a la ecuación, el punto de partida de la gráfica $t = 0$ no es derivable como se ve en la Figura 1.5(a).

1.3. Otro método de resolución

Para la resolución de las EDRs, además de emplear el método de los pasos, que ya ha sido estudiado en la secciones anteriores, se presentá otra técnica diferente como es la transformada de Laplace. Comenzaremos recordando su definición y algunas de sus propiedades para posteriormente utilizarlas en la resolución del problema (1.4) con $t_0 = 0$

y $\theta(t) = a$. Para esta sección se ha usado principalmente las referencias [9] y [12].

1.3.1. Transformada de Laplace

La transformada de Laplace es una técnica utilizada para determinar la solución explícita de ciertos problemas con valores iniciales o de Cauchy. En particular, está especialmente indicada en aquellos en los que intervienen funciones definidas a trozos. En concreto, convierte ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de coeficientes constantes en problemas algebraicos y permite transformar algunos problemas de ecuaciones en derivadas parciales en ecuaciones ordinarias. Este método también se utiliza para resolver ecuaciones con retardo y el proceso es similar al caso clásico. Se aplica la transformada a la ecuación diferencial, se agrupan términos y por último se determina la transformada inversa, lo que da lugar a la solución del problema.

A continuación, escribimos algunos conceptos de la transformada de Laplace estudiados a lo largo de la carrera (ver [5] y [12]).

Definición 1.3.1 (Transformada de Laplace)**.** *Dada una función f(t) definida para cada $t > 0$, la transformada de Laplace de f es otra función (que designamos por $\mathcal{L}(f)$) y que viene dada por*

$$\mathcal{L}(f)(s) = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt,$$

para los valores de s para los cuales la integral sea finita.

Es evidente que la transformada de Laplace no está definida para toda función continua, basta tomar $f(t) = e^{t^2}$, por lo tanto, escribimos la siguiente definición que es una condición suficiente para la existencia de la transformada.

Definición 1.3.2. *Se dice que una función f(t) es de orden exponencial γ cuando $t \to +\infty$, si existen $M > 0$ y $T > 0$ tales que se verifica*

$$|f(t)| \leq Me^{\gamma t} \quad \text{para todo } t > T.$$

Utilizando la definición, se tienen fácilmente los siguientes ejemplos de transformadas de Laplace:

Ejemplo 1.3.3. *Algunos ejemplos de transformadas de Laplace:*

I. $\mathcal{L}\big(\sin\, \omega t\big) = \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}, \qquad s > 0, \qquad t \geq 0.$

II. $\mathcal{L}\big(\cos\, \omega t\big) = \dfrac{s}{s^2+\omega^2}, \qquad s > 0, \qquad t \geq 0.$

III. $\mathcal{L}\big(e^{at}\big) = \dfrac{1}{s-a}, \qquad s > a, \qquad t \geq 0.$

IV. $\mathcal{L}\big(t^m\big) = \dfrac{m!}{s^{m+1}}, \qquad s > 0, \qquad t \geq 0, \qquad m \in \mathbb{N}.$

Las principales propiedades de la transformada de Laplace que vamos a utilizar son las siguientes:

Proposición 1.3.4. *Sean f, g funciones de orden exponencial γ cuando $t \longrightarrow \infty$. Se tiene:*

I. La transformada de Laplace es lineal:

$$\mathcal{L}(\alpha f(s) + \beta g(s)) = \alpha \mathcal{L}(f)(s) + \beta \mathcal{L}(g)(s), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \text{con } s > \gamma.$$

II. Transformada de la función derivada: Supongamos que f es continua en [0,$+\infty$), de orden exponencial γ cuando $t \to +\infty$ y que $f'(t)$ es continua a trozos en [0,T] para cada $T > 0$. Entonces, si $s > \gamma$,

$$\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0).$$

*III. **Primer Teorema de traslación**. Si $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ para $s > \gamma$ y $a \in \mathbb{R}$, entonces*

$$\mathcal{L}(e^{at} f(t))(s) = F(s-a) \quad s > a\gamma.$$

*IV. **Segundo Teorema de traslación**. Si $F(s) = \mathcal{L}\big(f(t)\big)$ para $s > \gamma$ y $a > 0$, entonces*

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq a \\ f(t-a) & \text{si } t > a, \end{cases}$$

verifica

$$\mathcal{L}\big(g(t)\big)(s) = e^{-as} F(s) \quad s > \gamma.$$

Además, para determinar la solución, también se utilizará la transformada inversa.

Definición 1.3.5 (Transformada Inversa)**.** *Si $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ para cierta función f, se dice transformada inversa de Laplace y se denota por $\mathcal{L}^{-1}(F(s))$ a*

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(t), \quad t \geq 0.$$

Notemos que la transformada de Laplace de dos funciones continuas a trozos que solamente difieren en sus puntos de discontinuidad son iguales; en consecuencia la transformada inversa de Laplace coincidirá salvo posiblemente en los puntos de discontinuidad.

Utilizando la definición de transformada inversa y los ejemplos vistos anteriormente se tiene que

Ejemplo 1.3.6. *Algunos ejemplos de transformadas de Laplace inversas:*

I. $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}\right) = \sin \omega t, \quad s > 0, \quad t \geq 0.$

II. $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{s}{s^2+\omega^2}\right) = \cos \omega t, \quad s > 0, \quad t \geq 0.$

III. $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{s-a}\right) = e^{at}, \quad s > a, \quad t \geq 0.$

IV. $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{m!}{s^{m+1}}\right) = t^m, \quad s > 0, \quad t \geq 0, \quad m \in \mathbb{N}.$

Utilizando la definición de transformada inversa y la proposición 1.3.4 se llega a:

Proposición 1.3.7. *La transformada de Laplace inversa verifica las siguientes propiedades:*

I. La transformada de Laplace inversa es lineal: dadas dos funciones F y G tales que $F = \mathcal{L}(f)$ y $G = \mathcal{L}(g)$, entonces

$$\mathcal{L}^{-1}(\alpha F + \beta G) = \alpha\mathcal{L}^{-1}(F) + \beta\mathcal{L}^{-1}(G), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

II. ***Primer teorema de traslación:*** *Si $\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(t)$ para $s > \gamma$ y $a \in \mathbb{R}$, entonces*

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s-a)) = e^{at}f(t) \quad s > a + \gamma.$$

III. ***Segundo teorema de traslación:*** *Si $\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(t)$ para $s > 0$, $a > 0$ y*

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq a \\ f(t-a) & \text{si } t > a, \end{cases}$$

entonces se verifica

$$\mathcal{L}^{-1}(e^{-as}F(s)) = g(t).$$

1.3.2. Aplicación de la transformada de Laplace a la resolución de EDR

A continuación vamos a resolver utilizando la transformada de Laplace el problema con retardo (1.4) con $t_0 = 0$ y $\theta(t) = a$, es decir,

$$\begin{cases} x'(t) = -cx(t-\tau) & \text{si } t > 0, \\ x(t) = a & \text{si } \quad -\tau \leq t \leq 0. \end{cases} \tag{1.31}$$

En primer lugar, aplicamos la transformada de Laplace a la EDR de (1.31) obteniendo

$$\mathcal{L}(x'(t)) = \mathcal{L}(-cx(t-\tau)).$$

Aplicando las propiedades I. y II. de la transformada de Laplace se llega a

$$s\mathcal{L}(x(t)) - x(0) = -c\mathcal{L}(x(t-\tau)), \tag{1.32}$$

donde $x(0)$ está dada por la función inicial de (1.31). Ahora, utilizando la definición de transformada de Laplace en el lado derecho de (1.32), se alcanza

$$\mathcal{L}(x(t-\tau)) = \int_0^\infty e^{-st}x(t-\tau)\,dt = \int_0^\tau e^{-st}x(t-\tau)\,dt + \int_\tau^\infty e^{-st}x(t-\tau)\,dt.$$

Si introducimos una nueva variable $u = t - \tau$, obtenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x(t-\tau)) &= \int_{-\tau}^{0} e^{-s(u+\tau)}x(u)\,du + \int_{0}^{\infty} e^{-s(u+\tau)}x(u)\,du \\ &= e^{-s\tau}\bigg(\int_{-\tau}^{0} e^{-su}x(u)\,du + \int_{0}^{\infty} e^{-su}x(u)\,du\bigg) \\ &= e^{-s\tau}\bigg(\int_{-\tau}^{0} e^{-su}x(u)\,du + \mathcal{L}(x(t))\bigg).\end{aligned}$$

Además, si $u \in [-\tau, 0]$ entonces por la condición inicial de (1.31), $x(u) = a$, luego integrando

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x(t-\tau)) =& e^{-s\tau}\bigg(\int_{-\tau}^{0} e^{-su}a\,du + \mathcal{L}(x(t))\bigg) \\ =& e^{-s\tau}\bigg(-\frac{a}{s} + \frac{a}{s}e^{s\tau} + \mathcal{L}(x(t))\bigg) \\ =& -\frac{a}{s}e^{-s\tau} + \frac{a}{s} + e^{-s\tau}\mathcal{L}(x(t)).\end{aligned} \tag{1.33}$$

Sustituyendo (1.33) en (1.32) obtenemos

$$s\mathcal{L}(x(t)) - a = \frac{a}{s}ce^{-s\tau} - \frac{ac}{s} - ce^{-s\tau}\mathcal{L}(x(t)).$$

Agrupando términos se tiene

$$\mathcal{L}(x(t))(s + ce^{-s\tau}) = \frac{a}{s}(s + ce^{-s\tau} - c),$$

y, por lo tanto,

$$\mathcal{L}(x(t)) = \frac{a(s + ce^{-s\tau}) - ac}{s(s + ce^{-s\tau})} = \frac{a}{s} - \frac{ac}{s(s + ce^{-s\tau})}.$$

De esta forma, para determinar la solución, aplicaremos la transformada inversa, luego se llega a

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\bigg(\frac{a}{s} - \frac{ac}{s(s + ce^{-s\tau})}\bigg)$$

y por la linealidad de la transformada inversa

$$x(t) = a\mathcal{L}^{-1}\bigg(\frac{1}{s}\bigg) - \mathcal{L}^{-1}\bigg(\frac{ac}{s(s + ce^{-s\tau})}\bigg). \tag{1.34}$$

La primera transformada inversa de (1.34), la cual se obtiene del cuarto ejemplo de Ejemplo 1.3.6, es la función constante 1 y está definida para $t \geq 0$, donde hemos considerado $s > 0$. Para determinar la segunda transformada inversa de (1.34) utilizamos un desarrollo en serie. El argumento de dicha transformación se puede reescribir como

$$\frac{ac}{s(s + ce^{-s\tau})} = \frac{ac}{s^2}\,\frac{1}{1 + \frac{ce^{-s\tau}}{s}}. \tag{1.35}$$

Considerando $\left|\dfrac{ce^{-s\tau}}{s}\right| < 1$, reescribimos el último factor de (1.35) como una serie geométrica, es decir

$$\frac{1}{1+\dfrac{ce^{-s\tau}}{s}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k c^k e^{-s\tau k}}{s^k}$$

por lo cual

$$\frac{ac}{s(s+ce^{-s\tau})} = a\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k c^{k+1} e^{-s\tau k}}{s^{k+2}}.$$

Empleando la propiedad de la linealidad de la transformada de Laplace inversa y el paso al límite, obtenemos

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{ac}{s(s+ce^{-s\tau})}\right) = a\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k c^{k+1}\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-s\tau k}\frac{1}{s^{k+2}}\right). \tag{1.36}$$

Utilizando el cuarto ejemplo de transformadas de Laplace inversas (Ejemplo 1.3.6),

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^{k+2}}\right) = \frac{t^{k+1}}{(k+1)!}t^m$$

y el segundo teorema de traslación con la transformada inversa se tiene que

$$\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-s\tau k}\frac{1}{s^{k+2}}\right)(t) = \frac{(t-k\tau)^{k+1}}{(k+1)!}, \quad t \geq k\tau \geq 0. \tag{1.37}$$

Observamos que en el intervalo temporal $[(n-1)\tau, n\tau]$, $n \in \mathbb{N}$, la transformada inversa (1.37) es no nula para $k = 0, 1, \cdots, n-1$, de tal forma que en dicho intervalo la expresión de (1.36) es

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{ac}{s(s+ce^{-s\tau)}}\right)(t) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k ac^{k+1}(t-k\tau)^{k+1}}{(k+1)!} \quad t \in \big[(n-1)\tau, n\tau\big]. \tag{1.38}$$

Para obtener la solución completa en el intervalo $[(n-1)\tau, n\tau]$, $n \in \mathbb{N}$, solamente hay que sustituir en (1.34):

$$x(t) = a - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k ac^{k+1}(t-k\tau)^{k+1}}{(k+1)!} = a + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1} ac^{k+1}(t-k\tau)^{k+1}}{(k+1)!}$$

Haciendo el cambio de índice $k = l-1$, se obtiene

$$x(t) = \sum_{l=0}^{n}\frac{(-1)^l ac^l(t-(l-1)\tau)^l}{l!}, \quad (n-1)\tau \leq t \leq n\tau,$$

que coincide con la solución obtenida por el método de pasos si consideramos en (1.4) $t_0 = 0$.

Capítulo 2

Existencia y unicidad: ecuaciones con retardo discreto

Una vez introducidos y resueltos diversos ejemplos de ecuaciones diferenciales con retardo, en los próximos capítulos abordaremos su análisis desde un punto de vista teórico.

Puesto que en muchas ocasiones no dispondremos de la solución explícita de una ecuación diferencial, resulta muy interesante el estudio de las propiedades de esas posibles soluciones, así como de la existencia y unicidad de solución para un problema compuesto por una ecuación diferencial con retardo y una condición inicial. En general, se entiende que un problema está bien planteado cuando tiene solución única y esta depende en forma continua tanto de los parámetros de la ecuación como de los datos iniciales. Es por ello que en los próximos capítulos se van a abordar diversos resultados que nos garanticen que un problema de ecuaciones con retardo y ciertas condiciones iniciales tenga solución y esta sea única.

Para comenzar, vamos a presentar un ejemplo de un problema de ecuaciones ordinarias con infinitas soluciones pero que al introducir un retardo sí tiene unicidad en la solución.

Ejemplo 2.0.1. *Consideramos el problema de ecuaciones ordinarias*

$$\begin{cases} x(t) = [x(t)]^{2/3} \\ x(0) = 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Claramente vemos que la función nula es solución de (2.1). *Además, si resolvemos la ecuación por variables separadas tenemos la familia*

$$x(t) = \left(\frac{x+c}{3}\right)^3 \quad \text{con } c \in \mathbb{R}$$

y ajustando la constante obtenemos

$$x(t) = \frac{t^3}{27}.$$

Observamos que si además combinamos adecuadamente dichas funciones, tenemos infinitas soluciones de (2.1) *de la forma*

$$x(t) = \begin{cases} 0 & si\ t < a \\ \dfrac{(t-a)^3}{27} & si\ t \geq a \end{cases} \quad ó \quad x(t) = \begin{cases} \dfrac{(t-a)^3}{27} & si\ t \leq a \\ 0 & si\ t > a \end{cases}$$

donde $a \in \mathbb{R}$ *(Ver Figura 2.1).*

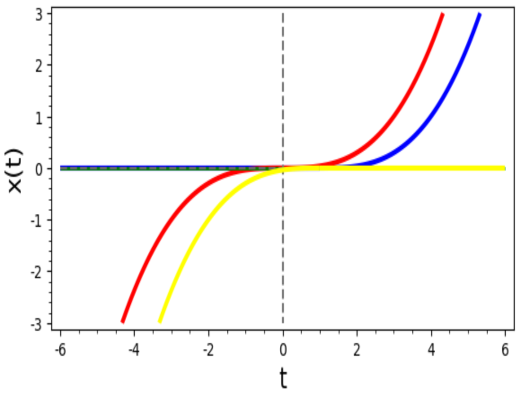


Figura 2.1: Diversas soluciones del problema de Cauchy (2.1)

Sin embargo, si añadimos un retardo, tenemos el problema

$$\begin{cases} x'(t) = [x(t-\tau)]^{2/3} & t > 0 \\ x(t) = 0 & t \leq 0. \end{cases}$$

Resolviéndolo por el método de los pasos visto en el capítulo anterior, llegamos a la solución única $x(t) = 0$*.*

En consecuencia, se puede observar que hay problemas asociados a ecuaciones ordinarias en las que cambia el número de soluciones al añadir un retardo y parece adecuado realizar un estudio teórico.

Este capítulo se dividirá en cuatro secciones. En primer lugar, introduciremos ciertos conceptos y notaciones acerca de la ecuación diferencial con retardo que utilizaremos en el resto de la memoria. Después, haremos un breve repaso de los teoremas de existencia y unicidad de solución del problema de valores iniciales en el caso de ecuaciones ordinarias, que servirá para comparar con los resultados que veremos para ecuaciones con retardo. Seguido, en la sección 2.3, se analizará la existencia y unicidad de solución local para el problema asociado a una ecuación con retardo discreto. Para ello utilizaremos el método de los pasos ya mencionado en el capítulo 1 y los resultados vistos para ecuaciones ordinarias en la sección 2.2. En la cuarta sección se abordara el caso particular de ecuaciones lineales con retardo discreto donde se obtendrá un resultado global. Para todo ello, nos hemos basado principalmente en las referencias [2], [3] y [13].

2.1. Conceptos previos

Vamos a dedicar esta sección a introducir la forma general de una ecuación con retardo. Además, mostraremos distintos tipos de ecuaciones con retardo y algún ejemplo de estos. Para todo esto, emplearemos como referencias principales [3] y [9].

Una ecuación diferencial vectorial con retardo tiene como forma general:

$$x'(t) = f(t, x(s)) \quad \text{con } s < t,$$

donde $x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ funciones siendo $n \geq 1$. Notemos que cuando $n > 1$ las funciones son vectoriales y estamos considerando al tiempo sistemas de ecuaciones con retardo.

Existe una gran variedad de ecuaciones con retardo. A continuación se mostrarán distintos tipos junto con algún ejemplo de estos.

En primer lugar, introducimos las ecuaciones con un retardo discreto

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau))$$

donde $x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $\tau \geq 0$ es una constante denominada retardo. Podemos observar que cuando $\tau = 0$, se tiene una ecuación diferencial ordinaria.

Un ejemplo de ecuaciones diferenciales con retardo discreto es el modelo de poblaciones visto en el primer capítulo cuya ecuación es de la forma

$$N'(t) = k\left[1 - \frac{N(t - \tau)}{P}\right]N(t).$$

También se pueden definir estas ecuaciones con un retardo variable, es decir, vendrán dadas por

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau(t)))$$

donde el retardo es una función $\tau : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

Otro tipo de ecuaciones con retardo son las ecuaciones que contienen múltiples retardos discretos; estas se definen como

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau_1), x(t - \tau_2), \ldots, x(t - \tau_m))$$

donde $x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n(m+1)} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m \geq 0$ constantes.

Un ejemplo de este tipo de ecuaciones es el que se muestra a continuación:

$$x'(t) = x(t - 1) + x(t - \sqrt{2})$$

donde los retardos son $\tau_1 = 1$ y $\tau_2 = \sqrt{2}$.

Existe otro tipo de euaciones con retardo que son las ecuaciones que no dependen del instante actual, estas son de la forma

$$x'(t) = f(t, x(t-\tau))$$

y un ejemplo de estas ecuaciones es el visto en el primer capítulo de la mezcla de líquidos

$$x'(t) = -cx(t-\tau).$$

Al igual que sucedía con las ecuaciones ordinarias, las ecuaciones diferenciales con retardo también se clasifican en autónomas/no autónomas y en lineales/no lineales.

Se dice que una ecuación es autónoma cuando la ecuación no depende de t. Un ejemplo de estas son las mencionadas anteriormente de la mezcla de líquidos o el de poblaciones, mientras que un ejemplo de una ecuación que no es autónoma es el siguiente

$$x'(t) = t + x(t-\tau).$$

Por último nos falta de explicar un tipo de ecuaciones con retardo que emplearemos más adelante en este capítulo. Se tratan de las ecuaciones lineales con retardo discreto

$$x'(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t-\tau) + c(t)$$

donde $A(t) = (a_{ij}(t))$, $B(t) = (b_{ij}(t))$ y el vector $c(t) = (c_i(t))$ con $a_{ij}, b_{ij}, c_j : [t_0, t_0 + \sigma] \longrightarrow \mathbb{R}$ con $\sigma > 0$, son funciones continuas para $i, j = 1, \ldots, n$ y $\tau \geq 0$ es un retardo constante. Si $c(t) = 0$, entonces diremos que se trata de una ecuación lineal homogénea.

Algunos ejemplos de ecuaciones lineales son:

I. La ecuación de mezcla de líquidos: $x'(t) = -cx(t-\tau)$

II. $x'(t) = x(t-1) + x(t-\sqrt{2})$

III. $x'(t) = t + x(t-1)$

En cambio, un ejemplo de una ecuación no lineal es la ecuación con retardo del método de poblaciones

$$N'(t) = k\left[1 - \frac{N(t-\tau)}{P}\right]N(t).$$

Hasta ahora los ejemplos propuestos son para ecuaciones escalares con retardo. No obstante, estamos considerando funciones vectoriales y por tanto incluimos cuando $n > 1$, los sistemas de EDR. Así, a partir del modelo de Lotka-Volterra en [3] tenemos un ejemplo acerca de un sistema de ecuaciones diferenciales con retardo que es el siguiente:

$$\begin{cases} x'(t) = a_1\left[1 - \dfrac{x(t)}{P}\right]x(t) - b_1 y(t)x(t) \\ \\ y'(t) = -a_2 y(t) + b_2 x(t-\tau)y(t-\tau). \end{cases}$$

donde $a_1, a_2, b_1, b_2 > 0$.

Notemos que este sistema se puede resolver por el método de los pasos conocidos los valores de $x(s)$ y $y(s)$ para $s < t_0$; basta calcular $y(t)$ en el intervalo $[t_0, t_0 + \tau]$ utilizando la segunda ecuación que ahora será una EDO lineal y sustituir en la primera obteniendo una ecuación ordinaria para $x(t)$.

Finalmente mencionar que aunque todos las definiciones de ecuaciones con retardo las hemos enunciado para primer orden, estas pueden darse para orden $n > 1$ de la forma

$$x^{(n)}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau), x'(t), x'(t-\tau), \ldots, x^{(n-1)}(t), x^{(n-1)}(t-\tau)).$$

Al igual que sucedía para ecuaciones ordinarias, toda ecuación con retardo de orden $n > 1$ se puede escribir como un sistema de ecuaciones con retardo de primer orden y este a través de una ecuación vectorial. Un ejemplo de esto es el del resorte cuya ecuación ordinaria es

$$mx''(t) + qx'(t) + kx(t) = 0,$$

donde m, q y k son constantes positivas. Añadiendo el retardo en la primera derivada tenemos

$$mx''(t) + qx'(t-\tau) + kx(t) = 0.$$

Así, realizando el cambio $x_1 = x$ y $x_2 = x'$, obtenemos el sistema de primer orden

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = -\frac{q}{m}x_2(t-\tau) - \frac{k}{m}x_1(t). \end{cases}$$

2.2. Existencia y unicidad para EDO

En esta sección hacemos un breve repaso de los resultados sobre la existencia y unicidad de solución para un problema de condiciones iniciales asociado a ecuaciones ordinarias. Previamente vamos a introducir el concepto de función Lipschitziana que será necesario en los teoremas de unicidad. Para esto se ha empleado principalmente las referencias [7], [8] y [10].

Definición 2.2.1. *Dada una función $f : \mathrm{D} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, diremos que f es Lipschitziana (o Lipschitz) en el conjunto* D *cuando exista una constante* $\mathrm{L} > 0$ *(constante de Lipschitz) tal que*

$$|f(x) - f(y)| \leq \mathrm{L}|x - y|, \quad \forall x, y \in \mathrm{D}$$

donde $|\cdot|$ es la norma usual en el espacio $\mathbb{R}^k$ correspondiente.

Un ejemplo de una función Lipschitziana es:

Ejemplo 2.2.2. *La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, es Lipschitziana en toda la recta real. Para probarlo basta observar que*

$$|f(x) - f(y)| = \big||x| - |y|\big| \leq |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Definición 2.2.3. *Dada una función* $f : \mathrm{D} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$*, diremos que* f *es localmente Lipschitziana en el abierto* D *cuando dado un punto arbitrario* $x_0 \in \mathrm{D}$*, existe una constante* $\mathrm{L}_0 > 0$ *y un entorno abierto* $\mathrm{U} \subset \mathrm{D}$ *del punto* x_0 *tales que*

$$|f(x) - f(y)| \leq \mathrm{L}_0|x - y|, \quad \forall x, y \in \mathrm{U}.$$

Es decir, una función es localmente Lipschitziana en un abierto D cuando podemos definir una constante de Lipschitz en un entorno de cualquier punto $x_0 \in \mathrm{D}$.

Observación 2.2.4. *Si* f *es Lipschitziana en* D *entonces,* f *es localmente Lipschitz en* D*, lo que implica que* f *es continua en* D.

En cambio, si f es localmente Lipschitziana en D no implica que f sea Lipschitziana en D, un ejemplo de esto es:

Ejemplo 2.2.5. *La función* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*,* $f(x) = x^2$*, es localmente Lipschitziana en toda la recta real. Para probarlo basta observar que*

$$|f(x)-f(y)| = |x^2-y^2| = |(x+y)\cdot(x-y)| \leq |x+y|\cdot|x-y| \leq 2r\cdot|x-y|, \quad \forall x, y \in \overline{\mathrm{B}}(0,\mathrm{r}).$$

Pero dicha función, $f(x) = x^2$*, no es Lipschitziana en toda la recta real. Lo probamos por reducción al absurdo. Supongamos que es Lipschitziana en* $\mathbb{R}$ *para alguna constante* $\mathrm{L} > 0$*. Entonces,*

$$|f(x) - f(y)| \leq \mathrm{L}|x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Como la función f *es derivable en* $\mathbb{R}$*, sabemos que*

$$\lim_{y\to x} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} = |f'(x)|, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Entonces, obtenemos que

$$\mathrm{L} \geq |f'(x)|, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lo cual es imposible, pues la derivada no está acotada

$$\lim_{|x|\to\infty} |f'(x)| = 2 \lim_{|x|\to\infty} |x| = +\infty.$$

Observación 2.2.6. *Notemos que si* D *es un abierto de* $\mathbb{R}^n$ *y* f *es de clase* C^1 *en* D *entonces por el teorema del valor medio,* f *es localmente Lipschitziana en* D *ya que en un compacto podemos tomar como constante de Lipschitz el máximo del valor absoluto de las derivadas parciales en el compacto.*

Definición 2.2.7. *Dada una función continua* $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$*. Diremos que* $f = f(t, x)$ *es Lipschitziana respecto de la valiable* x *en el abierto* Ω *cuando existe una constante* $\mathrm{L} > 0$ *tal que*

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq \mathrm{L}|x - y| \quad \forall (t, x), (t, y) \in \Omega.$$

Definición 2.2.8. *Dada una función continua* $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$*,* $f = f(t, x)$*, diremos que es localmente Lipschitziana respecto la variable* x *en el abierto* Ω *cuando dado un punto arbitrario* $(t_0, x_0) \in \Omega$*, existe una constante* $\mathrm{L}_0 > 0$ *y un entorno abierto* $\mathrm{V}_0 \subset \Omega$ *del punto* (t_0, x_0) *tales que* f *es Lipschitz en* V_0

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq \mathrm{L}_0|x - y|, \quad \forall (t, x), (t, y) \in \mathrm{V}_0.$$

Ahora se va a enunciar tanto el teorema local de Cauchy-Peano como el local de Picard-Lindelöf para ecuaciones ordinarias. Dichos resultados serán utilizados en la sección 2.3 para demostrar la existencia y unicidad de solución en problemas con retardo discreto. Las referencias que hemos empleado para estos teoremas son [6] y [8].

En primer lugar recordamos que el problema de condiciones iniciales o de Cauchy para una ecuación diferencial ordinaria de primer order es: hallar $x : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, con I intervalo y $x_0 \in \mathrm{I}$ verificando

$$(PC) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{2.2}$$

donde $f : \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $(t_0, x_0) \in \Omega$.

Si f es continua, dicho problema es equivalente a: hallar $y : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continua tal que

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(s, x(s))\, ds \qquad x \in \mathrm{I}.$$

Teorema 2.2.9 (**Teorema local de Cauchy-Peano**). *Sea el problema de Cauchy (PC) donde $f : \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua y Ω es un entorno de $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ fijado. Entonces, existe al menos una solución local de (PC) y está definida en el intervalo $I = [t_0 - h, t_0 + h]$, con $h = \min\{a, b/M\}$, siendo $\mathrm{R} := \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\} \subset \Omega$ y $\mathrm{M} = \max_R |f(t, x)|$.*

Teorema 2.2.10 (**Teorema local de Picard-Lindelöf**). *Sea el problema de Cauchy (PC) donde $f : \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua y localmente Lipschitziana respecto de x en Ω, con Ω entorno de (t_0, x_0). Entonces, existe una única solución local de (PC) y está definida en el intervalo $I = [t_0 - h, t_0 + h]$, con $h = \min\{a, b/M\}$, siendo $\mathrm{R} := \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\} \subset \Omega$ y $\mathrm{M} = \max_R |f(t, x)|$.*

Observamos que el Teorema 2.2.9 se puede aplicar al Ejemplo 2.0.1 visto al principio del capítulo

$$\begin{cases} x(t) = [x(t)]^{2/3} \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

que posee infinidad de soluciones (ver Figura 2.1). Sin embrago, este problema no nos sirve de ejemplo para el Teorema 2.2.10 ya que en este caso la función $f(t, x) = x^{2/3}$ es continua pero no lipschitziana respecto a x en un entorno de $(0, 0)$.

Un ejemplo sobre el que sí podemos aplicar el Teorema 2.2.10 y que nos garantiza que la solución es única es el siguiente:

Ejemplo 2.2.11. *Sea el problema de Cauchy*

$$(PC) \begin{cases} x'(t) = 1 + x^2(t) \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

donde la función $f(t, x) = 1 + x^2$ está definida en $\mathbb{R}^2$. Se puede aplicar el Teorema 2.2.10 porque f es continua y es localmente Lipschitziana (ver Ejemplo 2.2.5), luego tiene una solución única. Dicha solución se puede calcular por variables separadas y viene dada por

$$x(t) = \tan\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \qquad \textit{para } t \in \left(-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right).$$

Los resultados que acabamos de presentar, Teorema 2.2.9 y 2.2.10, son locales, es decir, proporcionan la existencia y unicidad de solución definida en un entorno de $[t_0 - h, t_0 + h]$. Es obvio que estamos interesados en soluciones definidas en el intervalo más grande posible, denominadas soluciones maximales. Por ello, si $\Omega = \mathbb{R}^{n+1}$, podemos aplicar de nuevo los teoremas locales al (PC) con condición inicial definida en $t_0 + h$ y obtener un $\tilde{h} > 0$ tal que la solución ahora está definida en $[t_0 - h, t_0 + h + \tilde{h}]$ prolongando de esta manera la solución. No obstante, como vemos en el Ejemplo 2.2.11, a pesar de ser f regular en todo $\mathbb{R}^2$, a veces no podemos llegar a tener todo el intervalo $[t_0, +\infty)$ ya que la solución explota en tiempo finito es decir, $|x(t)| \longrightarrow +\infty$ cuando $t \longrightarrow \pi/4$. De hecho se tiene el resultado siguiente:

Teorema 2.2.12. *Sea $f : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continua y localmente lipschitziana. Sea x solución del (PC) con $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ definida en el intervalo maximal a la derecha* I. *Entonces,* I *es abierto por la derecha, es decir, $I = [t_0, \omega)$ para cierto $\omega > t_0$. Además, si $\omega < \infty$, se tiene que*

$$|x(t)| \xrightarrow[t \to \omega^-]{} +\infty.$$

Por último, se mostrará un teorema que nos garantiza la existencia y unicidad de solución global del problema de Cauchy (PC) aplicable cuando la ecuación es lineal.

Teorema 2.2.13. *Sea $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n$ con f continua y lipschitziana. Entonces existe una única solución de (PC) y está definida en $[a, b]$.*

Corolario 2.2.14. *Sea el problema de Cauchy*

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + c(t) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{2.3}$$

donde $A(t) = (a_{ij}(t))$ y $c(t) = (c_i(t))$ con $i, j = 1, \ldots, n$ y sean $a_{ij}, c_i : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas y (t_0, x_0) es un punto cualesquiera de $[a, b] \times \mathbb{R}^n$. Entonces, existe una única solución de (2.3) *y está definida en el intervalo $[a, b]$.*

2.3. Existencia y unicidad de solución para problemas con retardo discreto

En esta sección se estudia la existencia y unicidad de solución para problemas compuestos por una ecuación diferencial con retardo discreto y una condición inicial. Para las demostraciones seguimos la idea dada en la referencia [13] y utilizamos el método de los pasos, que hemos visto tanto para el ejemplo de la mezcla de líquidos como para el de poblaciones, y los resultados dados para ecuaciones ordinarias en la sección 2.2.

Consideramos la ecuación diferencial con retardo

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau)) \quad t \geq 0. \tag{2.4}$$

y una condición inicial

$$x(t) = \theta(t) \quad \text{para } t_0 - \tau \leq t \leq t_0,$$

donde $f : \mathbb{R}^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ función, $\tau > 0$ un retardo, $\theta : [t_0 - \tau, t_0] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ función y $t_0 \in \mathbb{R}$ fijado.

Planteamos el siguiente problema: hallar $x : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ función continua verificando (2.5) donde I intervalo de $\mathbb{R}$, $[t_0 - \tau, t_0] \subset \mathrm{I}$

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)) & \text{para } t \geq t_0, \\ x(t) = \theta(t) & \text{para } t_0 - \tau \leq t \leq t_0. \end{cases} \tag{2.5}$$

Aquí $x'(t_0)$ debe entenderse como la derivada a la derecha de x en t_0.

Teorema 2.3.1 (Existencia de solución). *Sea $f(t, x, y)$ continua en $\mathbb{R}^{2n+1}$, $f : \mathbb{R}^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $t_0 \in \mathbb{R}$ y sea $\theta : [t_0 - \tau, t_0] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continua. Entonces existe $\sigma > t_0$ y al menos una solución del problema (2.5) definida en $[t_0 - \tau, \sigma]$.*

Demostración.
Buscamos una solución $x(t)$ del problema (2.5) que satisfaga la condición inicial y la ecuación en $t_0 \leq t \leq t_0 + \sigma$ para $\sigma > 0$.

Sea el intervalo $t_0 \leq t \leq t_0 + \tau$, se tiene que $t_0 - \tau \leq t - \tau \leq t_0$, por lo tanto, utilizando la condición inicial llegamos a que $x(t - \tau) = \theta(t - \tau)$. Luego, la solución $x(t)$ debe satisfacer el problema

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), \theta(t-\tau)) & \text{para } t_0 \leq t \leq t_0 + \tau, \\ x(t_0) = \theta(t_0). \end{cases}$$

Es decir, si definimos $f(t, x(t), \theta(t - \tau)) \equiv g(t, x(t))$, obtenemos el siguiente problema de ecuaciones ordinarias

$$\begin{cases} x'(t) = g(t, x(t)) & \text{para } t_0 \leq t \leq t_0 + \tau, \\ x(t_0) = \theta(t_0). \end{cases}$$

Ahora, aplicando el teorema de Cauchy-Peano (Teorema 2.2.9):
Como g es continua en un entorno de $(t_0, \theta(t_0))$ por ser composición de funciones continuas, entonces, existe $h > 0$ y al menos una solución definida en $[t_0, t_0 + h]$. Si $h \geq \tau$, la solución $x(t)$ está definida para $[t_0 - \tau, t_0 + \tau]$ y ya hemos encontrado $\sigma = t_0 + \tau$, verificando el teorema. Si queremos ampliar el intervalo, podemos repetir el proceso para el problema

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)) & \text{para } t_0 + \tau \leq t \leq t_0 + 2\tau, \\ x(t_0 + \tau) = \theta(t_0 + \tau) \end{cases}$$

donde $x(t - \tau)$ es conocido por el paso anterior y se vuelve a aplicar el teorema de Cauchy-Peano para encontrar al menos una solución en un intervalo contenido en $[t_0 + \tau, t_0 + 2\tau]$.

Si $h < \tau$, podemos tomar $\sigma = t_0 + h$ y concluir la demostración o bien volver a repetir el proceso para el nuevo problema

$$(PC)\begin{cases} x'(t) = g(t, x(t)) \quad \text{para } t_0 + h \leq t \leq t_0 + \tau, \\ x(t_0 + h) = \theta(t_0 + h) \end{cases}$$

donde como g es continua y aplicando el Teorema 2.2.9 de nuevo, existe $\tilde{h} > 0$ y al menos una solución definida en $[t_0 + h, t_0 + h + \tilde{h}]$.
■

Teorema 2.3.2 (Existencia de solución única). *Sea $f(t, x, y)$ continua y localmente Lipschitziana respecto x en $\mathbb{R}^{2n+1}$, $t_0 \in \mathbb{R}$ y sea $\theta : [t_0 - \tau, t_0] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continua. Entonces existe $\sigma > t_0$ y una única solución del problema* (2.5) *en $[t_0 - \tau, \sigma]$.*

Demostración.
El resultado se tiene siguiendo el mismo procedimiento que en el Teorema 2.3.1 pero, en lugar de aplicar el teorema local de Cauchy-Peano (Teorema 2.2.9) empleamos el teorema local de Picard-Lindelöf (Teorema 2.2.10) que nos garantiza la existencia y unicidad de solución en el intervalo $[t_0 - \tau, \sigma]$. ■

El proceso de extender la solución a otros intervalos es un método iterativo que no alcanza el intervalo $[t_0 - \tau, +\infty)$ cuando una solución se va al infinito en tiempo finito; a esta solución se la llama solución maximal o no prolongable porque no puede extenderse a otro intervalo. Todo esto lo podemos observar en el siguiente teorema, donde si una solución maximal no está definida para todos los valores $t \geq t_0 - \tau$, entonces se va al infinito cuando $t \longrightarrow \sigma$ es decir, que el extremo de la derecha del intervalo maximal es abierto.

Teorema 2.3.3. *Sea f continua y localmente Lipschitziana respecto x en $\mathbb{R}^{2n+1}$ y sea $x : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ la solución maximal del problema* (2.5)*. Entonces I es abierto por la deracha es decir, $I = [t_0 - \tau, \sigma)$ para cierto $\sigma > t_0$. Además, si $\sigma < \infty$, entonces*

$$\lim_{t \to \sigma^-} |x(t)| = +\infty \tag{2.6}$$

Demostración.
En primer lugar vemos que I debe ser abierto por la derecha, es decir, I $= [t_0 - \tau, \sigma)$ pues en caso contrario aplicaríamos el Teorema 2.2.9 ó el Teorema 2.2.10 al problema con condiciones iniciales

$$x(t) = \theta(t) \quad \text{para } t \leq \sigma,$$

obteniendo un intervalo mayor en contradicción con ser solución maximal.

Sea $x : [t_0 - \tau, \sigma) \longrightarrow \mathbb{R}$ la solución maximal y supongamos que $\sigma < \infty$. Entonces, $t_0 + j\tau \leq \sigma \leq t_0 + (j + 1)\tau$ para algún $j \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ por lo que la restricción de x al intervalo $[t_0 + j\tau, \sigma)$ es la solución no prolongable del problema para EDO

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau)), \\ x(t_0 + j\tau) = \theta(t_0 + j\tau) \end{cases}$$

ya que cualquier extensión del mismo daría una extensión de $x(t)$ como solución de (2.5). En consecuencia, aplicando el Teorema 2.2.12 se concluye (2.6). ■

Se puede observar que los Teoremas 2.3.1 y 2.3.2 se pueden aplicar a los problemas con ecuaciones con retardo del tipo

$$x'(t) = f(t, x(t-\tau)), \tag{2.7}$$

donde f es una función continua. Como este tipo de ecuaciones no depende de la variable x, la función siempre es Lipschitziana, luego para una condición inicial continua, se cumplen las hipótesis de los teoremas y el problema tendrá solución única. Este resultado se puede aplicar a la euación de mezcla de líquidos vista en el primer capítulo y, por tanto, el problema (1.4) siempre tendrá una solución única en el intervalo $[t_0 - \tau, \sigma]$ para $\sigma > t_0$. Notemos que en este caso, resolviendo el problema por el método de los pasos, determinamos esa única solución y está definida para todo $t > t_0$. Esto va a suceder de manera general para cualquier ecuación de la forma (2.7) con f continua ya que, al no depender de $x(t)$, en cada paso podemos resolver la EDO sin más que integrar y podemos prolongar la solución a cualquier intervalo de la forma $[t_0 + n\tau, t_0 + (n+1)\tau]$. E lo que ocurre si añadimos un retardo al problema del Ejemplo 2.2.11 obteniendo el problema con retardo

$$\begin{cases} x'(t) = 1 + x^2(t-1) & \text{si } t > 0, \\ x(t) = \theta(t) = 1 & \text{si } -\tau \leq t \leq 0. \end{cases} \tag{2.8}$$

A diferencia de lo que sucedía en el Ejemplo 2.2.11, donde la solución no se podía prolongar más alla de $\pi/4$, el problema (2.8) va a tener una única solución y está definida en $[-\tau, \infty)$.

Otro ejemplo de una ecuación del tipo (2.7) que cumple las hipótesis de los Teorema 2.3.1 y 2.3.2 es la vista al principio del capítulo (Ejemplo 2.0.1),

$$x'(t) = [x(t-\tau)]^{2/3} \quad \text{para } t \geq 0.$$

De nuevo $f(t, x, y) = y^{2/3}$ es continua y Lipschitziana respecto a x, luego tenemos garantizada la existencia de solución única. No obstante, cuando

$$x'(t) = [x(t)]^{2/3}$$

$f(t, x) = x^{2/3}$ no es localmente Lipschitziana respecto a x y por lo tanto, no se garantiza la unicidad de solución (2.1).

Observación 2.3.4. *Los Teoremas 2.3.1 y 2.3.2 también los podemos extender a múltiples retardos discrestos es decir, a problemas de ecuaciones con retardo de la forma*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), x(t-\tau_1), x(t-\tau_2), \ldots, x(t-\tau_m)) \\ x(t) = \theta(t) \qquad \textit{para } t_0 - \text{máx}\{\tau_1, \ldots, \tau_m\} \leq t \leq t_0, \end{cases}$$

donde $0 \leq \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_m$ *y* $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n(m+1)} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *es una función.*

Para concluir la sección vamos a dar condiciones suficientes que garanticen la positividad de la solución, propiedad fundamental a tener en cuenta en modelos donde la función $x(t)$ representa, por ejemplo, una población o la cantidad de sal en el tanque como sucedía en los ejemplos del primer capítulo.

Teorema 2.3.5. *Sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+ \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función que verifique las hipótesis de los Teoremas 2.3.1 y 2.3.2 y además*

$$\forall i, t, \forall x, y, \in \mathbb{R}^n_+ : x_i = 0 \quad \textit{entonces,} \quad f_i(t, x, y) \geq 0.$$

Si la función inicial de (2.5) satisface $\theta(t) \geq 0$, entonces la solución del problema (2.5) satisface que $x(t) \geq 0$ para todo $t \geq t_0$.

La positividad de las soluciones la podemos observar en las Figuras 1.1 y 1.3. En la Figura 1.2 no se tiene y es necesario dar condiciones a la función para que la solución sea positiva, mientras que en la Figura 1.3 no tenemos problemas con la positividad ya que las funciones son crecientes.

2.4. Existencia y unicidad de solución para problemas lineales con retardo discreto

En esta nueva sección vamos a estudiar la existencia y unicidad para problemas de ecuaciones lineales con retardo. Para su demostración, emplearemos de nuevo el método de pasos y los resultados conocidos para ecuaciones ordinarias lineales.

En primer lugar, consideramos el sistema de ecuaciones diferenciales lineales con retardo

$$x'(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t - \tau) + c(t)$$

donde $\tau > 0$ es un retardo constante y los coeficientes vienen dados a través de las matrices $A(t) = (a_{ij}(t))$ y $B(t) = (b_{ij}(t))$ con $i, j = 1, \ldots, n$ y el vector $c(t) = (c_i(t))$ con $i = 1, \ldots, n$, formados por funciones continuas para $t \geq t_0$.

Añadiendo al sistema de ecuaciones una condición inicial, tenemos el problema

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t - \tau) + c(t) & \text{para } t \geq t_0, \\ x(t) = \theta(t) & \text{para } t_0 - \tau \leq t \leq t_0, \end{cases} \tag{2.9}$$

y queremos analizar la existencia y unicidad de solución:

Teorema 2.4.1. *Sea el problema de ecuaciones lineales con retardo (2.9) de manera que $t \geq t_0$ y $t_0 \in \mathbb{R}$. Sea $\theta : [t_0 - \tau, t_0] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua y $a_{ij}, b_{ij}, c_i : [t_0, \sigma] \longrightarrow \mathbb{R}$ también continuas. Entonces, existe una única solución del problema (2.9) y está definida en $[t_0 - \tau, \sigma]$.*

Demostración.

Buscamos una solución $x(t)$ del problema (2.9) que satisfaga la condición inicial y la ecuación en $t_0 \leq t \leq t_0 + \sigma$ para $\sigma > 0$.

En primer lugar, se empieza por el intervalo $t_0 \leq t \leq t_0 + \tau$, de donde se tiene que $t_0 - \tau \leq t - \tau \leq t_0$. Utilizando la condición inicial, llegamos a que $x(t-\tau) = \theta(t-\tau)$. Luego, ahora tenemos el problema

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + B(t)\theta(t-\tau) + c(t) \quad \text{para } t_0 \leq t \leq t_0 + \tau, \\ x(t_0) = \theta(t_0), \end{cases}$$

donde definimos el vector $\tilde{b}(t) \equiv B(t)\theta(t-\tau) + c(t)$. Si $\sigma < t_0 + \tau$, entonces cada coeficiente $\tilde{b}_i(t)$ será continuo en $[t_0, \sigma]$, obteniendo el problema de ordinarias

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + \tilde{b}(t) \quad \text{para } t_0 \leq t \leq \sigma, \\ x(t_0) = \theta(t_0) \end{cases} \tag{2.10}$$

donde aplicamos el Corolario 2.2.14 para problemas asociados a sistemas de EDOs lineales:
Como los coeficientes de la matriz, $a_{ij}(t)$, y del vector $\tilde{b}_i(t)$, son continuos en $[t_0, \sigma]$ (por las hipótesis del teorema para cada b_{ij} y c_i) y $\theta(t_0) \in \mathbb{R}^n$. Entonces, existe una única solución de (2.11) y está definida en $[t_0, \sigma]$. Por lo tanto, la solución $x(t)$ está definida para $[t_0 - \tau, \sigma]$, concluyendo la demostración.

Pero si $t_0 + \tau < \sigma$, cada coeficiente $\tilde{b}_i(t)$ será continuo en $[t_0, t_0 + \tau]$ y $\theta(t - \tau)$ una función continua. Entonces, obtenemos el siguiente problema formado por un sistema de ecuaciones ordinarias lineales

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + \tilde{b}(t) \quad \text{para } t_0 \leq t \leq t_0 + \tau, \\ x(t_0) = \theta(t_0) \end{cases} \tag{2.11}$$

Ahora, aplicamos el Corolario 2.2.14 para problemas asociados a sistemas de EDOs lineales: Como los coeficientes de la matriz $a_{ij}(t)$ y el vector $\tilde{b}_i(t)$ son continuos en $[t_0, t_0+\tau]$ y $\theta(t_0) \in \mathbb{R}^n$. Entonces, existe una única solución de (2.11) en $[t_0, t_0 + \tau]$. Por lo tanto, la solución $x(t)$ está definida para $[t_0 - \tau, t_0 + \tau]$.

Continuamos determinando la solución para el intervalo $[t_0+\tau, t_0+2\tau]$. Razonando de forma análoga al caso anterior, tenemos que $t_0 \leq t-\tau \leq t_0+\tau$, luego volvemos a conocer $x(t-\tau)$ por el paso previo. Al igual que antes, si $\sigma < t_0 + 2\tau$, se aplica el procedimiento en el intervalo $[t_0, \sigma]$, obteniendo una solución en $[t_0 - \tau, \sigma]$ como se quería demostrar. Pero si $t_0 + 2\tau < \sigma$, tenemos el siguiente problema

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + \tilde{b}_1(t) \quad \text{para } t_0 + \tau \leq t \leq t_0 + 2\tau, \\ x(t_0 + \tau) = \theta(t_0 + \tau) \end{cases} \tag{2.12}$$

donde $\tilde{b}_1(t) \equiv B(t)x(t-\tau) + c(t)$ es un vector con coeficientes continuos en $[t_0+\tau, t_0+2\tau]$. De nuevo, volvemos a aplicar el Corolario 2.2.14 y tenemos una única solución del problema (2.12) en el intervalo $[t_0 + \tau, t_0 + 2\tau]$. Es decir, la solución está definida para el intervalo $[t_0 - \tau, t_0 + 2\tau]$. Y este proceso, se repite sucesivamente para los intervalos $[t_0 + n\tau, t_0 + (n+1)\tau]$ siempre que $t_0 + (n+1)\tau < \sigma$. Si σ es finito, en un número finito de pasos se tiene que $t_0 + n\tau > \sigma$ y se acaba el proceso. Quedando demostrado la existencia y unicidad de solución en el intervalo $[t_0 - \tau, \sigma]$ como queríamos probar. ■

Veamos ahora un ejemplo donde podemos aplicar dicho resultado.

Ejemplo 2.4.2. *Sea el problema*

$$\begin{cases} x_1'(t) = 2x_2(t) + e^t \\ x_2'(t) = -x_3(t) + x_1(t-1) \\ x_3'(t) = 2x_2(t-1) + e^t \\ x_1(t) = 1, x_2(t) = 1, x_3(t) = 1 \qquad \text{para} \ -1 \leq t \leq 0 \end{cases}$$

formado por un sistema lineal de ecuaciones con retardo no homogéneo con tres incógnitas, x_1, x_2 y x_3, donde se considera $\tau = 1$ el retardo y se satisface para $t \geq 0$. Si escribimos los coeficientes y el término independiente en su forma matricial,

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad c(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ e^2 t \end{pmatrix},$$

podemos observar que todos son continuos para todo $t \geq 0$ y además la condición inicial también lo es en el intervalo $[-1, 0]$, por lo que podemos aplicar el Teorema 2.4.1 y obtenemos que existe una única solución del problema en el intervalo $[-1, +\infty)$.

Capítulo 3

Existencia y unicidad: caso general

En este capítulo vamos a extender los resultados de existencia y unicidad de solución que acabamos de ver en las secciones 2.3 y 2.4 a ecuaciones con retardo más generales donde el retardo puede hacerse cero o estar distribuido en un intervalo (ver (3.1)). Por ejemplo, podemos considerar las ecuaciones

$$\begin{aligned} & x'(t) = x(t/2) \quad \text{para } t \geq t_0 \\ \text{ó} \qquad & x'(t) = -x(t) + \int_{t-\tau}^{t} x(s)\, ds \quad \text{con} \quad \tau > 0. \end{aligned}$$

Observamos que en este caso no podemos aplicar el método de los pasos como hemos hecho en las ecuaciones con retardo discreto, y será necesario recurrir a las demostraciones de los teoremas conocidos para ecuaciones ordinarias (Teoremas 2.2.9 y 2.2.10) y adaptarlas a ecuaciones con retardo. En particular introduciremos la forma integral del problema (3.1)-(3.2) (ver ecuación (3.10)), y utilizaremos el Lema de Gronwall (Lema 3.3.2) para demostrar la unicidad de solución y los iterantes de Picard (Teorema 3.4.1) para probar la existencia de solución. Nos basaremos principalmente en las referencias [3] y [13].

En la primera sección introduciremos cierta notación que será fundamental para reescribir el problema general (3.1)-(3.2) en términos de un funcional F donde x_t tiene en mente el valor de la función en todo el intervalo $[t-\tau, t]$ (ver (3.9)). Y posteriormente, en la sección 3.2, veremos su forma integral del problema (ver (3.10)). A continuación, en la sección 3.3 analizaremos la unicidad de solución, mientras que la existencia será abordada en la sección 3.4.

3.1. Preliminares

En esta sección introduciremos notación necesaria para reescribir el problema de condiciones iniciales para una ecuación con retardo general.

Consideramos el sistema de ecuaciones diferenciales con retardo

$$x'(t) = f\big(t, x(g_1(t)), \ldots, x(g_m(t))\big), \tag{3.1}$$

donde x y f son funciones vectoriales y cada $g_j(t)$ es el argumento con retardo, es decir, $t - \tau \leq g_j(t) \leq t$ para $t \geq t_0$, $j = 1, \ldots, m$, con τ una constante positiva. Suponemos que

f es una función definida en $[t_0, \beta) \times \mathrm{D}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ para algún $\beta > t_0$ y un abierto $\mathrm{D} \subset \mathbb{R}^n$.

Además consideramos la condición inicial de la forma

$$x(t) = \theta(t) \qquad t_0 - \tau \leq t \leq t_0 \tag{3.2}$$

donde θ es una función dada.
Al tratarse de una ecuación con retardo, dado $t \in [t_0, \beta)$, conocer el valor real de $x(t)$ es insuficiente para determinar $x(s)$ para $s > t$ y debemos conocer el valor de $x(\alpha)$ para todo $\alpha \in [t - \tau, t]$. Por ello, introducimos la noción de x_t que tiene en mente el valor de x en todo el intervalo $[t - \tau, t]$. Así, reescribiremos la ecuación (3.1) en la forma

$$x'(t) = F(t, x_t). \tag{3.3}$$

donde

$$F(t, x_t) = f(t, x(g_1(t)), \ldots, x(g_m(t))) \tag{3.4}$$

Ahora daremos significado a F y x_t.

En primer lugar, sea $C\big([a, b], \mathbb{R}^n\big)$ el espacio de Banach de funciones continuas definidas en el intervalo $[a, b]$ y llegada a $\mathbb{R}^n$ con la topología uniforme. Si $[a, b] = [-\tau, 0]$, entonces denotamos por $\mathcal{C} = \mathrm{C}\big([-\tau, 0], \mathbb{R}^n\big)$ y designamos la norma de un elemento $\phi \in \mathcal{C}$ por

$$||\phi||_\tau = \sup_{-\tau \leq \sigma \leq 0} |\phi(\sigma)|$$

donde $|\cdot|$ es la norma usual en $\mathbb{R}^n$. Además, para cualquier conjunto $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}^n$, llamamos

$$\mathcal{C}_\mathrm{A} = \mathrm{C}\big([-\tau, 0], \mathrm{A}\big).$$

Dado $t \in [t_0, \beta)$ y una función χ[1] definida en $[t - \tau, t] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, definimos la función $\chi_t : [-\tau, 0] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$\chi_t(\sigma) = \chi(t + \sigma) \quad \text{para} \quad -\tau \leq \sigma \leq 0. \tag{3.5}$$

Notemos que χ_t se obtiene considerando $\chi(s)$ para $t - \tau \leq s \leq t$ y luego trasladando el segmento de χ al intervalo $[-\tau, 0]$. Luego, si χ es una función continua, χ_t es una función continua en $[-\tau, 0]$. De este modo, si $\chi \in \mathrm{C}\big([t - \tau, t], \mathrm{A}\big)$, entonces $\chi_t \in \mathcal{C}_\mathrm{A}$. Por esto, introducimos el siguiente lema.

Lema 3.1.1. *Si $\chi \in \mathrm{C}([t_0 - \tau, \beta], \mathbb{R}^n)$, entonces, χ_t es una función continua en $[-\tau, 0]$ para $t \in [t_0, \beta)$, es decir $\chi_t \in \mathcal{C}$, y la aplicación*

$$\begin{aligned} [t_0, \beta) &\longrightarrow \mathcal{C} = \mathrm{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}^n) \\ t &\longrightarrow \chi_t \end{aligned}$$

es continua.

[1] Utilizamos el símbolo χ en lugar de x para dejar x a aquellas funciones que satisfacen las ecuaciones diferenciales.

Demostración.

Dado que χ es continua en $[t_0 - \tau, \beta]$, es uniformemente continua y por lo tanto para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que

$$|\chi(t) - \chi(s)| < \epsilon \quad \text{si} \quad |t - s| < \delta.$$

En consecuencia, para $t, s \in [t_0, \beta)$, $\;|t - s| < \delta$, se tiene que

$$|\chi(t + \sigma) - \chi(s + \sigma)| < \epsilon \;\; \forall \sigma \in [-\tau, 0],$$

es decir

$$||\chi_t(\sigma) - \chi_s(\sigma)||_\tau < \epsilon \quad \text{si } |t - s| < \delta.$$

■

La ecuación (3.3) la consideramos en el intervalo $[t_0, \beta)$ pero a veces será más deseable discutir dicha ecuación en un intervalo abierto (α, β). Por lo tanto, a partir de ahora usaremos J para referirnos a $[t_0, \beta)$ o (α, β) según sea necesario.

Si la ecuación (3.3) representa a la ecuación (3.1) con f una función definida en $\mathrm{J} \times \mathrm{D}^m$, entonces $F(t, \chi_t)$ tendrá sentido si $t \in \mathrm{J}$ y $\chi_t \in \mathcal{C}_{\mathrm{D}}$. Luego, deberíamos definir

$$F : \mathrm{J} \times \mathcal{C}_{\mathrm{D}} \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Además, debería verificarse

$$F(t, \phi) = f(t, \phi(g_1(t) - t), \ldots, \phi(g_m(t) - t)).$$

En efecto, como por definición de χ_t

$$\chi_t(g_j(t) - t) = \chi(t + g_j(t) - t) = \chi(g_j(t)),$$

se tiene que

$$\begin{aligned} F(t, \chi_t) &= f(t, \chi_t(g_1(t) - t), \ldots, \chi_t(g_m(t) - t)) \\ &= f(t, \chi(g_1(t)), \ldots, \chi(g_m(t))). \end{aligned}$$

Ahora escribimos tres ejemplo de cómo se transforma la ecuación (3.1) a esta notación:

En primer lugar, consideramos la ecuación (1.3) que describe la mezcla de líquidos con distintas concentraciones. Si definimos la función

$$F(t, \phi) = -c\phi(-\tau)$$

Entonces, como $x_t(-\tau) = x(t - \tau)$, se tiene que

$$x'(t) = F(t, x_t) = -cx_t(-\tau) = -cx(t - \tau),$$

que es la ecuación (1.3).

Otro ejemplo es el problema (1.25) asociado a un modelo de poblaciones. Si nosotros escogemos $\tau = 1$, $\mathrm{J} = \mathbb{R}$, $\mathrm{D} = \mathbb{R}$ y definimos $F : \mathbb{R} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$F(t, \phi) = -c\phi(-1)[1 + \phi(0)],$$

entonces,

$$F(t, x_t) = -cx_t(-1)[1 + x_t(0)] = -cx(t-1)[1 + x(t)]$$

que es la ecuación (1.25).

Por último, si definimos $F(t, \phi) = \int_{-\tau}^{0} \phi(\sigma)\, d\sigma$, entonces $x'(t) = F(t, x_t)$ se convierte en el sistema

$$x'(t) = F(t, x_t) = \int_{-\tau}^{0} x_t(\sigma)\, d\sigma = \int_{t-\tau}^{t} x(s)\, ds.$$

Finalmente vamos a reescribir la condición inicial (3.2) con la nueva notación. Observamos que por (3.5), la condición (3.2) es equivalente a

$$x(t_0 + \sigma) = \theta(t_0 + \sigma) \quad \text{para} \quad -\tau \leq \sigma \leq 0,$$

es decir, $x_{t_0} = \theta_{t_0}$. Definiendo

$$\phi := \theta_{t_0} \tag{3.6}$$

la condición (3.2) se escribe como

$$x_{t_0} = \phi \tag{3.7}$$

Notemos que (3.7) significa que $x(t_0 + \sigma) = \phi(\sigma)$ y por tanto,

$$x(t) = \phi(t - t_0) \quad \text{para} \;\; t_0 - \tau \leq t \leq t_0.$$

En particular, se tiene que

$$x(t_0) = \phi(0). \tag{3.8}$$

Luego asumimos que $\phi \in \mathcal{C}_{\mathrm{D}}$.

Por lo tanto, el problema (3.1)-(3.2) es equivalente

$$\begin{cases} x'(t) = F(t, x_t) & \text{para} \;\; t_0 \leq t \leq \beta \\ x_{t_0} = \phi. \end{cases} \tag{3.9}$$

donde ϕ viene dado por (3.6). Se va a estudiar la existencia y unicidad del problema (3.9).

3.2. Forma integral

De forma similar al problema para ecuaciones ordinarias, para estudiar la existencia y unicidad de solución del problema (3.9), reescribiremos dicho problema en una ecuación integral. Para ello introduciremos la condición de continuidad siguiente:

Definición 3.2.1 (Condición de Continuidad). *Sea $F : [t_0, \beta) \times \mathcal{C}_{\mathrm{D}} \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Diremos que F satisface la condición de continuidad si $F(t, \chi_t)$ es continua con respecto a t en $[t_0, \beta)$ para cada función continua $\chi : [t_0 - \tau, \beta) \longrightarrow \mathrm{D}$.*

Ejemplo 3.2.2. *Sea la función $F : [t_0, \beta) \times \mathcal{C}_{\mathrm{D}} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, definida como*

$$F(t,\phi) = f\big(t, \phi(g_1(t)-t), \ldots, \phi(g_m(t)-t)\big),$$

donde $f : [t_0,\beta) \times \mathrm{D}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $g_j : [t_0,\beta) \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas y $t-\tau \leq g_j(t) \leq t$ para $t \geq t_0$, $j = 1, \ldots, m$ Teniendo en cuenta que para cada $\chi : [t_0-\tau, \beta) \longrightarrow \mathrm{D}$.

$$\chi_t(g_j(t)-t) = \chi(t + g_j(t) - t) = \chi(g_j(t)),$$

se deduce que

$$\begin{aligned} F(t,\chi_t) =& f\big(t, \chi_t(g_1(t)-t), \ldots, \chi_t(g_m(t)-t)\big) \\ =& f\big(t, \chi(g_1(t)), \ldots, \chi(g_m(t))\big). \end{aligned}$$

Luego, si f y $g_1, \ldots, g_m$ son funciones continuas, entonces, para cualquier función continua $\chi : [t_0-\tau,\beta) \longrightarrow \mathrm{D}$, $F(t,\chi_t)$ es una composición de funciones continuas, y por lo tanto es continua para $t_0 \leq t < \beta$. Por consiguiente, F satisface la condición de continuidad 3.2.1.

Ejemplo 3.2.3. *Sea $F : [t_0,\beta) \times \mathcal{C}_{\mathrm{D}} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ la función definida como*

$$F(t,\phi) \equiv \int_{-\tau}^{0} \phi(\sigma)\, d\sigma.$$

Entonces, F satisface la condición de continuidad. En efecto, si $\chi : [t_0-\tau,\beta) \longrightarrow \mathrm{D}$ es continua, utilizando la definición de χ_t y haciendo el cambio $s = t+\sigma$ se tiene que

$$F(t,x_t) = \int_{-\tau}^{0} \chi_t(\sigma)\, d\sigma = \int_{-\tau}^{0} \chi(t+\sigma)\, d\sigma = \int_{t-\tau}^{t} \chi(s)\, ds,$$

que depende continuamente de t.

A continuación introducimos la forma integral de (3.9).

Proposición 3.2.4. *Si $F : [t_0,\beta) \times \mathcal{C}_{\mathrm{D}} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisface la condición de continuidad, entonces una función $\chi : [t_0-\tau,\beta_1) \longrightarrow \mathrm{D}$ con $\beta_1 \in (t_0,\beta)$ es una solución de (3.9) si y solo sí*

$$x(t) = \begin{cases} \phi(t-t_0) & \text{para } t_0-\tau \leq t \leq t_0 \\ \phi(0) + \int_{t_0}^{t} F(s,x_s)\, ds & \text{para } t_0 \leq t \leq \beta_1, \end{cases} \tag{3.10}$$

donde $\phi = \theta_{t_0}$.

Demostración.
Bajo la hipótesis de continuidad de F, si integramos sobre el intervalo $[t_0, t]$ con $t \in (t_0,\beta_1] \subset (t_0,\beta)$ a ambos lados de la ecuación $x'(s) = F(s,x_s)$ y aplicamos el teorema Fundamental del Cálculo Integral y la condición inicial $x_{t_0} = \phi$ (ver (3.7) y (3.8)) se tiene que

$$x(t) = \phi(0) + \int_{t_0}^{t} F(s,x_s)\, ds \quad \text{para } t_0 \leq t \leq \beta_1. \tag{3.11}$$

Recíprocamente si partimos de (3.11) obtenemos fácilmente el problema (3.9). ■

Ahora se introducirá de nuevo la condición Lipschitziana que aparece en la sección 2.2 pero en el marco desarrollado a lo largo de esta sección y la anterior.

Definición 3.2.5. *Sea* $F : \mathrm{J} \times \mathcal{C}_\mathrm{D} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *y sea* $\mathcal{G}$ *un subconjunto de* $\mathrm{J} \times \mathcal{C}_\mathrm{D}$*. Si existe alguna constante* $\mathrm{K} > 0$

$$|F(t,\phi) - F(t,\tilde{\phi})| \leq \mathrm{K}\|\phi - \tilde{\phi}\|_\tau \quad \forall (t,\phi),(t,\tilde{\phi}) \in \mathcal{G}$$

decimos que F *es Lipschitziana en* $\mathcal{G}$ *con constante de Lipschitz* K*.*

Un ejemplo de una función F que satisfaga la condición Lipschitziana es el siguiente:

Ejemplo 3.2.6. *La función* F *definida en el Ejemplo 3.2.3 es lipschitziana en* $[t_0-\tau,\beta) \times \mathcal{C}_\mathrm{D}$*. En efecto, basta comprobar que*

$$\begin{aligned} |F(t,\phi) - F(t,\tilde{\phi})| &= \left| \int_{-\tau}^{0} [\phi(\sigma) - \tilde{\phi}(\sigma)]\, d\sigma \right| \\ &\leq \left| \int_{-\tau}^{0} \sup_{-\tau\leq\sigma\leq 0} |\phi(\sigma) - \tilde{\phi}(\sigma)|\, d\sigma \right| = \tau\|\phi - \tilde{\phi}\|_\tau . \end{aligned}$$

Aunque para los teoremas de existencia y unicidad se empleará la condición de localmente Lipschitziana que se muestra a continuación.

Definición 3.2.7. *Dada la función* $F : \mathrm{J} \times \mathcal{C}_\mathrm{D} \longrightarrow \mathbb{R}^n$*, se dice que* F *es localmente Lipschitziana si para cada* $(t,\bar{\phi}) \in \mathrm{J} \times \mathcal{C}_\mathrm{D}$ *existen constantes* $a > 0$ *y* $b > 0$ *tales que*

$$\mathcal{G} \equiv ([t-a, t+a] \cap \mathrm{J}) \times \{\phi \in \mathcal{C} : \|\phi - \bar{\phi}\|_\tau \leq b\}$$

es un subconjunto de $\mathrm{J} \times \mathcal{C}_\mathrm{D}$ *y* F *es Lipschitziana en* $\mathcal{G}$*.*

Observación 3.2.8. *Finalmente señalar que si la función* $f : [t_0,\beta) \times \mathrm{D}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *es localmente lipschitziana en el sentido descrito en la sección 2.2, entonces el funcional* F *definido por* (3.4) *es localmente lipschitziana en el marco de la Definición 3.2.7 (ver [3] para la demostración).*

3.3. Unicidad de soluciones

El objetivo de esta sección es probar la unicidad de solución para el problema (3.9). Previamente daremos un resultado que utilizaremos en la demostración.

Lema 3.3.1. *Sea* $\chi : [t_0-\tau,\beta) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *continua. Entonces, dado cualquier* $\tilde{t} \in [t_0,\beta)$ *y para todo* $\epsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$\|x_t - x_{\tilde{t}}\|_\tau < \epsilon \quad \text{para } t \in [t_0,\beta) \text{ y } |t - \tilde{t}| < \delta.$$

Demostración.
Fijamos $\epsilon > 0$. Sea $t \in [t_0, \beta)$ y tomamos $\delta_1 > 0$ tal que $\tilde{t} + \delta_1 < \beta$. Ahora como χ es continua en el compacto $[t_0 - \tau, \tilde{t} + \delta_1] \subset [t_0 - \tau, \beta)$, χ es uniformemente continua en $[t_0 - \tau, \tilde{t} + \delta_1]$ y existe $\delta > 0$ tal que

$$|\chi(s) - \chi(\tilde{s})| < \epsilon/2 \quad \text{cuando } |s - \tilde{s}| < \delta \text{ para } s, \tilde{s} \in [t_0 - \tau, \tilde{t} + \delta_1].$$

Por tanto,,

$$\|\chi_t - \chi_{\tilde{t}}\|_\tau = \sup_{-\tau \le \sigma \le 0} |\chi_t(\sigma) - \chi_{\tilde{t}}(\sigma)| = \sup_{-\tau \le \sigma \le 0} |\chi(t + \sigma) - \chi(\tilde{t} + \sigma)| \le \epsilon/2 \le \epsilon$$

cuando $|t - \tilde{t}| < \delta$. ■

Ahora introducimos el lema de Gronwall que ha sido visto y demostrado en [7] por lo que no se incluirá su demostración.

Lema 3.3.2 (Lema de Gronwall 1). *Sean $x, \phi, y : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas, $y(t) > 0$ $\forall t \in [a, b]$ y se verifica*

$$0 \le x(t) \le \phi(t) + \int_a^t y(s)x(s)\, ds(s) \quad \forall t \in [a, b]$$

entonces

$$0 \le x(t) \le \phi(t) + \int_a^t y(s)\phi(s) e^{\int_s^t y(z)\, dz} ds \quad \forall t \in [a, b].$$

Teorema 3.3.3 (Teorema de Unicidad). *Sea $F : [t_0, \beta) \times \mathcal{C}_{\mathrm{D}} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función que satisfaga la condición de continuidad 3.2.1 y sea localmente Lipschitziana. Entonces, dado cualquier función $\phi \in \mathcal{C}_{\mathrm{D}}$, el problema* (3.9) *tiene como máximo una solución definida en $[t_0 - \tau, \beta_1)$ para cualquier $\beta_1 \in (t_0, \beta]$.*

Demostración.
Suponemos por reducción al absurdo que para algún $\beta_1 \in (t_0, \beta]$ hay dos soluciones x y $\tilde{x}$ definidas de $[t_0 - \tau, \beta_1) \longrightarrow \mathrm{D}$ con $x \not\equiv \tilde{x}$. Sea

$$t_1 = \text{ínf}\{t \in (t_0, \beta_1) : x(t) \ne \tilde{x}(t)\}.$$

Luego, $t_0 \le t_1 < \beta_1$ y

$$x(t) = \tilde{x}(t) \quad \text{para } t_0 - \tau \le t \le t_1.$$

Dado que $(t_1, x_{t_1}) \in [t_0, \beta_1) \times \mathcal{C}_{\mathrm{D}}$, existen constantes $a > 0$ y $b > 0$ tales que el conjunto

$$\mathcal{G} \equiv [t_1, t_1 + a] \times \{\varphi \in \mathcal{C} : ||\varphi - x_{t_1}||_\tau \le b\}$$

está contenido en $[t_0, \beta) \times \mathcal{C}_{\mathrm{D}}$ y F es Lipschitz en $\mathcal{G}$ (con K constante Lipschitz).

Por el Lema 3.3.1, existe $\delta \in (0, a]$ tal que $(t, x_t) \in \mathcal{G}$ y $(t, \tilde{x}_t) \in \mathcal{G}$ para $t_1 \leq t \leq t_1 + \delta$. Además, tanto x como $\tilde{x}$ satisfacen (3.10) para $t_0 - \tau \leq t \leq t_1 + \delta$. De este modo, la diferencia para $t_0 \leq t \leq t_1 + \delta$, verifica:

$$\begin{aligned} |x(t) - \tilde{x}(t)| &= \left| \phi(0) + \int_{t_0}^{t} F(s, x_s)\, ds - \big[\phi(0) + \int_{t_0}^{t} F(s, \tilde{x}_s)\, ds\big] \right| \\ &= \left| \int_{t_0}^{t} [F(s, x_s) - F(s, \tilde{x}_s)]\, ds \right|. \end{aligned}$$

Notemos que por definición de t_1 se tiene que $|x(t) - \tilde{x}(t)| = 0$ para $t_0 \leq t \leq t_1$. Además, para $t_1 \leq t \leq t_1 + \delta$ empleando la condición Lipschitziana a

$$|x(t) - \tilde{x}(t)| = \left| \int_{t_1}^{t} [F(s, x_s) - F(s, \tilde{x}_s)]\, ds \right| \leq \int_{t_1}^{t} K \|x_s - \tilde{x}_s\|_\tau\, ds.$$

Ahora, dado que el lado derecho es una función creciente de t, se llega a

$$\|x_t - \tilde{x}_t\|_\tau \leq \int_{t_1}^{t} K \|x_s - \tilde{x}_s\|_\tau\, ds.$$

Por esto y por el lema de Gronwall (Lema 3.3.2), resulta que $x(t) = \tilde{x}(t)$ en $[t_1, t_1 + \delta)$, contradiciendo la definición de t_1. ■

3.4. Existencia de soluciones

En esta sección se estudiará la existencia de solución para el problema (3.9). Para ello, se ha dividido en dos subsecciones dependiendo de si la solución es local o global. Nos basaremos en las referencias [3] y [13].

3.4.1. Existencia local

En esta subsección se proporcionan condiciones suficientes para garantizar la existencia de solución local para el problema (3.9). Nos basaremos en la forma integral de dicho problema (ecuación (3.10)) y en la construcción de aproximaciones sucesivas de la solución, los denominados iterantes de Picard. Nos apoyaremos principalmente en las referencias [2], [3] y [13].

Teorema 3.4.1 (Existencia Local). *Sea $F : [t_0, \beta) \times \mathcal{C}_\mathrm{D} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ localmente Lipschitziana y satisfaciendo la condición de continuidad 3.2.1. Entonces para cada función dada $\phi \in \mathcal{C}_\mathrm{D}$, el problema* (3.9) *tiene una única solución $x(t)$ definida en $[t_0, t_0 + \delta]$ para algún $\delta > 0$.*

Demostración.
Sea $\phi = \theta_{t_0}$. Se elige cualquier constante $a > 0$ y $b > 0$ lo suficientemente pequeñas tales que

$$\mathcal{G} \equiv [t_0, t_0 + a] \times \{\varphi \in \mathcal{C} : \|\varphi - \phi\|_\tau < b\}$$

es un subconjunto de $[t_0, \beta) \times \mathcal{C}_{\mathrm{D}}$ y F es Lipschitziana en $\mathcal{G}$ con K constante de Lipschitz. Se define una función continua $\tilde{\chi}$ en $[t_0 - \tau, t_0 + a] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$\tilde{\chi}(t) = \begin{cases} \phi(t - t_0) & \text{para } t_0 - \tau \leq t \leq t_0 \\ \phi(0) & \text{para } t_0 \leq t \leq t_0 + a. \end{cases}$$

Entonces $F(t, \tilde{\chi}_t)$ depende continuamente de t, y por lo tanto $|F(t, \tilde{\chi}_t)| \leq \mathrm{M}_1$ en $[t_0, t_0 + a]$ para alguna constante $\mathrm{M}_1 > 0$. Definimos $\mathrm{M} = \mathrm{K}b + \mathrm{M}_1$.

Elegimos $a_1 \in (0, a]$ tal que

$$\|\tilde{\chi}_t - \phi\|_\tau = \|\tilde{\chi}_t - \tilde{\chi}_{t_0}\|_\tau \leq b \quad \text{para } t_0 \leq t \leq t_0 + a_1.$$

Notemos que, por el Lema 3.3.1, la existencia de $a_1 > 0$ está garantizada.

A partir de ahora, la demostración será similar a la de una ecuación diferencial ordinaria.

Elegimos $h > 0$ tal que

$$h \leq \text{mín}\{a_1, b/\mathrm{M}\} \quad \text{y} \quad h < 1/\mathrm{K}.$$

Sea S el conjunto de todas las funciones continuas $\chi : [t_0 - \tau, t_0 + h] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tales que

$$\begin{cases} x(t) = \phi(t - t_0) & \text{para } t_0 - \tau \leq t \leq t_0 \qquad \text{y} \\ |x(t) - \phi(0)| \leq b & \text{para } t_0 \leq t \leq t_0 + h. \end{cases}$$

Notemos que si $\chi \in \mathrm{S}$ y $t \in [t_0, t_0 + h]$, entonces $||\chi_t - \tilde{\chi}_t||_\tau \leq b$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} |F(t, \chi_t)| &\leq |F(t, \chi_t) - F(t, \tilde{\chi}_t)| + |F(t, \tilde{\chi}_t)| \\ &\leq \mathrm{K}||\chi_t - \tilde{\chi}_t||_\tau + \mathrm{M}_1 \leq \mathrm{K}b + \mathrm{M}_1 = \mathrm{M}. \end{aligned}$$

Para cada $\chi \in \mathrm{S}$, definimos la función T_χ en $[t_0 - \tau, t_0 + h]$ por

$$\mathrm{T}_\chi(t) = \begin{cases} \phi(t - t_0) & \text{para } t_0 - \tau \leq t \leq t_0, \\ & \\ \phi(0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} F(s, \chi_s)\, ds & \text{para } t_0 - \tau \leq t \leq t_0 + h. \end{cases} \tag{3.12}$$

Entonces, como $|F(s, \chi_s)| \leq \mathrm{M}$,

$$\begin{aligned} |\mathrm{T}_\chi(t) - \phi(0)| &= \left| \phi(0) + \int_{t_0}^{t} F(s, \chi_s)\, ds - \phi(0) \right| \\ &= \int_{t_0}^{t} \big|F(s, \chi_s)\big|\, ds \leq \mathrm{M}h \leq b \quad \text{para } t_0 \leq t \leq t_0 + h. \end{aligned}$$

Además, la función T_χ definida es continua, por lo tanto, $\mathrm{T}_\chi \in \mathrm{S}$.

Construimos ahora una sucesión de aproximaciones. Elegimos

$$x_{(0)}(t) = \begin{cases} \phi(t-t_0) & \text{para } t_0-\tau \le t \le t_0 \\ \phi(0) & \text{para } t_0 \le t \le t_0+a. \end{cases}$$

Claramente $|x_{(0)}(t)-\phi(0)| \le b$ para $t_0 \le t \le t_0+h$ y $x_{(0)} \in \mathrm{S}$.

Para cada $m = 0,1,2,\dots,$ definimos $x_{(m+1)} = \mathrm{T}_{x_{(m)}}$, es decir,

$$x_{(m+1)} = \phi(t-t_0) \qquad \text{para } t_0-\tau \le t \le t_0$$

$$x_{(m+1)} = \phi(0) + \int_{t_0}^{t} F(s,\chi_s)\,ds \quad \text{para } t_0-\tau \le t \le t_0+h. \tag{3.13}$$

Veamos que la sucesión $\{x_{(m)}\}_m$ converge para lo cual vamos a utilizar la condición $\mathrm{K}h < 1$ mencionada anteriormente.

En primer lugar, notemos que para $t_0 \le t \le t_0+h$

$$|x_{(1)}(t)-x_{(0)}(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} F(s,x_{(0)s})\,ds \right| \le \mathrm{M}h \le b. \tag{3.14}$$

Utilizando la lipschitzianidad de F y que $x_{(1)}(t) = x_{(0)}(t)$ para $t_0-\tau \le t \le t_0$, se sigue que

$$\begin{aligned} |x_{(2)}(t)-x_{(1)}(t)| &= \left| \int_{t_0}^{t} \big(F(s,x_{(1)s})-F(s,x_{(0)s})\big)\,ds \right| \\ &\le \mathrm{K}\int_{t_0}^{t} \|x_{(1)s}-x_{(0)s}\|_\tau\,ds \le \mathrm{K}\int_{t_0}^{t} \sup_{t_0\le r\le t_0+h} |x_{(1)}(r)-x_{(0)}(r)|\,ds \end{aligned}$$

y en virtud de (3.14) llegamos a que

$$|x_{(2)}(t)-x_{(1)}(t)| \le \mathrm{K}hb \quad \text{ para } t_0 \le t \le t_0+h.$$

De esta forma, para cada $m = 0,1,2,\ldots$, se tiene que

$$\begin{aligned} \left|x_{(m+2)}(t)-x_{(m+1)}(t)\right| &= \left| \int_{t_0}^{t} \left[F(s,x_{(m+1)s})-F(s,x_{(m)s})\right] ds \right| \\ &\le \mathrm{K}\int_{t_0}^{t} \|x_{(m+1)s}-x_{(m)s}\|_\tau\,ds \le \mathrm{K}\int_{t_0}^{t} \sup_{t_0\le r\le t_0+h} |x_{(m+1)}(r)-x_{(m)}(r)| \end{aligned}$$

para $t_0 \le t \le t_0+h$, y por inducción concluimos que

$$\left|x_{(m+2)}(t)-x_{(m+1)}(t)\right| \le \mathrm{K}h\,(\mathrm{K}h)^m b = (\mathrm{K}h)^{m+1}b.$$

Por tanto,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left|x_{(m+1)}(t)-x_{(m)}(t)\right| \le \sum_{m=0}^{\infty} (\mathrm{K}h)^m b$$

y como $\mathrm{K}h < 1$, la serie del lado derecho converge. En consecuencia, aplicando el criterio de comparación, la serie del lado izquierdo converge uniformemente en $[t_0, t_0 + h]$.

Ahora bien,

$$x_{(m)}(t) = x_{(0)}(t) + \sum_{l=0}^{m-1} \left[x_{(l+1)}(t) - x_{(l)}(t)\right] \quad \text{para } t_0 \leq t \leq t_0 + h$$

lo que prueba que la sucesión $\{x_{(m)}\}$ converge uniformemente en $[t_0, t_0 + h]$ a una función que denotaremos por $x(t)$.

Notemos que x es continua en $[t_0, t_0 + h]$ por ser límite uniforme de funciones continuas. Nos queda ver que esta función x que hemos obtenido verifica la forma integral (3.10) y por tanto es solución de (3.9). Para ello, utilizaremos de nuevo la lipschitzianidad de F para probar que

$$\left|F(s, x_{(m)s}) - F(s, x_s)\right| \leq \mathrm{K}\left\|x_{(m)s} - x_s\right\|_\tau \leq \mathrm{K} \sup_{t_0 \leq r \leq t_0 + h} \left|x_{(m)}(r) - x(r)\right|$$

y por tanto

$$F(s, x_{(m)s}) \longrightarrow f(s, x_s) \quad \text{para } t_0 \leq s \leq t_0 + h$$

converge uniformemente cuando $m \longrightarrow \infty$. Dicha convergencia nos permite pasar al límite bajo el signo de la integral, es decir,

$$\int_{t_0}^{t} F(s, x_{(m)s})\, ds \longrightarrow \int_{t_0}^{t} F(s, x_s)\, ds \quad \text{cuando } m \longrightarrow \infty,$$

y tomando límites en (3.13) obtenemos que

$$x(t) = \phi(0) + \int_{t_0}^{t} F(s, x_s)\, ds \quad \text{para } t_0 \leq t \leq t_0 + h.$$

lo que concluye la demostración de la existencia de solución.

Para probar la unicidad de solución basta aplicar el Teorema 3.3.3 (teorema de unicidad). ■

Corolario 3.4.2. *Sea el problema* (3.1)-(3.2) *donde* $f : [t_0, \beta) \times \mathrm{D}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *es una función continua y localmente lipschitziana y* g_j*, con* $j = 1, \ldots, m$*, funciones continuas. Entonces, para cada función* $\theta \in \mathrm{C}([t_0 - \tau, t_0], \mathrm{D})$*, el problema* (3.1)-(3.2) *tiene una única solución* $x(t)$ *definida en* $[t_0, t_0 + \delta]$ *para algún* $\delta > 0$*.*

Demostración.

Basta aplicar el Teorema 3.4.1 teniendo en cuenta el Ejemplo 3.2.2 y la Observación 3.2.8. ■

3.4.2. Existencia global

En esta subsección trataremos el otro teorema de existencia de solución del problema (3.9), donde nos basaremos en el segundo Lema de Gronwall (Lema 3.4.6) y en el teorema de solución maximal (Teorema 3.4.5), para demostrar la existencia de solución global en un intervalo determinado. Nos apoyaremos en la referencia [3] para su desarrollo.

En primer lugar, mostraremos dos definiciones sobre dos conceptos que se emplearan para enunciar el teorema de solución maximal. La primera definición trata acerca de la posibilidad de extender una solución en un intervalo a otro de mayor longitud que lo contenga. Mientras que la segunda definición nos explica la propiedad de que una función esté casi acotada.

Definición 3.4.3. *Sea x_1 definida en $[t_0-\tau,\beta_1)$ y x_2 definida en $[t_0-\tau,\beta_2)$ soluciones del problema* (3.9)*. Si $\beta_2>\beta_1$ decimos que x_2 es una extensión de la solución x_1, o que x_1 puede extenderse a $[t_0-\tau,\beta_2)$. Entonces, una solución x del problema es maximal o no prolongable, si no se puede extender a otro intervalo estrictamente mayor.*

Definición 3.4.4. *Se dice que la función $F:[t_0,\beta)\times\mathcal{C}_{\mathrm{D}}\longrightarrow\mathbb{R}^n$ es casi acotada si F está acotada en todo conjunto de la forma $[t_0,\beta_1]\times\mathcal{C}_{\mathrm{A}}$ donde $t_0<\beta_1<\beta$ y A es un subconjunto acotado cerrado de* D*.*

Estos dos conceptos anteriormente aparecen en el siguiente teorema de solución maximal, cuya demostración se puede encontrar en la referencia [3].

Teorema 3.4.5 (Solución maximal). *Sea $F:[t_0,\beta)\times\mathcal{C}_{\mathrm{D}}\longrightarrow\mathbb{R}^n$ localmente Lipschitziana y casi acotada, que satisface la condicición de continuidad 3.2.1. Entonces para cada función $\phi\in\mathcal{C}_{\mathrm{D}}$, el problema* (3.9) *tiene una única solución maximal $x(t)$ definida en $[t_0-\tau,\beta_1)$ para cierto β_1 verificando $t_0<\beta_1\leq\beta$. Si $\beta_1<\beta$, entonces para cada conjunto cerrado y acotado* $\mathrm{W}\subset\mathrm{D}$

$$x(t)\notin\mathrm{W}\quad \textit{para algún } t\in(t_0,\beta_1).$$

A continuación, veremos otro lema de Gronwall, pequeña variación del Lema 3.3.2, que emplearemos para la demostración del Teorema de Existencia global (Teorema 3.4.7), el cual se puede encontrar junto con su demostración en [11].

Lema 3.4.6 (Lema de Gronwall 2). *Sea $x:[t_0,t_0+\beta)\longrightarrow[0,\infty)$ una función continua no negativa. Supongamos que existen constantes $\mathrm{K}_1,\mathrm{K}_2\geq 0$ para las que*

$$x(t)\leq \mathrm{K}_1+\int_{t_0}^{t}\mathrm{K}_2x(s)\,ds\quad \textit{para todo } t\in[t_0,t_0+\beta),$$

entonces se tiene que

$$x(t)\leq \mathrm{K}_1e^{\mathrm{K}_2(t-t_0)}\quad \textit{para todo } t\in[t_0,t_0+\beta).$$

Y ahora vamos con el objetivo de esta subsección, que era enunciar y demostrar el teorema de existencia global.

Teorema 3.4.7 (Existencia Global). *Sea* $\mathrm{D} = \mathbb{R}^n$ *y* $F : [t_0, \beta) \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *localmente Lipschitziana y que satisface la condición de continuidad 3.2.1. Suponemos además que*

$$|F(t, \phi)| < \mathrm{M}(t) + \mathrm{N}(t)\|\phi\|_\tau \ \ en\ \ [t_0, \beta) \times \mathcal{C}, \tag{3.15}$$

donde M *y* N *son funciones continuas y positivas en* $[t_0, \beta)$*. Entonces existe una única solución maximal del problema* (3.9) *en* $[t_0 - \tau, \beta)$*.*

Demostración.
Notemos que la condición (3.15) implica que F es casi acotada.

Sea x la única solución maximal de (3.9) y $[t_0 - \tau, \beta_1)$ su intervalo maximal. Supongamos por reducción al absurdo que $\beta_1 < \beta$. Entonces por ser M y N continuas en $[t_0, \beta_1]$, existen constantes M_1 y N_1 tales que $\mathrm{M}(t) \leq \mathrm{M}_1$ y $\mathrm{N}(t) \leq \mathrm{N}_1$ en $[t_0, \beta_1]$. Luego, por la ecuación (3.10) y la condición (3.15) se tiene

$$|x(t)| = \|\phi\|_\tau + \int_{t_0}^{t} |F(t, x_s)|\, ds \leq \|\phi\|_\tau + \int_{t_0}^{t} \mathrm{M}_1\, ds + \int_{t_0}^{t} \mathrm{N}_1 \|x_s\|_\tau\, ds$$

para $t_0 \leq t < \beta_1$. De esto llegamos a

$$\|x_t\|_\tau \leq \|\phi\|_\tau + \mathrm{M}_1(\beta_1 - t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{N}_1 \|x_s\|_\tau\, ds \ \ \text{para}\ \ t_0 \leq t < \beta_1.$$

Entonces, si aplicamos el segundo lema de Gronwall (Lema 3.4.6) obtenemos

$$|x(t)| \leq \|x_t\|_\tau \leq \left[\|\phi\|_\tau + \mathrm{M}_1(\beta_1 - t_0)\right] e^{\mathrm{N}_1(\beta_1 - t_0)} \ \ \text{en}\ \ [t_0, \beta_1).$$

Esto muestra que $x(t)$ permanece en un conjunto acotado cerrado, contradiciendo por el teorema solución maximal (Teorema 3.4.5) la suposición de que $\beta_1 < \beta$. Por lo tanto $\beta_1 = \beta$, luego existe una única solución maximal del problema (3.9) en $[t_0 - \tau, \beta)$ como queríamos demostrar. ■

Corolario 3.4.8. *Sea el problema*

$$\begin{cases} x'(t) = \sum_{j=1}^{m} A_j(t) x(g_j(t)) + c(t) & para\ \ t \in [t_0, \beta) \\ x(t) = \theta(t) & para\ \ t - \tau \leq t \leq t_0 \end{cases} \tag{3.16}$$

donde $A_j(t) = (a_{ik}^{(j)}(t))$ *y* $c(t) = (c_i(t))$ *con* $i, k = 1, \ldots, n$ *y* $a_{ik}^{(j)}, c_i : [t_0, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continuas y además,* $g_j(t)$ *es continua y* $t - \tau \leq g_j(t) \leq t$ *para* $j = 1, \ldots, m$.*. Entonces, para cada función* $\theta \in \mathcal{C}([t_0 - \tau, t_0], \mathbb{R}^n)$*, existe una única solución de* (3.16) *y está definida en* $[t_0 - \tau, \beta)$*.*

Bibliografía

[1] H.D. Alliera, *Estudio de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales con Retardo Aplicados a Modelos Bioquímicos*, Universidad de Buenos Aires, 2018.

[2] E.A. Dads,«Some General Results and Remarks on Delay Differential Equations», en *Delay Differential Equations and Applications*, Springer, New York, 2006, 31-41.

[3] R.D. Driver, *Ordinary and Delay Differential Equations*, 2.ª ed., Springer-Verlag, New York, 1977.

[4] T. Erneux, *Applied Delay Differential Equations*,1.ª ed., Springer, New York, 2009.

[5] L.A. Fernández, *Introducción a las Ecuaciones en Derivadas Parciales*. Universidad de Cantabria, 2022. Disponible en: https://personales.unican.es/lafernandez/Intro-EDP.pdf

[6] D. Gómez, *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*. Universidad de Cantabria, 2021.

[7] D. Gómez, *Estudio del comportamiento asintótico de las soluciones de sistemas diferenciales lineales*, en Teoría Cualitativa de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Universidad de Cantabria, 2023.

[8] S. Novo, R. Obaya y J. Rojo, *Ecuaciones y Sistemas Diferenciales*, McGraw-Hill, 1995.

[9] S. Pérez Córdoba y A. Bengochea Cruz, *Introducción a las Ecuaciones Diferenciales con Retardo*, ed. Miscelánea Matemática 67, 2018, 57-71. Disponible en: https://miscelaneamatematica.org/download/tbl_articulos.pdf
2.a91a2d4b1e41f253.363730342e706466.pdf

[10] R. Ramírez, *Funciones Lipschitz*. Universidad Politécnica de Cataluña. Disponible en: https://web.mat.upc.edu/rafael.ramirez/edos/cuarta_clase.pdf

[11] C. Ruíz, *Elementos de Ecuaciones Diferenciales*. Universidad Complutense de Madrid. Disponible en: https://blogs.mat.ucm.es/cruizb/wp-content/uploads/sites/48/2020/07/Teor-Existencia-2.pdf

[12] J.L. Schiff, *The Laplace Transform: Theory and Applications*, 1.ª ed., Springer, New York, 1999.

[13] H. Smith, *An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Life Sciences*, 1.ª ed., Springer, New York, 2010.