Facultad
de
Ciencias

SOBRE LAS FUNCIONES DE NASH
(About the Nash Functions)

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autor: Javier García Arias

Director: Luis Miguel Pardo Vasallo

Junio - 2024

Abstract. In his 1952 work, Nash shows that every compact differentiable submanifold of $\mathbb{R}^n$ is approximate and diffeomorphic to a manifold defined by analytic-algebraic functions. In fact, Nash's aim was even stronger and he tries to prove that every differentiable submanifold of compact $\mathbb{R}^n$ is diffeomorphic to a real algebraic variety. This result remained open until later work by A. Tognoli. However, these analytical-algebraic functions remained an element of interest and are called "Nash Functions". For its part, Real Algebraic Geometry began its renewed journey from the real Nullstellensatz of D. Dubois and J.J. Risler. As Real Algebraic Geometry advances, it becomes clearer that the natural spectrum of this Geometry is influenced by the ideas of Artin and Schrier and leads to the Real Spectrum of a ring (the proper cones of a ring). The difficulty was, then, to understand what the structural beam of the real spectrum of a ring was and in a seminal work by M.F. Roy in 1982 argued that it was the Nash functions (and not the polynomials) that define said structural bundle. The difficulty then arises of finding a way to connect Nash's ideas with Real Algebraic Geometry. This way of connecting involves proving the equivalence between the analytical-algebraic functions and the semi-algebraic functions of class $\mathscr{C}^\infty$. Therefore, the main objective of the proposed TFG is to have a complete (and as self-contained as possible) proof of the equivalence between the notions of analytical-algebraic Nash functions and semi-algebraic graph functions that are infinitely differentiable.

Key Words: Semi-algebraic sets, regular local ring, étale regular mapping, algebraic power series.

Resumen. En su trabajo de 1952, Nash demuestra que toda subvariedad diferenciable compacta de $\mathbb{R}^n$ es aproximable y difeomorfa a una variedad definida por funciones analítico-algebraicas. De hecho, el propósito de Nash era aún más fuerte y trata de probar que toda subvariedad diferenciable de $\mathbb{R}^n$ compacta es difeomorfa a una variedad algebraica real. Este resultado quedó abierto hasta un trabajo posterior de A. Tognoli. Sin embargo, esas funciones analítico-algebraicas quedaron como elemento de interés y reciben el nombre de "Funciones de Nash". Por su parte, la Geometría Algebraica Real comenzó su andadura renovada a partir de los Nullstellensatz reales de D. Dubois y J.J. Risler. Conforme avanza la Geometría Algebraica Real, se hace más claro que el espectro natural de esta Geometría está influenciado por las ideas de Artin y Schrier y conduce al Espectro Real de un anillo (los conos primos de un anillo). La dificultad era, entonces, comprender cuál era el haz estructural del espectro real de un anillo y en un trabajo seminal M.F. Roy de 1982, defendió que eran las funciones de Nash (y no los polinomios) quienes definen dicho haz estructural. Surge entonces la dificultad de encontrar el modo de conectar las ideas de Nash con la Geometría Algebraica Real. Esta manera de conectar pasa por probar la equivalencia entre las funciones analítico-algebraicas y las funciones semi-algebraicas de clase $\mathscr{C}^\infty$. Por tanto, el objetivo principal del TFG propuesto pasa por disponer de una prueba completa (y tan auto-contenida como sea posible) de la equivalencia entre las nociones de funciones analítico-algebraicas de Nash y las funciones de grafo semi-algebraico que son infinitamente diferenciables.

Palabras Clave: Conjuntos Semi-algebraicos, anillo local regular, morfismo regular étale, serie de potencias algebraica.

Índice

CAPíTULO 0

Introducción y Resumen de Contenidos de la Memoria.

Índice

0.1. Introducción

Las funciones de Nash reciben su nombre por el famoso matemático J. Nash. Esta “mente maravillosa” se hizo popular a partir de la biografía de S. Nasar, [**Nasar, 1998**], y la película, parcialmente ficcionada como biografía, del mismo título, dirigida por Ron Howard y que recibió cuatro premios Oscar en 2001. A la sazón, J. Nash era ya un matemático famoso, tanto en el colectivo matemático como en el contexto de los economistas interesados en fundamentos de economía.

J. Nash poseía un cerebro de excepcional poderío que se conjugaba con una originalidad de pensamiento extraordinario que le permitió romper barreras y dificultades con gran creatividad. Su primer resultado famoso y relevante fue la demostración de la existencia de equilibrios en juegos no cooperativos. Esa fue su tesis doctoral en Princeton (cf. [**Nash, 1950**], [**Nash, 1951**]) que revolucionó la Teoría de Juegos aplicada a Economía y le hizo merecedor del Premio Nobel de Economía de 1994. El lector interesado puede acudir al contenido del Trabajo de Fin de Grado [**García-Hevia, 2018**].

A pesar de la enorme celebridad que estos trabajos iniciales dieron, con el tiempo, a John Nash, sin embargo, él siempre consideró que sus contribuciones en Geometría Diferencial eran los más valiosos. De hecho, sus trabajos sobre la identificación de variedades Riemann, vía isometría, con subvariedades de espacios euclídeos se considera una de sus mayores contribuciones. M. Gramov ha llegado a decir que ese trabajo, conocido hoy como los Teoremas de Embebimiento de Nash, es “uno de los logros más importantes de las matemáticas del siglo XX”. Por ese resultado, su nombre estuvo entre los candidatos a la medalla Fields de 1958. Para entonces su enfermedad mental (clasificada como esquizofrenia paranoide en aquellos años) y las malas lenguas dicen que fueron los primeros brotes de su enfermedad la causa de que quedara tercero tras Roth y Thom. Pero los rumores malintencionados no son razones históricas así que dejaremos esto en el ámbito de la anécdota heredera de una merecida fama.

El objetivo de este TFG es más modesto y se centra en una etapa más preliminar a este estudio. Se conocía que una variedad diferenciable cerrada se puede identificar con el conjunto de ceros de funciones $\mathscr{C}^\infty$ en un espacio euclídeo. El resultado en sí aporta poco sobre el tipo de conjuntos con los que se identifican las variedades diferenciables cerradas. Al fin y al cabo, cualquier cerrado en $\mathbb{R}$ es el conjunto de ceros de alguna función $\mathscr{C}^\infty$, conforme a los trabajos de H. Withney. En 1950, J. Nash hace el anuncio de un resultado mucho más espectacular durante el ICM: Nash afirma que ha podido demostrar que toda variedad $\mathscr{C}^\infty$ cerrada es difeomorfa a una variedad algebraica real en algún espacio afín $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ (es decir, al conjunto de soluciones comunes a una familia finita de polinomios). A pesar del anuncio, Nash confiesa que debe trabajar un poco los detalles de su demostración.

En realidad, Nash no logra completamente su objetivo y se queda en una etapa intermedia. El trabajo de Nash prueba que toda subvariedad diferenciable $\mathscr{C}^\infty$ compacta de un espacio euclídeo real es difeomorfa al conjunto de ceros comunes a unas funciones analíticas que son algebraicas sobre el anillo de polinomios: son las llamadas *funciones de Nash*. Valiéndose de esta clase de funciones y los objetos geométricos que definen, las *variedades de Nash*, el resultado de Nash puede resumirse mediante la siguiente afirmación: *Una variedad $\mathscr{C}^\infty$ es difeomorfa a una subvariedad de Nash si y solamente si es difeomorfa al interior de alguna variedad $\mathscr{C}^\infty$ compacta, posiblemente con frontera* . De hecho, observamos que Nash no prueba exactamente lo que anuncia sino una versión más débil: las subvariedades de Nash no necesariamente son variedes afines reales y algebraicas. En su publicación [**Nash, 1952**], el propio Nash se pregunta si esas *variedades de ceros de funciones de Nash* pueden ser reemplazadas por polinomios. La respuesta final a esta conjetura es debida a A. Tognoli ([**Tognoli, 1973**]) con respuesta positiva:

TEOREMA 0.1.1 (**Nash-Tognoli**). *Toda variedad $\mathscr{C}^\infty$ compacta es isomorfa a una variedad algebraica real lisa (i.e. sin puntos singulares) en un espacio afín $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$.*

No obstante, las funciones analítico-algebraicas tuvieron su propio desarrollo a partir de los trabajos de M. Artin (hijo de E. Artin) y B. Mazur en [**Artin-Mazur, 1965**]. La caracterización de Artin y Mazur supone, de nuevo, un acercamiento a la Geometría Algebraica Real. Hemos escrito que la Geometría Algebraica Real aparece involucrada en los primeros desarrollos de las funciones de Nash. Pero conviene recordar un poco esa Geometría Algebraica sobre el cuerpo de los números reales.

Durante años, el estudio de las variedades algebraicas reales afines fue considerada como una "hermana menor" de la Geometría Algebraica clásica (ceros de polinomios con coordenadas en un cuerpo algebraicamente cerrado). No fue sino a principios de los años 70 que D. Dubois y J.J. Risler probaron su Nullstellensatz Real. Es decir, ambos autores, separada e independientemente, un resultado que mimetizaba el clásico Nullstellensatz de Hilbert y Kronecker, identificando las variedades reales afines $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ con los ideales reales del anillo de polinomios $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ (cf. Teorema 1.2.4 más abajo y las referencias [**Dubois, 69**] y [**Risler, 70**]). Por coincidencias del destino, ambos autores usaron la teoría de E. Artin (padre de M. Artin) y O. Schreier ([**Artin-Schreier, 1927**]) en su resolución del problema 17 de Hilbert: la Teoría de Cuerpos Reales y Realmente Cerrados.

A partir de la obra de Dubois y Risler, la Geometría Algebraica Real siente un fuerte desarrollo. En ese desarrollo no es menos relevante el Principio de A. Tarski y la terminología de S. Łojasiewicz. Así, S. Łojasiewicz introdujo en [**Łojasiewicz, 1964**] el término *semi-algebraico* para referirse a los subconjuntos $S \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ definibles mediante una combinación booleana de desigualdades ($\{\geq 0\}$ y $\{> 0\}$) e igualdades ($\{= 0\}$) polinomiales (ver Definición 8 más abajo). El principio de Tarski demuestra, en particular, que si $\pi : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n$ es la proyección que "olvida" las últimas m coordenadas y si $S \subseteq \mathbb{A}^{n+m}(\mathbb{R})$ es un conjunto semi-algebraico, entonces la imagen $\pi(S) \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ es también un conjunto semi-algebraico. Como el recíproco (todo semi-algebraico es la proyección de un algebraico en dimensiones superiores) es obvio como se verá más adelante, los conjuntos semi-algebraicos se vuelven el objeto esencial de estudio de la Geometría Algebraica Real. A la hora de estudiar las interacciones entre semi-algebraicos, se decidió prontamente que las funciones esenciales eran las *funciones semi-algebraicas*. Una función $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se denomina semi-algebraica si su grafo

$$Gr(f) := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \ x \in S, \ y - f(x) = 0\right\} \subseteq \mathbb{A}^{n+1}(\mathbb{R}),$$

es un conjunto semi-algebraico. En aras a controlar propiedades de tangencia y diferenciabilidad pronto se fue decantando el estudio hacia el anillo $\mathscr{S}^\infty(U)$, donde $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es un abierto semi-algebraico, formado por las funciones $f : U \to \mathbb{R}$ semi-algebraicas que son de clase $\mathscr{C}^\infty$ en U.

En su trabajo [**Roy, 1982**], M.F. Roy postuló esa clase de funciones semi-algebraicas de clase $\mathscr{C}^\infty$ como la familia natural de funciones en el estudio de semi-algebraicos reales (y de su generalización al espectro de un anillo). Para hacer toda esa extrapolación se requiere, ante todo, buscar una manera de presentar esas funciones que entronque, inequívocamente, con la geometría subyacente. Ese es el resultado final de este Trabajo de Fin de Grado y que enunciamos del modo siguiente (ver Teorema 2.3.1 del cuerpo de esta memoria):

Teorema 0.1.2. *Sea $\mathbb{R}$ el cuerpo de los números reales, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto semi-algebraico y $f : U \to \mathbb{R}$ una función. Son equivalentes:*

- *i) f es una función de Nash, esto es, $f : U \to \mathbb{R}$ es una función analítica, algebraica sobre el anillo de polinomios $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$.*
- *ii) f es semi-algebraica de clase $\mathscr{C}^\infty$, esto es $f \in \mathscr{C}^\infty(U)$.*

A la hora de probar este resultado, hemos elegido el camino propuesto por M. Coste, M.F. Roy y J. Bochnak en su compilación ya clásica, de la Geometría Algebraica Real hasta finales del siglo XX: [**BCR, 1987**]. Estos tres autores eligieron un camino de demostración aparentemente elíptico dado que su pretensión última era la introducción de la Geometría Algebraica Real para semi-algebraicos afines $S \subseteq \mathbb{A}^n(R)$, donde R es cualquier cuerpo realmente cerrado. Nuestro propósito es esta memoria es probar el Teorema precedente que, de manera natural, trata del caso $R = \mathbb{R}$. Por tanto, seguiremos el camino de la prueba de [**BCR, 1987**], aunque solo en el caso del cuerpo realmente cerrado $\mathbb{R}$.

El elemento técnico esencial de la prueba de [**BCR, 1987**] es la siguiente caracterización de las series de potencias formales que son algebraicas sobre el anillo de polinomios $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$: el anillo local regular $\mathbb{R}[[X_1, \ldots, X_n]]_{alg}$. En esencia, este resultado es una versión local del Teorema de Artin-Mazur y así lo hemos denominado:

Teorema 0.1.3 (**Versión local del Teorema de Artin-Mazur**). *Sea $\sigma \in \mathbb{R}[[X_1, \ldots, X_n]]_{alg}$ una serie de potencias formales algebraica sobre el anillo de polinomios $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$. Entonces, existen*

- *i) $V \subseteq \mathbb{A}^{n+d}(\mathbb{R})$ una variedad algebraica irreducible de dimensión n y $p \in V$ regular,*
- *ii) $U \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ un entorno abierto de $0 \in \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ un entorno abierto de $0 \in \mathbb{R}^n$,*
- *iii) $U' \subseteq \mathbb{A}^{n+d}(\mathbb{R})$ un entrono abierto de $p \in \mathbb{R}^{n+d}$,*
- *iv) $f \in \mathbb{R}[V]$ una función polinomial definida en V tal que si $\pi : \mathbb{A}^{n+d}(\mathbb{R}) \to \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ es la proyección que "olvida" las d últimas coordenadas, se verifica:*
    - *(a) $\pi|_V : V \to \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ es un morfismo étale en los puntos $p \in V$ y $0 = \pi(p) \in \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$.*
    - *(b) $\pi_{V\cap U'} : V \cap U' \to U$ es un difeomorfismo y $s = (\pi_{V\cap U'})^{-1} : U \to U' \cap V$ es su inversa (sección local).*
    - *(c) La serie σ es el desarrollo de Taylor en el origen $0 \in \mathbb{R}^n$ de la composición $f \circ s$.*

En particular, por el Teorema de la Función Implícita para funciones analíticas (cf. Corolario B.2.4) la serie formal $\sigma \in \mathbb{R}[[X_1, \ldots, X_n]]_{alg}$ es una serie convergente que puede interpretarse como una función analítica definida en U, y el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} U' \cap V \subseteq \mathbb{R}^{n+d} \arrow[r, "f"] \arrow[d, shift right, "\pi_{V\cap U'}"'] & \mathbb{R} \\ U \subseteq \mathbb{R}^n \arrow[u, shift right, "s"'] \arrow[ur, "\sigma"'] \arrow[ur, phantom, shift left=3, "\circlearrowleft"] & \end{tikzcd} \qquad \sigma = f \circ s.$$

Para alcanzar este resultado, hay que desarrollar todo un trabajo preliminar en el que intervendrán, de modo muy profundo, conocimientos básicos de Geometría Algebraica Real y Álgebra Local (Conmutativa), que no forman parte del contenido académico al uso de un Grado en Matemáticas.

0.2. Resumen de Contenidos de la Memoria.

0.2.1. Resumen del Contenido del Capítulo 1. En el Capítulo 1 comenzaremos estableciendo las principales notaciones y nociones que se utilizarán a lo largo de todo el cuerpo de la memoria. Aunque extenderemos muchas de los conceptos e ideas que ya se tenían para el caso algebraicamente cerrado, es en este punto donde comenzarán a avistarse algunas de las características únicas de la Geometría Algebraica Real pues, por ejemplo, aparecerá, además del anillo de las funciones polinomiales sobre una variedad algebraica V, $\mathbb{R}[V]$, el anillo de las funciones regulares, $\mathcal{R}(V)$, de gran relevancia a lo largo del TFG (ver Definición 2 para más detalles). Posteriormente, dedicaremos la Subsección 1.2.2 al Teorema de los Ceros o Nullstellensatz en su versión real. Este importante resultado que presentamos de dos formas (ver Teoremas 1.2.4 y 1.2.6) constituyó en su día uno de los principales desencadenantes del importante desarrollo que experimentó la Geometría Algebraica Real en la segunda mitad del siglo XX y, en este TFG, será uno de los principales pilares teóricos en que se sustenten los resultados posteriores. De hecho, ya será de extrema utilidad en la Subsección 1.2.3 inmediatamente posterior, donde, continuando con la introducción del aparato técnico, definiremos el espacio tangente en un punto p de una variedad algebraica real V (ver Definición 6) así como los localizados en p de los anillos de funciones polinomiales y regulares, $\mathbb{R}[V]_p$ y $\mathcal{R}(V)_p$ respectivamente. El propósito de dicho apartado, será, eventualmente, la caracterización de los puntos regulares de una variedad algebraica mediante dichos anillos (observar en la Proposición 1.2.11 y, más en particular, el Corolario 1.2.12) cobrando relevancia la noción de anillo local regular. De forma implícita, quedará probada la validez del Criterio del Jacobiano (Subsección B.2.4 del Apéndice) en el caso real, no algebraicamente cerrado.

Seguidamente y motivados por la necesidad de que los conjuntos con los que trabajemos sean estables mediante proyecciones y funciones polinomiales aparecen los ya mencionados *conjuntos semi-algebraicos*. Estos últimos serán aquellos conjuntos definibles mediante combinaciones booleanas, no solo de igualdades polinomiales ($\{= 0\}$), sino también de desigualdades del tipo $\{\geq 0\}$ o $\{> 0\}$ y se erigirán como la esencia de la Geometría Algebraica Real. Será A. Tarski quien pruebe en [**Tarski, 1951**] (ver Teorema 1.3.5) la estabilidad mencionada de los conjuntos semi-algebraicos por medio de un complejo algoritmo que escapa de los objetivos de este TFG. No obstante, hemos optado por exhibir un resultado usado en las re-demostraciones geométricas posteriores debida a M. Coste ([**Coste, 1982**]) conocido como *"salchichonaje de semi-algebraicos"* (también podrá encontrarse como *"cylindrical semi-algebraic decomposition"*, *"démontage des sealgébraiques"*...) en el Teorema 1.3.2. Este último cobrará especial importancia a la hora de probar la equivalencia entre las funciones semi-algebraicas $\mathscr{C}^\infty$ y las funciones analíticas y algebraicas, uno de los propósitos del trabajo.

Finalmente, se expone un recordatorio del anillo de series de potencias formales con coeficientes en $\mathbb{R}$ dada su relevancia en la parte final de la memoria. En este apartado, además de mostrar las principales propiedades de dicho anillo se hará especial hincapié en la relación existente entre el anillo $\mathcal{R}(V)_p$ y el Teorema de I.S. Cohen (Corolario B.2.18 del Apéndice), este último afirmando que el completado de cualquier anillo local regular equicaracterístico es una anillo de series de potencias formales con coeficientes en el cuerpo residual.

0.2.2. Resumen del Contenido del Capítulo 2. En el Capítulo 2, comenzamos con un estudio técnico de los morfismos regulares $f : V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R}) \to W \subseteq \mathbb{A}^m(\mathbb{R})$, entre dos variedades algebraicas reales, que son "étales" en un punto regular $p \in V$. Es decir, morfismos tales que la aplicación entre los espacios tangentes ("à la Zariski") $T_pf : T_pV \to T_{f(p)}W$ es un isomorfismo entre espacios vectoriales reales (ver Definición 13 para los detalles). Caracterizaremos las funciones regulares étales en $p \in V$ a través del natural Teorema de la Función Inversa (cf. Proposición 2.2.1) y de su dual entre los anillos locales regulares $\mathcal{R}(V)_p$ y $\mathcal{R}(W)_{f(p)}$, así como su paso a los respectivos completados (ver proposiciones 2.2.2 y 2.2.3).

Armados con ese estudio preliminar elemental, se prueba, con detalle, la versión local del Teorema de Artin-Mazur antes citado (ver Teorema 2.2.5). Finalmente, en la Subsección 2.3 probamos la equivalencia entre las funciones analítico-algebraicas y las funciones semi-algebraicas de clase $\mathscr{C}^\infty$. Una de las implicaciones reposa en nuestro Teorema de Artin-Mazur local, mientras que el recíproco reposa, entre otras cosas, en el "salchichonaje" de semi-algebraicos descrito en el Capítulo 1.

0.2.3. Sobre el estilo y la ortografía usados en este TFG.. En algún caso precedente se ha discutido el estilo y la ortografía de las memorias presentadas como Trabajo de Fin de Grado en Matemáticas. En evitación de intervenciones innecesarias, queremos clarificar algunos aspectos relativos al estilo elegido en este texto. Se ha elegido el formato de libro (book) de la American Mathematical Society (AMS). Aunque el idioma utilizado es el español, hemos tratado de seguir lo más fielmente posible las recomendaciones del Libro de Estilo de esta asociación [1] , juntamente con las reglas de estilo recomendadas por D. E. Knuth y co-autores de la Mathematical Association of America (MAA) [2]. Específicamente, hemos tratado de seguir atentamente las siguientes dos reglas:

- *"Numbered theorems, lemmas, etc. are proper nouns and, thus, are capitalized: Theorem 2.3, Lemma 3.1, Figure 4.5"* (p. 79 del AMS Style Guide).
- *"Rule 19. Capitalize names like Theorem 1, Lemma 2, Algorithm 3, Method 4"* (en D. E. Knuth et al.).

[1] M. Letourneau, J. Wright Sharp, AMS Style Guide, Journals, October 2017, AMS, Providence, 2017

[2] D. E. Knuth, T. Larrabee, P. M. Roberts, Mathematical Writing, MAA, 1989

Part 1

Cuerpo principal del TFG.

CAPíTULO 1

Variedades algebraicas reales, funciones polinomiales y regulares.

Índice

1.1. Introducción.

El estudio de los conjuntos de soluciones de sistemas de ecuaciones polinomiales multi-variadas en el espacio afín real $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ ha sido siempre concebido como el hermano menor de aquel sobre cuerpos algebraicamente cerrados (en particular, sobre $\mathbb{C}$ el cuerpo de los números complejos) también conocido como Geometría Algebraica. En este contexto, el Álgebra Conmutativa desarrollada en el entorno de E. Noether, E. Artin y sus continuadores (W. Krull, B.L. van der Waerden, O. Zariski,...) tiene en mente su utilidad para el estudio de variedades algebraicas afines o proyectivas en espacios afines $\mathbb{A}^n(K)$ con K algebraicamente cerrado.

En los años 70 del pasado siglo, dos autores logran, de forma independiente, caracterizar los ideales asociados a los conjuntos algebraicos reales afines: D.W. Dubois (cf. [**Dubois, 69**]) y J.J. Risler (cf. [**Risler, 70**]). Es a partir de este momento cuando el estudio de la denominada *Geometría Algebraica Real* experimenta un impulso y desarrollo exponenciales. Además de desarrollarse el Álgebra Conmutativa consecuencial del *Nullstellensatz Real* (que se denominará *Álgebra Real*), el estudio de estos objetos geométricos alcanza pronto niveles avanzados dando lugar a un *corpus* teórico que irá estructurándose no solo a través de diversos trabajos científicos sino a través de obras compilatorias del conocimiento del campo. Entre estas últimas, destacamos la referencia [**BCR, 1987**] que guiará las páginas preliminares. En la obra [**BCR, 1987**] se pretende establecer dicho *corpus* teórico tratando no solamente de dignificar el campo científico sino también de perfilarse con respecto a la Geometría Algebraica tradicional. Por ello, tratan de modificar algunas nociones al uso e insistir en la noción de cuerpo realmente cerrado (i.e. cuerpos que no admiten extensiones formalmente reales que sean algebraicas no triviales). En otras palabras, se centran en cuerpos R tales que $R[X]/(X^2+1)$ es un cuerpo algebraicamente cerrado (cf. [**BCR, 1987**], Capítulo 1).

En este texto nos centraremos en el cuerpo realmente cerrado de referencia $\mathbb{R}$, el cuerpo de los números reales, aunque muchas de nuestras disquisiciones se podrán extrapolar a cualquier cuerpo realmente cerrado (como se observa en [**BCR, 1987**]). En cuanto a las notaciones, procuraremos respetar algunas de las usadas en la Geometría Algebraica clásica, intentando respetar también el gusto por la identidad propia, claramente manifestado por J. Bochnak, M. Coste y M.F. Roy. Finalmente, gran parte del Álgebra Conmutativa clásica es útil y utilizable en este contexto de la Geometría Algebraica Real. Así, hemos optado por incluir mucha del Álgebra Conmutativa clásica en diversos Anexos al final de la memoria, mientras que, en el cuerpo de la memoria trataremos solamente aquellos aspectos específicos del contexto real.

1.2. Generalidades sobre variedades algebraicas reales, funciones polinomiales y funciones regulares.

1.2.1. Nociones y notaciones básicas.

DEFINICIÓN 1. *Introduciremos las siguientes definiciones para los subconjuntos del espacio afín $\mathbb{A}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n$ de dimensión n sobre el cuerpo de los números reales.*

i) Llamaremos hiper-superficie algebraica real a cualquier subconjunto $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$, tal que existe un polinomio $f \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ verificando:

$$V = V_{\mathbb{A}}(f) := \{x \in \mathbb{A}^n(\mathbb{R}) : \ f(x) = 0\}.$$

ii) Llamaremos variedad algebraica real a cualquier subconjunto $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ tal que existe un ideal $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ verificando

$$V = V_{\mathbb{A}}(\mathfrak{a}) = \bigcap_{f \in \mathfrak{a}} V_{\mathbb{A}}(f) = \bigcap_{f \in \mathfrak{a}} \{x \in \mathbb{A}^n(\mathbb{R}) : \ f(x) = 0\}.$$

OBSERVACIÓN 1.2.1 (**Algunas Observaciones Clásicas**).

i) Nótese que si F es un subconjunto de polinomios que genera un ideal $\mathfrak{a}$ en $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$, entonces

$$V_{\mathbb{A}}(F) = \bigcap_{f \in F} V_{\mathbb{A}}(f) = V_{\mathbb{A}}(\mathfrak{a}).$$

Es decir, la variedad algebraica real definida por un ideal coincide con la intersección de las hiper-superficies definidas por uno cualquiera de sus sistemas generadores.

ii) Por el Teorema de la Base de Hilbert, toda variedad algebraica real es la intersección de un número finito de hiper-superficies reales. Es decir, si $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ es un ideal, existe un conjunto finito $\{f_1, \ldots, f_m\}$ de generadores de $\mathfrak{a}$ y

$$V_{\mathbb{A}}(\mathfrak{a}) = V_{\mathbb{A}}(f_1, \ldots, f_m) = V_{\mathbb{A}}(f_1) \cap \cdots \cap V_{\mathbb{A}}(f_m).$$

Hasta aquí, el caso real no difiere del caso complejo (o del caso de variedades algebraicas sobre cuerpos algebraicamente cerrados). En lo que sí difiere es en el hecho siguiente:

Toda variedad algebraica real puede expresarse como una hiper-superficie. Así, si $V = V_{\mathbb{A}}(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ es una variedad algebraica real, por el *Basissatz de Hilbert* existe un conjunto finito de generadores $\{f_1, \ldots, f_m\}$ del ideal $\mathfrak{a}$. Entonces, definiendo

$$f = f_1^2 + \cdots + f_m^2 \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n],$$

concluiremos que:

$$V_{\mathbb{A}}(\mathfrak{a}) = V_{\mathbb{A}}(f_1, \ldots, f_m) = V_{\mathbb{A}}(f),$$

y $V_{\mathbb{A}}(\mathfrak{a})$ es una hiper-superficie. Esto no es posible en el caso complejo. Por ejemplo, el conjunto $\{(0,0)\} \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ no puede expresarse como una hiper-superficie compleja.

iii) A pesar de las diferencias que puedan existir entre las variedades algebraicas reales afines y sus homólogas complejas, permanece la idea básica de la topología de Zariski. Es decir,

- $\emptyset = V_{\mathbb{A}}(1), \qquad \mathbb{A}^n(\mathbb{R}) = V_{\mathbb{A}}((0))$
- Dados $\{\mathfrak{a}_i : \ i \in I\}$ ideales en $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$, se tiene

$$V_{\mathbb{A}}\Big(\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i\Big) = \bigcap_{i \in I} V_{\mathbb{A}}(\mathfrak{a}_i).$$

- Dados dos ideales $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ en $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$, se tiene:

$$V_{\mathbb{A}}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V_{\mathbb{A}}(\mathfrak{a}) \cup V_{\mathbb{A}}(\mathfrak{b}).$$

En particular, existe una única topología sobre $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ definida por el conjunto de las variedades reales como conjunto de cerrados:

$$\{V_{\mathbb{A}}(\mathfrak{a}) : \mathfrak{a} \subseteq \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n],\ \mathfrak{a}\ \textit{ideal}\}.$$

A esa topología la llamaremos topología de Zariski en $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$. A los abiertos los llamaremos "abiertos Zariski", intentando reducir la larga frase "abiertos de la topología de Zariski". Nótese que en el caso real, todos los abiertos en la topología de Zariski de $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ son abiertos distinguidos, es decir, todos los abiertos Zariski en $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ son de la forma

$$\mathscr{O}_{\mathbb{A}}(f) := \{x \in \mathbb{A}^n(\mathbb{R}) : f(x) \neq 0\},$$

para algún $f \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$. En este también difieren el caso real y el complejo; por ejemplo, $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\} \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ no puede expresarse como abierto distinguido $\mathscr{O}_{\mathbb{A}}(f)$ para ningún $f \in \mathbb{C}[X, Y]$.

También llamaremos topología de Zariski a la inducida en cualquier subconjunto $S \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ por la de $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$.

iv) La topología de Zariski sigue siendo noetheriana en el caso real (como lo es en el caso complejo) y por los mismos argumentos: $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ es un anillo noetheriano. En particular, la topología de Zariski es un espacio quasi-compacto y toda variedad algebraica real admite una descomposición única (salvo permutación) como unión finita de cerrados irreducibles en la topología de Zariski que, como en otros casos, se denominarán *componentes irreducibles.*

De nuevo, a diferencia del caso algebraicamente cerrado, el caso real admite dos tipos de funciones diferentes sobre sus variedades algebraicas. El ejemplo más elemental sería la función

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{A}^n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & \dfrac{x_1}{1 + x_1^2 + \cdots + x_n^2}. \end{array}$$

Una función así, cociente de dos funciones polinomiales, que estuviesen definida en todos los puntos de $\mathbb{A}^n(\mathbb{C})$, obligaría a que el denominador fuera una constante no nula. Esto no sucede en el caso real, como muestra este ejemplo, lo que lleva a considerar dos clases de funciones:

Definición 2. *Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ un variedad algebraica real:*

i) Una función polinomial sobre V es una aplicación $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que existe un polinomio $p \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ verificando

$$f(x) = p(x), \quad \forall x \in V,$$

ii) Una función regular sobre V es una aplicación $\varphi : V \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que existen dos polinomios p, $q \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ verificando:

$$1.- \qquad q(x) \neq 0, \quad \forall x \in V.$$

$$2.- \qquad \varphi(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad \forall x \in V.$$

Esto nos lleva a la posibilidad de considerar dos $\mathbb{R}$-álgebras de funciones sobre una variedad algebraica real: la $\mathbb{R}$-álgebra de funciones polinomiales $\mathbb{R}[V]$ y la $\mathbb{R}$-álgebra de funciones regulares $\mathcal{R}(V)$. Como ya se ha observado $\mathbb{R}[V] \subseteq \mathcal{R}(V)$ el contenido es estricto. La existencia de dos clases de funciones nos lleva también, como en [**BCR, 1987**], a usar dos notaciones distintas para los ideales de las ecuaciones de un subconjunto $F \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$. Siguiendo el estilo de [**BCR, 1987**]

$$\begin{aligned} I(F) &:= \{f \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n] : f|_F = 0\}, \\ \mathscr{I}(F) &:= \{f \in \mathcal{R}(\mathbb{A}^n(\mathbb{R})) : f|_F = 0\} \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

Se observa que, como en el caso algebraicamente cerrado, para $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ variedad,

$$\mathbb{R}[V] \cong {\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]}/{I(V)}.$$

Mientras que si $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ es un cerrado Zariski el siguiente conjunto es un sistema multiplicativo $S_V \subseteq \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$:

$$S_V := \{f \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n] : f(x) \neq 0, \forall x \in V\}. \tag{1.2.2}$$

En particular, es sencillo observar que la $\mathbb{R}$-álgebra de las funciones regulares sobre V se puede identificar mediante:

$$\mathcal{R}(V) = S_V^{-1}\mathbb{R}[V] \cong \mathcal{R}(\mathbb{A}^n(\mathbb{R}))/_{\mathscr{I}(V)}$$

donde $S_V^{-1}\mathbb{R}[V]$ es la localización de $\mathbb{R}[V]$ por el monoide $(S_V, \cdot)$. Finalmente, definimos la noción de aplicación regular entre dos variedades algebraicas reales del modo siguiente:

Definición 3. *Dadas $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ y $W \subseteq \mathbb{A}^m(\mathbb{R})$ dos variedades algebraicas reales una aplicación regular entre ellas es una aplicación $f : V \longrightarrow W$ tal que existen $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{R}(V)$ verificándose:*

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x)), \quad \forall x \in V.$$

Un isomorfismo birregular entre V y W es una aplicación regular $f : V \longrightarrow W$ biyectiva, cuya inversa $f^{-1} : W \longrightarrow V$ es también aplicación regular.

Observación 1.2.2. En el contexto de la Geometría Algebraica Real es costumbre considerar los morfismos regulares como haz estructural más que las aplicaciones polinomiales. Así, dos variedades algebraicas reales $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ y $W \subseteq \mathbb{A}^m(\mathbb{R})$ son birregularmente isomorfas si y solamente si las $\mathbb{R}$-álgebras $\mathcal{R}(V)$ y $\mathcal{R}(W)$ son isomorfas. Por supuesto, $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ es irreducible si y solamente si $\mathcal{R}(V)$ es un dominio de integridad.

Como en cualquier espacio topológico noetheriano, podemos introducir la dimensión de Krull en $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ y en cualquiera de sus cerrados. Así, dados $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ una variedad algebraica, llamaremos dimensión de Krull al máximo de las cadenas de cerrados de irreducibles contenidos en V, i.e. al máximo de los $r \in \mathbb{N}$ tales que existen cerrados irreducibles, $V_1, \ldots, V_r$ satisfaciendo

$$V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_r \subseteq V.$$

Claramente, si V es un cerrado Zariski cuya descomposición como unión de cerrados irreducibles viene dada por

$$V = V_1 \cup \cdots \cup V_s,$$

entonces la dimensión de V satisface

$$\dim(V) = \max\{\dim(V_1), \ldots, \dim(V_s)\},$$

esto es, la dimensión de Krull de un cerrado Zariski V coincide con el máximo de las dimensiones de Krull de sus componentes. Para un subconjunto cualquiera $F \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$, llamaremos dimensión de Krull de F a la dimensión de Krull de $\overline{F}^z$ (su clausura Zariski). Mediante el Nullstellensatz Real (Teorema 1.2.4), podemos garantizar que para cualquier variedad algebraica real $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ se da la igualdad entre las dimensiones de Krull siguientes (donde las dos últimas corresponden a las respectivas dimensiones de Krull como anillos):

$$\dim(V) = \dim(\mathbb{R}[V]) = \dim(\mathcal{R}(V)).$$

Al reducirse a la dimensión de Krull de $\mathbb{R}$-álgebras finitamente generadas (i.e. $\mathbb{R}[V]$) la dimensión de Krull de una variedad algebraica real es finita y acotada por n, es decir,

$$\dim(V) \leq n = \dim(\mathbb{A}^n(\mathbb{R})).$$

Además, retomando la sección A.4 del Apéndice B, si $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ es una variedad algebraica real irreducible, $\mathbb{R}[V]$ su anillo de funciones polinomiales sobre V y $\mathbb{R}(V)$ el cuerpo de funciones racionales sobre V (i.e. el cuerpo de fracciones del dominio de integridad $\mathbb{R}[V]$) tenemos que

$$\dim(V) = \mathrm{trdeg}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}(V)).$$

En todo caso, retomaremos la noción de dimensión a través del espacio tangente de una variedad algebraica en sus puntos y del correspondiente criterio del jacobiano en la Subsección 1.2.3 posterior.

1.2.2. El Teorema de los Ceros sobre los Reales. Ya hemos indicado cómo el Nullstellensatz Real de Dubois-Risler supuso el impulso desde el que creció, renovada, la Geometría Algebraica Real. Vamos a dedicar unas pocas páginas a resumir ese enunciado para poder usar su lenguaje con posterioridad. La referencia básica de este contenido es [**BCR, 1987**].

DEFINICIÓN 4. *Sea R un anillo conmutativo con unidad. Un ideal $\mathfrak{a}$ de R se denomina ideal real si verifica la siguiente propiedad:*

> *Para todo $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$, y para cualesquiera $f_1, \ldots, f_p \in R$ tales que $f_1^2 + \cdots + f_p^2 \in \mathfrak{a}$, entonces $f_1, \ldots, f_p \in \mathfrak{a}$, $\forall i$, $1 \leq i \leq p$.*

Un cuerpo K se denomina formalmente real si -1 no es suma finita de cuadrados, lo cual es equivalente a que se satisfaga la siguiente propiedad:

> *Para todo $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$, y para cualesquiera $f_1, \ldots, f_p \in R$ tales que $f_1^2 + \cdots + f_p^2 = 0$, entonces $f_1, \ldots, f_p = 0$, $\forall i$, $1 \leq i \leq p$.*

Por lo tanto, si $\mathfrak{p} \in Spec(R)$ es un ideal primo en un anillo R, el ideal $\mathfrak{p}$ es un ideal real si y solamente si el cuerpo de fracciones del dominio de integridad $R/\mathfrak{p}$ es un cuerpo formalmente real. Unas pocas propiedades sobre los ideales reales se resumen en la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN 1.2.3. *Sea R un anillo conmutativo con unidad. Se verifica:*

i) Si $\mathfrak{a}$ es un ideal real en R, entonces $\mathfrak{a}$ es un ideal radical (i.e. $\sqrt{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}$).
ii) Si $\mathfrak{a}$ es un ideal real y R es un anillo noetheriano, los ideales primos minimales sobre $\mathfrak{a}$ son también ideales reales.

TEOREMA 1.2.4 (**Nullstellensatz Real**). *Sea $\mathfrak{a}$ un ideal del anillo de polinomios $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$. Entonces, $\mathfrak{a} = I(V_{\mathbb{A}}(\mathfrak{a}))$ si y solamente si $\mathfrak{a}$ es un ideal real.*

La forma de Rabinowitz del Nullstellensatz Real se establece a través de la noción de radical real.

DEFINICIÓN 5 (**Radical Real de un ideal**). *Sea R un anillo conmutativo con unidad y $\mathfrak{a}$ un ideal de R. Se denomina radical real de $\mathfrak{a}$ en R al conjunto*

$$\sqrt[R]{\mathfrak{a}} = \left\{ f \in R : \ \exists m \in \mathbb{N}, \ \exists g_1, \ldots, g_p \in R, \ f^{2m} + g_1^2 + \cdots + g_p^2 \in \mathfrak{a} \right\}$$

PROPOSICIÓN 1.2.5. *Con las notaciones precedentes, el radical real de un ideal en un anillo R es también un ideal en R. Más aún, si $\mathfrak{a} \subseteq R$ es un ideal, $\sqrt[R]{\mathfrak{a}}$ es el ideal más pequeño de cuantos contienen al ideal $\mathfrak{a}$. Más aún, se tiene*

$$\sqrt[R]{\mathfrak{a}} = \bigcap \{ \mathfrak{p} \in Spec(R) : \ \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a} \text{ y } \mathfrak{p} \text{ es real} \}.$$

TEOREMA 1.2.6 (**Nullstellensatz Real en forma pseudo-Rabinowitz**). *Sea $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ un ideal y sea $V_A(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ el conjunto algebraico de los ceros comunes a los elementos del ideal $\mathfrak{a}$. Entonces, se tiene*

$$I(V_{\mathbb{A}}(\mathfrak{a})) = \sqrt[R]{\mathfrak{a}}.$$

COROLARIO 1.2.7. *Sea $V \subseteq \mathbb{R}^n$ una variedad algebraica real, $\mathbb{R}[V]$ la $\mathbb{R}$-álgebra de las funciones polinomiales definidas en V. Sea $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{R}[V]$ un ideal y sea $V_V(\mathfrak{a}) = \{x \in V : \ f(x) = 0, \ \forall f \in \mathfrak{a}\}$. Sea $I_V(V_V(\mathfrak{a}))$ el ideal en $\mathbb{R}[V]$ formado por las funciones polinomiales que se anulan en $V_V(\mathfrak{a})$. Entonces,*

$$I_V(V_V(\mathfrak{a})) = \sqrt[R]{\mathfrak{a}},$$

donde $\sqrt[R]{\mathfrak{a}}$ es el radical real de $\mathfrak{a}$ en $\mathbb{R}[V]$.

A modo de ejemplo, los siguientes son ideales reales:

i) El ideal $(0) = I(\mathbb{A}^n(\mathbb{R}))$ es un ideal real en $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$.
ii) Los ideales maximales $\mathfrak{m}_p = (X_1 - p_1, \ldots, X_n - p_n)$ asociados a puntos $p = (p_1, \ldots, p_n)$ en el espacio afín $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ son también ideales reales (en este caso ideales maximales reales).
iii) Un poco más de trabajo tiene observar que el anillo de series de potencias formales $\mathbb{R}[[X_1, \ldots, X_n]]$ satisface que tanto su ideal (0) como su maximal son ideales reales.

Veamos el ítem iii). Para el maximal es sencillo porque $\mathbb{R}[[X_1,\dots,X_n]]/\mathfrak{m}_0 \cong \mathbb{R}$. Para el caso del ideal (0) aplicaremos un sencillo proceso inductivo. Sean $f_1,\dots,f_p \in \mathbb{R}[[X_1,\dots,X_n]]$ una familia de series tales que

$$f_1^2+\cdots+f_p^2=0 \tag{1.2.3}$$

Consideremos la expansión de cada una de esas series en términos de sus componentes homogéneas, esto es,

$$f_i = f_i^{(0)}+\cdots+f_i^{(k)}+\dots,$$

donde $f_i^{(k)} \in H_k(X_1,\dots,X_n)$ es un polinomio homogéneo de grado k o bien es el polinomio nulo. Veamos, por inducción en k, que la ecuación (1.2.3) implica $f_i^{(k)}=0$, $\forall\, k\in\mathbb{N}$, $\forall\, i$, $1\le i\le p$. A partir de (1.2.3) tenemos que

$$f_1^2+\cdots+f_p^2 \in \mathfrak{m}_0.$$

Pero de otro lado puede verificarse que

$$f_1^2+\cdots+f_p^2 = (f_1^{(0)})^2+\cdots+(f_p^{(0)})^2+h$$

donde h es una serie de orden mayor o igual que 1.

$$h = 2\sum_{i=1}^{p} f_i^{(0)}(f_i-f_i^{(0)})+\sum_{i=1}^{p}(f_i-f_i^{(0)})^2.$$

En particular,

$$f_1^2+\cdots+f_p^2+\mathfrak{m}_0 = (f_1^{(0)})^2+\cdots+(f_p^{(0)})^2+\mathfrak{m}_0 = 0+\mathfrak{m}_0 \in {\mathbb{R}[[X_1,\dots,X_n]]}\big/{\mathfrak{m}_0}$$

Como $f_i^{(0)}\in\mathbb{R}$, $1\le i\le p$, y $\mathbb{R}[[X_1,\dots,X_n]]/\mathfrak{m}_0\cong\mathbb{R}$, concluiremos

$$(f_1^{(0)})^2+\cdots+(f_p^{(0)})^2=0$$

es una suma de cuadrados de números reales igualada a 0. Por tanto, $f_i^{(0)}=0$ para cada i, $1\le i\le p$. Inductivamente, supongamos que $f_i^{(k)}=0$, $0\le k\le t-1$, o, equivalentemente, que $ord_0(f_i^{(k)})\ge t$. Es decir, tenemos

$$f_i=\sum_{k=t}^{+\infty} f_i^{(k)}$$

Por tanto, $f_i^2=(f_i^{(t)})^2+h_i$, donde h_i es una serie de orden mayor o igual que $2t+1$

$$h_i = 2f_i^{(t)}(f_i-f_i^{(t)})+(f_i-f_i^{(t)})^2$$

El primer sumando tiene orden mayor o igual que $t+(t+1)=2t+1$, mientras que el segundo sumando tiene orden mayor o igual que $2(t+1)$. Por tanto, tenemos

$$f_1^2+\cdots+f_p^2+\mathfrak{m}_0^{2t+1} = (f_1^{(t)})^2+\cdots+(f_p^{(t)})^2+\mathfrak{m}_0^{2t+1}=0+\mathfrak{m}_0^{2t+1}.$$

Además, $(f_i^{(t)})^2\in\mathfrak{m}_0^{2t}$ con lo que tenemos,

$$(f_1^{(t)})^2+\cdots+(f_p^{(t)})^2+\mathfrak{m}_0^{2t+1}=0 \qquad \text{en} \quad {\mathfrak{m}_0^{2t}}\big/{\mathfrak{m}_0^{2t+1}} \tag{1.2.4}$$

Pero además tenemos el isomorfismo natural de $\mathbb{R}$-espacios vectoriales

$$\begin{array}{ccc} H_{2t}(X_1,\dots,X_n) & \longrightarrow & {\mathfrak{m}_0^{2t}}\big/{\mathfrak{m}_0^{2t+1}} \\ g & \longmapsto & g+\mathfrak{m}_0^{2t+1}. \end{array}$$

Como $f_1^{(t)},\dots,f_p^{(t)}\in H_t(X_1,\dots,X_n)$, la igualdad (1.2.4) es una igualdad en $H_{2t}(X_1,\dots,X_n)$, es decir,

$$(f_1^{(t)})^2+\cdots+(f_p^{(t)})^2=0 \quad \text{en} \quad H_{2t}(X_1,\dots,X_n)\subseteq\mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]. \tag{1.2.5}$$

Como $f_1^{(t)},\dots,f_p^{(t)}\in\mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]$, la ecuación (1.2.5) y el caso de polinomios implica $f_1^{(t)}=\cdots=f_p^{(t)}=0$. Y habremos probado el paso inductivo.

1.2.3. Algunos aspectos locales en Geometría Real: el espacio tangente en un punto de una variedad algebraica real. En esta sección se introduce el espacio tangente en un punto de una variedad algebraica real tal y como se presenta en [**BCR, 1987**]. Comencemos por definir el espacio tangente a la manera de Zariski,

DEFINICIÓN 6 (**Espacio tangente *à la Zariski***). *Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ una variedad algebraica real y $I(V) = (f_1, \ldots, f_s)$. Sea $p \in V$ un punto de la variedad, definimos el espacio tangente à la Zariski de V en p, que denotaremos por T_pV como el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ dado por*

$$T_pV = \bigcap_{i=1}^{s} \big\{ v \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial X_j}(p) \cdot v_j = \langle \nabla_p f_i, v \rangle = 0 \big\},$$

donde denotamos por $\langle \cdot , \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ al producto escalar estándar en $\mathbb{R}^n$ y $\nabla_p f_i$ es el gradiente de f_i en p.

Este espacio vectorial no dependerá de los generadores $f_1, \ldots, f_s$ elegidos del ideal $I(V)$. Así, si $\{g_1, \ldots, g_r\}$ es otro generador de $I(V)$ como ideal en $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$, existirán $\{h_{ij} : 1 \leq i \leq s,\ 1 \leq j \leq r\} \subseteq \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ tales que

$$g_j = \sum_{i=1}^{s} h_{ij} \cdot f_i.$$

Aplicando las usuales reglas de derivación obtendríamos:

$$\frac{\partial g_j}{\partial X_k}(p) = \sum_{i=1}^{s} \left(h_{ij}(p) \cdot \frac{\partial f_i}{\partial X_k}(p) + \frac{\partial h_{ij}}{\partial X_k}(p) \cdot f_i(p) \right).$$

Pero como $p \in V$, $f_i(p) = 0$ para cada i, $1 \leq i \leq s$. Por lo que concluimos (juntando todas las derivadas parciales en p) que

$$\nabla_p g_j = \sum_{i=1}^{s} h_{ij}(p) \cdot \nabla_p f_i.$$

Por tanto, $\mathbb{R}\langle \nabla_p g_1, \ldots, \nabla_p g_r \rangle \subseteq \mathbb{R}\langle \nabla_p f_1, \ldots, \nabla_p f_s \rangle$. Cambiando los roles de las dos familias de generadores obtendríamos el otro contenido y la igualdad entre ambos subespacios, es decir,

$$N_pV := \mathbb{R}\langle \nabla_p g_1, \ldots, \nabla_p g_r \rangle = \mathbb{R}\langle \nabla_p f_1, \ldots, \nabla_p f_s \rangle.$$

donde denotamos por N_pV el espacio normal a V en p, verificando $T_pV = N_pV^{\perp}$. De este modo se sigue directamente la igualdad entre los complementos ortogonales.

OBSERVACIÓN 1.2.8. El uso de la ortogonalidad es muy conveniente cuando se trata de elucidar la naturaleza de V como subvariedad de Riemann de $\mathbb{R}^n$, pero también podemos interpretar el mismo espacio usando simplemente la naturaleza diferencial de la tangente. Consideramos $p \in \mathbb{R}^n$ y definimos la aplicación analítica:

$$\begin{array}{rccc} \underline{f}: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^s \\ & x & \longmapsto & (f_1(x), \ldots, f_s(x)). \end{array}$$

Consideramos $p \in \mathbb{R}^n$ y definimos la aplicación tangente en los respectivos espacios tangentes $T_p\mathbb{R}^n$ y $T_{\underline{f}(p)}\mathbb{R}^s$:

$$T_p\underline{f} : T_p\mathbb{R}^n \longrightarrow T_{\underline{f}(p)}\mathbb{R}^s.$$

Tomando las bases canónicas en ambos espacios tangentes, resulta sencillo observar que (escrito en columnas):

$$T_p\underline{f}(x_1, \ldots, x_n) = D(f_1, \ldots, f_s)(p) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

donde $D(f_1, \ldots, f_s)(p)$ es la matriz jacobiana de $\underline{f}$ en p, esto es, la matriz cuyas filas son los gradientes de los polinomios $\{f_1, \ldots, f_s\}$ en el punto p. Esto es,

$$D(f_1, \ldots, f_s)(p) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}(p) \right)_{\substack{1 \leq i \leq s \\ 1 \leq j \leq n}} = \begin{pmatrix} \nabla_p f_1 \\ \vdots \\ \nabla_p f_n \end{pmatrix}.$$

Por lo antedicho, $T_pV = Ker(T_p\underline{f})$ y, por tanto,

$$\dim T_pV = n - \operatorname{rank}\left(D(f_1,\dots,f_p)(p)\right).$$

Vamos a proceder ahora a describir sucintamente las propiedades que relacionan el comportamiento del espacio tangente T_pV con el anillo local noetheriano $\mathcal{R}(V)_p$ que definiremos a continuación. Es el aparato clásico de Álgebra Local, incluyendo el Criterio del Jacobiano, que reescribiremos para el caso real.

Sean $V \subseteq \mathbb{R}^n$ y $W \subseteq \mathbb{R}^m$ dos variedades algebraicas reales que supondremos irreducibles y sea $f : V \longrightarrow W$ un morfismo regular entre ellas. Sea $p \in V$ un punto y $f(p) \in W$ su imagen. Consideremos las $\mathbb{R}$-álgebras $\mathcal{R}(V)$ y $\mathcal{R}(W)$ de funciones regulares definidas respectivamente en V y W, así como los ideales maximales respectivamente asociados a p y $f(p)$ en $\mathcal{R}(V)$ y $\mathcal{R}(W)$ que denotaremos del modo siguiente:

$$\mathfrak{m}_p := \mathscr{I}(\{p\}) \in \operatorname{MaxSpec}(\mathcal{R}(V)),$$
$$\mathfrak{r}_{f(p)} := \mathscr{I}(\{f(p)\}) \in \operatorname{MaxSpec}(\mathcal{R}(W)).$$

Y consideremos las respectivas localizaciones de $\mathcal{R}(V)$ y $\mathcal{R}(W)$ por ambos maximales, esto es, los dominios de integridad locales noetherianos:

$$\mathcal{R}(V)_p := \mathcal{R}(V)_{\mathfrak{m}_p}, \qquad \mathcal{R}(W)_{f(p)} := \mathcal{R}(W)_{\mathfrak{r}_{f(p)}}.$$

Denotemos por $\overline{\mathfrak{m}}_p$ y $\overline{\mathfrak{r}}_{f(p)}$ a los ideales maximales de ambos anillos locales:

$$\overline{\mathfrak{m}}_p = \mathfrak{m}_p^e = \mathfrak{m}_p\mathcal{R}(V)_{\mathfrak{m}_p}, \qquad \overline{\mathfrak{r}}_{f(p)} = \mathfrak{r}_{f(p)}^e = \mathfrak{r}_{f(p)}\mathcal{R}(W).$$

Claramente tenemos que los cuerpos residuales verifican

$$\mathcal{R}(V)_p/_{\overline{\mathfrak{m}}_p} \cong \mathbb{R}, \qquad \mathcal{R}(W)_{f(p)}/_{\overline{\mathfrak{r}}_{f(p)}} \cong \mathbb{R}.$$

Con lo que tanto $\mathcal{R}(V)_p$ como $\mathcal{R}(W)_{f(p)}$ son anillos locales equicaracterísticos y contienen una copia del cuerpo residual (ambos son $\mathbb{R}$-álgebras por obvias razones). Ahora bien, sean los sistemas multiplicativos en $\mathbb{R}[V]$, $T := \mathbb{R}[V] \setminus \mathfrak{m}_p^c$ y S_V tal y como se definió en (1.2.2), claramente $S_V \subseteq T$ por lo que $\mathcal{R}(V)_p = T^{-1}(S_V^{-1}\mathbb{R}[V]) = T^{-1}\mathbb{R}[V] = \mathbb{R}[V]_{\mathfrak{m}_p^c}$ y, por lo tanto,

$$\mathcal{R}(V)_p = \mathbb{R}[V]_{\mathfrak{m}_p^c}, \qquad \mathcal{R}(W)_{f(p)} = \mathbb{R}[W]_{\mathfrak{r}^c_{f(p)}},$$

donde $\mathbb{R}[V]$ y $\mathbb{R}[W]$ son las respectivas $\mathbb{R}$-álgebras de funciones polinomiales definidas sobre V y W; y los ideales $\mathfrak{m}_p^c$ y $\mathfrak{r}^c_{f(p)}$ son las contracciones a $\mathbb{R}[V] \subseteq \mathcal{R}(V)$ y $\mathbb{R}[W] \subseteq \mathcal{R}(W)$, respectivamente, de los ideales $\mathfrak{m}_p$ y $\mathfrak{r}_p$ de los anillos $\mathcal{R}(V)$ y $\mathcal{R}(W)$. Definamos

$$\widetilde{\mathfrak{m}}_p := (X_1 - p_1,\dots,X_n - p_n) \in \operatorname{MaxSpec}(\mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]) \tag{1.2.6}$$

$$\widetilde{\mathfrak{r}}_{f(p)} := (Y_1 - f_1(p),\dots,Y_m - f_m(p)) \in \operatorname{MaxSpec}(\mathbb{R}[Y_1,\dots,Y_m]), \tag{1.2.7}$$

donde $f : V \longrightarrow W$ tiene por coordenadas las funciones regulares $f_1,\dots,f_m \in \mathcal{R}(V)$. Es decir,

$$f(x) = (f_1(x),\dots,f_m(x)), \quad \forall x \in V.$$

Asimismo, $I(V)^e$ e $I(W)^e$ son las respectivas extensiones a $\mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]_{\widetilde{\mathfrak{m}}_p}$ y $\mathbb{R}[Y_1,\dots,Y_m]_{\widetilde{\mathfrak{r}}_{f(p)}}$ de los ideales de polinomios que se anulan, respectivamente, en V y W; esto es, $I(V)$ y $I(W)$ según las notaciones de (1.2.1). Notar también que tanto $\widetilde{\mathfrak{m}}_p$ como $\widetilde{\mathfrak{n}}_{f(p)}$ son ideales reales por ser el núcleo de los siguientes epimorfismos de $\mathbb{R}$-álgebras

$$\begin{array}{rccc} ev_p: & \mathbb{R}[X_1,\dots,X_n] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & h & \longmapsto & h(p), \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} ev_{f(p)}: & \mathbb{R}[Y_1,\dots,Y_m] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & g & \longmapsto & g(f(p)). \end{array}$$

Consideremos ahora $\varphi \in \mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]_{\widetilde{\mathfrak{m}}_p}$ una función racional localmente definida alrededor de $p \in \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$. Podemos definir de manera natural el vector gradiente de φ en el punto p:

$$\nabla_p\varphi := \Big(\frac{\partial\varphi}{\partial X_1}(p),\dots,\frac{\partial\varphi}{\partial X_n}(p)\Big).$$

Nótese que si $\varphi \in \mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]_{\widetilde{\mathfrak{m}}_p}$ existen dos polinomios $h_1,\ h_2 \in \mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]$ tales que $h_2(p) \neq 0$ y $\varphi = h_1/h_2$. Por tanto, para cada i, $1 \le i \le n$, se tiene

$$\frac{\partial\varphi}{\partial X_i}(p) = \frac{\frac{\partial h_1}{\partial X_i}(p)h_2(p) + h_1(p)\frac{\partial h_2}{\partial X_i}(p)}{h_2(p)^2} \in \mathbb{R}.$$

Además, si $h_1 \in \widetilde{\mathfrak{m}}_p$ se tendrá

$$\frac{\partial \varphi}{\partial X_i}(p) = \frac{\frac{\partial h_1}{\partial X_i}(p)}{h_2(p)}.$$

Y si $h_2 \in \widetilde{\mathfrak{m}}_p^2$, $\frac{\partial \varphi}{\partial X_i}(p) = 0$. Así, para una función $\varphi \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]_{\widetilde{\mathfrak{m}}_p}$ la aplicación tangente $T_p\varphi$, tal y como se vio anteriormente, vendrá dada por el vector gradiente $\nabla_p \varphi$ y tendremos la siguiente aplicación lineal sobre el espacio tangente $T_p\mathbb{A}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n$:

$$\begin{array}{rccl} \nabla_p \varphi : & T_p\mathbb{A}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \cong T_p\mathbb{R} \\ & v & \longmapsto & \nabla_p\varphi(v) = \langle \nabla_p \varphi, v \rangle, \end{array}$$

Como $I(V)$ e $I(W)$ son ideales en sendos anillos noetherianos, ambos están finitamente generados y podemos suponer

$$\left\{ \begin{array}{l} I(V) = (q_1, \ldots, q_s) \subseteq \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n] \\ \\ I(W) = (g_1, \ldots, g_t) \subseteq \mathbb{R}[Y_1, \ldots, Y_m] \end{array} \right. . \tag{1.2.8}$$

A partir de esos generadores podemos considerar los respectivos espacios tangentes T_pV y $T_{f(p)}W$ tal y como se definieron en la Definición 6 del modo siguiente:

$$T_pV := \big\{ v \in T_p\mathbb{A}^n(\mathbb{R}) : \langle \nabla_p q_1, v \rangle = \cdots = \langle \nabla_p q_s, v \rangle = 0 \big\},$$
$$T_{f(p)}W := \big\{ w \in T_{f(p)}\mathbb{A}^m(\mathbb{R}) : \langle \nabla_{f(p)} g_1, w \rangle = \cdots = \langle \nabla_{f(p)} g_s, w \rangle = 0 \big\}.$$

donde $\{q_1, \ldots, q_s\}$ y $\{g_1, \ldots, g_t\}$ son, respectivamente, los generadores de $I(V)$ y $I(W)$ descritos en (1.2.8). Ahora, consideremos nuestro morfismo regular $f = (f_1, \ldots, f_m) : V \longrightarrow W$, donde $f_i \in \mathcal{R}(V)$, $1 \le i \le m$. Podemos considerar la aplicación tangente asociada a f, $T_pf : T_p\mathbb{A}^n(\mathbb{R}) \longrightarrow T_{f(p)}\mathbb{A}^m(\mathbb{R})$, y restringirla al subespacio $T_pV \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$. Así que denotándola de la misma forma tendremos

$$\begin{array}{rl} T_pf := T_pf|_{T_pV} : \ T_pV & \longrightarrow T_{f(p)}\mathbb{A}^m(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^m \\ v & \longmapsto Df(p)(v) = (\langle \nabla_p f_1, v \rangle, \ldots, \langle \nabla_p f_m, v \rangle) \, . \end{array}$$

donde $Df(p)$ es la matriz jacobiana de f en p tal y como se vio en la Observación 1.2.8. Observemos que si $f : V \longrightarrow W$ es un morfismo regular $Im(T_pf) \subseteq T_{f(p)}W$. Para ello, consideremos $g \in I(W)$ y el morfismo regular $g \circ f : V \longrightarrow \mathbb{R}$. Por la regla de la cadena, el gradiente de esa composición tiene la forma

$$\nabla_p(g \circ f) = (\nabla_{f(p)} g) \cdot Df(p),$$

donde este es un mero cálculo matricial. Por tanto, para cada $v \in T_pV$ se tendrá

$$\nabla_p(g \circ f)(v) = \langle \nabla_{f(p)} g, Df(p)(v) \rangle.$$

Ahora bien, como $f : V \longrightarrow W$ y $g \in I(W)$, $g \circ f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ es la aplicación regular idénticamente nula. Por tanto, $g \circ f \in I(V)^e$ y se tendrá

$$\nabla_p(g \circ f)(v) = 0,$$

lo cual implica que $T_pf(v) = Df(p)(v) \in T_{f(p)}W$. Para confirmar esta afirmación sólo tenemos que observar lo siguiente:

Afirmación. *Sea $h \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]_{\widetilde{\mathfrak{m}}_p}$ y supongamos que $h \in I(V)^e$. Entonces,*

$$\nabla_p h|_{T_pV} \equiv 0.$$

Demostración. Como $h \in I(V)^e$ existirán $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]_{\widetilde{\mathfrak{m}}_p}$ tales que

$$h = \sum_{r=1}^{s} \lambda_i g_i.$$

Por tanto, las derivadas parciales satisfacen

$$\frac{\partial h}{\partial X_j}(p) = \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial X_j}(p) g_i(p) + \lambda_i(p) \cdot \frac{\partial g_i}{\partial X_j}(p) \right).$$

Ahora bien, $p \in V$ e $I(V) = (g_1, \ldots, g_m)$ luego $g_i|_V \equiv 0$ y, por tanto, $g_i(p) = 0$. Así que tendremos

$$\frac{\partial h}{\partial X_j}(p) = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i(p) \cdot \frac{\partial g_i}{\partial X_j}(p).$$

Equivalentemente

$$\nabla_p h = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i(p) \cdot \nabla_p g_i$$

como $\nabla_p g_i|_{T_pV} \equiv 0$ (por definición), entonces $\nabla_p h|_{T_pV} \equiv 0$. □

En particular, concluimos que $T_pf(v) = Df(p)(v) \in T_{f(p)}W$ para cada $v \in T_pV$ y tenemos así el morfismo de $\mathbb{R}$-espacios vectoriales conocido comúnmente como aplicación tangente o diferencial, entre los respectivos espacios tangentes de p y $f(p)$ en V y W dado mediante:

$$\begin{aligned} T_pf : T_pV &\longrightarrow T_{f(p)}W \\ v &\longmapsto Df(p)(v) = (\langle \nabla_p f_1, v\rangle, \ldots, \langle \nabla_p f_m, v\rangle) \,. \end{aligned}$$

El siguiente resultado es una versión "débil" del Nullstellensatz de Hilbert-Kronecker para el caso real. Usamos el Teorema de los Ceros Real descrito en la Subsección 1.2.2 precedente.

Proposición 1.2.9. *Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ una variedad algebraica real, sea $\mathbb{R}[V]$ el anillo de las funciones polinomiales definidas sobre V. Denotemos por $\mathrm{MaxSpec}^{(R)}(\mathbb{R}[V])$ al conjunto de los ideales maximales de $\mathbb{R}[V]$ que son ideales reales. Es decir,*

$$\mathrm{MaxSpec}^{(R)}(\mathbb{R}[V]) = \{\mathfrak{n} \in \mathrm{MaxSpec}(\mathbb{R}[V]) : \ \mathfrak{n} \text{ es real}\}$$

Entonces, con las notaciones precedentes, se verifica:

$$\mathrm{MaxSpec}^{(R)}(\mathbb{R}[V]) = \{\widetilde{\mathfrak{m}}_p/I(V) : \ p \in V\}$$

Además, dado cualquier morfismo de $\mathbb{R}$-álgebras $\varphi : \mathbb{R}[V] \longrightarrow \mathbb{R}$, existe un único punto $p \in V$ tal que

i) $\ker(\varphi) = \widetilde{\mathfrak{m}}_p/I(V)$.
ii) $\varphi(f + I(V)) = f(p), \quad \forall f + I(V) \in \mathbb{R}[V]$.

Demostración. Comencemos observando que

$$\mathbb{R}[V]/\left(\widetilde{\mathfrak{m}}_p/I(V)\right) \cong \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]/\widetilde{\mathfrak{m}}_p \cong \mathbb{R}.$$

Por tanto, el cociente $\widetilde{\mathfrak{m}}_p/I(V)$ es un ideal real y maximal en $\mathbb{R}[V]$. Esto prueba la inclusión $\supseteq$. Para la otra inclusión, sea $\mathfrak{n} \in \mathrm{MaxSpec}^{(R)}(\mathbb{R}[V])$ un ideal maximal real. Entonces, existe $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n])$ un ideal primo tal que

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{p}/I(V)$$

Como $\mathfrak{n}$ es real, $\mathbb{R}[V]/\mathfrak{n}$ es un cuerpo formalmente real y se tiene el isomorfismo

$$\mathbb{R}[V]/\mathfrak{n} \cong \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{p}.$$

En particular, $\mathfrak{p}$ es también un ideal primo real y, como $\mathbb{R}[V]/\mathfrak{n}$ es cuerpo, $\mathfrak{p}$ es un ideal maximal real de $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$. Considerando $W = V_{\mathbb{A}}(\mathfrak{p}) \subseteq V$ una variedad algebraica real contenida en V. Por el Teorema de los Ceros Real (Teorema 1.2.4) $\sqrt[R]{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p} = I(W)$, luego W es una variedad algebraica real irreducible y no vacía. En particular, existe $p \in W$ y $\widetilde{\mathfrak{m}}_p \supseteq \mathfrak{p}$. Por tanto, $\widetilde{\mathfrak{m}}_p/I(V) \supseteq \mathfrak{n}$ y $\mathfrak{n}$ es un ideal maximal en $\mathbb{R}[V]$, luego $\widetilde{\mathfrak{m}}_p/I(V) = \mathfrak{n}$ y se tiene la inclusión recíproca y la igualdad. Para la segunda afirmación del enunciado, si $\varphi : \mathbb{R}[V] \longrightarrow \mathbb{R}$ es un morfismo de $\mathbb{R}$-álgebras entonces $\lambda = \varphi(\lambda + I(V))$ para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ y, en particular, φ es epimorfismo. Si $\mathfrak{n} = \ker(\varphi)$ es el núcleo de φ tenemos un isomorfismo de anillos

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\varphi} : \mathbb{R}[V]/\mathfrak{n} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f + \mathfrak{n}) & \longmapsto & \varphi(f) \end{array}$$

Como $\mathbb{R}$ es cuerpo, $\mathfrak{n}$ es maximal. Como $\mathbb{R}$ es formalmente real, $\mathfrak{n}$ es un ideal real. Por tanto, existe $p \in V$ tal que $\mathfrak{n} = \widetilde{\mathfrak{m}}_p/I(V)$. Finalmente, sea $f \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ y consideramos

$f = \tau_p(f)$ la representación de f mediante su desarrollo de Taylor, Observemos que si $\mu \in \mathbb{N}^n$, $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ es tal que $|\mu| \geq 1$ se tiene que

$$\frac{1}{\mu_1! \cdots \mu_n!} \frac{\partial^{|\mu|} f}{\partial X_1^{\mu_1} \cdots \partial X_n^{\mu_n}}(p)\ (X_1 - p_1)^{\mu_1} \cdots (X_n - p_n)^{\mu_n} \in \mathfrak{m}_p = (X_1 - p_1, \ldots, X_n - p_n).$$

Por tanto

$$\varphi\left(\frac{1}{\mu_1! \cdots \mu_n!} \frac{\partial^{|\mu|} f}{\partial X_1^{\mu_1} \cdots \partial X_n^{\mu_n}}(p)\ (X_1 - p_1)^{\mu_1} \cdots (X_n - p_n)^{\mu_n}\right) = 0$$

para todo $\mu \in \mathbb{N}^n$ tal que $|\mu| \geq 1$. En conclusión,

$$\varphi(f + I(V)) = \varphi(f(p) + I(V)) = f(p)(1 + I(V)) = f(p)$$

para cualquier $f + I(V) \in \mathbb{R}[V]$. Con esto quedan demostradas las afirmaciones *i)* y *ii)* del enunciado. □

PROPOSICIÓN 1.2.10. *Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ una variedad algebraica real y sea $p \in V$ un punto. Denotemos por $\mathbb{R}[V]_p$ la localización de $\mathbb{R}[V]$ en el ideal $\mathfrak{n}_p$ antes definido. Es decir, sea*

$$\mathbb{R}[V]_p := \mathbb{R}[V]_{\mathfrak{n}_p} := \{\frac{f}{g} :\ f, g \in \mathbb{R}[V],\ g(p) \neq 0\}.$$

Entonces, $\mathbb{R}[V]_p$ es un anillo local noetheriano y su dimensión es igual a

$$\dim(\mathbb{R}[V]_p) = \max\{\dim(W) :\ p \in W \text{ y } W \text{ es componente irreducible de } V\}$$

DEMOSTRACIÓN. Comencemos con el ideal $\widetilde{\mathfrak{m}}_p = (X_1 - p_1, \ldots, X_n - p_n)$. Como la dimensión de $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ es n (ver Proposición A.4.3 del Apéndice A.4), entonces $ht(\widetilde{\mathfrak{m}}_p) \leq n$. Por otro lado, observemos que la sucesión $\{X_1 - p_1, \ldots, X_n - p_n\}$ es una sucesión regular en $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ porque

$$\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]/(X_1 - p_1, \ldots, X_s - p_{s-1}) = \mathbb{R}[X_s, \ldots, X_n],$$

con lo que $X_s - p_s$ no puede ser divisor de cero módulo el ideal $(X_1 - p_1, \ldots, X_{s-1} - p_{s-1})$. Por el Teorema de la Intersección de Krull tendremos que $ht(\widetilde{\mathfrak{m}}_p) = n$. Por otro lado, si $W \subseteq V$ es una componente irreducible de V tal que $p \in W$, $I(W) \subseteq \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ es un ideal primo real y se tiene que $I(W) \subseteq \widetilde{\mathfrak{m}}_p$. Finalmente, por ser catenario $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ (ver Definición 26 y Corolario A.4.9 del Apéndice A.4) tendremos que

$$coht(I(W)) = \dim(W) = n - ht(I(W)),$$
$$ht(\widetilde{\mathfrak{m}}_p/I(W)) = ht(\widetilde{\mathfrak{m}}_p) - ht(I(W)).$$

Por otro lado, supongamos una descomposición de V en componentes irreducibles

$$V = W_1 \cup \cdots \cup W_s \cup W_{s+1} \cup \cdots \cup W_t,$$

donde $p \in W_i$, $1 \leq i \leq s$, $p \notin W_j$, $s + 1 \leq j \leq W_t$. Entonces, tenemos

$$I(V) = I(W_1) \cap \cdots \cap I(W_s) \cap I(W_{s+1}) \cap \cdots \cap I(W_t),$$

es una descomposición de $I(V)$ como ideales primos reales. Seguidamente, las extensiones a $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]_p$ (que es la localización en $\widetilde{\mathfrak{m}}_p$) pasa a verificar

- $I(W_i)^e$ es un ideal primo real en $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]_p$, $1 \leq i \leq s$.
- $I(W_j)^e = \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]_p$ es el ideal trivial en $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]_p$.

En conclusión, tenemos que

$$I(V)^e = I(W_1)^e \cap \cdots \cap I(W_s)^e. \tag{1.2.9}$$

Además, en el paso a la localización tendremos que para cada i, $1 \leq i \leq s$,

$$coht(I(W_i)^e) = ht(\widetilde{\mathfrak{m}}_p/I(W_i)) = n - ht(I(W_i)) = coht(I(W_i)) = \dim(W_i).$$

Finalmente, la Igualdad (1.2.9) nos indica que

$$coht(I(V)^e) = \max\{coht(I(W_1)^e), \ldots, coht(I(W_s)^e)\}$$

Y como $\mathbb{R}[V]_p$ es un anillo local, concluimos:

$$\dim(\mathbb{R}[V]_p) = \dim\left({\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]_p}\big/{I(V)^e}\right) = coht(I(V)^e) = \max\{\dim(W_1), \ldots, \dim(W_s)\}$$

□

Proposición 1.2.11. *Con las notaciones precedentes, se tiene un isomorfismo de $\mathbb{R}$-espacios vectoriales entre*

$$\mathfrak{n}_p \big/ \mathfrak{n}_p^2 = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(T_pV, \mathbb{R}) \cong T_pV.$$

Demostración. Dado $f \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ y T_pV, denotemos por $\nabla_p f|_{T_pV}$ a la aplicación lineal sobre T_pV definida restringiendo a T_pV la aplicación diferencial:

$$\begin{array}{rccl} \nabla_p f: & T_p\mathbb{A}^n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & v & \longmapsto & \langle \nabla_p f, v\rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(p) \cdot v_i. \end{array}$$

Definamos

$$\begin{array}{rcl} \nabla_p : \widetilde{\mathfrak{m}}_p & \longrightarrow & (T_pV)^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(T_pV, \mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & \nabla_p f|_{T_pV}, \end{array}$$

donde $\nabla_p f|_{T_pV} : T_pV \longrightarrow \mathbb{R}$ y, por ello, ∇_p está bien definida. Obsérvese que si $\{f_1, \ldots, f_s\}$ es un sistema generador de $I(V)$ como ideal en $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ y si $f \in I(V) \in \widetilde{\mathfrak{m}}_p$, entonces, $\nabla_p f$ es una combinación lineal con coeficientes en $\mathbb{R}$ de $\{\nabla_p f_1, \ldots, \nabla_p f_s\}$. Pero, por definición del espacio tangente T_pV, $\nabla_p f_i|_{T_pV} \equiv 0$, $\forall f \in I(V)$. En particular, tiene sentido considerar el morfismo de $\mathbb{R}$-espacios vectoriales inducido por ∇_p en el cociente:

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\nabla}_p : \ \mathfrak{n}_p = \widetilde{\mathfrak{m}}_p / I(V) & \longrightarrow & (T_pV)^* \\ f + I(V) & \longmapsto & \nabla_p f|_{T_pV}. \end{array}$$

Veamos que $\widetilde{\nabla}_p$ es un epimorfismo de $\mathbb{R}$-espacios vectoriales. Para ello, sea $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(T_pV, \mathbb{R})$ una aplicación lineal. Existirá una aplicación lineal $\ell : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $\ell|_{T_pV} = \varphi$. Considerando la base canónica de $\mathbb{R}^n$, existirán $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$\ell(v) = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n, \qquad \forall\, v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n,$$

Consideremos $f = \lambda_1(X_1 - p_1) + \cdots + \lambda_n(X_n - p_n) \in \widetilde{\mathfrak{m}}_p$ y consideremos su clase módulo $I(V)$, $f + I(V) \in \mathfrak{n}_p$. Observemos que

$$\widetilde{\nabla}_p(f + I(V)) = \nabla_p f|_{T_pV} = \ell|_{T_pV} = \varphi$$

Consideremos ahora los elementos del ideal $\widetilde{\mathfrak{m}}_p^2$. Si $g \in \widetilde{\mathfrak{m}}_p^2$ entonces, su desarrollo de Taylor en p tiene solamente términos de orden al menos dos. Es decir,

$$\tau_p(g) = \sum_{\mu \in \mathbb{N}^n,\ |\mu| \geq 2} \frac{1}{\mu_1! \cdots \mu_n!} \frac{\partial^{|\mu|} g}{\partial X_1^{\mu_1} \cdots \partial X_n^{\mu_n}}(p)\ (X_1 - p_1)^{\mu_1} \cdots (X_n - p_n)^{\mu_n},$$

La razón es que $\widetilde{\mathfrak{m}}_p^2$ está generado, como ideal, por los elementos

$$\{(X_i - p_i)(X_j - p_j) :\ 1 \leq i, j \leq n\}.$$

Por tanto,

$$\widetilde{\nabla}_p(g + I(V)) = \nabla_p g|_{T_pV} = 0|_{T_pV} \equiv 0.$$

Por tanto, $\widetilde{\mathfrak{m}}_p^2 + I(V)/I(V) \subseteq \ker(\widetilde{\nabla}_p)$ o, lo que es equivalente, $\mathfrak{n}_p^2 \subseteq \ker(\widetilde{\nabla}_p)$. Veamos, finalmente, que $\ker(\widetilde{\nabla}_p) \subseteq \mathfrak{n}_p^2$ y habremos terminado. Supongamos que $f + I(V)$ tal que $\nabla_p f|_{T_pV} \equiv 0$. Es decir, la aplicación lineal $\nabla_p f$ se anula sobre el complemento ortogonal del espacio vectorial $\mathbb{R}\langle \nabla_p f_1, \ldots, \nabla_p f_s\rangle$, donde $\{f_1, \ldots, f_s\}$ es un sistema generador del ideal $I(V)$. Por ello, $\nabla_p f$ está en el espacio normal $N_pV = \mathbb{R}\langle \nabla_p f_1, \ldots, \nabla_p f_s\rangle$ y existirán $\theta_1, \ldots, \theta_s \in \mathbb{R}$ tales que

$$\nabla_p f = \theta_1 \nabla_p f_1 + \cdots + \theta_s \nabla_p f_s.$$

Consideremos el polinomio $h = f - (\theta_1 f_1 + \cdots + \theta_s f_s)$. Observemos que

- $h + I(V) = f + I(V)$.
- $\nabla_p h = \nabla_p f - (\theta_1 \nabla_p f_1 + \cdots + \theta_s \nabla_p f_s) = 0$.
- $h(p) = f(p) - (\theta_1 f_1(p) + \cdots + \theta_s f_s(p)) = 0$.

Por tanto, $h \in \widetilde{\mathfrak{m}}_p^2$ y, en consecuencia, $f + I(V) \in \widetilde{\mathfrak{m}}_p^2 + I(V)/I(V) = \mathfrak{n}_p^2$. □

COROLARIO 1.2.12. *Con las notaciones precedentes, sea* $\mathfrak{n}_p^e$ *la extensión a* $\mathbb{R}[V]_p$ *del ideal* $\mathfrak{n}_p$. *Entonces, se tiene:*

i) Los siguientes son isomorfos como $\mathbb{R}$*-espacios vectoriales*

$$\mathfrak{n}_p^e \Big/ (\mathfrak{n}_p^e)^2 \cong \mathfrak{n}_p \Big/ \mathfrak{n}_p^2$$

ii) Las siguientes dimensiones coinciden:

$$\dim_{\mathbb{R}}(T_pV) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{n}_p^e/(\mathfrak{n}_p^e)^2)$$

En particular, $\dim_{\mathbb{R}}(T_pV)$ *es igual al número mínimo de generadores de* $\mathfrak{n}_p^e$ *como ideal de* $\mathbb{R}[V]_p$.

iii) Se verifica que:

$$\dim_{\mathbb{R}}(T_pV) \geq \dim(\mathbb{R}[V]_p). \tag{1.2.10}$$

Además, ambas dimensiones coinciden si y solamente si $\mathbb{R}[V]_p$ *es un anillo local regular.*

iv) Si $\mathbb{R}[V]_p$ *es un anillo local regular, entonces, existe una única componente irreducible* W *de* V *tal que* $p \in W$. *Además, en ese caso*

$$\dim(T_pV) = \dim(W)$$

v) Recíprocamente, sea W *una componente irreducible de* V *de dimensión máxima (y, por tanto,* $\dim(W) = \dim(V)$*). Sea* $p \in W$ *un punto que no está en ninguna otra componente de* V. *Si* $\dim(T_pV) = \dim(V)$, *entonces* $\mathbb{R}[V]_p$ *es un anillo local regular de dimensión igual a la dimensión de* V. *Además en ese caso se tiene*

$$\dim(T_pV) = \dim(\mathbb{R}[V]_p) = \dim(V).$$

DEMOSTRACIÓN. i) La afirmación *i)* es un caso particular de un caso más general. Así, sea K un cuerpo, R una K-álgebra y $\mathfrak{m} \in \operatorname{MaxSpec}(R)$ un ideal maximal tal que $R/\mathfrak{m} \cong K$. Consideremos el sistema multiplicativo $S = R \setminus \mathfrak{m}$ y sea $S^{-1}R = R_{\mathfrak{m}}$ la localización de R en S. Por ser la localización un functor exacto concluimos que los siguientes son isomorfos como $S^{-1}R$-módulos:

$$S^{-1}\mathfrak{m}/S^{-1}\mathfrak{m}^2 \cong S^{-1}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2).$$

Veamos que $S^{-1}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$ es isomorfo a $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ como K-espacio vectorial. Para verlo de modo explícito, consideremos la siguiente correspondencia

$$\begin{aligned} \varphi :\ \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 &\longrightarrow S^{-1}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) \\ f + \mathfrak{m}^2 &\longmapsto \frac{f + \mathfrak{m}^2}{1}. \end{aligned}$$

Claramente está bien definida y es morfismo de K-espacios vectoriales. Veamos que, además, es una biyección en este caso. En primer lugar, recordemos que $S = R\setminus\mathfrak{m}$ y, por tanto, para cada $u \in S$ existe $\lambda + \mathfrak{m} \in R/\mathfrak{m} = K$ tal que $u + \mathfrak{m} = \lambda + \mathfrak{m}$. Así, si $f + \mathfrak{m}^2$ es un elemento del núcleo entonces existe $u \in S$ tal que

$$uf \in \mathfrak{m}^2.$$

Pero si $\lambda \in R/\mathfrak{m}$ es tal que $u + \mathfrak{m} = \lambda + \mathfrak{m}$, se tiene

$$(u - \lambda)f = uf - \lambda f \in \mathfrak{m}^2,$$

porque $(u - \lambda) \in \mathfrak{m}$ y $f \in \mathfrak{m}$. En consecuencia, como $uf \in \mathfrak{m}^2$, concluimos que $\lambda f \in \mathfrak{m}^2$. Pero $\lambda \in K \subseteq R$ y es una unidad en R, luego $\lambda^{-1}(\lambda f) \in \mathfrak{m}^2$ y concluimos $f \in \mathfrak{m}^2$ o, equivalentemente, $f + \mathfrak{m}^2 = 0$ con lo que φ es monomorfismo. Por otro lado, dado un elemento en $S^{-1}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$ de la forma siguiente:

$$\frac{f + \mathfrak{m}^2}{g}, \quad f \in \mathfrak{m}, \quad g \in R \setminus \mathfrak{m},$$

existirá $\theta \in K \cong R/\mathfrak{m}$ tal que

$$g + \mathfrak{m} = \theta + \mathfrak{m}.$$

Consideramos el elemento $\theta^{-1}f+\mathfrak{m}^2 \in \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Entonces, tenemos que $(g\theta^{-1}-1)\in\mathfrak{m}$ y $f\in\mathfrak{m}$ luego

$$g\theta^{-1}f - f \in (g\theta^{-1}-1)f \in \mathfrak{m}^2$$

Por tanto, tenemos la igualdad

$$\frac{\theta^{-1}f+\mathfrak{m}^2}{1} = \frac{f+\mathfrak{m}^2}{g}.$$

Aplicando este resultado general al caso de $R=\mathbb{R}[V]$, $K=\mathbb{R}$, $\mathfrak{m}=\mathfrak{n}_p$, tenemos $i)$.

ii) Se sigue inmediatamente de $i)$ y de la proposición precedente.

iii) Recuérdese el Teorema de la Dimensión Local (ver Teorema B.1.49 del Apéndice B) que

$$\dim(\mathbb{R}[V]_p) = \dim_{\mathrm{Chev}}(\mathbb{R}[V]_p).$$

Por el Lema de Nakayama (ver Teorema B.1.21)

$$\dim_{\mathbb{R}[V]_p^e/\mathfrak{n}_p}\left(\mathfrak{n}_p^e \big/ (\mathfrak{n}_p^e)^2 \right) = \mu(\mathfrak{n}_p^e).$$

Es decir,la dimensión como $\mathbb{R}$-espacio vectorial ($\mathbb{R}\cong\mathbb{R}[V]_p/\mathfrak{n}_p^e$) coincide con el cardinal de un conjunto mínimo de generadores de $\mathfrak{n}_p^e$ como ideal. Como $\mathfrak{n}_p^e$ es un ideal de definición de $\mathbb{R}[V]_p$, entonces, $\mu(\mathfrak{n}_p^e)\geq \dim_{\mathrm{Chev}}(\mathbb{R}[V]_p)$. En consecuencia, se tiene (1.2.10). Además, por nuestra definición de anillo local regular se observa que son equivalentes:

- El cardinal mínimo de un sistema de generadores de $\mathfrak{n}_p^e$ es igual a $\dim(\mathbb{R}[V]_p)$.
- El anillo $\mathbb{R}[V]_p$ es un anillo local regular.

Por tanto, (1.2.10) es una igualdad si y solamente si $\mathbb{R}[V]_p$ es un anillo local.

iv) Si $\mathbb{R}[V]_p$ es un anillo local regular, entonces $\mathbb{R}[V]_p$ es un dominio de integridad (ver Corolario B.2.12 del Apéndice B). Por otro lado vimos que si

$$V = W_1\cup\cdots\cup W_r,$$

es una descomposición de V en componentes irreducibles tales que $p\in W_i$ si y solamente si $1\leq i\leq s$ con $1\leq s\leq r$, entonces

$$I(V)^e = I(W_1)^e\cap\cdots\cap I(W_s)^e,$$

es una descomposición de $I(V)^e = I(V)\mathbb{R}[X_1,\ldots,X_n]_p$ en el anillo $\mathbb{R}[X_1,\ldots,X_n]_{\widetilde{\mathfrak{m}}_p}$ como intersección de ideales primos (reales). Pero, además, $\mathbb{R}[V]_p$ es un dominio de integridad ($I(V)^e$ es un ideal primo) por cuanto $s=1$ y existe una única componente irreducible W_i de V tal que $p\in W_i$ de V tal que $p\in W_i$. Llamemos W a esa única componente irreducible y se tendrá

- $\dim(\mathbb{R}[V]_p) = coht(I(W)^e) = \dim(W)$.
- $\mathbb{R}[V]_p = \mathbb{R}[W]_p$ es anillo local regular.

Entonces $T_pV = T_pW$ y se tiene

$$\dim(T_pV) = \dim(W).$$

v) En cuanto al recíproco, sea W una componente irreducible de dimensión máxima (i.e. $\dim(V)=\dim(W)$). Sea $p\in W$ un punto tal que p no está en ninguna otra componente irreducible de V y supongamos que $\dim(T_pW)=\dim(W)=\dim(V)$. Entonces $\mathbb{R}[W]_p$ es un anillo local regular. Por otro lado, en el anillo local noetheriano $\mathbb{R}[X_1,\ldots,X_n]_{\widetilde{\mathfrak{m}}_p}$ observamos que,

$$I(V)^e = I(W)^e,$$

por ser W la única componente irreducible que contiene a p. Entonces, se tiene que

$$\mathbb{R}[V]_p = \mathbb{R}[X_1,\ldots,X_n]_{\widetilde{\mathfrak{m}}_p}\big/ I(V)^e = \mathbb{R}[X_1,\ldots,X_n]_{\widetilde{\mathfrak{m}}_p}\big/ I(W)^e = \mathbb{R}[W]_p.$$

Además, como $W\subseteq V$, $T_pW\subseteq T_pV$ y, en cuanto a ideales,

$$\mathfrak{n}_p = \mathfrak{n}_{p,W} := \widetilde{\mathfrak{m}}_p \big/ I(W)$$

En conclusión,

$$\mathfrak{n}_p\big/\mathfrak{n}_p^2 = \mathfrak{n}_{p,W}\big/\mathfrak{n}_{p,W}^2$$

y $\dim(T_pW) = \dim(T_pV)$ con lo que $T_pV = T_pW$. Tenemos así las siguientes igualdades

$$\dim(T_pV) = \dim(T_pW) = \dim(\mathbb{R}[W]_p) = \dim(\mathbb{R}[V]_p).$$

Además $\dim(\mathbb{R}[W]_p) = coht(I(W)^e) = \dim(W) = \dim(V)$, con lo que se concluyen las afirmaciones indicadas.

□

DEFINICIÓN 7. *Dado $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ una variedad algebraica real. Un punto $p \in V$ se denomina punto regular (o punto liso) si se verifica que*

$$\dim(T_pV) = \dim(V).$$

En otro caso, diremos que $p \in V$ es un punto singular. Denotemos por $\mathrm{Reg}(V)$ *el conjunto de los puntos regulares de V y por* $\mathrm{Sing}(V)$ *sus puntos singulares.*

OBSERVACIÓN 1.2.13. A continuación, se exponen ciertas propiedades y observaciones acerca de los puntos regulares.

i) Si $\dim(T_pV) = \dim(V)$, entonces $\dim(T_pV) = \dim(\mathbb{R}[V]_p)$ puesto que $\dim(V) \geq \dim(\mathbb{R}[V]_p)$. Por el apartado *iii*) de la Proposición precedente, esto implica que $\mathbb{R}[V]_p$ es un anillo local regular. Por *iv*) existirá una única componente irreducible de V de dimensión máxima. En ese caso, además, $\mathbb{R}[V]_p = \mathbb{R}[W]_p$ y p será un punto regular de W. En conclusión, sea dada una descomposición de V en componentes irreducibles

$$V = W_1 \cup \cdots \cup W_s \cup W_{s+1} \cup \cdots \cup W_m,$$

de tal modo que $\dim(V) = \dim(W_i)$ si y solo si $1 \leq i \leq s$. Lo que acabamos de probar es que

$$\mathrm{Reg}(V) \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{s} \left(\mathrm{Reg}(W_i) \setminus \left(\bigcup_{j \neq i} W_j \right) \right) \right).$$

ii) La inclusión de (i) es una igualdad. Si $p \in W_i$, con $\dim(W_i) = \dim(V)$ y $p \notin W_j \ \forall j \neq i$, entonces si $p \in \mathrm{Reg}(W_i)$, p es un punto regular en W_i, $\mathbb{R}[V]_p = \mathbb{R}[(W_i)]_p$ y p será un punto liso de V.

iii) De otro lado, con nuestra definición se tiene:

$$\mathrm{Sing}(V) \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{s} \mathrm{Sing}(W_i) \right) \cup \left(W_{s+1} \cup \cdots \cup W_m \right).$$

iv) Si V es irreducible, el conjunto $\mathrm{Sing}(V) \subseteq V$ es una subvariedad algebraica de dimensión estrictamente menor que la dimensión de V. Para probarlo, consideramos $\{f_1, \ldots, f_s\} \subseteq \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ un sistema generador de $I(V)$ en $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$. Consideramos la matriz jacobiana, sin especializar,

$$D(f_1, \ldots, f_s) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq s \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathscr{M}_{s \times n}(\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]).$$

Ahora, consideremos la matriz tomando clases módulo $I(V)$ de la matriz anterior

$$\overline{D(f_1, \ldots, f_s)}^V = \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j} + I(V) \right)_{\substack{1 \leq i \leq s \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathscr{M}_{s \times n}(\mathbb{R}[V]).$$

Sea $\mathbb{R}(V) = qf(\mathbb{R}[V])$ el cuerpo de fracciones del dominio de integridad $\mathbb{R}[V]$. La matriz $\overline{D(f_1, \ldots, f_s)}^V$ es una matriz de coordenadas en $\mathbb{R}(V)$ porque $\mathbb{R}[V] \subseteq \mathbb{R}(V)$. Por tanto, $\overline{D(f_1, \ldots, f_s)}^V$ tiene un rango. Sea $r \in \mathbb{N}$, ese rango. Consideremos el conjunto de los menores de la matriz $D(f_1, \ldots, f_s)$ de tipo $k \times k$, $1 \leq k \leq n$:

$$\mathcal{M}_k := \{M \in \mathscr{M}_{k \times k}(\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]) : M \text{ es submatriz } k \times k \text{ de } D(f_1, \ldots, f_s)\}.$$

Observemos que

- Si $k = r$, existe $M \in \mathcal{M}_r$ tal que $\det(M) + I(V) = \det(\overline{M}^V) \neq 0$ en $\mathbb{R}(V)$, donde $\overline{M}^V$ es el mismo menor que M en $\overline{D(f_1, \ldots, f_s)}^V$. Luego $\det(M) \notin I(V)$ lo que se traduce en que existe $p \in V$ tal que $\det(M)(p) \neq 0$. Luego $r \leq \max\{r \in \mathbb{N} : \exists\, M \in \mathcal{M}_r,\ \exists p \in V \text{ con } \det(M)(p) \neq 0\}$.
- Si $k > r$, para cualquier $N \in \mathcal{M}_k$, $\det(N) + I(V) = \det(\overline{N}^V) = 0 + I(V)$ en $\mathbb{R}(V)$. En conclusión, $\det(N) \in I(V)$ y $\det(N)(p) = 0$ para cualquier $p \in V$ y $N \in \mathcal{M}_k$. Luego, $r = \max\{r \in \mathbb{N} : \exists\, M \in \mathcal{M}_r,\ \exists p \in V \text{ con } \det(M)(p) \neq 0\}$.

En particular, tenemos que si $\det(M)(p) \neq 0$ con $M \in \mathcal{M}_r$, se tiene:

$$\dim(T_pV) = n - \operatorname{rank}(D(f_1, \ldots, f_s)(p)) = n - r$$

Y como, por lo antedicho, $r = \max\{r \in \mathbb{N} : \exists\, M \in \mathcal{M}_r,\ \exists p \in V \text{ con } \det(M)(p) \neq 0\}$ se tiene para cada $q \in V$ que

$$\dim(T_pV) \leq \dim(T_qV) = n - \operatorname{rank}(D(f_1, \ldots, f_s)(q))$$

Como $\dim(V)$ es mínimo de las dimensiones de los espacios tangentes a puntos de V concluimos que si $M(p) \neq 0$, entonces

$$\dim(T_pV) = n - r = \dim(V).$$

En particular, $p \in V$ será un punto regular de V. Consideramos el ideal

$$\mathfrak{a} = I(V) + \Big(\big\{ \det(M) \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n] : M \in \mathcal{M}_r \big\}\Big).$$

Tenemos que $I(V)$ es un subideal propio de $\mathfrak{a}$ y, como V es irreducible, tendremos que $V = V_{\mathbb{A}}(I(V)) \supsetneq V_{\mathbb{A}}(\mathfrak{a})$. Luego los puntos singulares de V están contenidos en $V_{\mathbb{A}}(\mathfrak{a})$ y $\dim(V_{\mathbb{A}}(\mathfrak{a})) < \dim(V)$.

v) Si $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ es una variedad algebraica real y $p \in V$ es un punto regular, entonces $\operatorname{rank}(D(f_1, \ldots, f_s)(p)) = n - \dim(V)$. Además esa igualdad se satisface en un entorno abierto U en V tal que $p \in U$. Por el Teorema de la Función Implícita (y el Teorema del Rango Constante) concluiremos que V es, en un entorno de p, analíticamente difeomorfo a un abierto $U' \subseteq \mathbb{R}^t$ donde $t = \dim(V)$. En particular, si $p \in V$ es un punto regular, en un entorno de p de la variedad algebraica real V es una subvariedad analítica (y de Riemann) de $\mathbb{R}^n$ de dimensión $\dim(V)$.

vi) El recíproco de v) es cierto en el caso complejo, pero no es cierto en el caso real. La presencia de “mangos” (como en las variedades del tipo “paraguas de Cartan o de Whitney”) hace que una variedad algebraica real V sea localmente alrededor de un punto $p \in V$ una subvariedad analítica de $\mathbb{R}^n$ de dimensión estrictamente menor que la dimensión de V. En ese caso, p no será considerado un punto regular sino un punto singular en nuestro contexto.

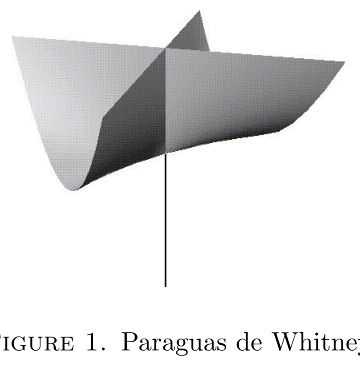

Figure 1. Paraguas de Whitney.

1.3. Conjuntos semi-algebraicos: “salchichonaje”.

El clásico *Teorema de Chevalley* prueba que si $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ es una variedad algebraica afín, siendo $\mathbb{K}$ un cuerpo algebraicamente cerrado, la imagen de V por cualquier aplicación polinomial $f : V \longrightarrow \mathbb{A}^m(\mathbb{K})$ es un conjunto constructible (es decir, una unión finita de conjuntos localmente cerrados en la topología de Zariski de $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$). El resultado es clave para entender, entre otras cosas, la existencia de eliminación de cuantificadores sobre cuerpos algebraicamente cerrados (cf. [**Heintz, 1983**], por ejemplo, para ilustrarse al respecto).

En el caso real, como tantas otras propiedades, el *Teorema de Chevalley* no se verifica, como se observa en el siguiente ejemplo elemental:

Sea $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; y - x^2 = 0\}$ y consideramos la proyección $\pi_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada mediante $\pi_2(x, y) := y$. Entonces, $\pi_2(V) = \{y \in \mathbb{R} : \; y \geq 0\}$ y $\pi_2(V)$ no es una unión finita de localmente cerrados de $\mathbb{R}$ para la topología de Zariski. La forma de la imagen (basta con proyecciones, de hecho) de una variedad algebraica real por una aplicación polinomial pertenece a la clase de conjuntos denominados *semi-algebraicos* por S. Łojasiewicz en [**Łojasiewicz, 1964**]. Aunque la forma de esos conjuntos semi-algebraicos viene de los resultados de A. Tarski sobre la decibilidad de eliminación de cuantificadores sobre cuerpos realmente cerrados en [**Tarski, 1951**].

Definición 8 (**Conjuntos semialgebraicos**). *Llamaremos conjunto semi-algebraico a todo subconjunto $S \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ tal que existen dos familias finitas de polinomios con coeficientes reales:*

$$\{f_{i,j} : \; 1 \leq i \leq m, \; 1 \leq j \leq s\} \subseteq \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$$
$$\{g_{i,k} : \; 1 \leq i \leq m, \; 1 \leq k \leq t\} \subseteq \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$$

tales que

$$S = \bigcup_{i=1}^{m} \Big(\bigcap_{j=1}^{s} V_{\mathbb{A}}(f_{i,j}) \Big) \cap \Big(\bigcap_{k=1}^{t} \{x \in \mathbb{A}^n(\mathbb{R}) : \; g_{i,k}(x) > 0\} \Big). \tag{1.3.1}$$

Los conjuntos semi-algebraicos son la esencia de la Geometría Algebraica Real. Es sencillo probar que todo conjunto semi-algebraico es la proyección de una variedad algebraica real. Así, consideremos $S \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ un conjunto semi-algebraico descrito mediante una expresión como la identidad (1.3.1) precedente. Consideramos $N = n + t \cdot m \in \mathbb{N}$ y consideramos las siguientes ecuaciones polinomiales.

- Para cada i, $1 \leq i \leq m$,
$$f_i := \sum_{j=1}^{s} f_{i,j}^2 \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n, Y_{(1,1)}, \ldots, Y_{(t,m)}],$$
- Para cada i, $1 \leq i \leq m$, y para cada k, $1 \leq k \leq t$, consideremos los siguientes polinomios $G_{i,k} \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n, Y_{(1,1)}, \ldots, Y_{(t,m)}]$
$$G_{i,k} := Y_{(i,k)}^2 \cdot g_{i,k}(x_1, \ldots, x_n) - 1.$$

Ahora consideremos la variedad algebraica $V_i \subseteq \mathbb{A}^N(\mathbb{R})$ dada mediante:

$$V_i := \{(x, y) \in \mathbb{A}^N(\mathbb{R}) : \; f_i(x) = 0, \; G_{i,1}(x, y) = \cdots = G_{i,t}(x, y) = 0\}.$$

y sea $V = V_1 \cup \cdots \cup V_m \subseteq \mathbb{A}^N(\mathbb{R})$ la variedad algebraica dada como la unión de las precedentes variedades. Si $\pi : \mathbb{A}^N(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ es la proyección que "olvida" las últimas tm coordenadas, se observa fácilmente que

$$\pi(V) = S.$$

Un resultado de mayor dificultad técnica consiste en probar el recíproco de la anterior afirmación, esto es, probar que la proyección de toda variedad algebraica es un conjunto semi-algebraico. Este otro resultado es el fundamental *Principio de Tarski* (en [**Tarski, 1951**]) que enunciaremos en un instante. La prueba original de Tarski exhibía un algoritmo de altísima complejidad para la eliminación de cuantificadores en fórmulas de primer orden sobre $\mathbb{R}$. Muchos autores intentaron mejorar no sólo la complejidad del algoritmo, sino también el estudio y análisis de ese principio de Tarski. Una de esas re-demostraciones, retomadas por varios autores, se basa en un argumento inductivo (en el número de variables) que ha recibido varias denominaciones (cylindrical algebraic decomposition, démontage des semialgèbraiques,...), entre las cuales, hemos elegido, por ser la más descriptiva, la expresión *"salchichonaje de semi-algebraicos"*. Esta demostración es la usada por M. Coste en [**Coste, 1982**], aunque Coste atribuye el resultado a P.J. Cohen (cf. [**Cohen, 1969**]) y retomada por G. Brumfiel en

[**Brumfiel, 1979**]. Este resultado sobre el "salchichonaje" también aparece en el Capítulo 1 del [**BCR, 1987**] aunque hemos preferido la forma original de [**Coste, 1982**].

Definición 9. *Sea $S \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ un conjunto semi-algebraico. Una función $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ se denomina semi-algebraica si su grafo $Gr(f) \subseteq S \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{A}^{n+1}(\mathbb{R})$ es un conjunto semi-algebraico.*

Notación 1.3.1. Con las notaciones precedentes, dado $S \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ un semi-algebraico. Denotaremos por $\mathscr{S}^0(S)$ a la $\mathbb{R}$-álgebra de las funciones semi-algebraicas definidas sobre S que son, además, continuas para la topología usual de $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$. Si, además, $S \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ es un abierto semi-algebraico, para $1 \leq k \leq \infty$, denotaremos por $\mathscr{S}^k(S)$ al conjunto

$$\mathscr{S}^0(S) \cap \mathscr{C}^k(S).$$

Como se observa en [**BCR, 1987**], las derivadas de las funciones semi-algebraicas son también semi-algebraicas y $\mathscr{S}^k(S)$ son las funciones k veces diferenciables y con diferencial k-ésimo continuo y semi-algebraico.

Teorema 1.3.2 (**Saucissonage d'une hyper-surface**). *Sea $p \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n, Y]$ un polinomio en $n+1$ variables con coeficientes en $\mathbb{R}$. Entonces, existe una partición de $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ como unión disjunta de conjuntos semi-algebraicos $A_1, \ldots, A_m$, disjuntos dos a dos y tales que se verifican las siguientes propiedades para cada i, $1 \leq k \leq m$:*

- *O bien p tiene signo constante sobre $A_i \times \mathbb{R}$. Es decir, se da una de las tres situaciones siguientes:*
  - *o bien* $A_i \times \mathbb{R} = \left\{(x,y) \in A_i \times \mathbb{R} : \ p(x,y) > 0\right\}$,
  - *o bien* $A_i \times \mathbb{R} = \left\{(x,y) \in A_i \times \mathbb{R} : \ p(x,y) = 0\right\}$,
  - *o bien* $A_i \times \mathbb{R} = \left\{(x,y) \in A_i \times \mathbb{R} : \ p(x,y) < 0\right\}$.
- *O bien, existen funciones continuas semi-algebraicas $\xi_{i,1}(x), \ldots, \xi_{i,t_i}(x) : A_i \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que:*
  - *para cada $x \in A_i$,*
  $$\xi_{i,1}(x) < \cdots < \xi_{i,t_i}(x)$$
  - *Para cada $x \in A_i$, el signo de $p(x,y)$ sólo depende de los signos de $y - \xi_{i,j}(x)$, $1 \leq i \leq m$.*

Omitimos la demostración y dirigimos al lector a [**Coste, 1982**] o a [**BCR, 1987**]. Para ilustrar el caso en que para cada $x \in A_i$ el signo de $p(x,y)$ viene determinado por ciertas funciones semi-algebraicas $\xi_{i,j}$, véase la Figura 2. En vistas de dicha imagen, surge de forma natural el calificativo dado al Teorema 1.3.2 pues el signo del polinomio p en el "salchichón", $A_i \times \mathbb{R}$, será constante en cada una de las "lonchas", los grafos de las funciones $\xi_{i,j}$, y en cada una de las "tranchas", los intervalos entre dichos grafos.

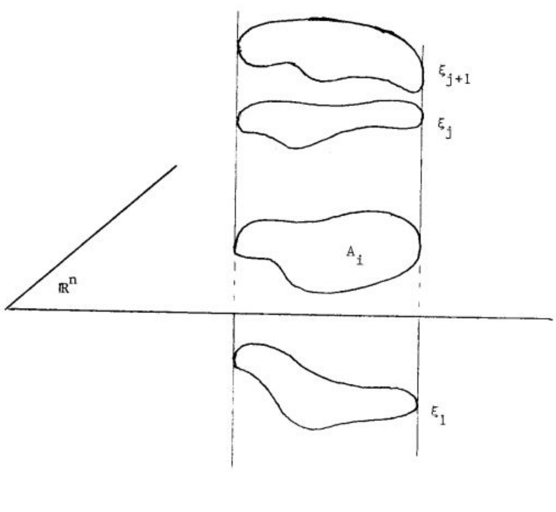

Figure 2. Ejemplo ilustrativo del "Salchichonaje" de una hipersuperficie. Imagen tomada de [**Coste, 1982**].

Observación 1.3.3 (**Interpretamos el resultado en el caso de una hiper-superficie**). Supongamos $V = V_{\mathbb{A}}(p) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}(\mathbb{R})$. Consideremos la partición $\mathbb{A}^n(\mathbb{R}) = A_1 \cup \cdots \cup A_m$ descrita en el salchichonaje precedente. Salvo una permutación de los índices $\{1, \ldots, m\}$ podemos suponer:

i) El signo de p es constante sobre $A_i \times \mathbb{R}$ para $1 \leq i \leq r$. En este caso, puede haber algunos $i \in \{1, \ldots, r\}$ tales que el signo de p en $A_i \times \mathbb{R}$ sea igual a cero de modo constante. En ese caso, si $C = \{i : \ 1 \leq i \leq r, \ p|_{A_i \times \mathbb{R}} = 0\}$ tendremos que
$$V_{\mathbb{A}}(p) \supseteq \bigcup_{i \in C} A_i \times \mathbb{R}$$
y $V_{\mathbb{A}}(p) \cap (A_j \times \mathbb{R}) = \emptyset$, para todo $j \in \{1, \ldots, r\} \setminus C$.

ii) El signo de p no es constante sobre $A_j \times \mathbb{R}$, para $r+1 \leq j \leq m$. En ese caso, tenemos para cada j, unas funciones semi-algebraicas continuas
$$\xi_{j,k} : A_j \longrightarrow \mathbb{R}$$
tal que el signo de p es constante sobre cada uno de los semi-algebraicos siguientes:
$$\begin{aligned} S_{j,0} &:= \{(x,y) \in A_j \times \mathbb{R} : \ -\infty < y < \xi_{j,1}(x)\}, \\ S_{j,k} &:= \{(x,y) \in A_j \times \mathbb{R} : \ \xi_{j,k} < y < \xi_{j,k+1}(x)\}, \quad 1 \leq k \leq t_j - 1, \\ S_{j,t_j} &:= \{(x,y) \in A_j \times \mathbb{R} : \ \xi_{j,t}(x) < y < +\infty\}. \end{aligned}$$
También tendrá p signo constante sobre los siguientes semi-algebraicos que son los grafos de las funciones $\xi_{j,k} \in \mathscr{S}^0(A_j)$:
$$G_{j,k} = \{(x,y) \in A_j \times \mathbb{R} : \ y - \xi_{j,k}(x) = 0\}, \quad 1 \leq k \leq t_j.$$

Dado que el signo de p es constante en $S_{j,k}$ y $G_{j,k}$, tendremos que existen $D_j, \ T_j \subseteq \{(j,k) : 0 \leq k \leq t_j\}$ tales que para $r+1 \leq j \leq m$:
$$V_{\mathbb{A}}(p) \cap (A_j \times \mathbb{R}) = \Big(\bigcup_{(j,k) \in D_j} S_{j,k} \Big) \cup \Big(\bigcup_{(j,r) \in T_j} G_{j,r} \Big)$$
A partir de aquí, consideramos los índices $j \in \{r+1, \ldots, m\}$ tales que $D_j \neq \emptyset$ o $T_j \neq \emptyset$ y concluimos que si $\pi : \mathbb{A}^{n+1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ es la proyección que "olvida" la coordenada $n+1$ se tendrá
$$\pi(V_{\mathbb{A}}(p)) = \Big(\bigcup_{i \in C} A_i \Big) \cup \Big(\bigcup_{\substack{j \in \{r+1, \ldots, m\} \\ D_j \neq \emptyset \text{ o } T_j \neq \emptyset}} A_j \Big).$$
En particular, la proyección de una hiper-superficie en una variable menos es un semi-algebraico por ser unión finita de semi-algebraicos. Además, se tiene:

i) Si $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ es una variedad algebraica real es, como ya hemos visto, una hiper-superficie. Así que el anterior resultado también nos permite concluir que la proyección de cualquier variedad algebraica real, "olvidando" una coordenada, es un conjunto semi-algebraico.

ii) Si, en lugar de una hiper-superficie, considerásemos un conjunto semi-algebraico S de la forma
$$S = \{(x,y) \in \mathbb{A}^{n+1}(\mathbb{R}) : \ p(x,y) \ \epsilon \ 0\}, \tag{1.3.2}$$
Con $\epsilon \in \{>, <\}$, fijo, entonces la misma descomposición nos permitiría concluir que $\pi(S)$ es la unión de algunos de los A_i's, donde $\pi : \mathbb{A}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ es la proyección que olvida la coordenada $n+1$. Por tanto, la proyección de un conjunto S de la forma (1.3.2), olvidando una de las coordenadas, es también semi-algebraico.

De hecho, pueden refinarse los salchichonajes de varias ecuaciones polinomiales, intersecando los respectivos A_i's y recombinando las respectivas funciones semi-algebraicas continuas $\xi_{i,j}$'s permite demostrar en [**Coste, 1982**] (o en [**BCR, 1987**]) el siguiente resultado.

Corolario 1.3.4. *Sean $P_1, \ldots, P_s \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n, Y]$ polinomios en $n+1$ variables con coeficientes en $\mathbb{R}$. Entonces, existe una partición de $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ en semi-algebraicos disjuntos dos a dos:*
$$\mathbb{A}^n(\mathbb{R}) = A_1 \cup \cdots \cup A_m,$$

de tal modo que, salvo permutación de los sub-índices $\{1,\ldots,m\}$ *se verifica que existe* $r \leq m$, *eventualmente* $r = 0$, *de tal modo que:*

i) Para todo k, $1 \leq k \leq s$, *y para todo* i, $1 \leq i \leq r$, *el signo de* $P_k(x,y)$ *es constante sobre* $A_i \times \mathbb{R}$. *Es decir, existe* $\epsilon_{i,k} \in \{>,=,<\}$ *de tal modo que*

$$A_i \times \mathbb{R} = \big\{(x,y) \in A_i \times \mathbb{R} : \ P_k(x,y)\ \epsilon_{i,k}\ 0\ \big\}.$$

ii) Para todo k, $1 \leq k \leq s$, *y para todo* j, $r+1 \leq j \leq m$, *existen funciones continuas semi-algebraicas* $\xi_{j,1},\ldots,\xi_{j,u_j} : A_j \longrightarrow \mathbb{R}$ *tales que para* $x \in A_j$, *el signo de* $P_k(x,y)$ *sólo depende del signo de* $y - \xi_{j,v}$, *para* v, $1 \leq v \leq u_j$.

Supongamos ahora $S \subseteq \mathbb{A}^{n+1}(\mathbb{R})$ un semi-algebraico y sea $\{P_1,\ldots,P_s\}$ una familia finita de polinomios en $\mathbb{R}[X_1,\ldots,X_n,Y]$. Supongamos que S es dado mediante una expresión de la forma descrita en la identidad (1.3.1) anterior. Y supongamos que, con las notaciones de (1.3.1), se tiene

$$\big\{f_{i,j}\big\} \cup \big\{g_{i,j}\big\} \subseteq \big\{P_1,\ldots,P_s\big\},$$

Entonces, si $\pi : \mathbb{A}^{n+1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ es la proyección que olvida la coordenada $n+1$, $\pi(S)$ será la unión (finita) de algunos de los semi-algebraicos $\{A_1,\ldots,A_m\}$ del Corolario 1.3.4 precedente, asociado a la familia de polinomios $\{P_1,\ldots,P_s\}$. Esa es la prueba del afamado Principio de Tarski, que presentamos en forma geométrica y no algorítmica.

Teorema 1.3.5 (**Principio de Tarski**). *Si* $\pi : \mathbb{A}^{n+m}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ *es la proyección que "olvida" las últimas* m *coordenadas y si* $S \subseteq \mathbb{A}^{n+m}(\mathbb{R})$ *es un conjunto semi-algebraico, entonces* $\pi(S)$ *es también semi-algebraico. En particular, si* $f : \mathbb{A}^n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{A}^m(\mathbb{R})$ *es una aplicación polinomial real, y si* $S \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ *es semi-algebraico, entonces* $f(S)$ *es semi-algebraico.*

Nótese que la primera afirmación se sigue del Carolario más un proceso inductivo en el número de variables. En cuanto a la segunda afirmación, nótese que si f es polinomial entonces es semi-algebraica (su grafo es una variedad algebraica) y el grafo de su restricción a S es semi-algebraico porque:

$$Gr(f|_S) = \big(S \times \mathbb{R}^m\big) \cap \big(Gr(f)\big).$$

Finalmente, $f(S) = \pi\big(Gr(f|_S)\big)$ donde $\pi : \ \mathbb{A}^{n+m}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{A}^m(\mathbb{R})$ es la proyección que "olvida" las primeras n coordenadas.

Observación 1.3.6 (**Una aplicación para las funciones semi-algebraicas**). Supongamos $S \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ un semi-algebraico y $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ una función semi-algebraica. Tenemos que $Gr(f) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}(\mathbb{R})$ es semi-algebraico. Supongamos que $Gr(f)$ es dado por condiciones de signo de polinomios en la familia $\{P_1,\ldots,P_m\}$. Consideremos la partición de $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ asociada a esa familia a través del Corolario 1.3.4 precedente. Comencemos considerando $\pi : \mathbb{A}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ la proyección que olvida la coordenada $n+1$. Entonces, $\pi(Gr(f)) = S$ y, por tanto, S será unión de algunos de los A_i's , que denotaremos por $\{A_1,\ldots,A_r\}$ tales que

$$S = \bigcup_{i=1}^{r} A_i, \tag{1.3.3}$$

y $A_i \cap A_j$, $\forall i \neq j$. Además, consideremos ahora $i \in \{1,\ldots,r\}$ y veamos que los signos de los polinomios que definen $Gr(f)$ no pueden ser constantes sobre $A_i \times \mathbb{R}$. Por construcción, si los signos de todos los polinomios que definen $Gr(f)$ fueran constantes sobre $A_i \times \mathbb{R}$, entonces $A_i \times \mathbb{R} \subseteq Gr(f)$ y, más concretamente, $A_i \times \mathbb{R} \subseteq Gr(f|_{A_i})$. Pero eso no es posible porque f es una aplicación y la imagen de cada punto $x \in A_i$ es un único valor $f(x) \in \mathbb{R}$ y no todo $\mathbb{R}$. Por tanto, todos los conjuntos A_i, $i \in \{1,\ldots,r\}$, de (1.3.3) tienen asociadas unas funciones semi-algebraicas continuas $\xi_{i,1},\ldots,\xi_{i,s_i} : A_i \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que los signos de los polinomios $P_k(x,y)$ solo dependen de $y - \xi_{i,s_i}(x)$ para $x \in A_i$. De nuevo, si tenemos una condición de signo $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_m$ tal que si $\underline{\epsilon} = (\epsilon_1,\ldots,\epsilon_m)$ y

$$T_{\underline{\epsilon}} = \Big\{(x,y) \in A_i \times \mathbb{R} : \ P_1(x,y)\ \epsilon_1\ 0,\ldots,P_m(x,y)\ \epsilon_m\ 0\Big\} \subseteq Gr(f|_{A_i}),$$

no es posible que $T_{\underline{\epsilon}}$ interseque alguno de los conjuntos siguientes:

$$S_{i,j} := \Big\{(x,y) \in A_i \times \mathbb{R} : \ \xi_{i,j} < y < \xi_{i,j+1}\Big\}, \qquad 1 \leq j \leq s_i - 1.$$

Así, tampoco los intervalos

$$S_{i,0} := \Big\{(x,y) \in A_i \times \mathbb{R} : \ -\infty < y < \xi_{i,1}\Big\},$$
$$S_{i,s_i} := \Big\{(x,y) \in A_i \times \mathbb{R} : \ \xi_{i,s_i} < y < +\infty\Big\}.$$

La razón es, de nuevo, que $f|_{A_i} : A_i \longrightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación y para cada $x \in A_i$, $f(x) \in \mathbb{R}$ pero no todo el intervalo correspondiente. Moviendo todas las condiciones de signo $\underline{\epsilon}$ recorremos todas las opciones que definen $Gr(f|_{A_i})$. Y concluimos que para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$, existe una función semi-algebraica continua $\xi_{i,j} : A_i \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$Gr(f|_{A_i}) = Gr(\xi_{i,j}).$$

Concluimos así:

Corolario 1.3.7. *Sea $S \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ un conjunto semi-algebraico y $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función semi-algebraica, entonces existe una partición finita de S en conjuntos semi-algebraicos disjuntos dos a dos:*

$$S = \bigcup_{i=1}^{r} A_i,$$

de tal modo que $f|_{A_i} : A_i \longrightarrow \mathbb{R}$ es semi-algebraica continua.

1.3.1. Dimensión de semi-algebraicos y funciones polinomiales.

De forma similar a cómo se hizo para variedades algebraicas reales damos la siguiente definición para el caso de conjuntos semi-algebraicos,

Definición 10 (**Funciones Polinomiales sobre un semi-algebraico**). *Sea $S \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ un conjunto semi-algebraico. Llamaremos función polinomial sobre S a cualquier función $\varphi : S \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que existe un polinomio $p \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ tal que*

$$\forall x \in S, \ \ \varphi(x) = p(x).$$

Al conjunto de las funciones polinomiales sobre S lo denotaremos mediante $\mathbb{R}[S]$.

Observación 1.3.8. Entre las propiedades de este anillo de funciones, se encuentran las siguientes:

i) Supongamos que $S \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ es un semi-algebraico. Entonces, $\mathbb{R}[S]$ es una $\mathbb{R}$-álgebra finitamente generada y existe un isomorfismo natural de $\mathbb{R}$-álgebras:
$$\mathbb{R}[S] \cong \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n] \,/\, I(S),$$
donde $I(S)$ es el ideal introducido en la ecuación (1.2.1) precedente. En particular, como $\overline{S}^z = V_{\mathbb{A}}(I(S))$ tenemos que $\mathbb{R}[S] = \mathbb{R}[\overline{S}^z]$, donde $\overline{S}^z$ es la clausura de S para la topología de Zariski en $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$.
ii) Si $\overline{S}^z \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ es una variedad algebraica irreducible, como $I(\overline{S}^z) = I(S)$, el anillo $\mathbb{R}[S]$ es un dominio de integridad. El recíproco también es cierto.

Definición 11 (**Dimensión de un semi-algebraico**). *Si $S \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ es un semi-algebraico, llamaremos dimensión de S a la dimensión de Krull del anillo $\mathbb{R}[S]$.*

Obviamente, se tiene que

$$\dim(S) = \dim(\overline{S}^z)$$

Pero, además, como la topología de Zariski es menos fina que la topología usual en $\mathbb{R}^n$ (i.e. los cerrados de Zariski son cerrados en $\mathbb{R}^n$) tenemos que $\overline{S} \subseteq \overline{S}^z$, con lo que $\overline{(\,\overline{S}\,)}^z \subseteq \overline{S}^z$ por cuanto $\overline{S}^z = \overline{(\,\overline{S}\,)}^z$ y los ideales satisfacen $I(S) = I(\overline{S}) = I(\overline{S}^z)$, con lo cual,

$$\dim(S) = \dim(\overline{S}) = \dim(\overline{S}^z).$$

Por otro lado, si S es un semi-algebraico cuya clausura en la topología de Zariski $\overline{S}^z$ es un irreducible, se tendrá un resultado análogo al ya discutido en la Observación 1.2.2 para variedades algebraicas y tendremos

$$\dim(S) = \mathrm{trdeg}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}(\mathrm{S}))$$

donde $\mathbb{R}(S)$ es el cuerpo de funciones racionales sobre S (i.e. el cuerpo de fracciones del dominio de integridad $\mathbb{R}[S]$).

La siguiente proposición resume algunas de las propiedades básicas de la dimensión de los conjuntos semi-algebraicos. El lector interesado podrá seguir las demostraciones en la Sección 2.8 de [**BCR, 1987**].

Proposición 1.3.9. *Con las notaciones precedentes, se tiene:*

i) *La dimensión es una función monótona creciente de los semi-algebraicos, esto es, dados dos semi-algebraicos* $S, T \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ *entonces si* $S \subseteq T$, *se tendrá* $\dim(S) \leq \dim(T)$.

ii) *La dimensión es una función subaditiva, es decir, si* $S = S_1 \cup \cdots \cup S_r$ *es una unión finita de semi-algebraicos contenidos en* $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$, *entonces*

$$\dim(S) = \max\{\dim(S_1), \ldots, \dim(S_r)\}.$$

iii) *Si* $S \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ *y* $T \subseteq \mathbb{A}^m(\mathbb{R})$ *son dos conjuntos semi-algebraicos, entonces su producto cartesiano* $S \times T$ *es también un conjunto semi-algebraico y la dimensión satisface*

$$\dim(S \times T) = \dim(S) + \dim(T).$$

iv) *La dimensión no crece al proyectar. Es decir, sea* $S \subseteq \mathbb{A}^{n+m}(\mathbb{R})$ *un conjunto semi-algebraico y sea* $\pi : \mathbb{A}^{n+m}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$, *entonces*

$$\dim(\pi(S)) \leq \dim(S).$$

En particular, si $f : D(f) \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{A}^m(\mathbb{R})$ *es una aplicación semi-algebraica, y si* $S \subseteq D(f)$ *es un conjunto semi-algebraico, entonces*

$$\dim(Gr(f)) \leq \dim(S).$$

v) *Si* U *es un abierto semi-algebraico de* $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$, *entonces* $\dim(U) = n$.

Una de las principales conclusiones que se extraen es la siguiente:

Corolario 1.3.10. *Sea* $f : D(f) \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{A}^m(\mathbb{R})$ *una aplicación semi-algebraica, entonces,*

$$\dim(Gr(f)) = \dim(D(f)).$$

Este corolario tiene una versión más general que puede ser la siguiente:

Corolario 1.3.11. *Sean* $A \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ *y* $B \subseteq \mathbb{A}^m(\mathbb{R})$ *dos conjuntos semi-algebraicos. Sea* $f : A \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{A}^m(\mathbb{R})$ *una función semi-algebraica y sea* $B = f(A)$ *la imagen en* $\mathbb{A}^m(\mathbb{R})$. *Se tiene:*

i) *El conjunto* B *es semi-algebraico.*

ii) *Si* $f : A \longrightarrow B$ *es biyectiva, la aplicación inversa* $f^{-1} : B \longrightarrow A$ *es también semi-algebraica.*

iii) *Si* $f : A \longrightarrow B$ *es biyectiva, entonces* $\dim(A) = \dim(B)$.

Junto a la versión global disponemos de una aproximación local a la dimensión. Para introducirla, consideremos $S \subseteq \mathbb{A}^m(\mathbb{R})$ un semi-algebraico y sea $p \in S$ un punto. Consideramos la siguiente familia:

$$\mathscr{F}_p = \{U \subseteq S : \ U \text{ es abierto semi} - \text{algebraico en } S \text{ para la topología inducida en S} \\ \text{por la usual de } \mathbb{R}^n, \ p \in U\}.$$

Consideramos el siguiente conjunto de ideales de $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$.

$$\mathscr{I}_p := \{I(U) : \ U \in \mathscr{F}_p\}.$$

Obviamente, S es abierto en S para la topología inducida en S por la usual de $\mathbb{R}^n$, además $p \in S$, luego $I(S) \in \mathscr{I}_p$ y $\mathscr{I}_p$ es una familia no vacía de ideales del anillo noetheriano $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$. Admitiendo el Axioma de Elección Dependiente, la familia $\mathscr{F}_p$ poseerá algún elemento minimal. Sea $U \subseteq S$ un abierto-semialgebraico en S, tal que $p \in U$ y el ideal $I(U) \in \mathscr{I}_p$ es elemento maximal en $\mathscr{I}_p$. Entonces, si $U' \subseteq U$ es otro abierto semi-algebraico es S, $p \in U'$, tendremos que $I(U) \subseteq I(U')$, pero, por ser $I(U)$ elemento maximal, concluiremos $I(U) = I(U')$. En particular, para todo $U' \subseteq U$ semi-algebraico abierto en S tal que $p \in U'$, tendremos que $\mathbb{R}[U'] = \mathbb{R}[U]$ y concretamente, $\dim(U) = \dim(U')$.

Proposición 1.3.12. *Sea* $S \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ *un conjunto semi-algebraico y sea* $p \in S$ *un punto. Entonces, existe un conjunto semi-algebraico* $U \subseteq S$ *tal que:*

i) *U es abierto para la topología usual en $\mathbb{R}^n$,*
ii) *$p \in U$*
iii) *Para cualquier otro semi-algebraico $U' \subseteq U \subseteq S$ tal que U' es abierto en S para la topología inducida por la de $\mathbb{R}^n$ tal que $p \in U$, se tiene:*

$$\dim(U) = \dim(U').$$

Más aún, dados U_1, $U_2 \subseteq S$ semi-algebraicos abiertos en S que verifiquen las propiedades i), ii) y iii) tendremos que

$$\dim(U_1) = \dim(U_2)$$

DEFINICIÓN 12. *A la cantidad* $\dim(U)$ *para cualquier semi-algebraico $U \subseteq S$ que verifica las propiedades i), ii) y iii) se la denomina dimensión local de S en p y se denota mediante* $\dim(S_p)$.

Nótese que la buena definición de $\dim(S_p)$ se sigue del siguiente argumento elemental:

De una parte, $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ porque $p \in U_1 \cap U_2$ y, por ser $U_1 \cap U_2$ semi-algebraico y abierto en S se tendrá:

$$\dim(U_1) = \dim(U_1 \cap U_2),$$
$$\dim(U_2) = \dim(U_1 \cap U_2).$$

(aplicando, repectivamente, *iii)* de la Proposición 1.3.12 anterior a U_1 y U_2) con lo que $\dim(U_1) = \dim(U_2)$.

Una propiedad adicional nos permite mostrar la coincidencia entre las dimensiones locales y globales en un semi-algebraico:

PROPOSICIÓN 1.3.13. *Sea $S \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ un conjunto semi-algebraico de dimensión d. Entonces,*

i) *El siguiente conjunto es un conjunto semi-algebraico no vacío cerrado en S.*

$$S^{(d)} := \{x \in S : \dim(S_x) = d\}.$$

ii) *En particular, se tendrá que*

$$\dim(S) = \max\{\dim(S_x) : x \in S\}.$$

Debe señalarse que, contrariamente al caso complejo, la dimensión no se preserva localmente en el caso irreducible. Una serie de ejemplos conocidos como paraguas de Cartan o Withney muestran esa variación. Así, por ejemplo, consideramos la cúbica en $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ dada por la ecuación $W := V_{\mathbb{A}}(XZ^2 - Y^2)$ y cuya representación se muestra en la Figura 1 anterior. Observamos que en W los puntos del "mango del paraguas", es decir, los puntos del conjunto

$$M := \{(x, y, z) \in W : z < 0\}$$

satisfacen que $\dim(W_p) = 1$, $\forall p \in M$. De otro lado, fuera del eje Z,

$$\mathrm{Reg}(S) := \{(x, y, z) \in W : x \neq 0 \vee y \neq 0\},$$

todos los puntos $p \in \mathrm{Reg}(S)$ satisfacen que existe un semi-algebraico $U \subseteq W$, $p \in U$, U abierto en W, tal que U es semi-algebraicamente biyectable (de hecho, difeomorfo) a un abierto de $\mathbb{R}^2$. Por tanto,

$$\dim(W_x) = 2, \quad \forall x \in \mathrm{Reg}(W).$$

Para concluir, dos propiedades más, también demostradas en [**BCR, 1987**].

PROPOSICIÓN 1.3.14. *Si $S \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ es un conjunto semi-algebraico, entonces*

$$\dim(\overline{S} \setminus S) < \dim(S),$$

donde $\overline{S}$ es la clausura de S para la topología usual de $\mathbb{R}^n$.

PROPOSICIÓN 1.3.15. *Sea $S \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ un conjunto semi-algebraico. Supongamos que S es una subvariedad $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^n$, de dimensión d. Entonces,*

$$d = \dim(S) = \dim(S_x), \quad \forall x \in S$$

Una conclusión general sobre las funciones semi-algebraicas es que estas son funciones algebraicas sobre los polinomios.

COROLARIO 1.3.16. *Sea $D(f) \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ abierto semi-algebraico y $f : D(f) \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función semi-algebraica. Entonces, existe un polinomio no nulo $p \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n][T]$ tal que*

$$p(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)) = 0, \quad \forall (x_1, \ldots, x_n) \in D(f). \tag{1.3.4}$$

Es decir, f es algebraica sobre el anillo de polinomios $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$.

Por indicar la prueba, observemos que $\dim(Gr(f)) = \dim(D(f)) = n$. Por supuesto, $Gr(f) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}(\mathbb{R})$ es un semi-algebraico de dimensión n es un espacio afín real de dimensión $n + 1$. En particular, no es posible que el siguiente ideal sea idénticamente cero

$$I(Gr(f)) = \{q \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n][T] : \ q|_{Gr(f)} \equiv 0\}.$$

En particular, existirá $p \in I(Gr(f))$ no idénticamente cero y satisface (1.3.4). El resultado también es cierto cuando $D(f)$ no es necesariamente abierto y $\dim(D(f)) < n$ utilizando argumentos similares. De hecho, se puede probar lo siguiente:

PROPOSICIÓN 1.3.17. *Sea $f : D(f) \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función semi-algebraica. Entonces, existe un polinomio $p \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}]$ tal que*

$$p = \sum_{k=0}^{t} a_k(X_1, \ldots, X_n) X_{n+1}^k$$

para algún $t \in \mathbb{N}$, con $t \geq 1$, de tal modo que

$$\overline{p} = \sum_{k=0}^{t} (a_k + I(D(f))) X_{n+1} \in \mathbb{R}[D(f)][X_{n+1}],$$

no es el polinomio idénticamente nulo y satisface

$$p(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)), \quad \forall (x_1, \ldots, x_n) \in D(f). \tag{1.3.5}$$

En otras palabras, f es algebraica sobre el anillo de funciones polinomiales sobre $D(f)$ (i.e. f es algebraica sobre $\mathbb{R}[D(f)]$).

La demostración es esencialmente la misma a la resumida anteriormente, reemplazando $\mathbb{A}^{n+1}(\mathbb{R})$ por $\overline{D(f)}^z \times \mathbb{R}$ y usando argumentos de dimensión.

1.4. El Teorema de I.S. Cohen y los anillos de funciones polinomiales y regulares cerca de un punto regular de una variedad.

El Teorema de Cohen (descrito como Corolario B.2.18 del Apéndice B) nos dice que los completados de los anillos locales regulares equicaracterísticos son series de potencias formales sobre el cuerpo residual. Este resultado fue un preludio a los teoremas de Nagata, Serre y Auslander-Buchsbaum (cf. el Trabajo de Fin de Grado [**Mantecón, 2022**]). Sin embargo, estos resultados no expresan bien la fuerza del Teorema de Cohen si no se hace una descripción "*pied à terre*", mediante su interpretación en localizaciones de K-álgebras finitamente generadas. Por eso hemos introducido esta Sección en la que se tratan de explicar con algún detalle los elementos que usaremos más adelante. Son aspectos propios del Álgebra Local y daremos una presentación meramente expositiva, (i.e. sin pruebas detalladas) usando como principales referencias [**ZarSam, 1960**], volumen 2, los apuntes [**Pardo, 2024**] y el Apéndice.

1.4.1. Recordatorio sobre series de potencias formales. Nos restringiremos a coeficientes en el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales y usaremos como principales referencias el volumen 2 de [**ZarSam, 1960**], y [**Pardo, 2024**]. Comencemos recordando la definición del anillo de series de potencias formales con coeficientes en $\mathbb{R}$ y algunos de sus principales propiedades. El conjunto subyacente al anillo de series de potencias formales en n variables es el conjunto $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^n}$ de todas las aplicaciones del monoide $(\mathbb{N}^n, +)$ en $\mathbb{R}$, esto es,

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}^n} := \left\{ f : \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{R} : \ f \text{ es aplicación} \right\}$$

Sobre el conjunto $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^n}$ podemos definir una operación suma $(+)$ y una operación producto $(\cdot)$ "coordenada a coordenada" que confieren a $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^n}$ una estructura de anillo conmutativo con unidad $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}^n}, +, \cdot)$. Pero no será esta la estructura que nos interesa. Conservaremos la aplicación $+$ y reemplazamos el producto coordenada a coordenada por una operación que llamaremos "convolución":

Dadas $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^n}$, definimos $f * g : \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ del modo siguiente para cada $\mu \in \mathbb{N}^n$:

$$f * g(\mu) := \sum_{\substack{\alpha,\, \beta \,\in\, \mathbb{N}^n \\ \alpha+\beta=\mu}} f(\alpha) \cdot g(\beta),$$

que estará bien definida porque para cada $\mu \in \mathbb{N}^n$, el conjunto $\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n : \ \alpha + \beta = \mu\}$ es un conjunto finito. La terna $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}^n}, +, *)$ es un anillo conmutativo con unidad y una $\mathbb{R}$-álgebra que denotaremos por $(\mathbb{R}[[X_1, \ldots, X_n]], +, \cdot)$ y llamaremos *anillo de series de potencias formales en* n *variables con coeficientes en* $\mathbb{R}$. Para cada $f \in \mathbb{R}[[X_1, \ldots, X_n]]$ podemos definir su soporte mediante

$$supp(f) := \big\{\mu \in \mathbb{N}^n : \ f(\mu) \neq 0\big\},$$

siendo $supp(f) = \emptyset$ si y solamente si $f \equiv 0$ es la aplicación idénticamente nula. Las "variables" son, en realidad, las series $X_i : \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas del modo siguiente:

$$X_i(\mu) := \begin{cases} 1, & \text{si } \mu = e_i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

donde los elementos e_i vienen dados por

$$e_i := (e_{i,1}, \ldots, e_{i,n}), \text{ donde } \quad e_{i_k} = \begin{cases} 1, & \text{si } k = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

De manera relativamente sencilla se prueba que todos los elementos de $\mathbb{R}[[X_1, \ldots, X_n]]$ admiten una representación de la forma

$$f = \sum_{\mu \,\in\, \mathbb{N}^n} f_\mu \, X_1^{\mu_1} \cdots X_n^{\mu_n},$$

donde $f_\mu \in \mathbb{R}$ (de hecho, f_μ es el valor $f_\mu \in \mathbb{R}$), lo que recuerda la expresión "serie de potencias formales", dado que no se han introducido nociones de convergencia. Observamos que el cuerpo $\mathbb{R}$ está identificado con las series cuyo soporte satisface $supp(f) := \{(0, \ldots, 0)\}$, excepto para el elemento 0 que se corresponde con la serie de soporte vacío. Es sencillo probar (cf. [**Pardo, 2024**]) que se verifican las siguientes propiedades:

PROPOSICIÓN 1.4.1. *Con las notaciones precedentes,* $\mathbb{R}[[X_1, \ldots, X_n]]$ *es un dominio de integridad, es un anillo local cuyo único ideal maximal es el ideal* $\widehat{\mathfrak{m}}_0$ *generado por las variables* $\{X_1, \ldots, X_n\}$*:*

$$\widehat{\mathfrak{m}}_0 = (X_1, \ldots, X_n)\mathbb{R}[[X_1, \ldots, X_n]] \tag{1.4.1}$$

Hace falta un poco más de trabajo (en esencia, los Teoremas de División y Preparación de Weierstrass, cf. Subsección B.2.2 del Apéndice B) para demostrar el resultado siguiente a la manera en que se hace en [**ZarSam, 1960**], volumen 2:

TEOREMA 1.4.2. *El anillo local* $(\mathbb{R}[[X_1, \ldots, X_n]], \widehat{\mathfrak{m}}_0)$ *es un anillo local noetheriano de dimensión (de Krull) igual a* n*. Además, por (1.4.1), es un anillo local regular y es un dominio de factorización única.*

Para cada multi-índice $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{N}^n$ definamos su grado (total) como $|\mu| = \mu_1 + \cdots + \mu_n \in \mathbb{N}$. Dada $f \in \mathbb{R}[[X_1, \ldots, X_n]] \setminus \{0\}$, definamos su orden en 0 mediante la siguiente igualdad:

$$ord_0(f) := \min\big\{|\mu| : \ \mu \in Supp(f)\big\}.$$

Para $f = 0$ se establece $ord_0(f) = +\infty$. Esta función de orden satisface las siguientes desigualdades para cualesquiera dos series de potencias formales $f, g \in \mathbb{R}[[X_1, \ldots, X_n]]$:

$$\begin{aligned} ord_0(f + g) &\geq \min\big\{ord_0(f), \ ord_0(g)\big\}, \\ ord_0(f \cdot g) &\geq ord_0(f) + ord_0(g). \end{aligned}$$

Como $(\mathbb{R}[[X_1, \ldots, X_n]], \widehat{\mathfrak{m}}_0)$ es un anillo local noetheriano, el Teorema de la Intersección de W. Krull (Teorema B.1.18) nos garantiza (vía el lema de Nakayama, Teorema B.1.21) que se tiene:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\widehat{\mathfrak{m}}_0)^n = (0).$$

En particular, la topología definida por la filtración $\widehat{\mathfrak{m}}_0$-ádica en $\mathbb{R}[[X_1,\ldots,X_n]]$ es una topología metrizable. De hecho, la métrica puede explicitarse en este caso:
Definamos $d_0 : \mathbb{R}[[X_1,\ldots,X_n]] \times \mathbb{R}[[X_1,\ldots,X_n]] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ mediante:

$$d_0(f,g) := \begin{cases} \frac{1}{e^{ord_0(f-g)}}, & \text{si } f-g\neq 0,\\ \\ 0, & \text{en otro caso,}\end{cases}$$

donde $e \in \mathbb{R}$ es el número de Euler, para cualesquiera $f,g \in \mathbb{R}[[X_1,\ldots,X_n]]$. Se observa que

$$d_0(f,g) \leq \frac{1}{e^n} \Longleftrightarrow f-g \in \widehat{\mathfrak{m}}_0^n,$$

lo que prueba que el anillo topológico $\mathbb{R}[[X_1,\ldots,X_n]]$ con la topología definida por la filtración metrizable coincide con el anillo topológico asociado al espacio métrico $(\mathbb{R}[[X_1,\ldots,X_n]],\ d_0)$. Se tiene, además, el siguiente resultado:

Teorema 1.4.3. *El anillo local regular* $(\mathbb{R}[[X_1,\ldots,X_n]],\ \widehat{\mathfrak{m}}_0)$ *es un anillo topológico metrizable y completo para la topología definida por la filtración* $\widehat{\mathfrak{m}}_0$*-ádica. Más aún, el anillo de polinomios* $\mathbb{R}[X_1,\ldots,X_n]$ *es denso en* $\mathbb{R}[[X_1,\ldots,X_n]]$ *para esa métrica.*

Una de las cualidades de este anillo $\mathbb{R}[[X_1,\ldots,X_n]]$ es su estabilidad por la aplicación *sustitución* que se describe en el Capítulo VII de [**ZarSam, 1960**], vol. 2, y que puede ser de utilidad para nuestro análisis. Supongamos $f \in \mathbb{R}[[X_1,\ldots,X_n]]$ es una serie de potencias formales. Entonces, f admite una presentación de la forma

$$f = f_0 + f_1 + \cdots + f_q + \cdots,$$

donde $f_i \in H_i(X_1,\ldots,X_n)$ es el polinomio homogéneo (de grado i o, eventualmente nulo) dado por la identidad siguiente:

$$f_i := \sum_{\substack{|\mu|=i\\ \mu\in\mathbb{N}^n}} f_\mu\, X_1^{\mu_1}\cdots X_n^{\mu_n}.$$

Se define la forma inicial de f como el polinomio homogéneo (no nulo, si $f\neq 0$)

$$init_0(f) = f_{ord_0(f)} = \sum_{|\mu|=ord_0(f)} f_\mu\, X_1^{\mu_1}\cdots X_n^{\mu_n}.$$

Sea ahora $g \in \mathbb{R}[[Y_1,\ldots,Y_m]]$ una serie de potencias formales que admite una presentación de la forma:

$$g = g_0 + \cdots + g_i + \cdots$$

con $g_i \in H_i(Y_1,\ldots,Y_m)$. Consideremos ahora una familia finita de series $f_1,\ldots,f_m \in \mathbb{R}[[X_1,\ldots,X_n]]$. Supongamos que el orden de cada f_i satisface $ord_0(f_i)\geq 1$, para $1\leq i\leq n$. Entonces, la serie

$$g_q(f_1,\ldots,f_m) \in \mathbb{R}[[X_1,\ldots,X_n]]$$

satisface (por ser g_q homogéneo de grado q) que

$$ord_0(g_q(f_1,\ldots,f_m)) \geq q.$$

En particular, la siguiente es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}[[X_1,\ldots,X_n]]$:

$$\left\{g^k(f_1,\ldots,f_m) = \sum_{i=o}^{k} g_i(f_1,\ldots,f_m) :\ k\in\mathbb{N}\right\}.$$

Como $\mathbb{R}[[X_1,\ldots,X_n]]$ es un espacio completo esta serie de Cauchy es convergente y podemos definir

$$g(f_1,\ldots,f_m) = \lim_{k\to\infty} g^k(f_1,\ldots,f_m) \in \mathbb{R}[[X_1,\ldots,X_n]]$$

Este proceso satisface las propiedades siguientes:

Teorema 1.4.4 ([**ZarSam, 1960**]). *Con las notaciones e hipótesis precedentes, si* $ord_0(f_i)\geq 1$ *para cada* i, $1\leq i\leq m$, *la siguiente aplicación es un morfismo de* $\mathbb{R}$*-álgebras y un morfismo local de anillos locales*

$$\begin{array}{rcl}\varphi : \mathbb{R}[[Y_1,\ldots,Y_m]] & \longrightarrow & \mathbb{R}[[X_1,\ldots,X_n]]\\ g & \longmapsto & g(f_1,\ldots,f_m).\end{array}$$

A la imagen de φ, que es subanillo de $\mathbb{R}[[X_1,\ldots,X_n]]$, se le denota mediante $\mathbb{R}[[f_1,\ldots,f_m]]$. Si, además, $ord_0(f_i) = 1$ para cada i, $1 \le i \le m$, y si las formas iniciales $init_0(f_i) \in \mathbb{R}[[X_1,\ldots,X_n]]$, que son aplicaciones lineales, son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$, entonces φ es un monomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras y es un isomorfismo entre los anillos locales $\mathbb{R}[[Y_1,\ldots,Y_m]]$ y $\mathbb{R}[[f_1,\ldots,f_m]]$. En el caso particular, $m = n$, φ será un automorfismo de anillos locales y de $\mathbb{R}$-álgebras. En particular, en este caso, se tendrá $\mathbb{R}[[X_1,\ldots,X_n]] = \mathbb{R}[[f_1,\ldots,f_n]]$.

Como ya hemos dicho, $(\mathbb{R}[[X_1,\ldots,X_n]],\ \widehat{\mathfrak{m}}_0)$ es un anillo local regular y su graduado asociado (véase la Subsección B.1.4 del Apéndice B) es un anillo de polinomios en n variables. De hecho,

$$G_{\widehat{\mathfrak{m}}_0}(\mathbb{R}[[X_1,\ldots,X_n]]) \cong \mathbb{R}[X_1,\ldots,X_n].$$

Además, podemos considerar el $\mathbb{R}$-espacio vectorial cociente:

$$\widehat{\mathfrak{m}}_0 / \widehat{\mathfrak{m}}_0^2 := \left\{ f + \widehat{\mathfrak{m}}_0 :\ f \in \widehat{\mathfrak{m}}_0 \right\}.$$

Nótese que si $f \in \mathbb{R}[[X_1,\ldots,X_n]]$ es tal que $ord_0(f) \ge 1$, esto es equivalente a que $f \in \widehat{\mathfrak{m}}_0$ y se verifica de modo elemental que, en este caso,

$$f + \widehat{\mathfrak{m}}_0^2 = init_0(f) + \widehat{\mathfrak{m}}_0^2.$$

También se observa que $\widehat{\mathfrak{m}}_0/\widehat{\mathfrak{m}}_0^2$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n (por ser local regular) y tenemos un isomorfismo de $\mathbb{R}$-espacios vectoriales

$$\begin{array}{rccc} (\mathbb{R}^n)^* := & \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \widehat{\mathfrak{m}}_0 / \widehat{\mathfrak{m}}_0^2 \\ & \varphi & \longmapsto & \sum_{i=1}^n a_i X_i + \widehat{\mathfrak{m}}_0^2 \end{array}$$

donde $\varphi(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ para cualquier $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$. Por tanto, la hipótesis del teorema precedente consiste en observar que las formas iniciales $init_0(f_1),\ldots,init_0(f_m)$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$ o, equivalentemente, las clases:

$$\left\{ f_1 + \widehat{\mathfrak{m}}_0^2,\ldots,f_m + \widehat{\mathfrak{m}}_0^2 \right\} \subseteq \widehat{\mathfrak{m}}_0 / \widehat{\mathfrak{m}}_0^2,$$

son linealmente independientes en el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\widehat{\mathfrak{m}}_0 / \widehat{\mathfrak{m}}_0^2$. En particular, como $(\mathbb{R}[[X_1,\ldots,X_n]],\ \widehat{\mathfrak{m}}_0)$ es un anillo local regular, la hipótesis del Teorema 1.4.4 precedente puede sustituirse por "$\{f_1,\ldots,f_m\}$ forman parte de un sistema regular de parámetros del anillo local regular $(\mathbb{R}[[X_1,\ldots,X_n]],\ \widehat{\mathfrak{m}}_0)$", y las tesis se siguen de manera inmediata (ver Proposición B.2.13 del Apéndice B). En particular, si $\{f_1,\ldots,f_m\}$ forman parte de un sistema regular de parámetros de $(\mathbb{R}[[X_1,\ldots,X_n]],\ \widehat{\mathfrak{m}}_0)$ entonces el anillo $\mathbb{R}[[f_1,\ldots,f_m]]$ es un anillo de series de potencias formales (isomorfo a $\mathbb{R}[[Y_1,\ldots,Y_m]]$ para unas variables $\{Y_1,\ldots,Y_m\}$) y si $m = n$, entonces $\mathbb{R}[[f_1,\ldots,f_n]] = \mathbb{R}[[X_1,\ldots,X_n]]$.

Para entender estas reflexiones, consideremos el anillo de polinomios $\mathbb{R}[X_1,\ldots,X_n]$ y su ideal maximal asociado al punto $\underline{0} \in \mathbb{R}^n$, $\widetilde{\mathfrak{m}}_0 = (X_1,\ldots,X_n)$. Consideremos la localización de $\mathbb{R}[X_1,\ldots,X_n]$ por $\mathfrak{m}_0$ y tenemos la siguiente cadena de contenidos:

$$\mathbb{R}[X_1,\ldots,X_n] \subseteq \mathbb{R}[X_1,\ldots,X_n]_{\widetilde{\mathfrak{m}}_0} \subseteq \mathbb{R}[[X_1,\ldots,X_n]]. \tag{1.4.2}$$

La primera es clara a partir de la noción de localización. Ahora bien, para la segunda, si $q \in \mathbb{R}[X_1,\ldots,X_n]$ es tal que $q(0) \neq 0$, entonces, como serie, satisface que $ord_0(q) = 0$. Esto significa que $q \notin \widehat{\mathfrak{m}}_0$ y, por tanto, $1/q \in \mathbb{R}[[X_1,\ldots,X_n]]$ existe y es una serie de potencias formales. Dado que los elementos de $\mathbb{R}[X_1,\ldots,X_n]_{\widetilde{\mathfrak{m}}_0}$ son de la forma p/q con $q,p \in \mathbb{R}[X_1,\ldots,X_n]$ y $q(0) \neq 0$, tenemos la inclusión segunda de (1.4.2).

En ocasiones, nos interesará saber que no sólo la cadena de inclusiones de (1.4.2) se satisface sino también la forma en la que se representan los coeficientes (como serie) de esas inclusiones. Es claro que si $p \in \mathbb{R}[X_1,\ldots,X_n]$ se tiene:

$$p = \sum_{|\mu|\le d} \frac{1}{\mu!}\, \frac{\partial^\mu p}{\partial X_1^{\mu_1}\cdots\partial X_n^{\mu_n}}(0)\, X_1^{\mu_1}\cdots X_n^{\mu_n}, \tag{1.4.3}$$

donde $d = deg(p) = \max(supp(p))$ es el grado total de p y, para $\mu = (\mu_1,\ldots,\mu_n) \in \mathbb{N}^n$, definimos $\mu! = \mu_1!\cdots\mu_n!$. La segunda expresión en la igualdad (1.4.3) anterior se denomina expansión de Taylor de p en $\underline{0}$ y se denota mediante $\tau_0(p)$. Del mismo modo, dado un cociente p/q de dos funciones polinomiales, $q, p \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$, tales que $q(0) \neq 0$, podemos definir el desarrollo de Taylor de p/q en 0 como la serie

$$\tau_0(p/q) := \sum_{\mu \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{\mu!} \frac{\partial^\mu (p/q)}{\partial X_1^{\mu_1} \cdots \partial X_n^{\mu_n}}(0)\, X_1^{\mu_1} \cdots X_n^{\mu_n}.$$

Se verifica la siguiente propiedad cuya prueba se encuentra en [**ZarSam, 1960**].

PROPOSICIÓN 1.4.5. *Con las notaciones precedentes, la siguiente aplicación es la inclusión de* $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]_{\widetilde{\mathfrak{m}}_0}$ *en* $\mathbb{R}[[X_1, \dots, X_n]]$*:*

$$\begin{array}{rcl} \tau_0 : \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]_{\widetilde{\mathfrak{m}}_0} & \hookrightarrow & \mathbb{R}[[X_1, \dots, X_n]] \\ p/q & \longmapsto & \tau_0(p/q). \end{array}$$

1.4.2. El caso de series en un punto distinto del origen. En todas las disquisiciones de la subsección precedente hemos supuesto, sin destacarlo, que estábamos considerando el origen $\underline{0} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ como punto del estudio local. Pero igualmente podriamos haberlo hecho en cualquier otro punto $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ del espacio afin real. Cuando se trata de un estudio local alrededor de cualquier otro punto $p \in \mathbb{R}^n$ el anillo de series formales $\mathbb{R}[[X_1, \dots, X_n]]$ se reemplaza por su imagen isomorfa $\mathbb{R}[[X_1 - p_1, \dots, X_n - p_n]]$. El isomorfismo es el obvio pero, por ser explícitos, se trata de la identificación formal

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R}[[X_1, \dots, X_n]] & \longrightarrow & \mathbb{R}[[X_1 - p_1, \dots, X_n - p_n]] \\ f = \displaystyle\sum_{\mu \in \mathbb{N}^n} f_\mu\, X_1^{\mu_1} \cdots X_n^{\mu_n} & \longmapsto & \varphi(f) = \displaystyle\sum_{\mu \in \mathbb{N}^n} f_\mu (X_1 - p_1)^{\mu_1} \cdots (X_n - p_n)^{\mu_n} \end{array}$$

Esta identificación es un isomorfismo de anillos locales, un isomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras y el ideal maximal $\widehat{\mathfrak{m}}_0$ pasa a estar generado por una familia distinta:

$$\widehat{\mathfrak{m}}_p = \varphi(\widehat{\mathfrak{m}}_0) = (X_1 - p_1, \dots, X_n - p_n)\mathbb{R}[[X_1 - p_1, \dots, X_n - p_n]]$$

Nótese que no es la operación sustitución sino una mera reescritura del mismo anillo. En todo caso, y para poder usarlo con comodidad consideremos sus principales propiedades:

COROLARIO 1.4.6. *Dado* $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ *y el anillo de series de potencias formales en* p, $\mathbb{R}[[X_1 - p_1, \dots, X_n - p_n]]$*, se verifica:*

i) $(\mathbb{R}[[X_1 - p_1, \dots, X_n - p_n]], \widehat{\mathfrak{m}}_p)$ *es un anillo local noetheriano de dimensión n cuyo único maximal es el generado por los polinomios* $\{X_1 - p_1, \dots, X_n - p_n\}$*.*

ii) $(\mathbb{R}[[X_1 - p_1, \dots, X_n - p_n]], \widehat{\mathfrak{m}}_p)$ *es un anillo local regular y* $\{X_1 - p_1, \dots, X_n - p_n\}$ *forman un sistema regular de parámetros.*

iii) $\mathbb{R}[[X_1 - p_1, \dots, X_n - p_n]]$ *es un dominio de factorización única.*

La principal diferencia se comienza observando en la manera en que los polinomios son visualizados como series en $\mathbb{R}[[X_1 - p_1, \dots, X_n - p_n]]$. Para ello, sea $f \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ y asociamos a f su desarrollo de Taylor en el punto p:

$$\tau_p(f) := \sum_{|\mu| \leq d} \frac{1}{\mu!} \frac{\partial^{|\mu|}}{\partial X_1^{\mu_1} \cdots \partial X_n^{\mu_n}}(p)\, (X_1 - p_1)^{\mu_1} \cdots (X_n - p_n)^{\mu_n}.$$

A $\tau_p(f)$ lo denominaremos desarrollo de Taylor en el punto p. Observemos que el siguiente conjunto es una base de $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial:

$$\left\{(X_1 - p_1)^{\mu_1} \cdots (X_n - p_n)^{\mu_n} : \ \mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{N}^n\right\}.$$

En particular, tenemos la identidad $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n] \cong \mathbb{R}[X_1 - p_1, \dots, X_n - p_n]$, donde el segundo es visto como el subanillo de $\mathbb{R}[[X_1 - p_1, \dots, X_n - p_n]]$ con soporte finito en p. Tenemos un monomorfismo de anillos y de $\mathbb{R}$-álgebras:

$$\begin{array}{rcl} \tau_p : \ \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X_1 - p_1, \dots, X_n - p_n] \\ f & \longmapsto & \tau_p(f), \end{array}$$

cuya imagen es, justamente $\mathbb{R}[X_1 - p_1, \ldots, X_n - p_n]$, o si se prefiere, $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ es visto como subanillo de $\mathbb{R}[[X_1 - p_1, \ldots, X_n - p_n]]$. Para una serie de potencias formales $f \in \mathbb{R}[[X_1 - p_1, \ldots, X_n - p_n]]$, se cosidera su soporte en el punto $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ mediante

$$supp_p(f) = \{\mu \in \mathbb{N}^n : \ f_\mu \neq 0\},$$

donde f tiene la presentación, cerca del punto p, mediante la expresión formal:

$$f = \sum_{\mu \in \mathbb{N}^n} f_\mu \, (X_1 - p_1)^{\mu_1} \cdots (X_n - p_n)^{\mu_n} = \tau_p(\sum_{\mu \in \mathbb{N}^n} f_\mu \, X_1^{\mu_1} \cdots X_n^{\mu_n})$$

A partir del soporte en p tenemos también la noción de orden en p de la serie $f \in \mathbb{R}[[X_1 - p_1, \ldots, X_n - p_n]]$:

$$ord_p(f) := \min\{|\mu| : \ \mu \in supp_p(f)\}.$$

Y tenemos también inducida una métrica en p; $d_p : \mathbb{R}[[X_1 - p_1, \ldots, X_n - p_n]] \times \mathbb{R}[[X_1 - p_1, \ldots, X_n - p_n]] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ dada mediante:

$$d_p(f,g) := \begin{cases} \frac{1}{e^{ord_p(f-g)}}, & \text{si } f - g \neq 0, \\ \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

Se tiene así la versión cerca del punto p del Teorema 1.4.3.

Corolario 1.4.7. *Dado un punto $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$, el anillo $\mathbb{R}[[X_1 - p_1, \ldots, X_n - p_n]]$ es un anillo topológico metrizable. La métrica asociada a la filtración $\widehat{\mathfrak{m}}_p$ es la métrica d_p indicada anteriormente y el anillo $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ es denso en $\mathbb{R}[[X_1 - p_1, \ldots, X_n - p_n]]$.*

Más aún, cambiando apropiadamente los elementos tenemos una manera de introducir las funciones racionales definidas en un entorno de un punto, dentro del anillo de series de $\mathbb{R}[[X_1 - p_1, \ldots, X_n - p_n]]$. Usando las notaciones anteriores, consideramos el siguiente ideal maximal en $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$

$$\widetilde{\mathfrak{m}}_p := (X_1 - p_1, \ldots, X_n - p_n).$$

Y consideremos la localización $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]_{\widetilde{\mathfrak{m}}_p}$. De nuevo, tenemos la cadena de inclusiones

$$\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n] \subseteq \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]_{\widetilde{\mathfrak{m}}_p} \subseteq \mathbb{R}[[X_1 - p_1, \ldots, X_n - p_n]].$$

Además, la identificación de $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]_{\widetilde{\mathfrak{m}}_p}$ con la serie correspondiente en $\mathbb{R}[[X_1 - p_1, \ldots, X_n - p_n]]$ se hace a través del desarrollo de Taylor en el punto p. Es decir, dadas $f, g \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ dos polinomios con $g(p) \neq 0$, definamos el desarrollo de Taylor de $f/g \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ en $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ mediante:

$$\tau_p(f/g) := \sum_{\mu \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{\mu!} \, \frac{\partial^\mu (f/g)}{\partial X_1^{\mu_1} \cdots \partial X_n^{\mu_n}}(p) \, (X_1 - p_1)^{\mu_1} \cdots (X_n - p_n)^{\mu_n},$$

y se tiene que $\tau_p : \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]_{\widetilde{\mathfrak{m}}_p} \hookrightarrow \mathbb{R}[[X_1 - p_1, \ldots, X_n - p_n]]$ es la inclusión natural y τ_p describe los coeficientes de cada elemento f/g en $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]_{\widetilde{\mathfrak{m}}_p}$ mediante sus coeficientes en su expansión como serie localmente descrita alrededor de p. Más aún, como $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]_{\widetilde{\mathfrak{m}}_p}$ es un anillo local regular de dimensión n, su completado con respecto a la filtración $\widetilde{\mathfrak{m}}_p$-ádica es precisamente $\mathbb{R}[[X_1 - p_1, \ldots, X_n - p_n]]$. Es decir se tiene

i) $\mathbb{R}[\widehat{X_1, \ldots,} X_n]_{\widetilde{\mathfrak{m}}_p} = \mathbb{R}[[X_1 - p_1, \ldots, X_n - p_n]]$

ii) $\widetilde{\mathfrak{m}}_p \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]_{\mathfrak{m}_p}$ es denso en $\widehat{\widetilde{\mathfrak{m}}}_p$ y lo genera como ideal, esto es,

$$\widehat{\widetilde{\mathfrak{m}}}_p = \widetilde{\mathfrak{m}}_p \mathbb{R}[[X_1, \ldots, X_n]].$$

iii) El conjunto $\{X_1 - p_1, \ldots, X_n - p_n\}$ es, a la vez, un sistema regular de parámetros de $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]_{\widetilde{\mathfrak{m}}_p}$ y del anillo local regular $\mathbb{R}[[X_1 - p_1, \ldots, X_n - p_n]]$.

1.4.3. Completados de anillos locales de funciones polinomiales y regulares alrededor de un punto regular (o liso). Consideremos ahora la situación que usaremos en las páginas que siguen. Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ una variedad algebraica real de dimensión d y sean $\mathbb{R}[V]$ y $\mathcal{R}(V)$, respectivamente, los anillos de funciones polinomiales y funciones regulares sobre V. Supongamos adicionalmente, en esta subsección, que $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ es una variedad irreducible (en particular, $\mathbb{R}[V]$ y $\mathcal{R}(V)$ son dominios de integridad). Sea $p = (p_1, \ldots, p_n) \in V$ un punto y $\widetilde{\mathfrak{m}}_p$ el ideal de $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ tal y como se definió en (1.2.6). Consideramos, además, los anillos de funciones polinomiales y regulares localizados en un punto, $\mathbb{R}[V]_p$ y $\mathcal{R}(V)_p$ tal y como se definieron en la Subsección (1.2.3) precedente. Supongamos ahora que $p \in V$ es un punto liso (o regular) de la variedad V. Por el ítem v) de la Observación 1.2.13 precedente) esto es equivalente a afirmar de $\mathcal{R}(V)_p = \mathbb{R}[V]_p$ es un anillo local regular de dimensión $d = \dim(V)$. Por tanto, también es local regular el anillo cociente

$$\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]_{\widetilde{\mathfrak{m}}_p} \big/ I(V)^e.$$

donde, utilizando notaciones anteriores, $I(V)^e$ es la extensión a $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]_{\widetilde{\mathfrak{m}}_p}$ del ideal de los polinomios que se anulan en V. Como $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]_{\widetilde{\mathfrak{m}}_p}$ es un anillo local regular de dimensión n, existirá (por la Proposición B.2.13 del Apéndice B.2.3) un sistema regular de parámetros $\{f_1, \ldots, f_n\}$ de $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]_{\widetilde{\mathfrak{m}}_p}$ tal que $\{f_{d+1}, \ldots, f_n\}$ generan el ideal $I(V)^e$ en $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]_{\widetilde{\mathfrak{m}}_p}$. Pasando al completado, tendremos un morfismo de anillos:

$$\mathcal{R}(V)_p \hookrightarrow \widehat{\mathcal{R}(V)}_p \cong \mathbb{R}[[f_1, \ldots, f_n]] \big/ (f_{d+1}, \ldots, f_n) \cong \mathbb{R}[[f_1, \ldots, f_d]], \tag{1.4.4}$$

y $\mathcal{R}(V)_p$ será denso en $\mathbb{R}[[f_1, \ldots, f_d]]$. Llamaremos desarrollo de Taylor de un elemento $\varphi \in \mathcal{R}(V)_p$ con respecto al sistema regular de parámetros $\{f_1, \ldots, f_d\}$ de $\widehat{\mathcal{R}(V)}_p$ a la imagen de φ por esta inclusión. Además, por ser $\{f_1, \ldots, f_n\}$ sistema regular de parámetros de $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]_{\widetilde{\mathfrak{m}}_p}$ sus clases módulo $\widetilde{\mathfrak{m}}_p^2$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$.

$$\left\{f_1 + \widetilde{\mathfrak{m}}_p^2, \ldots, f_n + \widetilde{\mathfrak{m}}_p^2\right\} \subseteq \widetilde{\mathfrak{m}}_p \big/ \widetilde{\mathfrak{m}}_p^2.$$

Más aún, como el graduado asociado es invariante por paso al completado (ver Corolario B.1.28 del Apéndice B.1.7), tendremos que $\{f_1, \ldots, f_n\}$ es un sistema regular de parámetros de $\mathbb{R}[[X_1 - p_1, \ldots, X_n - p_n]]$, y se tiene la independencia lineal (con coeficientes en $\mathbb{R}$) de las clases

$$\left\{f_1 + \widehat{\mathfrak{m}}_p^2, \ldots, f_n + \widehat{\mathfrak{m}}_p^2\right\} \subseteq \widehat{\mathfrak{m}}_p \big/ \widehat{\mathfrak{m}}_p^2 \cong \widetilde{\mathfrak{m}}_p \big/ \widetilde{\mathfrak{m}}_p^2.$$

Estamos en las hipótesis del proceso de sustitución descrito en la Subsección 1.4.1 precedente, por cuanto, $\mathbb{R}[[f_1, \ldots, f_d]]$ es un anillo de series de potencias formales (isomorfo a $\mathbb{R}[[Y_1, \ldots, Y_d]]$) y $\mathbb{R}[[f_1, \ldots, f_n]] = \mathbb{R}[[X_1 - p_1, \ldots, X_n - p_n]]$. La serie de Taylor en p con respecto a $\{f_1, \ldots, f_d\}$ de un elemento $\varphi \in \mathcal{R}(V)_p$ será la expresión de φ como elemento de $\mathbb{R}[[f_1, \ldots, f_d]]$, es decir,

$$\tau_p^{(f)}(\varphi) := \sum_{\mu \in \mathbb{N}} a_\mu \, f_1^{\mu_1} \cdots f_d^{\mu_n}.$$

CAPíTULO 2

Funciones de Nash.

2.1. Introducción.

En este capítulo pretendemos probar la equivalencia entre dos nociones de funciones de Nash: las funciones analíticas reales que son algebraicas sobre el anillo de polinomios y las funciones semi-algebraicas de clase $\mathscr{C}^\infty$. Aunque hay otras formas de presentar esa equivalencia hemos preferido la presentación del Capítulo 8 de [**BCR, 1987**] por más que sea ligeramente elíptica. La razón para esos rodeos en [**BCR, 1987**] pasa por considerar el caso de cuerpos realmente cerrados que no nos interesa tanto en este Trabajo de Fin de Grado. En primer lugar se comenzará con un estudio técnico de los morfismos regulares $f : V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R}) \to W \subseteq \mathbb{A}^m(\mathbb{R})$, entre dos variedades algebraicas reales, que son "étales" en un punto regular $p \in V$. Es decir, morfismos tales que la aplicación entre los espacios tangentes ("à la Zariski") $T_pf : T_pV \to T_{f(p)}W$ es un isomorfismo entre espacios vectoriales reales (ver Definición 13 para los detalles). Caracterizaremos las funciones regulares étales en $p \in V$ a través del natural Teorema de la Función Inversa (cf. Proposición 2.2.1) y de su dual entre los anillos locales regulares $\mathcal{R}(V)_p$ y $\mathcal{R}(W)_{f(p)}$, así como su paso a los respectivos completados (ver proposiciones 2.2.2 y 2.2.3). Valiéndonos de dicho estudio preliminar elemental, se prueba, con detalle, la versión local del Teorema de Artin-Mazur (ver Teorema 2.2.5). Finalmente, en la Subsección 2.3 probamos la equivalencia entre las funciones analítico-algebraicas y las funciones semi-algebraicas de clase $\mathscr{C}^\infty$. Una de las implicaciones reposa en nuestro Teorema de Artin-Mazur local, mientras que el recíproco reposa, entre otras cosas, en el "salchichonaje" de semi-algebraicos descrito en el Capítulo 1.

2.2. Morfismos "étales" entre variedades algebraicas reales.

Definición 13. *Sean $V \subseteq \mathbb{R}^n$ y $W \subseteq \mathbb{R}^m$ dos variedades algebraicas reales y sea $f : V \longrightarrow W$ un morfismo regular entre ambas. Sea $p \in V$ un punto regular de V y supongamos que $f(p) \in W$ es también un punto de regular. Consideremos la aplicación definida a partir de f y p, en los respectivos espacios tangentes:*

$$T_pf : T_pV \longrightarrow T_{f(p)}W.$$

Diremos que f es "étale"[1] *en $p \in V$ si T_pf es un isomorfismo de espacios vectoriales reales.*

Proposición 2.2.1. *Sean $V \subseteq \mathbb{R}^n$ y $W \subseteq \mathbb{R}^m$ dos variedades algebraicas reales y $f : V \longrightarrow W$ un morfismo regular entre ambos. Sea $p \in V$ un punto regular tal que su imagen $f(p) \in W$ es un punto regular. Supongamos que f es "étale" en $p \in V$. Entonces, existen abiertos semi-algebraicos $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y $U' \subseteq \mathbb{R}^m$ tales que $p \in U$, $f(p) \in U'$ y la función*

$$f|_{U\cap V} : U \cap V \longrightarrow U' \cap W,$$

es un difeomorfismo semi-algebraico, es decir, existe $g : U' \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función de clase $\mathscr{C}^\infty$ tal que $g|_{U'\cap W}$ es semi-algebraica y

$$\left(g|_{U'\cap W}\right) = \left(f|_{U\cap V}\right)^{-1}.$$

[1] El término francés "étale" es una palabra introducida por A. Grothendieck en su serie de EGA's (*Éléments de géométrie algébrique*), en concreto en la "Parte primera" del volumen EGA IV de 1964. Es un término que admite diversas traducciones a diversos idiomas y que tiene un origen esencialmente literario. Suele referirse a una marea en fase estacionaria (o estabilizada) antes o después de que la mar suba. En general, se dice de aquello que no se mueve y permanece quieto o calmado. Tal exceso literario ha conducido a términos como "*stack*", pila en inglés; aunque los geómetras algebraicos anglosajones, italianos y franceses mantienen la palabra "étale" en honor a Grothendieck. Aquí hemos mantenido ese homenaje a Grothendieck aunque, en realidad, como se observa, nos referimos a un "difeomorfismo local". Esperamos que el lector acepte nuestra decisión puramente estética.

Demostración. Se trata solamente de hacer semi-algebraico el Teorema de la Inversión Local (ver Teorema B.2.1 del Apéndice B.2.1). Para ello, comencemos observando (ver ítem v de la Observación 1.2.13 precedente) que si p es un punto regular de V y $f(p)$, es un punto regular de V, entonces V y W son, respectivamente, localmente en las cercanías de p y $f(p)$, subvariedades diferenciables (de clase $\mathscr{C}^\infty$) de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$. En otras palabras, existen $U_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ y $U_0' \subseteq \mathbb{R}^m$ dos abiertos en la topología usual tales que $p \in U_0$ y $f(p) \in U_0'$ y se tiene:

- $U_0 \cap V$ es subvariedad $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^n$,
- $U_0' \cap W$ es subvariedad $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^m$.

Como las bolas con respecto a la norma euclidea son semi-algebraicos y como f es continua por ser morfismo regular, podemos suponer que $U_0' \subseteq \mathbb{R}^m$ es un semi-algebraico y que $U_0 \cap V \subseteq f^{-1}(U_0' \cap W)$. Es decir, tenemos una función de clase $\mathscr{C}^\infty$ entre dos subvariedades diferenciables reales de clase $\mathscr{C}^\infty$:

$$f|_{U_0\cap V} : U_0 \cap V \longrightarrow U_0' \cap W.$$

Además, como los espacios tangentes son nociones locales, por definición, tenemos la situación siguiente en relación con la aplicación tangente T_pf:

$$T_pf = T_p(f|_{U_0\cap V}) : T_p(U_0 \cap V) = T_pV \longrightarrow T_{f(p)}(U_0' \cap W) = T_{f(p)}W.$$

Es decir, $f|_{U_0\cap V}$ es una aplicación de clase $\mathscr{C}^\infty$ entre dos subvariedades (de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$) de clase $\mathscr{C}^\infty$ tales que T_pf es un isomorfismo. Aplicando el Teorema de Inversión Local (ver Teorema B.2.1 del Apéndice B.2.1), existen

- $U_1 \subseteq \mathbb{R}^n$, $U_1' \subseteq \mathbb{R}^m$ dos abiertos en los respectivos espacios euclídeos.
- $g_1 : U_1' \longrightarrow U_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ una función de clase $\mathscr{C}^\infty$.

tales que

- $p \in U_1,\ f(p) \in U_1'$,
- $(g_1|_{U_1'\cap W})$ es la inversa de $(f|_{U_1\cap V})$ en los lugares en que ambas están definidas.

Para concluir el enunciado, consideremos $U' \subseteq U_1'$ un abierto semi-algebraico, tal que $f(p) \in U'$ y sea $g := g_1|_{U'} : U' \longrightarrow \mathbb{R}^n$ la función de clase $\mathscr{C}^\infty$ en U' dada mediante la restricción de g_1. Como U' es semi-algebraico y Wes algebraico su intersección $U' \cap W$ es semi-algebraico. Como f es un morfismo regular, f es una función semi-algebraica. Por otro lado, por el Principio de Tarski (ver Teorema 1.3.5) la imagen inversa $f^{-1}(U' \cap W)$ es un abierto (por ser f continua) semi-algebraico de V.

$$f^{-1}(U' \cap W) = \{x \in V :\ \exists y \in \mathbb{R}^m,\ y - f(x) = 0,\ y \in U' \cap W\}.$$

Por tanto, existirá un abierto semi-algebraico $U \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $f^{-1}(U' \cap W) = U \cap V$. El resto de las afirmaciones se siguen del Teorema de Inversión Local, esto es,

$$\left(f|_{U\cap V}\right)^{-1} = \left(g_1|_{U'\cap W}\right) = \left(g|_{U'\cap W}\right).$$

□

Consideremos ahora los respectivos espacios duales de los espacios tangentes, es decir, sean

$$(T_pV)^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(T_pV, \mathbb{R}),$$
$$(T_{f(p)}W)^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(T_{f(p)}W, \mathbb{R}).$$

La aplicación tangente define, por dualización, una aplicación dual sobre los espacios vectoriales duales:

$$\begin{aligned} (T_pf)^* : (T_{f(p)}W)^* &\longrightarrow (T_pV)^* \\ \varphi \quad &\longmapsto \varphi \circ T_pf. \end{aligned}$$

Recuérdese de los cursos básicos de Álgebra Lineal que, siendo todos ellos $\mathbb{R}$-espacios vectoriales de dimensión finita, T_pf es un isomorfismo de $\mathbb{R}$-espacios vectoriales si y solamente si $(T_pf)^*$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Como se observa en la Subsección 1.2.3 precedente, los duales de los espacios tangentes a una variedad algebraica real pueden también caracterizarse mediante los ideales maximales de $\mathcal{R}(V)_p$ y $\mathcal{R}(W)_{f(p)}$ respectivamente. Hagamos una descripción para $(T_pV)^*$ e igualmente se hará para $T_{f(p)}W$. Consideremos $\overline{\mathfrak{m}}_p$ en $\mathcal{R}(V)_p$, $\varphi \in \overline{\mathfrak{m}_p}$ un morfismo regular y $\nabla_p\varphi$ su gradiente en p. Tal y como se vio en la demostración de la Proposición 1.2.11 precedente, la siguiente aplicación

$$\begin{array}{rccc} \nabla_p\varphi|_{T_pV}: & T_pV & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & v & \longmapsto & \langle \nabla_p\varphi, v\rangle \end{array}$$

es una aplicación lineal sobre el espacio tangente T_pV, es decir, $\nabla_p\varphi|_{T_pV} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(T_pV, \mathbb{R}) = (T_pV)^*$ y la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \nabla_p: & {\overline{\mathfrak{m}}_p}/{\overline{\mathfrak{m}}_p^2} & \longrightarrow & (T_pV)^* \\ & \varphi & \longmapsto & \nabla_p\varphi|_{T_pV} \end{array}$$

es un isomorfismo de $\mathbb{R}$-módulos.
Por otro lado, retomemos nuestro morfismo regular $f = (f_1, \ldots, f_m) : V \longrightarrow W$ y consideremos la siguiente aplicación

$$\begin{array}{rccc} (f^*)_p: & \mathcal{R}(W)_{f(p)} & \longrightarrow & \mathcal{R}(V)_p \\ & \varphi & \longmapsto & \varphi \circ f \end{array}$$

En primer lugar, veamos que está bien definido. Si $\varphi \in \mathcal{R}(W)_{f(p)}$, existen dos funciones polinomiales $h_1, h_2 \in \mathbb{R}[W]$ tales que $h_2(f(p)) \neq 0$. Entonces,

$$\varphi \circ f = \frac{(h_1 \circ f)}{(h_2 \circ f)}$$

Con $h_1 \circ f$, $h_2 \circ f \in \mathcal{R}(V)$ son dos morfismos regulares sobre V y, además, $(h_2 \circ f)(p) = h_2(f(p)) \neq 0$. Por tanto, $h_1 \circ f/h_2 \circ f \in \mathcal{R}(V)_p$ y $(f^*)_p$ está bien definido. Tenemos así el siguiente resultado clave para lo que sigue:

Proposición 2.2.2. *Con las notaciones precedentes, se verifica:*

i) $(f^*)_p : \mathcal{R}(W)_{f(p)} \longrightarrow \mathcal{R}(V)_p$ *es un morfismo local de* $\mathbb{R}$*-álgebras que son anillos locales noetherianos.*

ii) $(f^*)_p$ *es uniformemente continua para las respectivas topologías* $\overline{\mathfrak{m}}_p$*-ádicas y* $\overline{\mathfrak{n}}_{f(p)}$*-ádicas. Por tanto, admite extensión a los respectivos completados*

$$\widehat{(f^*)}_p : \widehat{\mathcal{R}(W)}_{f(p)} \longrightarrow \widehat{\mathcal{R}(V)}_p,$$

iii) La restricción

$$\begin{array}{rccc} (f^*)_p|_{\overline{\mathfrak{n}}_{f(p)}}: & \overline{\mathfrak{n}}_{f(p)} & \longrightarrow & \overline{\mathfrak{m}}_p \\ & h & \longmapsto & h \circ f \end{array}$$

define una aplicación lineal entre los siguientes espacios vectoriales

$$\widetilde{(f^*)}_p : {\overline{\mathfrak{n}}_{f(p)}}/{\overline{\mathfrak{n}}_{f(p)}^2} \longrightarrow {\overline{\mathfrak{m}}_p}/{\overline{\mathfrak{m}}_p^2}$$

que hace que el siguiente diagrama sea conmutativo:

(2.2.1)
$$\begin{tikzcd} {\overline{\mathfrak{n}}_{f(p)}}/{\overline{\mathfrak{n}}_{f(p)}^2} \arrow[r, "\widetilde{(f^*)}_p"] \arrow[d, "\nabla_{f(p)}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & {\overline{\mathfrak{m}}_p}/{\overline{\mathfrak{m}}_p^2} \arrow[d, "\nabla_p"] \\ (T_{f(p)}W)^* \arrow[r, "(T_pf)^*"'] & (T_pV)^* \end{tikzcd}$$

Demostración. Es un sencillo ejercicio de verificación a partir de todas las definiciones hechas y la regla de la cadena. □

A partir de las disquisiciones precedentes tenemos la siguiente caracterización de los morfismos “étales” entre dos variedades algebraicas reales irreducibles.

Proposición 2.2.3. *Sean* $V \subseteq \mathbb{R}^n$ *y* $W \subseteq \mathbb{R}^m$ *dos variedades algebraicas reales irreducibles y* $f : V \longrightarrow W$ *un morfismo regular. Sea* $p \in V$ *un punto y* $f(p) \in W$*. Supongamos que* $f(p)$ *es un punto liso (regular) en* W*. Entonces, son equivalentes:*

i) $p \in V$ *es un punto liso (regular) en* V *y* f *es “étale” en* p*.*

ii) El homomorfismo

$$\widehat{(f^*)}_p : \widehat{\mathcal{R}(W)}_{f(p)} \longrightarrow \widehat{\mathcal{R}(V)}_p$$

inducido por $(f^*)_p$ *entre los completados es un isomorfismo de anillos locales completos y* $\mathbb{R}$*-álgebras.*

Demostración. Veamos cada implicación separadamente:
ii) $\Rightarrow$ *i)*: Como $f(p) \in W$ es un punto regular y $\mathcal{R}(W)_{f(p)}$ es un anillo local regular y una $\mathbb{R}$-álgebra, cuyo cuerpo residual es $\mathbb{R}$, entonces es un anillo local equi-característico y, por el Teorema de Cohen (ver Corolario B.2.18) su completado es un anillo de series de potencias formales y, en particular, su completado es un anillo local regular. Además, tenemos que los siguientes anillos graduados, cuerpos y $\mathbb{R}$-espacios vectoriales son isomorfos:

$$G_{\widehat{\overline{\mathfrak{m}}}_p}(\widehat{\mathcal{R}(V)}_p) \cong G_{\overline{\mathfrak{m}}_p}(\mathcal{R}(V)_p)$$

$$\widehat{\mathcal{R}(V)}_p \big/ \widehat{\overline{\mathfrak{m}}}_p \cong \mathcal{R}(V)_p \big/ \overline{\mathfrak{m}}_p \cong \mathbb{R}$$

$$\widehat{\overline{\mathfrak{m}}}_p \big/ (\widehat{\overline{\mathfrak{m}}}_p)^2 \cong \overline{\mathfrak{m}}_p \big/ \overline{\mathfrak{m}}_p^2$$

En particular, como $\widehat{\mathcal{R}(V)}_p$ es un anillo local regular su graduado asociado es un anillo de polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$ y así ocurre con $G_{\overline{\mathfrak{m}}_p}(\mathcal{R}(V)_p)$. Por tanto, $\mathcal{R}(V)_p$ es un anillo local regular y $p \in V$ es un punto regular (véase Teorema B.2.10). Más aún como $\widehat{(f^*)}_p$ es un isomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras, también tendremos un isomorfismo de espacios vectoriales

$$\widetilde{\widehat{(f^*)}}_p : \widehat{\overline{\mathfrak{n}}}_{f(p)} \big/ (\widehat{\overline{\mathfrak{n}}}_{f(p)})^2 \longrightarrow \widehat{\overline{\mathfrak{m}}}_p \big/ (\widehat{\overline{\mathfrak{m}}}_p)^2$$

Como se tiene (por paso al completado) que

$$\widehat{\overline{\mathfrak{n}}}_{f(p)} \big/ (\widehat{\overline{\mathfrak{n}}}_{f(p)})^2 \cong \overline{\mathfrak{n}}_{f(p)} \big/ (\overline{\mathfrak{n}}_{f(p)})^2$$

Tenemos un isomorfismo de $\mathbb{R}$-espacios vectoriales

$$\widetilde{(f^*)}_p : \overline{\mathfrak{n}}_{f(p)} \big/ (\overline{\mathfrak{n}}_{f(p)})^2 \longrightarrow \overline{\mathfrak{m}}_p \big/ \overline{\mathfrak{m}}_p^2$$

que satisface el diagrama conmutativo (2.2.1) de la Proposición 2.2.2 precedente. Por tanto,

$$(T_p f)^* : (T_{f(p)} W)^* \longrightarrow (T_p V)^*$$

es un isomorfismo de $\mathbb{R}$-espacios vectoriales y, pasando al dual, tendremos un isomorfismo de espacios vectoriales

$$T_p f : T_p V \longrightarrow T_{f(p)} W,$$

lo cual implica que f es "étale" en p.

i) $\Rightarrow$ *ii)* Consideremos $T_p f : T_p V \longrightarrow T_{f(p)} W$ y supongamos que es un isomorfismo. Por hipótesis, tanto $p \in V$ como $f(p) \in W$ son puntos regulares de la misma dimensión local. Podemos dualizar $T_p f$ para tener un isomorfismo entre los respectivos duales

$$(T_p f)^* : (T_{f(p)} W)^* \longrightarrow (T_p V)^*.$$

Retomando el diagrama (2.2.1) de la Proposición 2.2.2 precedente, también será un isomorfismo:

$$\begin{aligned} \widetilde{(f^*)}_p : \overline{\mathfrak{n}}_{f(p)} \big/ \overline{\mathfrak{n}}_{f(p)}^2 &\longrightarrow \overline{\mathfrak{m}}_p \big/ \overline{\mathfrak{m}}_p^2 \\ h + \overline{\mathfrak{n}}_{f(p)}^2 &\longmapsto h \circ f + \overline{\mathfrak{m}}_p^2 \end{aligned}$$

Ahora, sea $\{a_1, \ldots, a_d\}$ un sistema regular de parámetros del anillo local regular $\mathcal{R}(W)_{f(p)}$ (porque $f(p)$ es regular en W). Entonces (ver Proposición B.2.13 del Apéndice B.2.3), las clases $\{a_1 + \overline{\mathfrak{n}}_{f(p)}^2, \ldots, a_d + \overline{\mathfrak{n}}_{f(p)}^2\}$ son una base del $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\overline{\mathfrak{n}}_{f(p)} \big/ \overline{\mathfrak{n}}_{f(p)}^2$ y el completado de $\mathcal{R}(W)_{f(p)}$ es el anillo de series de potencia formales $\mathbb{R}[[a_1, \ldots, a_d]]$ isomorfo a $\mathbb{R}[[T_1, \ldots, T_d]]$.

Como $\widetilde{(f^*)}_p$ es un isomorfismo de espacios vectoriales, entonces transforma bases en bases, luego

$$\left\{(a_1 \circ f) + \overline{\mathfrak{m}}_p^2, \ldots, (a_d \circ f) + \overline{\mathfrak{m}}_p^2\right\}$$

es una base de ${}^{\overline{\mathfrak{m}}_p}\big/_{\overline{\mathfrak{m}}_p^2}$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial. De nuevo por la Proposición B.2.13 del Apéndice B.2.3, esto es equivalente a que los elementos $\{(a_1 \circ f), \ldots, (a_d \circ f)\} \subseteq \mathcal{R}(V)_p$ sean un sistema regular de parámetros. Además, observemos que

i) $\widehat{\mathcal{R}(V)}_p \cong \mathbb{R}[[a_1 \circ f, \ldots, a_d \circ f]]$ es un anillo de series de potencias formales con coeficientes en $\mathbb{R}$ isomorfo a $\mathbb{R}[[Y_1, \ldots, Y_d]]$.

ii) Como $(f^*)_p$ es la composición en f, si $\varphi : \mathbb{R}[[a_1, \ldots, a_d]] \longrightarrow \mathbb{R}[[T_1, \ldots, T_d]]$ es el isomorfismo entre ambos anillos de series de potencias formales tenemos el siguiente diagrama conmutativo

(2.2.2)
$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}[[a_1, \ldots, a_d]] \arrow[r, "\widehat{(f_p^*)}"] \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{R}[[a_1 \circ f, \ldots, a_d \circ f]] \\
\mathbb{R}[[T_1, \ldots, T_d]] \arrow[ur, "F"'] &
\end{tikzcd}$$

donde para $\sigma = \sigma(T_1, \ldots, T_d) \in \mathbb{R}[[T_1, \ldots, T_d]]$ es dado por:

$$F(\sigma) = \sigma(a_1 \circ f, \ldots, a_d \circ f) \in \mathbb{R}[[a_1 \circ f, \ldots, a_d \circ f]]$$

Como $\{a_1 \circ f, \ldots, a_d \circ f\}$ son un sistema regular del anillo $\mathcal{R}(V)_p$ y como

$$\mathcal{R}(V)_p \cong {}^{\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]_{\widetilde{\mathfrak{m}}_p}}\big/_{I(V)^e},$$

entonces (por la Proposición B.2.13 del Apéndice B.2.3) tendremos que $\{a_1 \circ f, \ldots, a_d \circ f\}$ forman parte de un sistema regular de parámetros de $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]_{\widetilde{\mathfrak{m}}_p}$. Más aún, sus formas iniciales son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$ y, por el proceso de sustitución descrito en la Sección 1.4.1 precedente, F será un isomorfismo entre dos anillos de series de potencias formales. Como el diagrama (2.2.2) conmuta (así hemos definido F) entonces $\widetilde{(f^*)}_p$ es un isomorfismo entre dos anillos de series de potencias formales y, por tanto, isomorfismo entre los respectivos completados.

□

Antes de mostrar y probar el Teorema fundamental de la sección que nos permitirá posteriormente deducir la equivalencia entre funciones $\mathscr{C}^\infty$ semi-algebraicas y funciones analíticas algebraicas, introducimos algunas notaciones.

DEFINICIÓN 14. *Una serie de potencias formales $\sigma \in \mathbb{R}[[X_1, \ldots, X_n]]$ se denomina serie de potencias formal algebraica (sobre $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$) si existe un polinomio no nulo y no constante $g \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n, T]$ tal que la siguiente igualdad se verifica en $\mathbb{R}[[X_1, \ldots, X_n]]$:*

(2.2.3)
$$g(X_1, \ldots, X_n, \sigma) = 0$$

Al conjunto de las series de potencias formales algebraicas lo denotamos por $\mathbb{R}[[X_1, \ldots, X_n]]_{alg}$.

Nótese que la identidad (2.2.3) tiene sentido en $\mathbb{R}[[X_1, \ldots, X_n]]$ porque no involucra ninguna suma que no sea trabajar en el anillo de polinomios $\mathbb{R}[[X_1, \ldots, X_n]][T]$. Es decir, si $g \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n, T]$ existen polinomios $g_0, \ldots, g_d \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$, con $g_d \neq 0$ cuando $deg_T(g) = d$ de tal modo que

$$g(X_1, \ldots, X_n, T) = \sum_{i=0}^{d} g_i(X_1, \ldots, X_n)T^i,$$

Por tanto, $g(X_1, \ldots, X_n, \sigma)$ es solamente un número finito de operaciones en $\mathbb{R}[[X_1, \ldots, X_n]]$, porque

$$g(X_1, \ldots, X_n, \sigma) = \sum_{i=0}^{d} g_i(X_1, \ldots, X_n)\sigma^i,$$

con $g_i \in \mathbb{R}[X_1,\dots,X_n] \subseteq \mathbb{R}[[X_1,\dots,X_n]]$. Del mismo modo, dado $p=(p_1,\dots,p_n)\in \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ denotaremos por $\mathbb{R}[[X_1-p_1,\dots,X_n-p_n]]_{alg}$ al conjunto de las series de potencias formales en p algebraicas sobre $\mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]$. Dicho conjunto tendrá estructura de anillo verificando las propiedades de las siguiente proposición:

Proposición 2.2.4. *El anillo $\mathbb{R}[[X_1-p_1,\dots,X_n-p_n]]_{alg}$ es un anillo local cuyo maximal, con las notaciones precedentes, es*

$$\widehat{\mathfrak{m}}_p^c = (X_1-p_1,\dots,X_n-p_n)^c = (X_1-p_1,\dots,X_n-p_n)\cap \mathbb{R}[[X_1-p_1,\dots,X_n-p_n]]_{alg}.$$

Además, el graduado asociado es un anillo de polinomios en n variables sobre $\mathbb{R}=\mathbb{R}[[X_1-p_1,\dots,X_n-p_n]]_{alg}/\widetilde{\mathfrak{m}}_p^e$. En particular, es un anillo local noetheriano y regular cuyo completado es el anillo de series de potencias formales:

$$\mathbb{R}[[X_1-\widehat{p_1,\dots,}X_n-p_n]]_{alg} = \mathbb{R}[[X_1,\dots,X_n]].$$

Supongamos para aligerar la notación $X:=(X_1,\dots,X_n)$ y $p:=(0,\dots,0)$. Para ver que $\mathbb{R}[[X]]_{alg}$ es efectivamente un anillo, de hecho, un subanillo de $\mathbb{R}[[X]]$ obsérvese que para el caso general: dados $R\subseteq S$ una extensión de dominios de integridad, el conjuntos de los elementos de S algebraicos sobre R, que denotaremos por $Alg_R(S)$ es un subanillo de S. Consideremos los respectivos cuerpos de fracciones de R y S, $K:=qf(R)$ y $L:=qf(S)$ de manera que

$$\begin{array}{ccccc} K & \hookrightarrow & Alg_K(L) & \hookrightarrow & L \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ R & \hookrightarrow & Alg_R(S) & \hookrightarrow & S \end{array}$$

Como $Alg_R(S) = S \cap Alg_K(L)$ se concluye que $Alg_R(S)$ es anillo por ser la intersección de un subanillo de S y un subcuerpo de L. En efecto, sea $s\in Alg_R(S)$ claramente $s\in S\subseteq L$ y existe $g\in R[X]\subseteq K[X]$ tal que $g(s)=0$ por lo que $s\in Alg_K(L)$. Así, tendremos $Alg_R(S)\subseteq S\cap Alg_K(L)$. De otro lado, si $s\in S\cap Alg_K(L)$ existirán $n\in\mathbb{N}$, $a_i\in R$, no todos nulos y $b_i\in R\setminus\{0\}$, $0\le i\le n$, verificando

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{a_i}{b_i}s^i = 0,$$

por lo que multiplicando por $b:=\prod_{i=0}^n b_i$ y denotando $\widetilde{b}_i = b/b_i\in R$:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i\widetilde{b}_i s^i = 0.$$

Tendremos de este modo $s\in Alg_R(S)$ y $S\cap Alg_K(L)\subseteq Alg_R(S)$. Aplicado a nuestro caso, $R=\mathbb{R}[X]$ y $K=R=\mathbb{R}[[X]]$. También se aprecia de forma sencilla que $\mathbb{R}[[X]]_{alg}$ es local. En primer lugar, considerando el epimorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras

$$\begin{array}{cccc} ev_0 & \mathbb{R}[[X]]_{alg} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & f(0) \end{array}$$

concluimos que la contracción a $\mathbb{R}[[X]]_{alg}$ del ideal maximal $\widehat{\mathfrak{m}}_0$ de las series en $\mathbb{R}[[X]]$ que se anulan en 0, es decir, $\widehat{\mathfrak{m}}_0^c = \widehat{\mathfrak{m}}_0 \cap \mathbb{R}[[X]]_{alg} = \ker(ev_0)$ es un ideal maximal. Veamos que es el único ideal maximal de $\mathbb{R}[[X]]_{alg}$. Se considera una serie algebraica $f\notin \widehat{\mathfrak{m}}_0^c$, por lo que f tiene inverso en $\mathbb{R}[[X]]$ que denotamos por $g:=f^{-1}\in\mathbb{R}[[X]]$. Como f es algebraica, sea $p\in\mathbb{R}[X_1,\dots,X_n][T]$ no nulo de la forma

$$p(X_1,\dots,X_n,T) = a_d(X_1,\dots,X_n)T^d + \cdots + a_1(X_1,\dots,X_n)T + a_0(X_1,\dots,X_n)$$

y verificando $p(X_1,\dots,X_n,f(X))$ en $\mathbb{R}[[X]]$. Suponiendo que p es de grado mínimo satisfaciendo la propiedad indicada, tendremos que $a_0(X_1,\dots,X_n)$ no es el polinomio nulo. De lo contrario, tendríamos que

$$(a_d(X)f(X)^{d-1} + \cdots + a_1(X))f(X) = 0,$$

y como $\mathbb{R}[[X]]$ es dominio de integridad, o bien $f = 0$ lo que es imposible pues $f \notin \widehat{\mathfrak{m}}_0^c$, o bien el polinomio de grado $d-1$, $q := a_d(X)T^{d-1} + \cdots + a_1(X)$, se anula en f en contradicción con la minimalidad de d. Finalmente, como tenemos la siguiente igualdad en $\mathbb{R}[[X]]$:

$$a_d(X)f(X)^d + \cdots + a_1(X)f(X) + a_0(X) = 0,$$

multiplicando por $g^d \in \mathbb{R}[[X]]$, tendremos el siguiente polinomio de grado d verificando:

$$a_0(X)g^d(X) + \cdots + a_{d-1}g(X) + a_d(X) = 0$$

con $a_0(X_1, \ldots, X_n) \neq 0$ en $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ y $g \in \mathbb{R}[[X]]_{alg}$. Por ello, cualquier elemento $f \notin \widehat{\mathfrak{m}}_0^c$ será una unidad y $\mathbb{R}[[X]]_{alg}$ será un anillo local. Bastante más trabajo se requiere para probar que $\mathbb{R}[[X_1-p_1, \ldots, X_n-p_n]]_{alg}$ es noetheriano. Para ello, es preciso demostrar antes la validez de los Teoremas de División y Preparación de Weierstrass (véase la Subsección B.2.2 del Apéndice B) para el caso de las series algebraicas y una serie de lemas previos usando también el Lema de Hensel. Nuestro siguiente objetivo es probar el siguiente Teorema que se va erigir como el resultado fundamental de la sección.

TEOREMA 2.2.5 (**Versión Local del Teorema de Artin-Mazur**). *Sea $\sigma \in \mathbb{R}[[X_1, \ldots, X_n]]_{alg}$ una serie de potencias formales algebraica sobre $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$. Entonces, existe una variedad algebraica $V \subseteq \mathbb{A}^{n+d}(\mathbb{R})$, para algún $d \geq 1$, tal que*

i) V es una variedad algebraica irreducible de dimensión n.
ii) Existe un punto $p = (0, \ldots, 0, t, z_1, \ldots, z_{d-1}) \in V$ que es un punto liso (i.e. regular).
iii) Si $\pi : \mathbb{A}^{n+d}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ es la proyección que olvida las d últimas coordenadas y si consideramos la aplicación polinomial

$$\pi|_V : V \to \mathbb{A}^n(\mathbb{R}),$$

entonces $\pi|_V$ es étale en el punto $p \in V$. En particular, existe $U \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ un entorno abierto semi-algebraico de $\underline{0} \in \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ y una función $s : U \longrightarrow \mathbb{A}^{n+d}(\mathbb{R})$ de clase $\mathscr{C}^\infty$ y semi-algebraica, de tal modo que existe un abierto semi-algebraico $U' \subseteq \mathbb{A}^{n+d}(\mathbb{R})$ tal que $p \in V$ y se tiene que

$$\pi|_{U' \cap V} : U' \cap V \longrightarrow U$$

es un difeomorfismo semi-algebraico cuya inversa es precisamente

$$s : U \longrightarrow U' \cap V.$$

iv) Existe una función polinomial $f \in \mathbb{R}[V]$ tal que σ es el desarrollo de Taylor en $\underline{0} \in \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ de la composición $f \circ s$, es decir,

$$\sigma = \tau_0(f \circ s).$$

DEMOSTRACIÓN. Denotemos por $\mathbb{R}[X] = \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ y $\mathbb{R}[[X]] = \mathbb{R}[[X_1, \ldots, X_n]]$ para simplificar la notación. Tenemos un morfismo de $\mathbb{R}$-álgebras para $\sigma \in \mathbb{R}[[X]]$,

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}[X][T] &\longrightarrow \mathbb{R}[[X]] \\ p(X,T) &\longmapsto p(X, \sigma) \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

Se trata de un morfismo de anillos cuya imagen es un subanillo de $\mathbb{R}[[X]]$. Si $\sigma \in \mathbb{R}[[X]]_{alg}$ es una serie algebraica sobre $\mathbb{R}[X]$ el siguiente es un ideal no nulo de $\mathbb{R}[X][T]$:

$$\ker(\varphi) = Ann_{\mathbb{R}[X,T]}(\sigma) := \{p \in \mathbb{R}[X][T] : p(X, \sigma) = 0 \text{ en } \mathbb{R}[[X]]\}.$$

Tendremos un isomorfismo con un subanillo de $\mathbb{R}[[X]]$ y $\mathbb{R}[[X]]$ es un dominio de integridad, luego $Ann_{\mathbb{R}[X][T]}(\sigma)$ es un ideal primo de $\mathbb{R}[X, T]$. De otro lado, como se observa en la Subsección 1.2.2 precedente, el ideal (0) es un ideal real de $\mathbb{R}[[X]]$ y, por tanto, $Ann_{\mathbb{R}[X,T]}(\varphi)$ es un ideal real de $\mathbb{R}[X, T]$. Escribamos $\mathfrak{p} = \ker(\varphi)$. Ahora observemos que tenemos una extensión de dominios de integridad

$$\mathbb{R}[X] \hookrightarrow {}^{\mathbb{R}[X][T]}\!/_{\mathfrak{p}}$$

Pasamos a los respectivos cuerpos de fracciones y tenemos una extensión finita (algebraica) de cuerpos:

$$\mathbb{R}(X) \hookrightarrow qf\left({}^{\mathbb{R}[X][T]}\!/_{\mathfrak{p}}\right)$$

Más aún, sea $W \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ la variedad afín real de los ceros en $\mathfrak{p}$ en $\mathbb{A}^{n+1}(\mathbb{R})$: $W := V_{\mathbb{A}}(\mathfrak{p})$. Por el Nullstellensatz Real, $I(W) = \sqrt[R]{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$, porque $\mathfrak{p}$ es un ideal real, luego $W \subseteq \mathbb{A}^{n+1}(\mathbb{R})$ es una variedad algebraica real irreducible. Además, $\mathbb{R}[W] = \mathbb{R}[X][T]/\mathfrak{p}$, con lo que tenemos que los respectivos grados de trascendencia satisfacen (ver Corolario A.4.4 del Apéndice A.4):

$$grtr_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}[W]) = grtr_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}(X)) = n.$$

En particular, W tiene dimensión n (y co-dimensión 1) en $\mathbb{A}^{n+1}(\mathbb{R})$ y $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathbb{R}[X][T])$ es un ideal primo real de altura 1. Como $\mathbb{R}[X][T]$ es un dominio de factorización única noetheriano, entonces $\mathfrak{p}$ es un ideal principal. Un "refuerzo" de esta idea es la clásica caracterización de M. Nagata de los dominios noetherianos que son dominios de factorización única (cf. Teorema B.1.52). Consideremos ahora la clausura entera de $\mathbb{R}[W]$ en su cuerpo de fracciones. Por el Teorema A.2.6, la clausura entera de $A := \mathbb{R}[W]$ en $qf(\mathbb{R}[W])$ toma la forma:

$$\overline{A} := \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n, T, Z_1, \ldots, Z_{p-1}] \big/ \mathfrak{q},$$

donde $\mathfrak{q}^c = \mathfrak{q} \cap \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n, T] = \mathfrak{p}$ y $\mathfrak{q}$ es un ideal primo en $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n, T, Z_1, \ldots, Z_{p-1}]$. Pero además se tiene que

$$A \subseteq \overline{A} \subseteq qf(\mathbb{R}[W]),$$

y por tanto, como $\mathbb{R}[W]$ es un dominio de integridad formalmente real (esto es equivalente a que su ideal (0) es real), el cuerpo de fracciones $qf(\mathbb{R}[W])$ es formalmente real, luego el ideal (0) de $\overline{A}$ es también un ideal real. Esto implica que $\sqrt[R]{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q}$ y $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(\mathbb{R}[X, T, Z_1, \ldots, Z_{p-1}])$ es un ideal primo real. En particular, $V := V_{\mathbb{A}}(\mathfrak{q}) \subseteq \mathbb{A}^{n+d}$ es una variedad algebraica, $I(V) = \sqrt[R]{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q}$ y, por tanto, V es irreducible. Además, como $A \subseteq \overline{A}$ es entera, tenemos que

- $\dim(A) = \dim(\overline{A})$
- $\dim(V) = \dim(W) = n$.
- $coht(\mathfrak{q}) = n, \;\; ht(\mathfrak{q}) = d$.

El anillo de series de potencias formales $\mathbb{R}[[X]]$ es un dominio de factorización única por los *Teoremas de Weierstrass* (ver Subsección B.2.2 del Apéndice B). Los dominios de factorización única son anillos normales (i.e. íntegramente cerrados en su cuerpo de fracciones, cf. [**AtMc, 1969**], por ejemplo). Además, tenemos un monomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras inducido por φ en (2.2.4) a través del Primer Teorema de Isomorfía, como $\overline{A}$ es la clausura entera de A en su cuerpo de fracciones podemos encontrar $\psi : \mathbb{R}[V] \to \mathbb{R}[[X]]$ tal que el siguiente diagrama sea conmutativo (véase Proposición A.2.3 del Apéndice A):

(2.2.5)
$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}[W] \arrow[r, "\widetilde{\varphi}"] \arrow[d, hook, "i"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{R}[[X]] \\ \mathbb{R}[V] \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Donde i es la inclusión, $\widetilde{\varphi}$ es el isomorfismo inducido por φ (de la Identidad (2.2.4)) a través del Primer Teorema de Isomorfía y ψ satisface que el anterior diagrama conmuta. Pero, además, tenemos la "evaluación en 0" de las series de potencias formales en $\mathbb{R}[[X]]$ (es decir, tomar la clase residual módulo el ideal maximal $\mathfrak{m}_0 = (X_1, \ldots, X_n)$) de $\mathbb{R}[[X]]$). Esto induce un morfismo a partir de $\psi : \mathbb{R}[V] \longrightarrow \mathbb{R}[[X]]$ y $ev_0 : \mathbb{R}[[X]] \longrightarrow \mathbb{R}$ de la forma

$$ev_0 \circ \psi : \mathbb{R}[V] \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Tomando el ideal $\mathfrak{n} = (ev_0 \circ \psi)^{-1}((0))$ tenemos un ideal real y primo de $\mathbb{R}[V]$ que, además, es maximal por el Primer Teorema de Isomorfía. Entonces, por la Proposición 1.2.9 de la Subsección 1.2.3 precedente, existe un punto $p = (0, \ldots, 0, t, z_1, \ldots, z_{d-1}) \in V$ tal que $\mathfrak{n}$ es el ideal maximal asociado al punto p en $\mathbb{R}[V]$, es decir,

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{m}_p = \big\{ f \in \mathbb{R}[V] : \; f(p) = 0 \big\}.$$

Pasemos a la localización de $\mathbb{R}[V]$ en $\mathfrak{m}_p$ que coincide con el anillo local $\mathcal{R}(V)_p$ y tenemos que $\mathfrak{m}_p = \mathfrak{m}_0^c$, donde $\mathfrak{m}_0 = (X_1, \ldots, X_n)$ en $\mathbb{R}[[X_1, \ldots, X_n]]$. Tenemos así inducido un morfismo de $\mathbb{R}$-álgebras que es, además, un morfismo local de anillos locales

$$\psi_p : \mathcal{R}(V)_p \longrightarrow \mathbb{R}[[X_1, \ldots, X_n]].$$

Como $\mathbb{R}[[X_1,\dots,X_n]]$ es completo, podemos extender ψ_p al completado de $\mathcal{R}(V)_p$ y considerar un morfismo local de $\mathbb{R}$-álgebras entre anillos locales equi-característicos

$$\widehat{\psi}_p:\ \widehat{\mathcal{R}(V)_p} \longrightarrow \mathbb{R}[[X_1,\dots,X_n]].$$

Nótese que como $p=(0,\dots,0,t,z_1,\dots,z_{d-1})$ tenemos también un morfismo local entre

$$\lambda:\ \mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]_{(X_1,\dots,X_n)} \hookrightarrow \mathbb{R}[V]_p = \mathcal{R}(V)_p, \tag{2.2.6}$$

que es simplemente la inclusión de anillos. En consecuencia, podemos extender a los completados

$$\widehat{\lambda}:\ \mathbb{R}[[X_1,\dots,X_n]] = \widehat{\mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]_{(X_1,\dots,X_n)}} \longrightarrow \widehat{R(V)_p}$$

de tal modo que λ es uniformemente continua y

$$\lambda(f/g)=f/g \qquad \forall f,g\in\mathbb{R}[X_1,\dots,X_n],\ g(0)\neq 0.$$

Finalmente, observamos que

$$\widehat{\psi}_p\circ\widehat{\lambda} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}[[X_1,\dots,X_n]]}.$$

En particular, $\widehat{\psi}_p$ es un epimorfismo de anillos. Ahora retomamos el *Zariski Main Theorem* en su versión para anillos locales. Como $\mathbb{R}[V]$ es un anillo normal, también su localización $\mathbb{R}[V]_{\mathfrak{m}_p}$ es un anillo normal (ver [**AtMc, 1969**]). El *Teorema Principal de Zariski* (véase Teorema B.1.32) afirma que si el anillo local $\mathcal{R}(V)_p$ es un anillo íntegramente cerrado en su cuerpo de fracciones, entonces, su completado $\widehat{\mathcal{R}(V)_p}$ es también un dominio normal y noetheriano de la misma dimensión que $\mathcal{R}(V)_p$. En particular, $\widehat{\mathcal{R}(V)_p}$ es dominio de integridad, satisfaciendo:

- $\widehat{\psi}_p:\ \widehat{\mathcal{R}(V)_p}\longrightarrow\mathbb{R}[[X_1,\dots,X_n]]$ es epimorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras locales.
- Las dimensiones satisfacen
$$\dim(\widehat{\mathcal{R}(V)_p}) = \dim(\mathcal{R}(V)_p) = n = \dim\mathbb{R}[[X_1,\dots,X_n]]$$
- $\widehat{\mathcal{R}(V)_p}$ es dominio de integridad.

Si $\mathfrak{a}=\ker(\widehat{\psi}_p)$, entonces $\mathfrak{a}$ sería un ideal primo de $\widehat{\mathcal{R}(V)_p}$ porque

$$\widehat{\mathcal{R}(V)_p}\big/\mathfrak{a} \cong \mathbb{R}[[X_1,\dots .X_n]],$$

y $\mathbb{R}[[X_1,\dots,X_n]]$ es dominio de integridad. Como $\widehat{\mathcal{R}(V)_p}$ es un anillo local noetheriano de dimensión n, concluiríamos si $\mathfrak{a}\neq(0)$

$$n=\dim(\widehat{R(V)_p}) \geq n + coht(\mathfrak{a})$$

porque $\mathfrak{a}$ es primo. Pero eso no es posible si $\mathfrak{a}\neq(0)$ luego $\mathfrak{a}=(0)$ y $\widehat{\psi}_p$ es un isomorfismo. Nótese, finalmente, que podemos considerar la proyección que olvida las d últimas coordenadas $\pi:\mathbb{A}^{n+d}(\mathbb{R})\longrightarrow\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ y consideremos $\pi|_V: V\longrightarrow\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$. Observamos que $(\pi|_V)^*:\ \mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]\longrightarrow\mathbb{R}[V]$ puede extenderse a las localizaciones (porque $\pi(p)=0=(0,\dots,0)\in\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$), que denotaremos del modo siguiente

$$\left(\pi|_V\right)_0^*:\mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]_{(X_1,\dots,X_n)}\longrightarrow\mathbb{R}[V]_{\mathfrak{m}_p}=\mathcal{R}(V)_p.$$

Observamos, además, que es morfismo local y, por tanto, uniformemente continua para las respectivas topologías ádicas de anillos locales, con lo que admite una extensión a los respectivos completados

$$\widehat{\left(\pi|_V\right)_0^*}:\ \mathbb{R}[[X]]\longrightarrow\widehat{\mathcal{R}(V)_p}.$$

De hecho, podemos verificar que $(\pi|_V)_0^*=\lambda$, donde λ es la inclusión antes descrita en la Identidad (2.2.6). En particular, como vimos entonces

$$\widehat{\psi}_p\circ\widehat{\lambda}=\widehat{\psi}_p\circ\widehat{\left(\pi|_V\right)_0^*}=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}[[X_1,\dots,X_n]]}.$$

Ahora, como $\widehat{\psi}_p$ es un isomorfismo, concluimos las igualdades:

$$(\widehat{\psi}_p)^{-1}=\widehat{\lambda}=\widehat{\left(\pi|_V\right)_0^*}.$$

Pero $\underline{0} \in \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ es un punto regular y $\widehat{\psi}_p$ es un isomorfismo. Entonces, por la Proposición 2.2.3 precedente, $p \in V$ es también un punto liso. Del mismo modo $(\pi|_V)_0^* = \mathbb{R}[[X_1, \ldots, X_n]] \longrightarrow \widehat{\mathcal{R}(V)}_p$ es un isomorfismo. Resumiendo:

- $\mathcal{R}(V)_p$ es un anillo local regular, ergo p es regular.
- $\widehat{(\pi|_V)}_0^* : \widehat{\mathcal{R}(\mathbb{A}^n(\mathbb{R}))}_0 \longrightarrow \widehat{\mathcal{R}(V)}_p$ es un isomorfismo de anillos locales regulares completos.

Además, por la Proposición 2.2.3 precedente

$$\pi|_V : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

es un isomorfismo "étale" en el punto liso $p \in V$. Luego por la Proposición 2.2.1 concluimos que existen dos abiertos semi-algebraicos $U \subseteq \mathbb{A}^{n+p}(\mathbb{R})$, $U' \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ tales que $p \in U \cap V$, $\underline{0} \in U'$ y una función de clase $\mathscr{C}^\infty$

$$s : U' \longrightarrow U \cap V$$

que es difeomorfismo semi-algebraico entre dos subvariedades diferenciables afines satisfaciendo

$$s = \left(\pi|_{U \cap V}\right)^{-1}$$

Finalmente, retomamos el morfismo $\psi : \mathbb{R}[V] \longrightarrow \mathbb{R}[[X]]$ descrito en (2.2.5). Sea $f = T + I(V) \in \mathbb{R}[V]$ la clase de la variable T módulo $I(V)$. Por construcción, $\psi(f) = \sigma \in \mathbb{R}[[X]]$. Si ahora $h \in \mathbb{R}[V]$ es una función polinomial sobre $\mathbb{R}[V]$, $\widehat{\psi}_p(h)$ es el desarrollo de Taylor de $h \circ s$ en el origen. En efecto, teniendo en cuenta las anteriores afirmaciones, consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}[V] \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, shift left, "s^*"] & \widehat{\mathcal{R}(V)}_p \arrow[r, "\widehat{\psi}_p"] & \mathbb{R}[[X]] \\
\mathbb{R}[\mathbb{A}^n(\mathbb{R})] \arrow[u, shift left, "(\pi|_V)^*"] & &
\end{tikzcd}$$

Observamos que para $h \in \mathbb{R}[V]$, $\widehat{\psi}_p(h) \in \mathbb{R}[[X]]$ es su desarrollo en serie de Taylor. Por otro lado, por lo antedicho, la aplicación $s : U' \longrightarrow U \cap V$ es la inversa de $\pi|_V$ en un entorno U' de $\underline{0} \in \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$, con lo que considerando las aplicaciones duales tendremos que

$$\widehat{\psi}_p(h) = \left(\widehat{\psi}_p \circ (\pi|_V)^*\right)(s^*(h)) = \left(\widehat{\psi}_p \circ (\pi|_V)^*\right)(h \circ s) \in \mathbb{R}[[X]],$$

y concluimos así que $\widehat{\psi}_p$ coincide con el desarrollo de Taylor de $h \circ s : U' \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ en un entorno U' de $\underline{0} \in \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$.

□

Como consecuencia inmediata del resultado anterior tenemos el siguiente corolario:

Corolario 2.2.6. *Sea $\sigma \in \mathbb{R}[[X_1, \ldots, X_n]]_{alg}$ una serie de potencias algebraica sobre $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$. Entonces, σ es una serie de potencias formales convergente, esto es, $\sigma \in \mathbb{R}\{X_1, \ldots, X_n\}$. Más aún, existe un abierto $U \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ que podemos considerar semi-algebraico (vgr. una bola abierta) tal que $0 \in U \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ y existe una función analítica real $s : U \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que*

i) $\sigma = \tau_0(s)$ es el desarrollo de Taylor de s en el origen.
ii) Más aún, se puede elegir $U \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ abierto en $0 \in U$ tal que $\forall x \in U$

$$\sigma(x) = s(x).$$

Demostración. Lo que haremos será revisar la demostración del Teorema 2.2.5 precedente con otra perspectiva. Comencemos considerando el ideal

$$\mathfrak{p} := \{f \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n, T] : \ f(X_1, \ldots, X_n, \sigma) = 0 \ \text{ en } \mathbb{R}[[X_1, \ldots, X_n]]\}.$$

Como se observa en la demostración del Teorema 2.2.5, $\mathfrak{p}$ es un ideal primo real y, además, $\mathfrak{p}^c = \mathfrak{p} \cap \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n] = (0)$. En otro caso, si $q \in \mathfrak{p}^c$, tendríamos que, por no depender de T,

$$q(X_1, \ldots, X_n, \sigma) = q(X_1, \ldots, X_n) = 0 \ \text{ en } \mathbb{R}[[X_1, \ldots, X_n]].$$

Luego $q = 0$ en $\mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]$ subanillo de $\mathbb{R}[[X_1,\dots,X_n]]$. Como $\mathfrak{p}^c = 0$, tenemos una extensión de anillos entre dominios de integridad

$$\begin{aligned} \mathbb{R}[X_1,\dots,X_n] = {}^{\mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]}\big/_{\mathfrak{p}^c} &\hookrightarrow \mathbb{R}[W], \\ q &\longmapsto q + I(W), \end{aligned}$$

donde $W = V_{\mathbb{A}}(\mathfrak{p}) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}(\mathbb{R})$ es la variedad algebraica real irreducible de dimensión n descrita en la demostración del Teorema 2.2.5 precedente. Consideramos ahora la normalización de $\mathbb{R}[W]$. Existirán los siguientes elementos:

i) Un ideal primo real $\mathfrak{q}$ en $\mathbb{R}[X_1,\dots,X_n,T,Y_1,\dots,Y_{d-1}]$
ii) Una variedad algebraica irreducible $V = V_{\mathbb{A}}(\mathfrak{q}) \subseteq \mathbb{A}^{n+d}(\mathbb{R})$.
iii) La dimensión de Krull de V es n, la altura de $\mathfrak{q}$ es d.
iv) El anillo $\mathbb{R}[V]$ es un anillo normal y es la clausura entera de $\mathbb{R}[W]$ en su cuerpo de fracciones.

En particular, tendremos que $\mathbb{R}[W]$ es un subanillo de $\mathbb{R}[V]$ y tendremos una inclusión

$$i : \mathbb{R}[X_1,\dots,X_n] \longrightarrow \mathbb{R}[V].$$

Por otro lado, consideremos la proyección $\pi : \mathbb{A}^{n+d}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ que olvida las últimas d coordenadas. Consideramos la restricción a V, $\pi|_V$, y tendremos inducido un morfismo natural de $\mathbb{R}$-álgebras

$$\left(\pi|_V\right)^* : \mathbb{R}[X_1,\dots,X_n] \longrightarrow \mathbb{R}[V].$$

Como puede fácilmente observarse, dado que $\pi(X_1,\dots,X_n,T,Y_1,\dots,Y_{d-1}) = (X_1,\dots,X_n)$, $(\pi|_V)^*$ es simplemente la inclusión i antes considerada. Podemos considerar el punto $p = (0,\dots,0,t,z_1,\dots,z_{d-1})$ elegido en la demostración del Teorema 2.2.5 precedente y sea $\mathfrak{m}_p = \{f \in \mathbb{R}[V] : f(p) = 0\}$ el maximal asociado a p en $\mathbb{R}[V]$. Como $\pi(p) = (0,\dots,0)$ (por construcción) tenemos el morfismo local

$$\left(\pi|_V\right)_0^* = i_0 : \mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]_{(X_1,\dots,X_n)} \longrightarrow \mathbb{R}[V]_{\mathfrak{m}_p} = \mathcal{R}(V)_p$$

De nuevo, i_0 es la inclusión que asocia a cada cociente de polinomios f/g con denominador no nulo en 0 la clase $f/g + I(V)^e$, donde

$$I(V)^e = I(V)\mathbb{R}[X_1,\dots,X_n,T,Y_1,\dots,Y_{d-1}]_p.$$

Como i_0 es un morfismo local de anillos locales admite extensión a los completados

$$\widehat{i_0} : \mathbb{R}[[X_1,\dots,X_n]] \longrightarrow \widehat{\mathcal{R}(V)}_p.$$

y, de nuevo, $\widehat{i_0}$ es la inclusión. Pero el Teorema precedente prueba que $\widehat{i_0}$ es un isomorfismo y, por tanto, tenemos una identificación

$$\mathbb{R}[[X_1,\dots,X_n]] = \widehat{\mathcal{R}(V)}_p.$$

De hecho, $\{X_1 + \widehat{I(V)}^e,\dots,X_n + \widehat{I(V)}^e\}$ es un sistema regular de parámetros de $\widehat{\mathcal{R}(V)}_p$. Por la Proposición B.2.13, tenemos la situación siguiente:

$$\widehat{\mathcal{R}(V)}_p = {}^{\widehat{\mathbb{R}[X_1,\dots,X_n,T,Y_1,\dots,Y_{d-1}]_{\mathfrak{m}_p}}}\big/_{\widehat{I(V)}^e},$$

donde $\mathfrak{m}_p = (X_1,\dots,X_n,T-t,Y_1-z_1,\dots,Y_{d-1}-z_{d-1})$ es el maximal en $\mathbb{R}[X_1,\dots,X_n,T,Y_1,\dots,Y_{d-1}]$ al punto $p = (0,\dots,0,t,z_1,\dots,z_{d-1})$. Por tanto, $\{X_1,\dots,X_n\}$ son parte de un sistema regular de parámetros de $\mathbb{R}[[X_1,\dots,X_n,T-t,Y_1-z_1,\dots,Y_{d-1}-z_{d-1}]]$. Supongamos que ese sistema regular de parámetros es

$$\mathscr{S} = \{X_1,\dots,X_n,\sigma_1,\dots,\sigma_d\},$$

donde $\sigma_1,\dots,\sigma_d$ pueden elegirse en $I(V)^e$, es decir, se verifica la siguiente afirmación, cuya prueba se deja para el final de la demostración,

Afirmación. *Sea* $\sigma \in \widehat{I(V)}^e$ *entonces existe* $f \in I(V)^e$ *tal que*

$$\sigma + \mathfrak{n}_p^2 = f + \mathfrak{n}_p^2$$

Denotamos por $\mathfrak{n}_p = \mathfrak{m}_p^e$ el ideal maximal de $\mathbb{R}[[X_1, \ldots, X_n, T-t, Y_1 - z_1, \ldots, Y_{d-1} - z_{d-1}]]$. Y consideramos las clases de $\mathscr{S}$ módulo $\mathfrak{n}_p^2$,

$$\overline{\mathscr{S}} = \{X_1 + \mathfrak{n}_p^2, \ldots, X_n + \mathfrak{n}_p^2, \sigma_1 + \mathfrak{n}_p^2, \ldots, \sigma_d + \mathfrak{n}_p^2\}.$$

Consideramos las expansiones de Taylor de cada serie σ_i en el punto p. Entonces,

$$\sigma_k + \mathfrak{n}_p^2 = \sigma_k(p) + \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \sigma_k}{\partial X_i}(p) X_i + \frac{\partial \sigma_k}{\partial T}(p)(T-t) + \sum_{j=1}^{d-1} \frac{\partial \sigma_k}{\partial Y_j}(p)(Y_j - z_j)\Big) + \mathfrak{n}_p^2.$$

Como $\sigma_i \in \mathfrak{n}_p$ (por ser el sistema regular de parámetros) queda

$$\sigma_k + \mathfrak{n}_p^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \sigma_k}{\partial X_i}(p) X_i + \frac{\partial \sigma_k}{\partial T}(p)(T-t) + \sum_{j=1}^{d-1} \frac{\partial \sigma_k}{\partial Y_j}(p)(Y_j - z_j)\right) + \mathfrak{n}_p^2.$$

Esto conduce a la matriz jacobiana:

$$D(X_1, \ldots, X_n, \sigma_1, \ldots, \sigma_d)(p) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{Id}_n & 0 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\nabla_p \sigma_1} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\vdots} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\nabla_p \sigma_d} \end{array}\right), \tag{2.2.7}$$

donde para cada i, $1 \le i \le d$.

$$\nabla_p \sigma_i = \big(\frac{\partial \sigma_i}{\partial X_1}(p), \ldots, \frac{\partial \sigma_i}{\partial X_n}(p), \frac{\partial \sigma_i}{\partial T}(p), \frac{\partial \sigma_i}{\partial Y_1}(p), \ldots, \frac{\partial \sigma_i}{\partial Y_{d-1}}(p)\big)$$

Ahora bien, $\overline{\mathscr{S}}$ es base del $\mathbb{R}$ espacio vectorial ${}^{\mathfrak{n}_p}\big/_{\mathfrak{n}_q^2}$ si y solamente si la matriz jacobiana $D(X_1, \ldots, X_n, \sigma_1, \ldots, \sigma_d)(p)$ tiene rango $n+d$. Ahora bien por la forma de esa matriz (descrita en (2.2.7)) esa matriz tiene rango $n+d$ si y solamente si la submatriz siguiente tiene rango d:

$$\widetilde{D}(\sigma_1, \ldots, \sigma_d)(p) = \left(\begin{array}{c} \widetilde{\nabla}_p \sigma_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \widetilde{\nabla}_p \sigma_d \end{array}\right).$$

donde

$$\widetilde{\nabla}_p \sigma_i := \big(\frac{\partial \sigma_i}{\partial T}(p), \frac{\partial \sigma_i}{\partial Y_1}(p), \ldots, \frac{\partial \sigma_i}{\partial Y_{d-1}}(p)\big)$$

Ahora observamos que, por la Afirmación anterior, $\sigma_1, \ldots, \sigma_d \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n, T, Y_1, \ldots, Y_{d-1}]_{\mathfrak{m}_p}$ es una familia de cocientes de dos polinomios cuyo denominador no se anula en p. Y tenemos:

- $\sigma_1(0, \ldots, 0, t, z_1, \ldots, z_{d-1}) = \cdots = \sigma_d(0, \ldots, 0, t, z_1, \ldots, z_{d-1}) = 0$.
- σ_i es analítica en un entorno $U_i \subseteq \mathbb{A}^{n+d}(\mathbb{R})$, $1 \le i \le d$, tal que $p \in U_i$. Consideramos el abierto no vacío $U := \bigcap_{i=1}^d U_i$.
- La matriz jacobiana $\widetilde{D}(\sigma_1, \ldots, \sigma_d)(p)$ tiene rango d.

Por el Teorema de la Función Implícita para funciones analíticas reales (Corolario B.2.4) existirá una aplicación analítica $\overline{s} : \overline{U}' \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{A}^d(\mathbb{R})$ tal que $\overline{U}'$ es un entorno abierto de $\underline{0} \in \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ y el grafo de $\overline{s}$ viene dado por

$$Gr(\overline{s}) := \big\{(x, t, y) \in \overline{U}' \times \mathbb{A}^d(\mathbb{R}) : \ \sigma_1(x, t, y) = \cdots = \sigma_d(x, t, y) = 0\big\}.$$

Retomemos ahora la función de clase $\mathscr{C}^\infty$, $s : U' \longrightarrow U \cap V$, anunciada en el Teorema 2.2.5 como $s = (\pi|_{V \cap U})^{-1}$. Definiendo la función,

$$\begin{array}{cccc} \widehat{s} : & \overline{U}' \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{A}^{n+d}(\mathbb{R}) \\ & (X_1, \ldots, X_n) & \longmapsto & (X_1, \ldots, X_n, \overline{s}_1(X), \ldots, \overline{s}_d(X)), \end{array}$$

donde $\overline{s} = (\overline{s}_1, \ldots, \overline{s}_d)$ son las componentes de la función $\overline{s}$, veamos que, de hecho, se satisface $s = \widehat{s}$. Para ello notemos que las funciones $\sigma_i \in I(V)^e$ por lo que $V \subseteq Gr(\overline{s}) = \widehat{s}(\overline{U}')$, y, eventualmente, $V = \widehat{s}(\overline{U}')$ por tener la misma dimensión. Así, $\widehat{s}$ es un difeomorfismo sobre su imagen y en el abierto $U \cap V \subseteq \mathrm{Im}(\widehat{s})$ tendremos, de forma obvia a partir de la definición de $\widehat{s}$, la igualdad $\pi|_{V\cap U} = \widehat{s}^{-1}|_{V\cap U}$, concluyendo que $s = \widehat{s}|_{U'}$.

Ahora, en vistas de la parte final de la demostración del Teorema 2.2.5 precedente, eligiendo el polinomio $f = T + I(V) \in \mathbb{R}[V]$, el desarrollo de Taylor de $f \circ s$ en $\underline{0} \in \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ coincide con σ. Pero, dada la igualdad previamente probada, se tendrá $f \circ s = f \circ \widehat{s} = \overline{s}_1$ en U', y habremos concluido que

$$\tau_0(\overline{s}_1) = \sigma.$$

Por tanto, $\sigma \in \mathbb{R}\{X_1, \ldots, X_n\}$ y σ coincide con $\overline{s}_1$ (analítica) en un entorno abierto de $\underline{0} \in \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$, en el que podremos elegir una bola abierta y, por tanto, semi-algebraico.

Demostración de la afirmación. Sea $\sigma \in \widehat{I(V)}^e$ veamos que existe $f \in I(V)^e$ tal que:

$$\sigma + \mathfrak{n}_p^2 = f + \mathfrak{n}_p^2$$

La razón es que si $\mathfrak{n}_p$ es el ideal maximal de $A := \mathbb{R}[[X_1, \ldots, X_n, T-t, \ldots, Y_{d-1}-z_1, \ldots, Y_{d-1}-z_{d-1}]]$. El graduado de A es

$$G_{\mathfrak{n}_p}(A) = G_{\mathfrak{m}_p^e}\big(\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n, T-t, \ldots, Y_{d-1}-z_1, \ldots, Y_{d-1}-z_{d-1}]_{\mathfrak{m}_p}\big)$$

Luego

$$\mathfrak{n}_p \big/ \mathfrak{n}_p^2 = \mathfrak{m}_p^e \big/ (\mathfrak{m}_p^e)^2$$

Ahora si $\sigma \in \widehat{I(V)}^e$ entonces en el límite de una sucesión $\{f_n\} \subseteq I(V)^e$ con respecto a la topología $\mathfrak{n}_p$-ádica. Pero, entonces, con $\sigma \in \mathfrak{n}_p$ y $\{f_n\} \subseteq \mathfrak{n}_p$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sigma + \mathfrak{n}_p^2 = f_n + \mathfrak{n}_p^2 \qquad \forall n \geq N.$$

Elijamos $f = f_N$ y tenemos la afirmación. Ahora, si $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_d\}$ son tales que $\{X_1, \ldots, X_n, \sigma_1, \ldots, \sigma_d\}$ forman parte de un sistema regular de parámetros de A es porque las clases

$$\{X_1 + \mathfrak{n}_p^2, \ldots, X_n + \mathfrak{n}_p^2, \sigma_1 + \mathfrak{n}_p^2, \ldots, \sigma_d + \mathfrak{n}_p^2\}$$

son $\mathbb{R}$-linealmente independientes en $\mathfrak{n}_p \big/ \mathfrak{n}_p^2$. Eligiendo $f_i \in I(V)^e$ tal que $f_i + \mathfrak{n}_p^2 = \sigma_i + \mathfrak{n}_p^2$ también serán linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$

$$\{X_1 + \mathfrak{n}_p^2, \ldots, X_n + \mathfrak{n}_p^2, f_1 + \mathfrak{n}_p^2, \ldots, f_d + \mathfrak{n}_p^2\} \subseteq \mathfrak{n}_p \big/ \mathfrak{n}_p^2$$

Entonces $\{X_1, \ldots, X_n, f_1, \ldots, f_d\}$ son también un sistema regular de parámetros de A. □

2.3. Equivalencia entre funciones de Nash y funciones semi-algebraicas infinitamente diferenciables.

Lo que viene ahora es la prueba de la equivalencia entre funciones semi-algebraicas de clase $\mathscr{C}^\infty$ definidas en un abierto semi-algebraico y las funciones analíticas algebraicas sobre los polinomios.

Definición 15. *Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ una función analítica. Diremos que f es analítico-algebraica (o función de Nash) si existe un polinomio no trivial $p \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n, T]$ tal que*

$$p(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)) = 0, \;\; \forall (x_1, \ldots, x_n) \in U.$$

Se suele denotar por $\mathcal{N}(U)$ al conjunto de las funciones de Nash definidas en un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

Se ofrecen una serie de ejemplos de funciones de Nash y no de Nash a modo de aclaración:

i) Un ejemplo de función de Nash puede ser la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(X) := \sqrt[15]{1 + X^8}/(X^{16}+1)$. Claramente f es algebraica pues, $\forall x \in \mathbb{R},\; q(x, f(x)) = 0$ donde:

$$q(X,T) := T^{15}(X^{16}+1) - (X^8+1) \;\text{ en } \mathbb{R}[X][T].$$

Para ver que f es analítica nos valdremos del Teorema de la Aplicación Implícita para funciones analíticas reales (véase Corolario B.2.4) del siguiente modo: sea $x \in \mathbb{R}$ y $t \in \mathbb{R}$ tal que $q(x,t) = 0$, tenemos que

$$\frac{\partial q}{\partial T}(x,t) = 15t^{14}(x^{16}+1) \neq 0.$$

Pues, de hecho, si la expresión anterior fuera nula, como $x^{16} + 1 > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, tendríamos que $t = 0$, pero esto es imposible pues por hipótesis $q(x,t) = 0$ y $x^8 + 1 \geq 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Dado que q es un polinomio y, por ende, analítico, aplicando el teorema mencionado, concluimos que para cualquier $x_0 \in R$ existe un abierto $U_{x_0} \subseteq \mathbb{R}$ con $x \in U_{x_0}$ tal que existe $\varphi : U_{x_0} \longrightarrow \mathbb{R}$ analítica verificando que $q(x, \varphi(x)) = 0$, $\forall x \in U_{x_0}$ donde $f(x) = \varphi(x)$. Concluimos así que f es una función analítica real.

ii) Usando los mismos argumentos y sin mayor esfuerzo, es claro que el clásico ejemplo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donde $g(X) := \sqrt{1 + X^2}$ es una función de Nash.

iii) Por otro lado, una función que no es Nash es, por ejemplo, $h(x) := \sin x$. En efecto, si $Gr(h)$ fuese algebraico en $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ tendríamos que su intersección con la recta $\{Y = 0\}$ debería ser algebraico sobre $\mathbb{R}$, esto es, o bien todo $\mathbb{R}$, o bien un número finito de puntos, lo que es imposible. De esta forma, concluimos que $Gr(h)$ no es algebraico y, por ende, h no es algebraica y tampoco Nash.

Es claro que si U es un abierto conexo, $\mathcal{N}(U)$ es un dominio de integridad que contiene a los polinomios $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ como subanillo. Nuestro objetivo es probar el siguiente resultado:

Teorema 2.3.1. *Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto semi-algebraico, entonces tenemos la siguiente igualdad de anillos*

$$\mathscr{C}^\infty(U) = \mathcal{N}(U).$$

En otras palabras, para cualquier función $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ son equivalentes:

i) f es una función semi-algebraica de clase $\mathscr{C}^\infty$.

ii) $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función analítica y algebraica sobre $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$.

Demostración. $i) \Longrightarrow ii)$ Para demostrar una de las implicaciones, sea $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ una función semi-algebraica de clase $\mathscr{C}^\infty$, donde $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es un semi-algebraico. Consideramos la clausura Zariski del grafo $Gr(\varphi)$

$$V = \overline{Gr(\varphi)}^z \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

Tal y como se vio en la Subsección 1.3.1, la dimensión de Krull de V es igual a la dimensión de $Gr(\varphi)$ como semi-algebraico y, por tanto,

$$\dim(V) = \dim(Gr(\varphi)) = \dim(U) = n,$$

porque $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es un abierto (y el ítem v de la Proposición 1.3.9). Por tanto, $V \subsetneq \mathbb{R}^{n+1}$ y ha de existir $p \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n, T]$ tal que φ no es nulo ni constante y $p|_V \equiv 0$. Pero entonces, p se anula sobre $Gr(\varphi)$ y, en particular,

$$p(x_1, \ldots, x_n, \varphi(x_1, \ldots, x_n)) = 0, \qquad \forall (x_1, \ldots, x_n) \in U. \tag{2.3.1}$$

Como U es abierto en $\mathbb{R}^n$, la igualdad (2.3.1) implica que para cada $\xi \in U$, el desarrollo de Taylor de φ en ξ ha de satisfacer

$$p(X_1, \ldots, X_n, \tau_\xi(\varphi)) = 0, \qquad \text{en } \mathbb{R}[[X_1 - \xi_1, \ldots, X_n - \xi_n]].$$

Por tanto, $\tau_\xi(\varphi) \in \mathbb{R}[[X_1 - \xi_1, \ldots, X_n - \xi_n]]_{alg}$ y, por lo discutido en resultados precedentes, $\tau_\xi(\varphi) \in \mathbb{R}\{X_1 - \xi_1, \ldots, X_n - \xi_n\}$ es una serie convergente en un entorno de $\xi \in U$. En particular, φ será analítica en un entorno de $\xi \in \mathbb{R}^n$ y esto es válido para todo $\xi \in U$. Por tanto, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función analítica. La Identidad (2.3.1) nos prueba también que es una función algebraica, con lo que tenemos probada la implicación $i) \Longrightarrow ii)$.

$ii) \Longrightarrow i)$ Lo único que nos queda para probar esta implicación es probar que si $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función analítica, algebraica sobre el anillo de polinomios, con $U \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces $Gr(\varphi)$ es un conjunto semi-algebraico. Como φ es una función analitica y algebraica, podemos garantizar que φ es continua y que existe una hiper-superficie $V_{\mathbb{A}}(f) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ tal que:

$$Gr(\varphi) \subseteq V_{\mathbb{A}}(f) \cap (U \times \mathbb{R}).$$

Con $f \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n, T]$. Construyamos un salchichonaje del polinomio f tal y como se vio en la Sección 1.3. Entonces, tenemos una partición de $\mathbb{R}^n$ en semi-algebraicos disjuntos dos a dos, es decir, se tiene:

$$\mathbb{R}^n = B_1 \cup \cdots \cup B_s. \tag{2.3.2}$$

Podemos considerar, sin pérdida de la generalidad, $r \leq s$ tal que $B_i' := B_i \cap U \neq \emptyset$ para cada $1 \leq i \leq r$. Así que tenemos una partición de U como unión de semi-algebraicos disjuntos:

$$U = B_1' \cup \cdots \cup B_r'. \tag{2.3.3}$$

Sobre cada elemento de la partición (2.3.2) tenemos una familia de funciones semi-algebraicas continuas:

$$\xi_{i,1}, \ldots, \xi_{i,t_i} : B_i \longrightarrow \mathbb{R},$$

tales que

(a) $\forall x \in B_i,\ \ \xi_{i,j}(x) < \xi_{i,j+1}(x)$, $\forall j$, con $1 \leq j \leq t_i - 1$.

(b) Para cada $x \in B_i$, el signo de $f(\underline{x}, t)$, con $t \in \mathbb{R}$, depende solamente del signo de $t - \xi_{i,j}(\underline{x})$.

Consideremos ahora la descomposición de U dada en (2.3.3) y las restricciones $\xi_{i,j}' := \xi_{i,j}|_{B_i'}$. Finalmente, como las componentes conexas de los conjuntos semi-algebraicos son también semi-algebraicos, podemos refinar la descomposición (2.3.3) y obtener una nueva descomposición como unión disjunta de semi-algebraicos conexos:

$$U = A_1 \cup \cdots \cup A_m. \tag{2.3.4}$$

Además, existirá, salvo reordenación de los subíndices, $p \leq m$, de manera que para cada $1 \in \{1, \ldots, m\}$ tendremos unas funciones semi-algebraicas continuas:

$$\varphi_{k,1}, \ldots, \varphi_{k,t_k} : A_k \longrightarrow \mathbb{R},$$

dadas mediante:

Si A_k es componente conexa de B_i', entonces $t_k = t_i$ y $\varphi_{i,k} := (\xi_{i,k}')|_{A_k}$.

Las funciones $\{\varphi_{k,j} :\ 1 \leq k \leq p,\ 1 \leq j \leq t_k\}$ satisfacen las propiedades (a) y (b) anteriores con respecto a la descomposición (2.3.4), es decir,

(a) Para cada $x \in A_k$, $\varphi_{k,j}(x) < \varphi_{k,j+1}(x)$, $\forall j$ con $1 \leq j \leq t_k - 1$.

(b) Para cada $x \in A_k$, y para cada $t \in \mathbb{R}$, el signo de $f(x,t)$ sólo depende de los signos $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{t_k}) \in \{>, =, <\}^{t_k}$ que satisfacen:

$$\big\{t - \varphi_{i,j}(\underline{x})\ \epsilon_j\ 0 :\ 1 \leq j \leq t_k\big\}.$$

Por otra parte, para cada $k \in \{p+1, \ldots, m\}$ el signo de φ se mantendrá constante. Ahora, consideremos la restricción de φ a A_k cuando $k \in \{1, \ldots, p\}$ y el grafo $Gr(\varphi|_{A_k})$. Como A_k es conexo, $Gr(\varphi|_{A_k})$ es un conjunto conexo. Además, los siguientes conjuntos son conexos:

$$\begin{array}{rl} & (-\infty, \xi_{k,1}) := \big\{(x,t) \in A_k \times \mathbb{R} :\ -\infty < t < \xi_{k,1}(x)\big\} \subseteq A_k \times \mathbb{R}, \\ 1 \leq j \leq t_k - 1 & (\xi_{k,j}, \xi_{k,j+1}) := \big\{(x,t) \in A_k \times \mathbb{R} :\ \xi_{k,j}(x) < t < \xi_{k,j+1}(x)\big\} \subseteq A_k \times \mathbb{R}, \\ & (\xi_{k,t_k}, +\infty) := \big\{(x,t) \in A_k \times \mathbb{R} : \xi_{k,t_k} < t < -\infty\big\} \subseteq A_k \times \mathbb{R}. \end{array}$$

Nótese que cada uno de esos conjuntos es abierto en $A_k \times \mathbb{R}$. Por su parte $Gr(\varphi|_{A_k})$ es un conexo cerrado. Ahora bien, si $\underline{x} \in A_k$ y $f(\underline{x}, Y)$ no es el polinomio idénticamente nulo, $\{f(\underline{x}, Y) = 0\}$ no puede intersecar ninguno de los tres tipos de conjuntos anteriores (porque $f(\underline{x}, Y) \in \mathbb{R}[Y] \setminus \{0\}$ sólo tiene un número finito de raíces en $\mathbb{R}$). Nótese también que, de hecho se verifica la igualdad:

$$\big\{\underline{x} \in U :\ f(\underline{x}, Y) \neq 0 \text{ en } \mathbb{R}[Y]\big\} = \bigcup_{k=1}^{p} A_k.$$

La razón es que si $f(\underline{x}, Y) \equiv 0$, el signo de $f(\underline{x}, t)$ está únicamente determinado para cada t. Más aún, veremos más adelante que $\bigcup_{k=1}^{p} A_k$ es un conjunto denso en U para la topología usual. Por el momento, sea k con $1 \leq k \leq p$, ha de existir $j(k) \in \{1, \ldots, t_k\}$ tal que $Gr(\varphi|_{A_k}) = Gr(\xi_{k,j(k)})$. La razón es que si $1 \leq k \leq p$, entonces, por lo antedicho, $f(\underline{x}, Y)$ solo podrá tener un número finito de raíces y

$$\begin{array}{rl} & Gr(\varphi|_{A_k}) \cap (-\infty, \xi_{k,1}) = \emptyset, \\ 1 \leq j \leq t_k - 1 & Gr(\varphi|_{A_k}) \cap (\xi_{k,j}, \xi_{k,j+1}) = \emptyset, \\ & Gr(\varphi|_{A_k}) \cap (\xi_{k,t_k}, +\infty) = \emptyset. \end{array}$$

Como el signo de f en los puntos de $Gr(\varphi|_{A_k})$ es constante, concluimos que para cada k, $1 \leq k \leq p$, se tiene

$$Gr(\varphi|_{A_k}) = \bigcup_{j=1}^{t_k} \Big(Gr(\xi_{k,j}) \cap Gr(\varphi|_{A_k}) \Big).$$

Esa es una descomposición como unión finita de cerrados, y disjuntos, del conjunto conexo $Gr(\varphi|_{A_k})$ por lo que ha de coincidir con alguno de ellos. En conclusión, para cada k, $1 \leq k \leq p$, existe un único $j(k)$, $1 \leq j(k) \leq t_k$, tal que se tiene

$$Gr(\varphi|_{A_k}) = Gr(\xi_{k,j(k)}).$$

En particular, si $A = \bigcup_{k=1}^{p} A_k$, tenemos que el grafo de φ restringido a A es una unión finita de semi-algebraicos:

$$Gr(\varphi|_A) = \bigcup_{k=1}^{p} Gr(\xi_{k,j(k)}).$$

Por tanto, $Gr(\varphi|_A)$ es un conjunto semi-algebraico. Consideramos ahora el polinomio:

$$f(X,T) = g_d(X_1, \ldots, X_n)T^d + \cdots + g_0(X_1, \ldots, X_n)$$

donde $g_d(X_1, \ldots, X_n) \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n] \setminus \{0\}$ es un polinomio no nulo. Consideremos el conjunto abierto semi-algebraico siguiente:

$$U_1 := \bigcup_{r=0}^{d} \big\{ \underline{x} \in U : \ g_r(\underline{x}) \neq 0 \big\},$$

y su complementario:

$$U \setminus U_1 := V_{\mathbb{A}}(g_d, \ldots, g_0),$$

que es un conjunto algebraico. Tomando $g = g_0^2 + \cdots + g_d^2 \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n] \setminus \{0\}$ podemos concluir que

$$U_1 = \big\{ x \in U : \ g(x) \neq 0 \big\} \subseteq U$$

es un abierto en U. Además, su complementario tiene dimensión menor o igual que $n-1$ y es una subvariedad algebraica propia de U. Entonces, si $\overline{U_1}$ es la clausura de U_1 en la topología usual de $\mathbb{R}^n$, se tendrá

$$\overline{U_1} \cap U = U,$$

es decir, U_1 es denso en U. Pero, observamos que

$$U_1 = \big\{ x \in U : \ f(\underline{x}, Y) \neq 0 \big\}, \text{ como polinomio en } \mathbb{R}[Y].$$

Por tanto, $A = U_1$ y $Gr(\varphi|_{U_1})$ es semi-algebraico. Tenemos la clausura de $\overline{Gr(\varphi|_{U_1})} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ que es semi-algebraico y consideramos el conjunto semi-algebraico

$$\overline{Gr(\varphi|_{U_1})} \cap (U \times \mathbb{R})$$

Concluimos la prueba con la siguiente afirmación:

Afirmación.

$$\overline{Gr(\varphi|_{U_1})} \cap (U \times \mathbb{R}) = Gr(\varphi)$$

$Gr(\varphi)$ será un conjunto semi-algebraico con lo que φ será una función semi-algebraica de clase $\mathscr{C}^\infty$ sobre U, i.e. $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(U)$ y se termina la prueba del enunciado.

Demostración de la afirmación. Sean $(x,y) \in \overline{Gr(\varphi|_{U_1})} \cap (U \times \mathbb{R})$. Entonces, existen $\{x_n\} \subseteq U_1$ tales que $(x_n, \varphi(x_n)) \in Gr(\varphi|_{U_1})$

$$(x,y) = \lim_n (x_n, \varphi(x_n)).$$

Como $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y $x \in U$, entonces

$$y = \varphi(x) = \lim_n \big(\varphi(x_n)\big)$$

por cuanto $\overline{Gr(\varphi|_{U_1})} \cap (U \times \mathbb{R}) \subseteq Gr(\varphi)$. Para acabar veamos que $Gr(\varphi) \subseteq (U \times \mathbb{R}) \cap \overline{Gr(\varphi|_{U_1})}$. Como $Gr(\varphi) \subseteq U \times \mathbb{R}$ solo queda ver que $Gr(\varphi) \subseteq \overline{Gr(\varphi|_{U_1})}$. Sea $(x,y) \in Gr(\varphi)$, entonces

$x \in U$ e $y = \varphi(x)$. Dado que U_1 es denso en U existe $(x_n) \subseteq U_1$ tal que $\lim_n x_n = x$, con lo que si definimos $(x_n, y_n) := (x_n, \varphi(x_n)) \in Gr(\varphi|_{U_1})$ y teniendo en cuenta que φ es continua

$$\lim_n (x_n,\ y_n) = (\lim_n x_n,\ \lim_n \varphi(x_n)) = \varphi(x,\ \varphi(\lim_n (x_n))) = (x,\ \varphi(x)) = (x,\ y).$$

Concluyendo así que $Gr(\varphi) \subseteq \overline{Gr(\varphi|_{U_1})}$. $\square$

Part 2

Apéndices del TFG.

APÉNDICE A

Dimensión de Krull, Extensiones Enteras y Normalización de Noether.

Índice

Esta sección del apéndice se dedicará a incluir una serie de resultados clásicos de Álgebra Conmutativa necesarios para seguir correctamente el cuerpo principal de este trabajo. Este material se podrá conseguir de forma ampliada en [**AtMc, 1969**], [**Mat, 1980**] y [**Ma, 1989**]. Muy en particular se seguirá la exposición de [**Pardo, 2024**].

A.1. Dimensión de Krull.

Gran parte de los resultados que aquí se exponen son debidos a W. Krull, quien estudió bajo la dirección e influencia de F. Klein y E. Noether en Göttingen. En su trabajo [**Krull, 1928**], introdujo la noción de dimensión de anillo noetheriano lo cual desembocó en el enunciado del Teorema del Ideal Principal, influenciando posteriormente a otros geómetras como C. Chevalley y O. Zariski que continuarán su obra. Junto con otros trabajos, W. Krull fue el responsable de la consolidación del Álgebra Conmutativa como nueva rama del conocimiento matemático.

A.1.1. Dimensión de Krull en espacios topológicos, anillos y módulos. La noción de dimensión que vamos a desarrollar se adapta a espacios topológicos neotherianos y se basa en un concepto intuitivamente muy simple, como son las cadenas de irreducibles.

DEFINICIÓN 16. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Llamaremos dimensión de Krull de X al máximo de las longitudes de cadenas de irreducibles de X, es decir, el máximo de los números naturales $n \in \mathbb{N}$ tales que existen:*

$$\emptyset \subsetneq V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_n \subseteq X$$

donde $V_0, \ldots, V_n$ son cerrados irreducibles de X.

EJEMPLO A.1.1.
- Para un conjunto algebraico $V \subseteq K^n$, su dimensión de Krull es el máximo de las longitudes de cadenas de conjuntos algebraicos irreducibles contenidos en V.
- Dado un cerrado $V \subseteq Spec(A)$, llamaremos dimensión de Krull de V al máximo de las longitudes de cadenas de irreducibles contenidos en V. En este caso, podemos encontrar cerrados de dimensión 1 formado por un conjunto finito de puntos.

DEFINICIÓN 17 (**Dimensión de Krull en anillos y módulos**). *Llamaremos dimensión de Krull de un anillo R a la dimensión de Krull de $Spec(R)$ y lo denotaremos mediante $\dim_{\mathrm{Kr}}(R)$. Llamaremos dimensión de Krull de un R-módulo M a la dimensión de Krull de su soporte $\mathrm{Supp}(M)$ y lo denotaremos por $\dim_{\mathrm{Kr}}(M)$.*

Definición 18. *Sea R un anillo y $\mathfrak{p}$ un ideal primo de R.*

i) Llamaremos altura de $\mathfrak{p}$ al máximo de las longitudes de cadenas de ideales primos de R contenidos en $\mathfrak{p}$, esto es, el máximo de los números naturales $n \in \mathbb{N}$ tales que existe:

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n \subseteq \mathfrak{p}$$

donde $\mathfrak{p}_0, \ldots, \mathfrak{p}_n$ son ideales primos de R. Lo denotaremos por $ht(\mathfrak{p})$

ii) Llamaremos coaltura de $\mathfrak{p}$ al máximo de las longitudes de cadenas de ideales primos de R que contienen a $\mathfrak{p}$, esto es, el máximo de los números naturales $n \in \mathbb{N}$ tales que existe:

$$\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n$$

donde $\mathfrak{p}_0, \ldots, \mathfrak{n}$ son ideales primos de R. Lo denotaremos por $coht(\mathfrak{p})$.

Proposición A.1.2. *Sea R un anillo. Se tiene:*

i)

$$\dim_{\mathrm{Kr}}(R) = \max\{ht(\mathfrak{p}) : \mathfrak{p} \in Spec(R)\} = \max\{ht(\mathfrak{m}) : \mathfrak{m} \in \mathrm{MaxSpec}(R)\}.$$

ii)

$$\dim_{\mathrm{Kr}}(R) = \max\{coht(\mathfrak{p}) : \mathfrak{p} \in Spec(R)\}$$

iii) Si A es noetheriano,

$$\dim_{\mathrm{Kr}}(R) = \max\{coht(\mathfrak{p}) : \mathfrak{p} \in Ass(R)\}$$

Definición 19. *Sea $\mathfrak{a}$ un ideal de un anillo R.*

i) Llamaremos altura del ideal $\mathfrak{a}$ al ínfimo de las alturas de los ideales primos que contienen a $\mathfrak{a}$. Lo denotaremos por ht($\mathfrak{a}$).

ii) Llamaremos coaltura del ideal $\mathfrak{a}$ al máximo de las coalturas de los ideales primos que contienen al ideal $\mathfrak{a}$. Lo denotaremos por coht($\mathfrak{a}$).

En ocasiones a la altura de la denomina codimensión, mientras que a la coaltura se la denomina dimensión del ideal.

Proposición A.1.3. *Sea R un anillo, $\mathfrak{a}$ un ideal de E, $\mathfrak{p}$ un ideal primo de R. Se tienen las siguientes desigualdades:*

$$\begin{aligned} \dim_{\mathrm{Kr}}(R/\mathfrak{a}) &= coht(\mathfrak{a}), \\ \dim_{\mathrm{Kr}}(R_{\mathfrak{p}}) &= ht(\mathfrak{p}), \\ ht(\mathfrak{a}) + coht(\mathfrak{a}) &\leq \dim_{\mathrm{Kr}}(R) \end{aligned}$$

Proposición A.1.4. *Si R es un anillo noetheriano y M es un R-módulo finitamente generado, se tiene:*

$$\dim_{\mathrm{Kr}}(M) = \dim_{\mathrm{Kr}}(R/Ann_R(M)) = coht(Ann_R(M)).$$

Ejemplo A.1.5.

- Si K es un cuerpo algebraicamente cerrado y $V \subseteq K^n$ es una una variedad algebraica, se tiene:

$$\dim_{\mathrm{Kr}}(V) = \dim_{\mathrm{Kr}}(K[V]) = coht(I(V)),$$

  donde la primera es la dimensión de Krull de V como espacio topológico con la topología de Zariski y la segunda es la dimensión como anillo.
- Obsérvese que en cuerpos finitos, la dimensión de toda variedad algebraica $V \subseteq K^n$ es 0, mientras que los ideales pueden tener distintas alturas.
- Los dominios de ideales principales son anillos noetherianos cuya dimensión de Krull es igual a 1. El recíproco no es cierto. Baste considerar el anillo $\mathbb{C}[X,Y]/(X^2+Y^2)$ que es un anillo noetheriano de dimensión de Krull igual a 1, pero el maximal definido por las clases de X, Y no es principal.

A.2. Extensiones Enteras de Anillos.

DEFINICIÓN 20 (**Extensión enteras de anillos**). *Dada una extensión de anillos $R \subseteq R'$, un elemento $x \in R'$ se dice entero sobre R si verifica una ecuación polinomial mónica con coeficientes en R. Una extensión $R \subseteq R'$ se dice entera si todos los elementos de R' son enteros sobre R.*

Dado un R-módulo M, para cada elemento $a \in R$ consideramos la homotecia definida por a como el morfismo de R-módulos siguientes:

$$\begin{array}{rccc} \eta_a : & M & \longrightarrow & M \\ & m & \longmapsto & am \end{array}$$

DEFINICIÓN 21 (**Módulo Fiel**). *Un R-módulo se dice fiel si para cualesquiera dos elementos $a, b \in R$, con $a \neq b$, las homotecias verifican $\eta_a \neq \eta_b$. En otras palabras la aplicación que asocia a cada $a \in R$ la homotecia $\eta_a \in End_R(M) = Hom_R(M, M)$ es inyectiva.*

PROPOSICIÓN A.2.1. *Las siguientes propiedades son equivalentes para una extensión de anillos $R \subseteq R'$:*

i) *Un elemento $x \in R'$ es entero sobre R.*
ii) *La R-álgebra $R[x]$ es un R-módulo finitamente generado.*
iii) *La R-álgebra $R[x]$ está contenida en un subanillo B de R' tal que B es un R-módulo finitamente generado.*
iv) *Existe un $R[X]$-módulo fiel M que es de generación finita como R-módulo.*

COROLARIO A.2.2 (**Clausura Entera**). *Dada una extensión de anillos $R \subseteq R'$, los elementos de R' que son enteros sobre R forman un subanillo $\overline{R}$ de R' llamado clausura entera de R en R'.*

DEFINICIÓN 22 (**Dominios Normales**). *Sea R un dominio de integridad y $K := qf(R)$ su cuerpo de fracciones. Diremos que R es íntegramente cerrado en su cuerpo de fracciones o normal si para cualquier $\zeta \in K$, tal que existe un polinomio mónico $f \in R[X]$ verificando $f(\zeta) = 0$, entonces $\zeta \in R$.*

El siguiente resultado podrá encontrarse en [**ZarSam, 1960**]:

PROPOSICIÓN A.2.3. *Sea $\overline{A}$ la clausura entera de un dominio de integridad A y $f : A \to B$ un morfismo de anillos inyectivo de A en un anillo íntegramente cerrado en su cuerpo de fracciones o normal, B. Existe un único morfismo de anillos $\overline{f} : \overline{A} \longrightarrow B$ tal que $\overline{f}|_A = f$.*

COROLARIO A.2.4 (**Transitividad**). *Dadas extensiones de anillos $R \subseteq R' \subseteq R''$, si R' es entero sobre R y R'' es entero sobre R', entonces R'' es entero sobre R. En particular, la clausura entera de R en R' es integramente cerrado en R'.*

PROPOSICIÓN A.2.5. *Dada una extensión entera de anillos $R \subseteq R'$. Se tiene:*

- *Si $\mathfrak{b}$ es un ideal de R', $R'/\mathfrak{b}$ es entero sobre $R/\mathfrak{b}^c$.*
- *Si S es un subconjunto multiplicativamente cerrado de R, entonces $S^{-1}R'$ es entero sobre $S^{-1}R$.*

A.2.1. Normalización de Serre.

DEFINICIÓN 23. *Sea A un dominio de integridad y $K = qf(A)$. Llamaremos normalizado de A, que denotaremos por $\overline{A}$, a la clausura entera de A en su cuerpo de fracciones.*

Nótese que el normalizado de A es el menor subanillo de K que contiene a A y que es íntegramente cerrado en K. Tendremos que

$$A \subseteq \overline{A} \subseteq K.$$

Un resultado clásico en [**Serre, 2000**] afirma lo siguiente:

TEOREMA A.2.6. *Sea K un cuerpo, A una K-álgebra finitamente generada y dominio de integridad. Sea $L = qf(A)$ el cuerpo de fracciones de A y sea $\overline{A}$ la clausura entera de A en L. Entonces, $\overline{A}$ es una A-álgebra finitamente generada.*
En términos más explícitos, si A es una K-álgebra finitamente generada y A es dominio de

integridad, entonces existe un anillo de polinomios con coeficientes en K $(K[X_1,\ldots,X_n])$ *y existe un ideal primo* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(K[X_1,\ldots,X_n])$ *tales que*

$$A = {K[X_1,\ldots,X_n]}\big/_{\mathfrak{p}},$$

Con las notaciones precedentes existen nuevas variables $\{Z_1,\ldots,Z_p\}$ *sobre* K *y un ideal primo* $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(K[X_1,\ldots,X_n,Z_1,\ldots,Z_p])$ *tal que*

i) $\mathfrak{q}^c = \mathfrak{q} \cap K[X_1,\ldots,X_n] = \mathfrak{p}$.

ii) $\overline{A}$ *es isomorfo a*

$$K[X_1,\ldots,X_n,Z_1,\ldots,Z_p]\big/_{\mathfrak{q}}$$

iii) El cuerpo de fracciones de los dominios A *y* $\overline{A}$ *coinciden. En particular,* $\dim(A) = \dim(\overline{A})$ *y los Teoremas de Ascenso y de Descenso (Sección A.3 posterior) se satisfacen en la extensión de anillos* $A \subseteq \overline{A}$.

A.3. Teoremas de ascenso y descenso. Going-Up y Going-Down.

A.3.1. Going-Up.

Proposición A.3.1. *Sea* $R \subseteq R'$ *una extensión entera de dominios de integridad. Entonces* R' *es un cuerpo si y solamente si* R *es un cuerpo. En particular, si* $\mathfrak{q}$ *es un ideal primo de* R', *su contracción* $\mathfrak{p} := \mathfrak{q}^c$ *es maximal en* R *si y solamente si* $\mathfrak{q}$ *es maximal en* R'.

Corolario A.3.2. *Sea* $R \subseteq R'$ *una extensión entera de anillos. Entonces, no hay relación de inclusión propia entre ideales primos de* R' *que se contraen sobre el mismo ideal primo* R.

Corolario A.3.3. *Sea* $R \subseteq R'$ *una extensión entera de anillos y* $\varphi : Spec(R') \longrightarrow Spec(R)$ *la aplicación continua dada por la contracción de ideales. Entonces:*

- φ *es suprayectiva*
- $\varphi(\operatorname{MaxSpec}(R')) \subseteq \operatorname{MaxSpec}(R)$ *y la siguiente aplicación está bien definida y es suprayectiva:*

$$\varphi_{\operatorname{MaxSpec}(R')} : \operatorname{MaxSpec}(R') \longrightarrow \operatorname{MaxSpec(R)}.$$

Se puede incluir también una interpretación geométrica.

Corolario A.3.4. *Sea* $\varphi : V \longrightarrow W$ *un morfismo de variedades algebraicas dominante (i.e.* $\varphi^* : \mathbb{K}[W] \longrightarrow \mathbb{K}[V]$ *es inyectiva). Entonces, si la extensión* $\mathbb{K}[W] \subseteq \mathbb{K}[V]$ *es entera,* φ *es suprayectiva.*

Teorema A.3.5 (Going-Up). *Sea* $R \subseteq R'$ *una extensión entera de anillos. Sean dadas:*

- *Una cadena ascendente de ideales primos de* R:

$$\mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{p}_n,$$

- *Una cadena ascendente de ideales primos de* R':

$$\mathfrak{q}_1 \subseteq \mathfrak{q}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{q}_m,$$

De tal modo que $n > m$ *y* $\mathfrak{q}_i^c = \mathfrak{p}_i$, *para cada* i, $1 \leq i \leq m$. *Entonces, existe una cadena ascendente de ideales primos de* R':

$$\mathfrak{q}_m \subseteq \mathfrak{q}_{m+1} \subseteq \mathfrak{q}_{m+2} \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{q}_n,$$

tales que $\mathfrak{q}_i^c = \mathfrak{p}_i$ *para cada* i, $m+1 \leq i \leq n$.

A.3.2. Going-Down.

Proposición A.3.6. *Sea* $R \subseteq R'$ *una extensión de anillos,* $\bar{R}$ *la clausura entera de* R *en* R' *y* S *un sistema multiplicativamente cerrado de* R. *Entonces,* $S^{-1}\bar{R}$ *es la clausura entera de* $S^{-1}R$ *en* $S^{-1}R'$.

De la proposición anterior se deduce que la condición de "normalidad" en dominios de integridad, tal y como se vio en la Definición 22, es una propiedad local.

Teorema A.3.7 (Going-Down). *Sea* $R \subseteq R'$ *una extensión entera de anillo. Sean dadas:*

- *Una cadena descendente de ideales primos de R:*

$$\mathfrak{p}_1 \supseteq \mathfrak{p}_2 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{p}_n,$$

- *Una cadena descendente de ideales primos de R':*

$$\mathfrak{q}_1 \supseteq \mathfrak{q}_2 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{q}_m,$$

De tal modo que $n > m$ y $\mathfrak{q}_i^c = \mathfrak{p}_i$, para cada i, $1 \leq i \leq m$. Entonces, existe una cadena descendente de ideales primos de R':

$$\mathfrak{q}_m \supseteq \mathfrak{q}_{m+1} \supseteq \mathfrak{q}_{m+2} \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{q}_n,$$

tales que $\mathfrak{q}_i^c = \mathfrak{p}_i$ para cada i, $m+1 \leq i \leq n$.

A.4. Sobre el grado de trascendencia.

Seguiremos, por unos momentos, la presentación de [**Stewart, 1989**]. Una extensión de cuerpos $K \subseteq L$ se dice finitamente generada si existe un conjunto finito $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subseteq L$ de elementos de L tal que $L = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ donde $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ es el menor subcuerpo de L que contiene a K y al conjunto $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. No debe confundirse extensión finitamente generada con extensión finita de cuerpos (que son las extensiones usuales en Teoría de Galois). Así, por ejemplo, el Teorema de Lindemann (cf. [**Stewart, 1989**]) nos garantiza que $\pi \in \mathbb{R}$ es trascendente sobre $\mathbb{Q}$. Por tanto, el cuerpo $\mathbb{Q}(\pi)$ es una extensión finitamente generada que no es extensión finita.

Definición 24. *Sea $K \subseteq L$ una extensión de cuerpos y sean $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subseteq L$ una familia finita de elementos de L. Decimos que $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ son algebraicamente independientes sobre K si no existe ningún polinomio no nulo $p \in K[T_1, \ldots, T_n]$ tal que $p(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0$. Es decir,*

$$\forall p \in K[T_1, \ldots, T_n], \quad p(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0 \Longrightarrow p \equiv 0$$

Nótese que la condición de ser algebraicamente independientes sobre K puede expresarse también del modo siguiente. Consideremos el siguiente morfismo de K-álgebras:

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & K[T_1, \ldots, T_n] & \longrightarrow & L \\ & p & \longmapsto & p(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \end{array}$$

Entonces, $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ son algebraicamente independientes sobre K si y solamente si φ es monomorfismo de K-álgebras. En particular, la K-álgebra finitamente generada $K[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] \subseteq L$ es isomorfa al anillo de polinomios en n variables con coeficientes en K. Nótese que $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = qf(K[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]) = K(T_1, \ldots, T_n)$ es el cuerpo de fracciones y que, contrariamente al caso de extensiones finitas, $K[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ nunca es cuerpo para $n \geq 1$.

Proposición A.4.1 (**Existencia**). *Sea $K \subseteq L$ una extensión de cuerpos tal que L es un cuerpo finitamente generado sobre K. Entonces, existen $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\} \subseteq L$ tales que se verifican las siguientes propiedades:*

i) *$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ son algebraicamente independientes sobre K.*
ii) *El cuerpo intermedio $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ (intermedio porque $K \subseteq K(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \subseteq L$), satisface que $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \subseteq L$ es una extensión finita de cuerpos y, por ende, algebraica (i.e. el grado satisface $[L : K(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)] < +\infty$).*

Un resultado clásico debido a Steinitz que la cantidad r antes hallada es única.

Teorema A.4.2 (**Steinitz**). *Sea $K \subseteq L$ una extensión finitamente generada de cuerpos. Sean $\mathcal{B}_1 = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{\beta_1, \ldots, \beta_s\}$ dos subconjuntos finitos de L que satisfacen:*

i) *Tanto $\mathcal{B}_1$ como $\mathcal{B}_2$ son algebraicamente independientes.*
ii) *Los grados satisfacen:*

$$[L : K(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)] < +\infty$$
$$[L : K(\beta_1, \ldots, \beta_s)] < +\infty$$

Entonces $\#(\mathcal{B}_1) = r = s = \#\mathcal{B}_2$.

Definición 25. *Sea $K \subseteq L$ una extensión de cuerpos con L finitamente generado sobre K.*

i) Cualquier subconjunto finito $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\} \subseteq L$ que satisface las propiedades i) y ii) de la proposición A.4.1 precedente se denomina base de trascendencia de la extensión $K \subseteq L$.

ii) Al cardinal de una cualquiera de las bases de trascendencia de la extensión $K \subseteq L$ se le denomina grado de trascendencia de la extensión y se denota mediante:

$$trdeg_K(L).$$

Una vez establecida la noción de grado de trascendencia, nos encontramos en condiciones de introducir una serie de resultados sobre la dimensión de Krull además de los previamente mostrados.

PROPOSICIÓN A.4.3. *Sea K un cuerpo,*

$$\dim_{Kr}(K[X_1, \ldots, X_n]) = n$$

Además, $ht(X_1, \ldots, X_i) = i,\ 1 \leq i \leq n$.

COROLARIO A.4.4. *Sea K un cuerpo,*

i) Si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de $K[X_1, \ldots, X_n]$,

$$coht(\mathfrak{p}) = \dim_{Kr}(K[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{p}) = trdeg_K(q.f.(K[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{p}))$$

ii) Si $V \subseteq K^n$ es una variedad algebraica irreducible:

$$coht(I(V)) = \dim_{Kr}(K[V]) = trdeg_K(K(V))$$

COROLARIO A.4.5. *Si $V \subseteq \mathbb{K}^n$ es una variedad algebraica, existen $d \in \mathbb{N}$ y una aplicación lineal $\varphi : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^d$ tal que:*

- *$\varphi|_V : V \longrightarrow \mathbb{K}^d$ es suprayectiva.*
- *Para cada $y \in \mathbb{K}^d$, la fibra $\varphi^{-1}(y)$ es finita.*

COROLARIO A.4.6. *Para cualquier ideal $\mathfrak{a}$ de $K[X_1, \ldots, X_n]$ se tiene:*

$$ht(\mathfrak{a}) + coht(\mathfrak{a}) = n$$

COROLARIO A.4.7. *Toda K-álgebra A finitamente generada tiene dimensión finita, todo ideal primo suyo tiene altura y coaltura finitas y acotadas por la dimensión de A.*

OBSERVACIÓN A.4.8. La propiedad enunciada en el anterior Corolario no es extensible a cualquier anillo noetheriano, aunque sí es extensible a los anillos locales noetherianos.

DEFINICIÓN 26. *Un anillo R se denomina catenario si para cualesquiera dos ideales primos $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}'$ de R, se verifica:*

$$ht(\mathfrak{p}/\mathfrak{p}') = ht(\mathfrak{p}') - ht(\mathfrak{p})$$

COROLARIO A.4.9. *Los anillos $K[X_1, \ldots, X_n]$ son catenarios. Más aún, para cualesquiera dos ideales primos $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}'$ se tiene:*

$$ht(\mathfrak{p}/\mathfrak{p}') = ht(\mathfrak{p}') - ht(\mathfrak{p}) = coht(\mathfrak{p}) - coht(\mathfrak{p}')$$

DEFINICIÓN 27. *Llamaremos sucesión regular en un anillo R a toda cadena de elementos de R, $f_1, \ldots, f_r \in R$, tal que:*

- *f_i no es divisor de cero en $R/(f_1, \ldots, f_{i-1})$.*
- *$(f_1, \ldots, f_r) \subsetneq R$.*

COROLARIO A.4.10. *Sean $f_1, \ldots, f_n$ una sucesión regular de $K[X_1, \ldots, X_n]$. Entonces si K es algebraicamente cerrado se tiene:*

$$\dim_{Kr}(V(f_1, \ldots, f_r)) = n - r$$

COROLARIO A.4.11 (**Dimensión de la Intersección**). *Sean $\mathfrak{p}_1$ y $\mathfrak{p}_2$ dos ideales primos en un anillo de polinomios $R = K[X_1, \ldots, X_n]$ sobre un cuerpo K. Supongamos $\dim_{\mathrm{Kr}}(R/\mathfrak{p}_1) = r$, $\dim_{\mathrm{Kr}}(R/\mathfrak{p}_2) = s$. Entonces, para cualquier ideal primo $\mathfrak{q}$ minimal sobre $\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2$ se tiene:*

$$\dim_{\mathrm{Kr}}(R/\mathfrak{p}) \geq r + s - n$$

COROLARIO A.4.12. *Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado V, $W \subseteq K^n$ dos variedades algebraicas irreducibles. Entonces,*

$$\dim_{\mathrm{Kr}}(V \cap W) \geq \dim_{\mathrm{Kr}}(V) + \dim_{\mathrm{Kr}}(W) - n.$$

A.5. El Lema de Normalización de Noether.

TEOREMA A.5.1 (**Lema de Normalización de E.Noether**). *Sea A una K-álgebra finitamente generada sobre un cuerpo y sea $\mathfrak{a} \subseteq A$ un ideal propio. Entonces, existen elementos $Y_1, \ldots, Y_d \in A$ y existe $s \leq d$ tales que:*

i) $\{Y_1, \ldots, Y_d\}$ *son algebraicamente independientes sobre K.*

ii) *A es un $K[Y_1, \ldots, Y_d]$-módulo finitamente generado.*

iii) $\mathfrak{a} \bigcap K[Y_1, \ldots, Y_d] = (Y_{s+1}, \ldots, Y_d)$.

Más aún, si K es un cuerpo con suficientes elementos y $A := K[x_1, \ldots, x_n]$ es una K-álgebra finitamente generada, podemos suponer que los elementos Y_i son combinaciones lineales de los elementos $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

Entre las consecuencias del Lema de Normalización de Noether se encuentran los siguientes corolarios:

COROLARIO A.5.2. *Sea K un cuerpo infinito, $\mathfrak{a}$ ideal homógeneo de $K[X_0, \ldots, X_n]$ entonces existen $\{Y_0, \ldots Y_n\}$ polinomios homogéneos, tales que:*

i) $K[Y_0, \ldots, Y_n] \hookrightarrow K[X_0, \ldots, X_n]$ *es una extensión entera de anillos.*

ii) $\mathfrak{a} \bigcap K[Y_0, \ldots, Y_n] = (Y_{r+1}, \ldots, Y_n)$.

iii) *La extensión de anillos:*

$$K[Y_0, \ldots, Y_n] \hookrightarrow K[X_0, \ldots, X_n]/\mathfrak{a}$$

es entera y es un morfismo de anillos graduados de grado 0.

Una variante del mismo resultado es el siguiente enunciado:

TEOREMA A.5.3 (**Normalización de Noether Genérica**). *Sea K un cuerpo infinito, sea $\mathfrak{a}$ un ideal propio de $K[X_1, \ldots, X_n]$. Sea $\mathscr{M}_n(K)$ el espacio de las matrices $n \times n$ sobre K. Entonces, existe un abierto de Zariski $U \subseteq \mathscr{M}_n(K)$, con $U \subseteq GL(n, K)$, tal que se verifica la siguiente propiedad:*
Existe $d \in \mathbb{N}$ tal que para cada $P \in U$, el cambio de variables:

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix},$$

verifica que la siguiente es una extensión entera de anillos:

$$K[Y_1, \ldots, Y_d] \hookrightarrow K[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{a}.$$

TEOREMA A.5.4 (**Grado y normalización de Noether**). *Sea $F := [f_1, \ldots, f_s] \in K[X_1, \ldots, X_n]^s$ un sistema de ecuaciones polinomiales generando un ideal $\mathfrak{a}$. Sea $V(F) \subseteq \mathbb{K}^n$ la variedad algebraica que definen y supongamos que es equidimensional (i.e. todas sus componentes tienen la misma dimensión). Sea $K[Y_1, \ldots, Y_r]$ una normalización de Noether de $K[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{a}$. Supongamos que $Y_1, \ldots, Y_r$ son combinaciones lineales de las variables $X_1, \ldots, X_n$. Sea $g \in K[X_1, \ldots, X_n]$ un polinomio adicional. Se tiene:*

i) *La siguiente es una extensión entera de anillos:*

$$K[Y_1, \ldots, Y_r] \longleftrightarrow K[X_1, \ldots, X_n]/\sqrt{\mathfrak{a}}.$$

ii) *La imagen del morfismo G siguiente es una hipersuperficie de $\mathbb{K}^{r+1}$, donde*

$$G : V \longrightarrow \mathbb{K}^{r+1}$$

viene dado por:

$$G(x_1, \ldots, x_n) := (Y_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, Y_r(x_1, \ldots, x_n), g(x_1, \ldots, x_n)).$$

iii) *El grado de la hipersuperficie $G(V)$ está acotado por $deg(V) \cdot deg(g)$.*

iv) *El polinomio mínimo mónico de la dependencia entera de $g + \sqrt{\mathfrak{a}} \in K[X_1, \ldots, X_n]/\sqrt{\mathfrak{a}}$ sobre $K[Y_1, \ldots, Y_r]$ está acotado por $deg(V) \cdot deg(g)$ y, de hecho, coincide con el polinomio mínimo de la hipersuperficie $G(V)$.*

Más aún, si $V(F)$ es irreducible se tiene:

$$\left[qf(K[X_1, \ldots, X_n]/\sqrt{\mathfrak{a}}) : K(Y_1, \ldots, Y_r)\right] \leq deg(V(F)),$$

donde qf denota el cuerpo de fracciones.

A.5.1. Extensiones Enteras, Normalización de Noether y Dimensión de Krull. Con los siguientes resultados se aprecia el buen comportamiento de la dimensión de Krull con extensiones enteras de anillos.

TEOREMA A.5.5. *Sea $A \subseteq B$ una extensión entera de anillos, entonces:*

$$\dim_{\mathrm{Kr}}(A) = \dim_{\mathrm{Kr}}(B)$$

Más aún, si $\mathfrak{p} \in Spec(B)$, entonces

$$ht(\mathfrak{p}) = ht(\mathfrak{p}^c),$$

donde $\mathfrak{p}^c = \mathfrak{p} \cap A$ es la contracción de $\mathfrak{p}$.

Para el caso de dominios normales:

TEOREMA A.5.6. *Sea A un dominio normal y $A \subseteq B$ una extensión entera de anillos. Entonces, para cada ideal primo $\mathfrak{p} \in Spec(B)$ se tiene que*

$$coht(\mathfrak{p}) = coht(\mathfrak{p}^c).$$

En particular, si $\dim_{\mathrm{Kr}}(A) < \infty$, para cada ideal primo minimal $\mathfrak{p}$ de B se tiene que

$$\dim_{\mathrm{Kr}}(A) = coht(\mathfrak{p}).$$

APÉNDICE B

Álgebra Local.

Índice

B.1. Anillos y módulos topológicos: filtraciones, graduaciones y completados.

B.1.1. Anillos topológicos.

DEFINICIÓN 28. *Un grupo topológico es un grupo $(G,\cdot)$ dotado con una topología $\mathcal{T} \subseteq 2^G$ de tal modo que las siguientes dos operaciones son continuas, considerando en $G \times G$ la topología producto inducida por $\mathcal{T}$:*

i) La operación de grupo $\cdot : G \times G \longrightarrow G$ es continua.
ii) El proceso de tomar inverso,

$$\begin{array}{rcl}(\ )^{-1} : G & \longrightarrow & G \\ a & \mapsto & a^{-1},\end{array}$$

es continua.

DEFINICIÓN 29 (**Anillo topológico**). *Un anillo $(R,+,\cdot)$, dotado con una topología $\mathcal{T} \subseteq 2^R$ se denomina anillo topológico si se verifican las siguientes dos propiedades:*

i) El grupo $(R,+)$ es un grupo topológico con la topología $\mathcal{T}$.
ii) La operación $\cdot : R \times R \longrightarrow R$ es continua, considerando en $R \times R$ la topología producto inducida por $\mathcal{T}$.

DEFINICIÓN 30. *Un cuerpo topológico es un par $((K,+,\cdot),\mathcal{T})$ donde $(K,+,\cdot)$ es un cuerpo, $\mathcal{T} \subseteq 2^K$ es una topología y se verifica:*

i) $(K,+,\cdot)$ es un anillo topológico respecto de $\mathcal{T}$.
ii) El grupo $(K \setminus \{0\},\cdot)$, con la topología inducida en $K \setminus \{0\}$ por la topología $\mathcal{T}$, es un grupo topológico.

Como ejemplos más comunes de cuerpo topológicos nos encontramos con $K = \mathbb{C}$ ó $K = \mathbb{R}$ en los que se pueden considerar tanto la topología usual $\mathcal{T}_u$ como la topología co-finita (también denominada topología de Zariski). Si K es un cuerpo algebraicamente cerrado usualmente se considera la topología de Zariski y para el caso en que $K = R$ un cuerpo realmente cerrado será posible considerar también la topología inducida por los abiertos semi-algebraicos de R.

Definición 31. *Sea $(R, \mathcal{T})$ un anillo topológico, M un R-módulo y $\mathcal{T}'$ una topología sobre M. Diremos que M es un R-módulo topológico si se verifica:*

i) *$(M, +)$ es un grupo topológico con respecto a $\mathcal{T}'$.*
ii) *La operación $\cdot_R : R \times M \longrightarrow M$, con $R \times M$ dotado con la topología producto, es continua.*

Proposición B.1.1. *Sean $(R, \mathcal{T})$ un anillo topológico y $(M, \mathcal{T}')$ un R-módulo topológico. Entonces para $x \in R$ y $m \in M$, se tiene:*

i) *La traslación $t_x : M \longrightarrow M$, dada por $t_x(r) = x + r$, es un homeomorfismo.*
ii) *La traslación $t_m : M \longrightarrow M$, dada por $t_m(n) = m + n$, es un homeomorfismo.*

Proposición B.1.2. *Sea R un anillo cualquiera y consideramos una colección de subconjuntos de R, $\Sigma \subseteq 2^R$ verificando:*

i) *La intersección de dos elementos cualesquiera de Σ contiene a algún elemento de Σ.*
ii) *Si $U \in \Sigma$, existe $W \in \Sigma$ tal que:*

$$W - W = \{x - y : x, y \in W\} \subseteq U, \quad W^2 := \{xy : \ x, y \in W\} \subseteq U.$$

iii) *Si $U \in \Sigma$, $x \in U$ e $y \in R$, existe $W \in \Sigma$ tal que:*

$$t_x(W) \subseteq U, \quad yW := \{y \cdot a : \ a \in W\} \subseteq U.$$

Entonces, existe una única topología $\mathcal{T}$ sobre R tal que $(R, \mathcal{T})$ es un anillo topológico y Σ es una base de entornos abiertos de $0 \in R$.

Proposición B.1.3. *Sea $(R, \mathcal{T})$ un anillo topológico y Σ una base de entornos abierto de $0 \in R$. Entonces, Σ verifica las propiedades i), ii) y iii) de la Proposición anterior.*

Resultados análogos se tienen para el caso de módulos topológicos (cf. [**Po, 66**]).

Proposición B.1.4. *Sea $(R, \mathcal{T})$ un anillo topológico y $(M, \mathcal{T}')$ un R-módulo topológico con respecto a la topología $\mathcal{T}$ sobre R. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) *$(M, \mathcal{T}')$ es un espacio topológico de Hausdorff.*
ii) *El conjunto $\{0\}$ es cerrado.*
iii) *Si Σ' es una base de entornos abiertos de $0 \in M$ se tiene:*

$$\{0\} = \bigcap_{U \in \Sigma'} U.$$

B.1.2. Filtraciones.

Definición 32 (**Filtración en anillos y módulos**). *i)* *Sea R un anillo. Llamaremos filtración sobre R a toda colección Σ, cadena descendente de ideales:*

$$\Sigma := \{R = \mathfrak{a}_0 \supseteq \mathfrak{a}_1 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{a}_n \supseteq \dots\}$$

verificando $\mathfrak{a}_n \cdot \mathfrak{a}_m \subseteq \mathfrak{a}_{m+n}$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$. Diremos que (R, Σ) es un anillo filtrado.

ii) *Sea (R, Σ) un anillo filtrado y M un R-módulo. Llamaremos filtración sobre M compatible con la filtración $\Sigma = \{\mathfrak{a}_n : n \in \mathbb{N}\}$ de R, a toda cadena descendente de submódulos de M:*

$$\Sigma' := \{M = N_0 \supseteq N_1 \supseteq \cdots \supseteq N_n \supseteq \dots\}$$

tal que $\mathfrak{a}_n \cdot N_m \subseteq N_{m+n}$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$.

Proposición B.1.5. *i)* *Si (R, Σ) es un anillo filtrado, la filtración Σ verifica las propiedades de la proposición B.1.2 anterior y existe una única topología sobre R para la cual Σ es una base de entornos abiertos de $0 \in R$. A esa topología se la denomina topología asociada a la filtración Σ.*

ii) *Un resultado análogo se tiene para módulos filtrados.*

Proposición B.1.6. *Sea* (R,Σ) *un anillo filtrado, y* (M,Σ') *un* R*-módulo filtrado con una filtración* Σ' *compatible con la filtración* Σ *de* R*. Supongamos*

$$\Sigma := \{R = \mathfrak{a}_0 \supseteq \mathfrak{a}_1 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{a}_n \supseteq \dots\},$$

$$\Sigma' := \{M = N_0 \supseteq N_1 \supseteq \cdots \supseteq N_n \supseteq \dots\}.$$

Entonces, para cada $S \subseteq R$ *y cada* $T \subseteq M$*, las clausuras de* S *y* N *para las respectivas topologías vienen dadas por:*

$$\overline{S} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (S + \mathfrak{a}_n).$$

$$\overline{T} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (T + N_n).$$

Corolario B.1.7. *Con las mismas notaciones de la Proposición anterior, sea* $\mathfrak{a}$ *un ideal de* R *y* N *un submódulo de* M*. Entonces,*

i)

$$\overline{\mathfrak{a}} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (\mathfrak{a} + \mathfrak{a}_n).$$

ii) Si $\mathfrak{a}$ *es abierto en* A*, entonces es cerrado.*

iii)

$$\overline{N} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (N + N_n).$$

iv) Si N *es abierto en* M*, entonces es cerrado.*

Corolario B.1.8. *Sea* (R,Σ) *un anillo filtrado, y* (M,Σ') *un* R*-módulo filtrado, con una filtración* Σ' *compatible con la filtración* Σ *de* R*. Supongamos:*

$$\Sigma' := \{M = N_0 \supseteq N_1 \supseteq \cdots \supseteq N_n \supseteq \dots\}$$

Si M *es Hausdorff con la topología asociada a la filtración* Σ'*, entonces es metrizable con la métrica:*

$$d_M(x,y) := e^{-k}$$

donde $x - y \in N_k$*,* $x - y \notin N_{k+1}$*. En particular, si* $\overline{B}_M(0, e^{-n})$ *es la bola cerrada de centro* $0 \in M$ *y radio* e^{-n} *para la métrica* d_M*, esta bola coincide con el submódulo* N_n*.*

De igual forma se tendrá el resultado anterior para el caso en que M sea el propio anillo R con la acción definida por su propia operación producto. Así, los submódulos, en este caso, serán ideales y tendremos que dada una filtración:

$$\Sigma := \{R = \mathfrak{a}_0 \supseteq \mathfrak{a}_1 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{a}_n \supseteq \dots\},$$

la aplicación

$$d_R(x,y) := e^{-k},$$

donde $x - y \in \mathfrak{a}_k$ y $x - y \notin \mathfrak{a}_{k+1}$, define una métrica sobre (R,Σ) siempre y cuando R sea Hausdorff con la topología asociada a la filtración Σ.

Notación B.1.9. Sea (R,Σ) un anillo filtrado y (M,Σ') un R-módulo filtrado compatible con la filtración Σ de R. Supongamos que la topología inducida por la filtración Σ es Hausdorff (ie. $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{a}_n = (0)$). Para cualquier $x \in R$ denotaremos por $\nu_\Sigma(x)$ al número natural $k \in \mathbb{N}$ verificando $x \in \mathfrak{a}_k$ y $x \notin \mathfrak{a}_{k+1}$. En el caso $x = 0$ se define $\nu_\Sigma(x) = +\infty$. Llamaremos a ν_Σ como la función de orden asociada a la filtración Σ en R. De forma análoga, para cualquier $m \in M$, se define $\nu_{\Sigma'}(m)$, la función de orden asociada a la filtración Σ' en M.

Ahora recordemos que todo espacio métrico posee un completado. Podremos entonces hacer la construcción del completado de un R-módulo filtrado cuya topología es de Hausdorff. Para ello, recordaremos en la Subsección B.1.6 posterior una serie de resultados sobre espacios métricos y completados. No obstante, será preciso introducir antes unas nociones previas estrechamente relacionadas con el concepto de filtración.

B.1.3. Anillos y módulos graduados.

DEFINICIÓN 33 (**Anillo graduado.**). *Una graduación sobre un anillo R es una descomposición como suma directa de subgrupos del grupo aditivo:*

$$R := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} R_n,$$

de tal modo que

i) *R_0 es un subanillo de R.*
ii) *Para cada par m, $n \in \mathbb{N}$, $R_nR_m \subseteq R_{n+m}$.*

A los elementos de R_m se les denomina elementos homogéneos de grado m con respecto a la graduación. Un anillo con una graduación de denomina anillo graduado.

OBSERVACIÓN B.1.10. Obsérvese que si $R = \oplus_{n\in\mathbb{N}} R_n$ es una graduación sobre un anillo, entonces R_m es un R_0-módulo y R es una R_0-álgebra.

DEFINICIÓN 34 (**Módulo graduado**). *Sea $R = \oplus_{n\in\mathbb{N}} R_n$ un anillo graduado. Una graduación sobre un R-módulo M asociada a esta graduación, es una descomposición de M como suma directa de subgrupos del grupo aditivo:*

$$M := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} M_n$$

de tal modo que:

i) *Cada M_n es un R_0-módulo.*
ii) *Para cada m, $n \in \mathbb{N}$, $R_nM_m \subseteq M_{m+n}$.*

Diremos que M es un R-módulo graduado y a los elementos de M_m se les denomina elementos homogéneos de M de grado m.

Morfismos graduados entre anillos graduados y módulos graduados son aquellos que respetan la graduación en cada caso.

PROPOSICIÓN B.1.11. *Sea $R = \oplus_{n\in\mathbb{N}} R_n$ un anillo graduado y $M = \oplus_{n\in\mathbb{N}} M_n$ un R-módulo graduado.*

i) *Para cualquier $m \in \mathbb{N}$, el siguiente subgrupo del grupo aditivo $(M, +)$ es un submódulo de M como R-módulo:*
$$N_m := \oplus_{k\geq m} M_k.$$
ii) *Si M es noetheriano, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, M_n es un R_0-módulo finitamente generado.*
iii) *Si R es generado por R_1 como R_0-álgebra entonces:*
R es noetheriano si y solamente si R_0 es noetheriano y R_n es un R_0-módulo noetheriano para cada $n \in \mathbb{N}$.

PROPOSICIÓN B.1.12 (**Anillos y módulos graduados asociados a una filtración**). *Con las notaciones precedentes:*

- *Sea R un anillo y $\Sigma := \{R = \mathfrak{a}_0 \supseteq \mathfrak{a}_1 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{a}_n \supseteq \dots\}$ una filtración sobre R. Podemos definir el grupo abeliano:*
$$G_\Sigma(R) := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} (\mathfrak{a}_n/\mathfrak{a}_{n+1}).$$
Al grupo abeliano $G_\Sigma(R)$ le podemos dotar de una estructura de anillo, extendiendo la operación producto,
$$\cdot : \ G_\Sigma(R) \times G_\Sigma(R) \longrightarrow G_\Sigma(R),$$
que extiende, mediante propiedad distributiva, la aplicación siguiente sobre los elementos homogéneos de manera natural:
$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{a}_n/\mathfrak{a}_{n+1} \times \mathfrak{a}_m/\mathfrak{a}_{m-1} & \longrightarrow & \mathfrak{a}_{n+m}/\mathfrak{a}_{n+m+1} \\ (a + \mathfrak{a}_{n+1}, b + \mathfrak{a}_{m+1}) & \longmapsto & ab + \mathfrak{a}_{n+m+1}. \end{array}$$
Con esta definición, $G_\Sigma(R)$ es un anillo graduado que llamaremos anillo graduado asociado a la filtración Σ sobre R.

- *Sea (R, Σ) un anillo filtrado y (M, Σ') un R-módulo filtrado con una filtración compatible con la filtración Σ de R. De la manera natural se construye $G_{\Sigma'}(M)$ y se le dota de una estructura de $G_\Sigma(R)$-módulo, que llamaremos módulo asociado a la filtración Σ' sobre M.*

Definición 35. *Sea (R, Σ) un anillo filtrado y (M, Σ') un R-módulo filtrado con una filtración compatible con Σ. Dados $x \in R$, $m \in M$, llamaremos parte inicial de x y de m a los elementos:*

$$G_\Sigma(x) = x + \mathfrak{a}_{n+1} \in G_\Sigma(R), \quad \textit{donde } n = \nu_\Sigma(x)$$

$$G_{\Sigma'}(m) = m + N_{n+1} \in G_\Sigma(M), \quad \textit{donde } n = \nu_\mathfrak{a}(m)$$

o bien $G_\Sigma(x) = 0$ y $G_{\Sigma'}(m) = 0$, cuando $\nu_\Sigma(x) = +\infty$ y $\nu_{\Sigma'}(m) = +\infty$.

Lema B.1.13. *En las notaciones anteriores, dados $a, b \in R$, son equivalentes:*

i) $\nu_\Sigma(ab) > \nu_\Sigma(a) + \nu_\Sigma(b)$.
ii) $ab \in \mathbf{a}_{\nu_\Sigma(a)+\nu_\Sigma(b)+1}$.
iii) $G_\Sigma(a)G_\Sigma(b) = 0$ *en* $G_\Sigma(R)$.

Donde ν_Σ es la función de orden asociada a la filtración Σ.

B.1.4. Graduaciones y filtraciones $\mathfrak{a}$-ádicas. Uno de los principales ejemplos de filtraciones en anillos y módulos son las definidas por las potencias de un ideal.

Definición 36. *Sea R un anillo, M un R-módulo y $\mathfrak{a}$ un ideal de R. Llamaremos filtración $\mathfrak{a}$-ádica sobre R y sobre M a las filtraciones definidas por los conjuntos:*

$$\Sigma_\mathfrak{a}(R) = \{R = \mathfrak{a}^0 \supseteq \mathfrak{a}^1 \supseteq \mathfrak{a}^2 \supseteq \dots\}$$

$$\Sigma_\mathfrak{a}(M) = \{M = \mathfrak{a}^0 M \supseteq \mathfrak{a}^1 M \supseteq \mathfrak{a}^2 M \supseteq \dots\}$$

Definición 37. *Sea R un anillo, M un R-módulo y $\mathfrak{a}$ un ideal de R. Llamaremos anillo graduado asociado a la filtración $\mathfrak{a}$-ádica, $G_\mathfrak{a}(R)$, en R y el $G_\mathfrak{a}(R)$-módulo asociado a la filtración $\mathfrak{a}$-ádica, $G_\mathfrak{a}(M)$, en M, a los siguientes anillos y módulos graduados:*

$$G_\mathfrak{a}(x) = x + \mathfrak{a}^{n+1} \in \mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^{n+1}, \quad n = \nu_\mathfrak{a}(x)$$

$$G_\mathfrak{a}(m) = m + \mathfrak{a}^{n+1}M \in \mathfrak{a}^n M/\mathfrak{a}^{n+1}M, \quad n = \nu_\mathfrak{a}(m)$$

Las filtraciones y graduaciones $\mathfrak{a}$-ádicas permiten obtener propiedades del anillo a partir del anillo graduado asociado. Tenemos entonces:

Lema B.1.14. *Sea R un anillo, $\mathfrak{a}$ un ideal de R, y sea M un R-módulo.*

i) Si R es noetheriano, también lo es $G_\mathfrak{a}(R)$.
ii) Si R es Hausdorff (i.e. $\cap_{n\in\mathbb{N}}\mathfrak{a}^n = (0)$), entonces,

$$G_\mathfrak{a}(R) \textit{ es un dominio} \Rightarrow R \textit{ es un dominio}$$

En este caso, $\nu_\mathfrak{a}(ab) = \nu_\mathfrak{a}(a) + \nu_\mathfrak{a}(b)$, para cada $a, b \in R$.
iii) Si R es noetheriano y M es un R-módulo finitamente generado, $G_\mathfrak{a}(M)$ es un $G_\mathfrak{a}(R)$-módulo noetheriano.
iv) En las anteriores condiciones, cada $\mathfrak{a}^n M/\mathfrak{a}^{n+1}M$ es un $R/\mathfrak{a}$-módulo noeheriano y finitamente generado.

También la condición de normalidad se traslada bien del graduado al anillo total bajo ciertas condiciones:

Proposición B.1.15. *Sea R un anillo noetheriano, $\mathfrak{a}$ un ideal de R. Supongamos que todo ideal principal de R es cerrado para la topología $\mathfrak{a}$-ádica. Entonces,*

$$G_\mathfrak{a}(R) \textit{ normal} \Rightarrow R \textit{ normal}$$

Definición 38. *Sea R un anillo, $\mathfrak{a}$ un ideal de R, M un R-módulo y N un submódulo de M. Llamaremos submódulo director de N al submódulo del $G_\mathfrak{a}(R)$-módulo $G_\mathfrak{a}(M)$ generado por:*

$$\oplus_{n\in\mathbb{N}}\big((\mathfrak{a}^n M) \cap (\mathfrak{a}^{n+1}M + N)/(\mathfrak{a}^{n+1}M)\big)$$

Obsérvese que el submódulo director de M es el propio $G_\mathfrak{a}(M)$.

Lema B.1.16. *Sea R un anillo, $\mathfrak{a}$ un ideal de R, M un R-módulo y N un submódulo de M. Entonces, el submódulo director de N está generado por las formas iniciales de los elementos de N.*

B.1.5. El lema de Artin-Rees y Teorema de la intersección de Krull. Aunque el resultado conocido como Lema de Artin-Rees (probado de forma independiente por E. Artin y D. Rees) tiene el aspecto de un sencillo lema técnico, sus consecuencias serán esenciales para el Teorema de la intersección de Krull y el Teorema de la Dimensión Local.

La idea del Lema de Artin-Rees se expresa diciendo que para filtraciones en módulos compatibles con la filtración $\mathfrak{a}$-ádica, la topología inducida por la filtración y por la filtración $\mathfrak{a}$-ádica coinciden. Veamos la terminología.

DEFINICIÓN 39. *Sea (R,Σ) un anillo filtrado y (M,Σ') un R-módulo filtrado. Sea $\mathfrak{a}$ un ideal de R. Supongamos:*

$$\Sigma' := \{M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \cdots \supseteq M_n \supseteq \dots\}$$

Diremos:

i) La filtración Σ' es compatible con la filtración $\mathfrak{a}$-ádica sobre R si $\mathfrak{a}M_n \subseteq M_{n+1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

ii) La filtración Σ' es estable para la filtración $\mathfrak{a}$-ádica sobre R si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{a}M_n = M_{n+1}$, para cada $n \geq n_0$.

Nótese que la condición de ser compatible significa solamente que (M,Σ) es un R-módulo filtrado, cuando en R se considera la filtración $\mathfrak{a}$-ádica. La filtración $\mathfrak{a}$-ádica en M es un claro ejemplo de filtración estable.

TEOREMA B.1.17 (**Lema de Artin-Rees**). *Sea R un anillo noetheriano, $\mathfrak{a}$ un ideal de R, M un R-módulo finitamente generado y N un submódulo de M.*
Entonces, para toda filtración $\mathfrak{a}$-estable sobre M, la filtración inducida sobre N es estable con respecto al ideal $\mathfrak{a}$ de R.
En términos más explícitos, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{a}^n M \cup N) = \mathfrak{a}^{n+1} M \cup N, \ \forall n \geq n_0,$$

Combinando el Lema de Artin-Rees con el Lema de Nakayama se obtiene el siguiente resultado de gran relevancia y debido a W.Krull.

TEOREMA B.1.18 (**El Teorema de la Intersección de W.Krull**). *Sea R un anillo noetheriano, $\mathfrak{a}$ un ideal de R, M un R-módulo finitamente generado*

i) Si $N := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{a}^n M$, $\mathfrak{a}N = N$.

ii) Si $\mathfrak{a}$ está contenido en el radical de Jacobson de R,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{a}^n M = (0)$$

iii) Si R es un dominio noetheriano, para cada ideal $\mathfrak{a}$ de R se tiene:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{a}^n = (0)$$

y la topología definida por la filtración $\mathfrak{a}$-ádica sobre M es Hausdorff y metrizable.

COROLARIO B.1.19. *Si $(R,\mathfrak{m})$ es un anillo local noetheriano, las topologías $\mathfrak{q}$-ádicas definidas por cualquier ideal propio de R en cualquier R-módulo noetheriano son Hausdorff y, por ende, metrizables.*

PROPOSICIÓN B.1.20. *Si R es un anillo noetheriano y $\mathfrak{a}$ es un ideal contenido en el radical de Jacobson de R:*

$$G_{\mathfrak{a}}(R) \ normal \Rightarrow R \ normal$$

El recíproco no es cierto. Ver [**Ma, 1989**].También introducimos en este subsección el Lema de Nakayama:

TEOREMA B.1.21 (**NAK, Lema de Nakayama**). *Sea M un R-módulo finitamente generado, N un submódulo de M y $\mathfrak{a}$ un ideal de R contenido en $\sqrt[J]{(0)}$ donde*

$$\sqrt[J]{(0)} := \bigcap \{\mathfrak{m} \in \mathrm{MaxSpec}(R)\},$$

es el radical de Jacobson del anillo de R. Entonces, si $M = \mathfrak{a}M + N$, entonces $M = N$. En particular, si $M = \mathfrak{a}M$, entonces $M = 0$.

B.1.6. Completado de un espacio métrico.

DEFINICIÓN 40. *Sean (X_1, d_1), (X_2, d_2) dos espacios métricos y $f : X_1 \longrightarrow X_2$ una función continua. Decimos que f es una aplicación uniformemente continua si para cada número real positivo $\varepsilon > 0$, existe $\delta(\varepsilon) > 0$ otro número real positivo tal que:*

$$\forall x, y \in X_1, \quad \text{si } d(x,y) < \delta(\varepsilon), \text{ entonces } d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Nótese que se ha enfatizado que $\delta = \delta(\varepsilon)$ únicamente depende de $\varepsilon > 0$ y no depende de los puntos $x, y \in X_1$. En este sentido es "uniformemente continua".

TEOREMA B.1.22. *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces, existe un par $((\widehat{X}, \widehat{d}), \varphi)$ donde $(\widehat{X}, \widehat{d})$ es un espacio métrico completo y $\varphi : X \longrightarrow \widehat{X}$ es una aplicación continua que satisface:*

i) $\forall x, y \in X \quad \widehat{d}(\varphi(x), \varphi(y)) = d(x, y)$.
ii) *$\varphi(X)$ es denso en $\widehat{X}$ para la topología inducida por la métrica $\widehat{d}$.*
iii) *Dado cualquier espacio métrico completo (Y, d') y una función uniformemente continua $f : X \longrightarrow Y$ existe una única función uniformemente continua $\widehat{f} : \widehat{X} \longrightarrow Y$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft", near start] & \widehat{X} \arrow[dl, "\widehat{f}"] \\ Y & \end{tikzcd}$$

Además, estas propiedades caracterizan salvo homeomorfismo (de hecho, salvo isometría) de manera única al completado $(\widehat{X}, \widehat{d})$ del espacio métrico (X, d).

Particularizando el resultado anterior para el caso de anillos que disponen de una métrica se tiene la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN B.1.23. *Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo con una métrica d (i.e. (A, d) es un espacio métrico) de tal modo que $(A, +, \cdot)$ es un anillo topológico con respecto a la topología inducida por la métrica d.*
Entonces, existe un anillo $(\widehat{A}, +, \cdot)$ topológico y una métrica $\widehat{d} : \widehat{A} \times \widehat{A} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ que induce una topología sobre $\widehat{A}$. Asimismo, existe un monomorfismo de anillos $\varphi : A \longrightarrow \widehat{A}$ tal que se satisfacen las propiedades siguientes:

i) *$\varphi(A)$ es denso en $\widehat{A}$.*
ii) $\forall x, y \in A, \quad \widehat{d}(\varphi(x), \varphi(y)) = d(x, y)$.
iii) *$(\widehat{A}, \widehat{d})$ es un espacio métrico completo.*
iv) *Sea dado cualquier anillo topológico $(B, +, \cdot)$ con topología inducida por una métrica d' sobre B, tal que (B, d') sea un espacio métrico completo. Sea dado $f : A \longrightarrow B$ morfismo de anillos uniformemente continuo entre ambos anillos topológicos. Entonces, existe un único $\widehat{f} : \widehat{A} \longrightarrow B$ morfismo de anillos uniformemente continuo tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft", near start] & \widehat{A} \arrow[dl, "\widehat{f}"] \\ B & \end{tikzcd}$$

El anillo $(\widehat{A}, +, \cdot)$ con la métrica $\widehat{d}$ se le denomina completado del anillo topológico $((\widehat{A}, +, \cdot), d)$.
Esencialmente, simplificando mucho, si $x \in \widehat{A}$, x es el límite de una sucesión $\{\varphi(x_n) : n \in \mathbb{N}\} \subseteq A$. Entonces, se definirá $\widehat{f}$ por paso al límite, es decir,

$$\widehat{f}(x) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) \in B.$$

Especialmente importante en este TFG es la particularización de la Proposición B.1.23 inmediatamente anterior al caso de anillos locales noetherianos gracias al Corolario B.1.19. De este modo, tendremos:

TEOREMA B.1.24. *Sea $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local noetheriano.*

i) *La topología $\mathfrak{m}$-ádica es una topología metrizable. Es decir, existe una métrica $d_{\mathfrak{m}} : A \times A \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tal que la topología del espacio métrico $(A, d_{\mathfrak{m}})$ es la topología inducida por la filtración $\mathfrak{m}$-ádica en A. Es más, se puede elegir $e \in \mathbb{R}^+$ un número real positivo, $e > 1$, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ y para cualesquiera $x, y \in A$,*

$$d_{\mathfrak{m}}(x, y) \leq \frac{1}{e^n} \Longleftrightarrow x - y \in \mathfrak{m}^n.$$

ii) *Sea $(\widehat{A}, \widehat{d_{\mathfrak{m}}})$ el completado del espacio métrico $(A, d_{\mathfrak{m}})$ y sea $\varphi_A : A \hookrightarrow \widehat{A}$ la inmersión (a través de una isometría) de $(A, d_{\mathfrak{m}})$ como subespacio métrico de $(\widehat{A}, \widehat{d_{\mathfrak{m}}})$. Entonces, existen dos operaciones $+ : \widehat{A} \times \widehat{A} \longrightarrow \widehat{A}$ y $\cdot : \widehat{A} \times \widehat{A} \longrightarrow \widehat{A}$ que hacen que $(\widehat{A}, +, \cdot)$ sea un anillo local noetheriano cuyo maximal es el ideal $\widehat{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}\widehat{A}$. De hecho, la extensión $\mathfrak{m}\widehat{A}$ es, además, la clausura de $\varphi_A(\mathfrak{m})$ en $(\widehat{A}, \widehat{d_{\mathfrak{m}}})$ con respecto a la métrica $\widehat{d_{\mathfrak{m}}}$. Por último, la topología definida por la filtración $\widehat{\mathfrak{m}}$-ádica en $\widehat{A}$ coincide con la topología de $(\widehat{A}, \widehat{d_{\mathfrak{m}}})$ como espacio métrico. Es más, si $e \in \mathbb{R}^+$, $e > 1$, es el número real positivo elegido en i) para $(A, d_{\mathfrak{m}})$ se verifica:*

$$\widehat{d_{\mathfrak{m}}}(\widehat{x}, \widehat{y}) \leq \frac{1}{e^n} \Longleftrightarrow \widehat{x} - \widehat{y} \in \widehat{\mathfrak{m}}^n, \quad \widehat{x},\ \widehat{y} \in \widehat{A}.$$

iii) *Además, los anillos graduados siguientes son isomorfos*

$$G_{\mathfrak{m}}(A) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{m}^n / \mathfrak{m}^{n+1} \cong G_{\widehat{\mathfrak{m}}}(\widehat{A}) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \widehat{\mathfrak{m}} / \widehat{\mathfrak{m}}^{n+1}.$$

Más aún, los cuerpos residuales coinciden $k(\mathfrak{m}) = A/\mathfrak{m} \cong \widehat{A}/\widehat{\mathfrak{m}} = k(\widehat{\mathfrak{m}})$ y los siguientes $k(\mathfrak{m})$-espacios vectoriales son isomorfos

$$\mathfrak{m}^n / \mathfrak{m}^{n+1} \cong \widehat{\mathfrak{m}} / \widehat{\mathfrak{m}}^{n+1}.$$

En particular, $\widehat{A}$ es un anillo local noetheriano cuya dimensión coincide con la dimensión de A y se tiene que $\widehat{A}$ es un anillo local regular si y solamente si A es local regular.

Los detalles podrán seguirse en [**ZarSam, 1960**] vol.2. Es importante señalar el siguiente ejemplo de "paso al límite" de morfismos.

Proposición B.1.25. *Sean $(A, \mathfrak{m})$, $(B, \mathfrak{n})$ dos anillos locales noetherianos. Consideremos en A y en B las topologías respectivamente inducidas por las filtraciones $\mathfrak{m}$-ádica en A y $\mathfrak{n}$-ádica en B.*
Sean $d_{\mathfrak{m}} : A \times A \longrightarrow \mathbb{R}_+$ y $d_{\mathfrak{n}} : B \times B : \mathbb{R}_+$ las métricas inducidas por las respectivas filtraciones a partir del Teorema de la Intersección de Krull. Si $f : A \longrightarrow B$ es un morfismo de anillos locales (i.e. si $\mathfrak{n}^c = f^{-1}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{m}$), entonces $f : (A, d_{\mathfrak{m}}) \longrightarrow (B, d_{\mathfrak{n}})$ es una aplicación uniformemente continua.
Más aún, si $(\widehat{B}, \widehat{d_{\mathfrak{n}}})$ es el completado del anillo local $(B, \mathfrak{n})$ para su topología definida por la filtración $\mathfrak{n}$-ádica. Para cada morfismo local $f : (A, \mathfrak{m}) \longrightarrow (B, \mathfrak{n})$ existe un único morfismo local (uniformemente continuo) $\widehat{f} : (\widehat{A}, \widehat{\mathfrak{m}}) \longrightarrow (\widehat{B}, \widehat{\mathfrak{n}})$ que lo extiende i.e. que hace que el diagrama siguiente sea conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_A"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B \arrow[d, "\varphi_B"] \\ \widehat{A} \arrow[r, "\widehat{f}"] & \widehat{B} \end{tikzcd}$$

donde $\varphi_A : A \longrightarrow \widehat{A}$ y $\varphi_B : B \longrightarrow \widehat{B}$ son las isometrías que sumergen A en $\widehat{A}$ y B en $\widehat{B}$ respectivamente. Además, $\widehat{f} : (\widehat{A}, \widehat{\mathfrak{m}}) \longrightarrow (\widehat{B}, \widehat{\mathfrak{n}})$ es un morfismo local de anillos completos.

Demostración. Si $f : (A, \mathfrak{m}) \longrightarrow (B, \mathfrak{n})$ es un morfismo local de anillos locales, entonces, $\mathfrak{m} = f^{-1}(\mathfrak{n})$. Por tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$f^{-1}(\mathfrak{n}^n) \supseteq (f^{-1}(\mathfrak{n}))^n = \mathfrak{m}^n, \tag{B.1.1}$$

Es inmediato porque si $x_1, \ldots, x_n \in f^{-1}(\mathfrak{n})$, entonces $f(x_i) \in \mathfrak{n}$ para cada i, $1 \leq 1 \leq n$, y, por tanto $f(x_1 \cdots x_n) = f(x_1) \cdots f(x_n) \in \mathfrak{n}^n$. Como $\mathfrak{m}^n$ es el ideal generado por los productos

$$\{x_1 \cdots x_n : x_i \in f^{-1}(\mathfrak{n}),\ 1 \leq i \leq n\},$$

entonces todo el ideal $\mathfrak{m}^n$ está contenido en $f^{-1}(\mathfrak{n}^n)$. Ahora, observemos que $\mathfrak{n}^n = \overline{B}_B\big(0, \frac{1}{e^n}\big)$ es la bola cerrada de centro 0 y radio $\frac{1}{e^n}$ en $(B, d_{\mathfrak{n}})$ mientras que $\mathfrak{m}^n = \overline{B}_A\big(0, \frac{1}{e^n}\big)$ es la bola cerrada de orden 0 y radio $\frac{1}{e^n}$ en $(A, d_{\mathfrak{m}})$. En consecuencia, (B.1.1) se reescribe como

$$f^{-1}\Big(\overline{B}_B\big(0, \frac{1}{e^n}\big)\Big) \supseteq \overline{B}_A\big(0, \frac{1}{e^n}\big)$$

Notando que las familias $\{\mathfrak{n}^n : n \in \mathbb{N}\}$ y $\{\mathfrak{m}^n : n \in \mathbb{N}\}$ son, respectivamente, bases de entornos de 0 en $(B, d_{\mathfrak{n}})$ y $(B, d_{\mathfrak{m}})$ concluimos que f es continua en $0 \in A$.

Por tanto, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta(\epsilon) > 0$ (que sólo depende de ϵ), de hecho, puede tomarse $\delta(\epsilon) = \epsilon$, tal que

$$\forall x, y \in A \quad si\ d_{\mathfrak{m}}(x, y) < \delta(\epsilon),\ \ entonces\ d_{\mathfrak{n}}(f(x), f(y)) < \epsilon. \tag{B.1.2}$$

La razón es que

$$d_{\mathfrak{m}}(x, y) = d_{\mathfrak{m}}(x - y, 0), \quad \forall x, y \in A$$
$$d_{\mathfrak{n}}(f(x), f(y)) = d_{\mathfrak{n}}(f(x - y), 0), \quad \forall x, y \in A,$$

porque $f(x-y) = f(x) - f(y)$. En conclusión, (B.1.2) nos garantiza que no sólo f es continua en $0 \in A$ sino que es uniformemente continua. Ahora, como $(\widehat{A}, \widehat{d}_{\mathfrak{m}})$ es el espacio métrico completo de $(A, d_{\mathfrak{m}})$. Si $f : (A, \mathfrak{m}) \longrightarrow (B, \mathfrak{n})$ es un morfismo local, tenemos una función uniformemente continua (composición de una uniformemente continua con una isometría):

$$\varphi_B \circ f : (A, d_{\mathfrak{m}}) \longrightarrow (\widehat{B}, \widehat{d}_{\mathfrak{n}})$$

Por la propiedad universal del completado de los espacios métricos, existirá $\widehat{f} : (\widehat{A}, \widehat{d}_{\mathfrak{m}}) \longrightarrow (\widehat{B}, \widehat{d}_{\mathfrak{n}})$ uniformemente continua tal que siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_A"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B \arrow[d, "\varphi_B"] \\ \widehat{A} \arrow[r, "\widehat{f}"] & \widehat{B} \end{tikzcd} \tag{B.1.3}$$

Más aún, como $\varphi_A(A)$ es denso en $\widehat{A}$, $\widehat{f}$ es el único morfismo anillos que satisface que $\forall x \in \widehat{A}$, si $x = \lim_{n\to\infty} \varphi_A(x_n)$, con $\{x_n :\ n \in \mathbb{N}\} \subseteq A$, entonces

$$\widehat{f}(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_B(f(x_n)).$$

y no sólo es un morfismo de anillos sino que es un morfismo local entre los anillos locales $(\widehat{A}, \widehat{\mathfrak{m}})$ y $(\widehat{B}, \widehat{\mathfrak{n}})$. Para probarlo, nótese que como $\widehat{f} : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{B}$ es morfismo de anillos y $\widehat{\mathfrak{n}}$ es maximal en $\widehat{B}$, su contracción a $\widehat{A}$, $\widehat{\mathfrak{n}}^c = \widehat{f}^{-1}(\widehat{\mathfrak{n}})$, es un ideal primo de $\widehat{A}$ y, por tanto, propio, con lo que $\widehat{f}^{-1}(\widehat{\mathfrak{n}}) \subseteq \widehat{\mathfrak{m}}$ por ser $\widehat{\mathfrak{m}}$ el único maximal de $\widehat{A}$. Por otro lado, si $x \in \widehat{\mathfrak{m}}$ entonces existen $\{x_n :\ n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathfrak{m}$ una sucesión de Cauchy tal que $x = \lim_{n\to\infty} \varphi_A(x_n)$ (porque $\varphi_A(\mathfrak{m})$ es denso en $\widehat{\mathfrak{m}}$). Pero, entonces, $f(x_n) \in \mathfrak{n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ (porque f es morfismo local). Luego $\{\varphi_B(f(x_n)) :\ n \in \mathbb{N}\} \subseteq \varphi_B(\mathfrak{n}) \subseteq \widehat{\mathfrak{n}}$. Además, como f es uniformemente continua, si $\{x_n :\ n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión de Cauchy en $(A, d_{\mathfrak{m}})$, entonces $\{f(x_n) :\ n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión de Cauchy en $(B, d_{\mathfrak{n}})$. Como φ_B es isometría entre $(B, d_{\mathfrak{m}})$ y $(\widehat{B}, \widehat{d}_{\mathfrak{n}})$ la sucesión

$$\mathscr{S} = \{\varphi_B(f(x_n)) :\ n \in \mathbb{N}\} \subseteq \widehat{\mathfrak{n}},$$

es una sucesión de Cauchy en $(B, d_{\mathfrak{n}})$. Como $\widehat{\mathfrak{n}}$ es cerrado y $(\widehat{B}, \widehat{d}_{\mathfrak{n}})$ es completo, la sucesión $\mathscr{S}$ posee límite $z \in \widehat{B}$ y ese límite está en $\widehat{\mathfrak{n}}$ (por ser cerrado). Por tanto,

$$z = \lim_{n\to\infty} \varphi_B(f(x_n)) \in \widehat{\mathfrak{n}}.$$

Pero, por la conmutatividad del diagrama (B.1.3) de funciones continuas, se tiene

$$\widehat{f}(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_B(f(x_n)) \in \widehat{\mathfrak{n}}.$$

Por tanto, $x \in \widehat{\mathfrak{n}}^c = \widehat{f}^{-1}(\widehat{\mathfrak{n}})$ y habremos concluido la igualdad $\widehat{\mathfrak{m}} = \widehat{f}^{-1}(\widehat{\mathfrak{n}})$ o, lo que es lo mismo, que $\widehat{f}$ es un morfismo local.

□

B.1.7. Propiedades del completado: Anillos de Zariski. A continuación, se exponen algunas disquisiciones del completado con respecto a las filtraciones $\mathfrak{a}$-ádicas. Las referencias básicas serán [**Mat, 1980**], [**Ma, 1989**], [**ZarSam, 1960**] y [**Rag *et al.*, 1975**].

PROPOSICIÓN B.1.26. *Sea A un anillo noetheriano, sea $\mathfrak{a}$ un ideal contenido en el radical de Jacobson de A, sea M un A-módulo finitamente generado. Sea $\widehat{A}$ y $\widehat{M}$ los completados de A y M para las respectivas filtraciones $\mathfrak{a}$-ádicas, entonces, $\widehat{M}$ es el $\widehat{A}$-módulo generado por M.*

Utilizaremos la notación de [**ZarSam, 1960**] escribiendo $\widehat{M} = \widehat{A}M$. No obstante, con las notaciones más apropiadas de [**Mat, 1980**] escribiríamos $\widehat{M} = \widehat{A} \otimes_A M$.

COROLARIO B.1.27. *Sea B un anillo y sea A un subanillo de B, tal que B es un A-módulo finitamente generado. Supongamos que A es noetheriano y sea $\mathfrak{a}$ un ideal de A. Entonces, la topología de B como A-módulo y la topología $\mathfrak{a}B$-ádica coinciden. En particular, la inclusión $A \hookrightarrow B$ induce una inclusión $\widehat{A} \hookrightarrow \widehat{B}$.*

Tenemos toda una serie de conclusiones técnicas, de gran utilidad en las argumentaciones futuras como las siguientes:

COROLARIO B.1.28. *Sea A un anillo noetheriano, $\mathfrak{a}$ un ideal de A, M un A-módulo finitamente generado. Supongamos que tanto A como M son Hausdorff para sus respectivas topologías $\mathfrak{a}$-ádicas. Entonces:*

i) *La clausura de todo submódulo N de M en $\widehat{M}$ viene dada por el submódulo de $\widehat{M}$ generado por N (i.e. $\widehat{A}N$). Más aún, N es cerrado en M si y solamente si $N = \widehat{A}N \cup M$.*
ii) *Las topologías de los completados $\widehat{A}$ y $\widehat{M}$ son sus respectivas topologías $\mathfrak{a}\widehat{A}$-ádicas.*
iii) *El completado del cociente M/N para todo submódulo cerrado N de M viene dado por $\widehat{M}/\widehat{A}N$.*
iv) *Los anillos graduados $G_{\mathfrak{a}}(A)$ y $G_{\mathfrak{a}\widehat{A}}(\widehat{A})$ son isomorfos como anillos graduados, por tanto, también se tiene:*
$$A/\mathfrak{a} \cong \widehat{A}/\mathfrak{a}\widehat{A},$$
isomorfismo como anillos y son isomorfismos de $A/\mathfrak{a}$-módulos los siguientes:
$$\mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^{n+1} \cong \mathfrak{a}^n\widehat{A}/\mathfrak{a}^{n+1}\widehat{A}.$$
Lo mismo sucede con los módulos finitamente generados

Un importante resultado técnico:

TEOREMA B.1.29. *Sea A un anillo noetheriano, $\mathfrak{a}$ un ideal propio de A, M un A-módulo y, N un submódulo de M. Supongamos que A y M son espacios de Hausdorff para los respectivas topologías $\mathfrak{a}$-ádicas y supongamos, además, que A es completo. Sean $\{x_1, \ldots, x_n\}$ una colección finita de elementos de N tales que ses formas iniciales generan el submódulo director de N en $G_{\mathfrak{a}}(M)$ como $G_{\mathfrak{a}}(A)$-módulo. Entonces, $\{x_1, \ldots, x_n\}$ generan N como submódulo de M.*

El tipo de anillos completos que más utilizaremos se denominan anillos de Zariski:

DEFINICIÓN 41. *Un anillo noetheriano A se dice anillo de Zariski respecto a un ideal propio $\mathfrak{a}$ de A si para todo ideal propio $\mathfrak{b}$ de A, se tiene que $\mathfrak{b}$ es cerrado en A para la topología definida por la filtración $\mathfrak{a}$-ádica.*

Los siguientes resultados pueden verse en [**Mat, 1980**]:

PROPOSICIÓN B.1.30. *Sea A un anillo noetheriano, $\mathfrak{a}$ un ideal propio de R. Son equivalentes:*

i) *El ideal $\mathfrak{a}$ está contenido en el radical de Jacobson de A.*
ii) *$1 - a$ es unidad de A para todo $a \in \mathfrak{a}$.*
iii) *Si M es un A-módulo finitamente generado y $\mathfrak{a}M = 0$, entonces, M=0.*
iv) *Si M es un A-módulo finitamente generado, la topología $\mathfrak{a}$-ádica sobre M es Hausdorff.*

v) *Para todo A-módulo finitamente generado, todo submódulo N de M es cerrado para la topología $\mathfrak{a}$-ádica sobre M.*
vi) *A es un anillo de Zariski con respecto al ideal $\mathfrak{a}$.*

COROLARIO B.1.31. *El completado de todo anillo local noetheriano con respecto a su radical de Jacobson es un anillo local noetheriano de la misma dimensión.*

TEOREMA B.1.32 (**Zariski Main Theorem**). *Si $(A, \mathfrak{m})$ es el anillo local de un punto p de una variedad y $(A, \mathfrak{m})$ es normal, entonces su completado $(\widehat{A}, \widehat{\mathfrak{m}})$ es normal.*

B.1.8. El polinomio de Hilbert-Samuel.

DEFINICIÓN 42. *Sea $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ una aplicación. Diremos que f es una aplicación polinomial si existen $n_0 \in \mathbb{N}$ y $q \in \mathbb{Q}[T]$ tales que:*

$$f(n) = q(n), \ \forall n \geq n_0$$

PROPOSICIÓN B.1.33. *Si $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ es una aplicación polinomial, existe un único polinomio $q \in \mathbb{Q}[T]$ que coincida con f salvo en un número finito de puntos. Así, podemos hablar de coeficiente director de f y del grado de f como el coeficiente director y el grado del polinomio asociado.*

NOTACIÓN B.1.34.
- Si el polinomio asociado a una función polinomial es el polinomio nulo, diremos que el grado de la función polinomial es -1. Si es una constante no nula, diremos que el grado de f es 0.
- Sea $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ una aplicación cualquiera. Por inducción en r, definiremos las aplicaciones incremento siguientes:

$$\Delta^0(f) := f$$

$$\Delta^r(f) := \Delta^{r-1}f(n+1) - \Delta^{r-1}f(n)$$

LEMA B.1.35. *Sea $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ una aplicación. Entonces, f es una aplicación polinomial de grado d si y solamente si $\Delta f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ es una función polinomial de grado $d-1$. Además, el coeficiente director de Δf dividido por d.*

Antes de continuar, recordamos algunos conceptos de nuestro curso de *Álgebra Conmutativa*:

PROPOSICIÓN B.1.36 (**Anillos de Artin**). *Bajo el Axioma de Elección Dependiente, sea R un anillo. Las dos propiedades siguientes son equivalentes:*

i) CONDICIÓN DE CADENA DESCENDENTE NUMERABLE DE IDEALES*: Toda cadena descendente de ideales se estabiliza. Es decir, dada una cadena descendente numerable de ideales de R:*

$$\mathfrak{a}_0 \supseteq \mathfrak{a}_1 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{a}_n \supseteq \ldots,$$

existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}_m$, $\forall n \geq m$.

ii) *Todo conjunto no vacío de ideales de R posee elemento minimal. Los anillos que satisfacen cualquiera de estas dos propiedades equivalentes se llaman anillos de Artin o artinianos.*

Dado M un R-módulo tendremos la misma equivalencia intercambiando los ideales de R por submódulos de M. De igual forma, llamaremos R-módulos artinianos a aquellos satisfaciendo alguna de dichas propiedades equivalentes.

DEFINICIÓN 43 (**Series de Composición (o de Jordan-Hölder)**). *Consideramos las siguientes nociones:*

i) *Un R-módulo M se dice simple si no posee más submódulos que $0 := R\langle 0 \rangle$ y M.*
ii) *Una cadena finita estricta de submódulos de M es una familia finita de submódulos que satisface:*

$$0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \cdots \subsetneq M_{n-1} \subsetneq M_n = M.$$

Abreviaremos la expresión "cadena finita estricta" mediante SFC.

iii) *Dadas dos cadenas finitas estrictas de submódulos de M:*

$$0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \cdots \subsetneq M_{r-1} \subsetneq M_r = M, \tag{B.1.4}$$

$$0 \subsetneq N_1 \subsetneq N_2 \subsetneq \cdots \subsetneq N_{s-1} \subsetneq N_s = M, \tag{B.1.5}$$

decimos que la cadena finita estricta descrita en (B.1.4) es refinable a la cadena finita estricta descrita en (B.1.5) si $s \geq r$ y existe una aplicación inyectiva

$$\sigma : [r] = \{1, \ldots, r\} \longrightarrow [s] = \{1, \ldots, s\},$$

tal que

$$M_i = N_{\sigma(i)}, \ \in [r].$$

Es decir, si los submódulos que aparecen en la cadena estricta descrita en (B.1.4) son algunos de los submódulos que aparecen en la cadena descrita en (B.1.5).

iv) *Una serie de composición (o de Jordan-Hölder) en un R-módulo M es una cadena finita estricta de submódulos:*

$$0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \cdots \subsetneq M_{n-1} \subsetneq M_n = M,$$

tal que los cocientes M_{i+1}/M_i son R-módulos simples. Diremos que esta serie de composición es de longitud n.

Proposición B.1.37. *Si un R-módulo M es simultáneamente artiniano y noetheriano, entonces posee una serie de composición.*

Definición 44 (**Longitud**). *Sea M un R-módulo. Llamaremos longitud de M como R-módulo al mínimo de las longitudes de sus series de composición, si posee alguna. En otro caso, diremos que M es de longitud infinita. Denotaremos por $\ell_R(M)$ la longitud de M como R-módulo.*

Teorema B.1.38 (**Teorema de Jordan-Hölder (para módulos)**). *Si M es un R-módulo de longitud finita (i.e. que posee al menos una serie de composición), entonces:*

i) *Todas las series de composición de M tienen la misma longitud (y, por tanto, son de longitud igual a $\ell_R(M)$).*

ii) *Toda cadena finita estricta tiene longitud menor que $\ell_R(M)$.*

iii) *Toda cadena finita estricta de submódulos de M puede refinarse hasta obtener una serie de composición de M.*

En particular, un R-módulo es de longitud finita si y solamente si es artiniano y noetheriano a la vez.

Teorema B.1.39 (**Teorema de Akizuki**). *Un anillo R es artiniano si y solamente si se verifican las dos propiedades siguientes:*

i) *R es noetheriano, es decir, todo ideal de R es finitamente generado.*

ii) *Se verifica* $\mathrm{Spec}(R) = \mathrm{MaxSpec}(R)$ *(i.e. todo ideal $\mathfrak{p}$ primo en R es un ideal maximal en R).*

Ahora, una vez introducida la noción de longitud de M como R-módulo, nos encontramos en condiciones de seguir con la discusión relativa al polinomio de Hilbert-Samuel desembocando en la dimensión que lleva el mismo nombre.

Observación B.1.40 (**Alguna hipótesis para el resto de la discusión**).

- Sea $R := \oplus_n R_n$ un anillo graduado. Supongamos que el anillo R_0 es un anillo artiniano y que existan elementos $x_1, \ldots, x_r \in R_1$ generando R como R_0-álgebra. Por lo visto en la Subsección B.1.3, el anillo R es noetheriano.
- En las mismas condiciones, sea $M := \oplus_n M_n$ un R-módulo graduado finitamente generado. Por ser R noetheriano, M es también noetheriano y cada subgrupo M_n es un R_0-módulo finitamente generado. Como R_0 es artiniano, cada M_n es un R_0-módulo artiniano y, por ende, de longitud finita. Tiene sentido, pues, considerar:

$$\ell_{R_0}(M_n)$$

PROPOSICIÓN B.1.41 (**Polinomio de Hilbert**). *Bajo las hipótesis anteriormente descritas, la siguiente función $\chi(M,-)$, dada por:*

$$\begin{array}{rccc} \chi(M,-): & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & n & \longmapsto & \chi(M,n) := \ell_{R_0}(M_n), \end{array}$$

es una aplicación polinomial de grado menor o igual que r-1 (recordemos que r es el número tal que $x_1,\ldots,x_r \in R_1$, generan R como R_0-álgebra).

DEFINICIÓN 45. *A la función $\chi(M,-)$ se la denomina función de Hilbert de M. Al polinomio en $\mathbb{Q}[T]$ coincidente con $\chi(M,-)$ se le denomina polinomio de Hilbert de M y se le denota también por $\chi(M,-)$. Al grado de $\chi(M,-)$ se le denomina grado de Hilbert de M y a su coeficiente director se le denomina grado de Hilbert de M. Al número natural n_0 tal que la función polinomial coincide con el polinomio se le denomina regularidad de la función de Hilbert de M.*

OBSERVACIÓN B.1.42. Consideramos $(R,\mathfrak{m})$ un anillo local noetheriano. Llamaremos "ideal de definición" de R a todo ideal $\mathfrak{q}$ tal que $\sqrt{\mathfrak{q}} = \mathfrak{m}$, es decir, tal que existe $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, tal que:

$$\mathfrak{m}^n \subseteq \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{m}.$$

Sea ahora M un R-módulo finitamente generado y consideramos tanto en R como en M la filtración $\mathfrak{q}$-ádica, definida por el ideal $\mathfrak{q}$, así como los graduados (anillos y módulos) asociados:

$$G_{\mathfrak{q}}(R) := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{q}^n/\mathfrak{q}^{n+1}, \qquad G_{\mathfrak{q}}(M) := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{q}^n M/\mathfrak{q}^{n+1}M$$

Por ser $\mathfrak{q}$ un ideal de definición de R y R un anillo local de maximal $\mathfrak{m}$, el único maximal de $R/\mathfrak{q}$ es $\mathfrak{m}/\mathfrak{q}$, por lo que este anillo es artiniano. Además, las clases módulo $\mathfrak{q}^2$ de los elementos de $\mathfrak{q}$ generan $G_{\mathfrak{q}}(R)$ como $A/\mathfrak{q}$-álgebra. Dado que $\mathfrak{q}$ es finitamente generado, las clases definidas por los generadores de $\mathfrak{q}$ en $\mathfrak{q}/\mathfrak{q}^2$, generan $G_{\mathfrak{q}}(R)$ como $R/\mathfrak{q}$-álgebra. Además, $G_{\mathfrak{q}}(M)$ es un $G_{\mathfrak{q}}(R)$-módulo finitamente generado.

PROPOSICIÓN B.1.43. *Si $(R,\mathfrak{m})$ es un anillo local noetheriano, $\mathfrak{q}$ un ideal de definición de R y M un R-módulo finitamente generado, las funciones $\chi(G_{\mathfrak{q}}(R),-)$ y $\chi(G_{\mathfrak{q}}(M),-)$ son aplicaciones polinomiales y su grado está acotado por $r-1$, donde r es el mínimo de los cardinales de los conjuntos generadores de $\mathfrak{q}$ como ideal de R.*

EJEMPLO B.1.44. *Bajo las hipótesis de la observación anterior, observemos que*

$$Supp(M/\mathfrak{q}^n M) = \{\mathfrak{m}\}$$

como R-módulo. Claramente, pues $\mathfrak{q}^n$ tiene que estar contenido en $Ann_R(M)$, luego $\mathfrak{m}$ es el único ideal primo de R que contiene a $\mathfrak{q}^n$. Dicho de otra forma, $M/\mathfrak{q}^n M$ es un R-módulo finitamente generado y su soporte está formado solamente por ideales maximales de R. Por el teorema de Akizuki para módulos, deducimos que $M/\mathfrak{q}^n M$ es un R-módulo de longitud finita y podemos considerar:

$$\ell_R(M/\mathfrak{q}^n M) < +\infty$$

PROPOSICIÓN B.1.45 (**Polinomio de P.Samuel**). *En las condiciones del ejemplo anterior, definamos la función de Samuel de M:*

$$P_{\mathfrak{q}}(M,-) : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

dada por:

$$P_{\mathfrak{q}}(M,n) := \ell_R(M/\mathfrak{q}^n M)$$

Entonces, $P_{\mathfrak{q}}(M,-)$ es una función polinomial cuyo grado está acotado por el mínimo de los cardinales de los conjuntos generadores de $\mathfrak{q}$. Además se tiene la siguiente relación:

$$\Delta P_{\mathfrak{q}}(M,n) = \chi(G_{\mathfrak{q}}(M),n).$$

Nos queda por observar que el grado del polinomio de Samuel no depende del ideal de definición elegido. Eso nos lo garantiza la siguiente:

Proposición B.1.46. *Sea* $(R, \mathfrak{m})$ *un anillo local noetheriano,* $\mathfrak{q}$ *un ideal de definición de* R *y* M *un* R*-módulo finitamente generado. Entonces, los grados de los polinomios de Samuel* $P_{\mathfrak{q}}(M, -)$ *y* $P_{\mathfrak{m}}(M, -)$ *coinciden. En particular, el grado del polinomio de Samuel no depende del ideal de definición elegido. Llamaremos dimensión de Samuel de* M *al grado de su polinomio de Samuel con respecto a cualquier ideal de definición de* $(R, \mathfrak{m})$.

Definición 46. *Llamaremos dimensión de Samuel (o de Hilbert-Samuel) de un* R*-módulo* M *verificando las propiedades anteriormente descritas al grado de* $P_{\mathfrak{q}}(M, T)$*, para cualquier ideal de definición* $\mathfrak{q}$ *de* $(R, \mathfrak{m})$*. Y lo denotaremos mediante:*

$$\dim_{HS}(M).$$

Proposición B.1.47. *Sea* $(R, \mathfrak{m})$ *un anillo local noetheriano. Sea* $K := R/\mathfrak{m}$ *el cuerpo cociente, por ser* $\mathfrak{m}$ *un ideal maximal. Ahora observamos que para* $\{x_1, \ldots, x_r\} \subseteq \mathfrak{m}$ *son equivalentes:*

- *Las clases* $\{x_1 + \mathfrak{m}^2, \ldots, x_r + \mathfrak{m}^2\}$ *son una base del* K*-espacio vectorial* $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.
- $\{x_1, \ldots, x_r\}$ *son un sistema generador de cardinal del ideal* $\mathfrak{m}$.

Corolario B.1.48. *En las notaciones anteriores, sea* $(R, \mathfrak{m})$ *un anillo local noetheriano y* r *el mínimo de los cardinales de los generadores de* $\mathfrak{m}$ *como ideal de* R*. Entonces* $P_{\mathfrak{m}}(R, T)$ *tiene grado* r *si y sólo si* $G_{\mathfrak{m}}(R)$ *es un anillo de polinomios en* r *variables con coeficientes en el cuerpo* $K := R/\mathfrak{m}$.

B.1.9. Teorema de la Dimensión Local. Además de la dimensión de Krull y la dimensión de Samuel en anillos y módulos, disponemos una tercera noción de dimensión:

Definición 47. *Dado* $(R, \mathfrak{m})$ *un anillo local noetheriano y* $M \neq (0)$ *un* R*-módulo finitamente generado, llamaremos dimensión de Chevalley de* M*, y lo denotaremos por* $\dim_{\text{Chev}}(M)$*, al mínimo de los números naturales* $m \in \mathbb{N}$ *tales que:*

$$\exists a_1, \ldots, a_m \in \mathfrak{m} \text{ tales que } \ell_R(M/(a_1, \ldots, a_m)M) < +\infty$$

Si $M = (0)$ *diremos* $\dim_{\text{Chev}}(M) = -1$.

Nótese que tal mínimo siempre existe: el cardinal mínimo de generadores de $\mathfrak{m}$ es una cota superior porque $M/\mathfrak{m}M$ es un $A/\mathfrak{m}$-espacio vectorial de dimensión finita.

Teorema B.1.49 (**Teorema de la dimensión local**). *Si* $(R, \mathfrak{m})$ *es un anillo local noetheriano y* M *es un* R*-módulo finitamente generado, se tiene:*

$$\dim_{\text{HS}}(M) = \dim_{\text{Kr}}(M) = \dim_{\text{Chev}}(M) < +\infty$$

Y a partir de ahora utilizaremos solamente la palabra dimensión para designar una cualquiera de las cantidades citadas.

Corolario B.1.50 (**Teorema del Ideal Principal de Krull**). *Sea* R *un anillo noetheriano,* $\mathfrak{a} := (a_1, \ldots, a_r) \subsetneq R$ *un ideal generado por* r *elementos. Entonces, cualquier ideal primo minimal conteniendo al ideal* $\mathfrak{a}$ *tiene altura menor o igual a* r*. Luego* $ht(\mathfrak{a}) \leq r$*. En particular, si* $\mathfrak{a} \subsetneq R$ *es principal,* $\mathfrak{a} = (a_1)$ *y* a_1 *no es divisor de cero en* A*, todo ideal primo minimal conteniendo a* $\mathfrak{a}$ *tiene altura 1.*

Corolario B.1.51. *Sea* R *un dominio noetheriano. Entonces, si todo ideal de altura 1 es principal, los ideales primos asociados a un ideal principal son minimales.*

Teorema B.1.52 (**Nagata**). *Sea* R *un dominio de integridad noetheriano. Entonces, son equivalentes:*

i) R *es un dominio de factorización única.*
ii) Todos los ideales primos de R *de altura 1 son principales.*

Corolario B.1.53. *Si* R *es noetheriano y* $f_1, \ldots, f_r$ *es una sucesión regular de* R *(Definición 27),* $ht(f_1, \ldots, f_r) = r$ *y todo ideal primo minimal sobre* $\mathfrak{a} = (f_1, \ldots, f_r)$ *tiene altura* r.

Definición 48. *Sea* $(R, \mathfrak{m})$ *un anillo local noetheriano de dimensión* d*. Llamaremos sistema de parámetros de* R *a toda colección,* $a_1, \ldots, a_d$ *de elementos de* R *generando un ideal de definición de* R.

Proposición B.1.54. *Si* $(R, \mathfrak{m})$ *es un anillo local noetheriano y* $\{a_1, \ldots, a_d\}$ *es un sistema de parámetros de* R*, se tiene:*

$$\dim R/(a_1, \ldots, a_i) = d - i$$

B.2. Anillos Locales Regulares y Completados.

B.2.1. Teoremas de Inversión Local y de la Función Implícita. Las siguientes nociones y resultados son tomados del Capítulo 0, especialmente la sección 8, del texto [**Kaup&Kaup, 1983**]. Los siguientes son resultados clásicos de cursos básicos de Análisis Matemático y Geometría Diferencial elemental:

DEFINICIÓN 49. *Una subvariedad de $\mathbb{R}^n$ de clase $\mathscr{C}^k$, $1 \leq k \leq \infty$, de dimensión m es un subconjunto $M \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que para cada punto $x \in M$, existen U, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ dos abiertos en la topología usual y un difeomorfismo de clase $\mathscr{C}^k$, $\varphi : U \longrightarrow V$ tal que:*

i) $x \in U$
ii) $\varphi(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$, *con* $0 = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{n-m}$.

Trataremos solamente con subvariedades de $\mathbb{R}^n$ porque es todo lo que se necesita para el trabajo. El teorema de Inversión Local (también denominado Teorema de la Función Inversa) nos garantiza difeomorfismos locales de abiertos de subvariedades de $\mathbb{R}^n$ con entornos abiertos de $0 \in \mathbb{R}^m$, donde m es la dimensión. Sin embargo, como estamos en un Apéndice nos limitaremos a recordar la versión más elemental del Teorema de Inversión Local entre dos subvariedades de $\mathbb{R}^n$.

TEOREMA B.2.1 (**Teorema de Inversión Local para subvariedades de $\mathbb{R}^n$**). *Sean $M \subseteq \mathbb{R}^n$ y $N \subseteq \mathbb{R}^m$ dos subvariedades de clase $\mathscr{C}^k$, $1 \leq k \leq \infty$, respectivamente de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$. Sea $f : M \longrightarrow N$ una función de clase $\mathscr{C}^k$ entre ambas subvariedades. Sea $p \in M$ un punto, T_pM el espacio tangente a M en p, $f(p) \in N$ su imagen por f y $T_{f(p)}N$ el espacio tangente a N en $f(p)$. Sea $T_pf : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$ la diferencial de f en p. Entonces, son equivalentes:*

i) T_pf es un isomorfismo de espacios vectoriales.
ii) Existen $U \subseteq \mathbb{R}^m$, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ dos abiertos de las respectivas topologías usuales, tales que $f(p) \in U$ y $p \in V$, y existe una aplicación $g : U \longrightarrow V$ de clase $\mathscr{C}^k$ tal que

$$g|_{U\cap N} = \left(f|_{M\cap V}\right)^{-1}.$$

Nótese que esta versión clásica garantiza la clase $\mathscr{C}^k$, $1 \leq k \leq \infty$. Además, es una forma de probar el Teorema de la Función Implícita para funciones de clase $\mathscr{C}^k$. Sin embargo, las demostraciones clásicas no alcanzan para el caso de funciones analíticas. Para tratar funciones analíticas podemos reducir al caso de funciones holomorfas multivariadas (i.e. que satisfacen las condiciones de Cauchy- Riemann en cada variable). Esta forma clásica subyace a las pruebas de los teoremas de Inversión Local, Función Implícita y/o Rango Constante que pueden verse en la sección 8 de [**Kaup&Kaup, 1983**].

DEFINICIÓN 50. *Sea $U \subseteq \mathbb{C}^n$ un abierto en un espacio afín complejo. Sea $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Diremos que f es holomorfa si para cualquier punto $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ la función*

$$f_i : \Big(\big\{(z_1, \ldots, z_{i-1})\big\} \times \mathbb{C} \times \big\{(z_{i+1}, \ldots, z_n)\big\}\Big) \cap U \longrightarrow \mathbb{C}$$

es una función holomorfa en una variable compleja.

Nótese que si $f : U \subseteq \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función continua, entonces es holomorfa si y solamente si para cualquier punto $(z_1, \ldots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$ y cualquier $z \in \mathbb{C}$, tales que $\xi = (z_1, \ldots, z_{i-1}, z, z_{i+1}, \ldots, z_n) \in U$, se satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_i}(\xi) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y_i}\right)(\xi) = 0,$$

donde $\overline{z}_i = x_i - iy_i$ y $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\frac{\partial f}{\partial y_i}$ son las derivadas parciales de la función f vista como aplicación $f : U \subseteq \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

Un resultado clásico de varias variables (ver [**Kaup&Kaup, 1983**], capítulo 0, Sección 4, por ejemplo) prueba que una función $f : U \subseteq \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ continua es holomorfa si y solamente si es analítica.

Teorema B.2.2 (**Cauchy-Abel**). *Con las notaciones precedentes, sea $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Consideramos el desarrollo de Taylor en un punto $a \in U$ como:*

$$\sigma_a(f) := \sum_{\mu \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{\mu!} D^\mu f(a)(z-a)^\mu,$$

donde:

- *para $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{N}^n$, $\mu!$ denota $\mu_1! \cdots \mu_n!$.*
- $(z-a)^\mu = (z_1 - a_1)^{\mu_1} \cdots (z_n - a_n)^{\mu_n}$
- $D^\mu f(a) = \frac{\partial^{\mu_1 + \cdots + \mu_n} f}{\partial z_1^{\mu_1} \ldots \partial z_n^{\mu_n}}(a) \in \mathbb{C}$.

Entonces, son equivalentes para cada $a \in U$:

i) f es holomorfa en un entorno de a en U.
ii) La serie de Taylor $\sigma_a(f)$ es absolutamente convergente en un poli-disco $P(a, \delta) := \prod_{i=1}^n D(a_i, \delta_i) \subseteq U$ y, además,

$$f(z) = \sigma_a(f)(z), \qquad \forall z \in P(a, \delta),$$

donde $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n) \in \mathbb{R}_+^n$ y $D(a_i, \delta_i) = \{z \in \mathbb{C}^n : \|z_i - a_i\| < \delta_i\}$.

Definición 51. *Una función $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, con $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, se denomina analítica si para cada $a \in U$, existe un entorno abierto $U_a \subseteq U$ tal que*

$$f(z) = \sigma_a(f)(z), \;\; \forall z \in U_a,$$

donde $\sigma_a(f)$ es el desarrollo de Taylor de f en a.

Una función analítica real permite una extensión local a una función analítica compleja y, por ende, puede verse como una función holomorfa compleja. Las condiciones de Cauchy-Riemann son el mecanismo por el cual los teoremas de la Función Inversa, Función Implícita o Rango Constante pueden trasladarse al contexto de las funciones holomorfas. Esa es la metodología seguida en [**Kaup&Kaup, 1983**] y les permite probar resultados como los siguientes:

Definición 52. *Una aplicación continua $f : U \subseteq \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m$ se dice holomorfa si sus coordenadas son funciones holomorfas, es decir, si existen fuciones holomorfas $f_1, \ldots, f_m : U \longrightarrow \mathbb{C}$ tales que*

$$f(z) = \big(f_1(z), \ldots, f_m(z)\big), \qquad \forall z \in U.$$

El siguiente resultado puede encontrarse en [**Kaup&Kaup, 1983**], Capítulo 0, Sección 8:

Teorema B.2.3 (**de la aplicación implícita para funciones holomorfas**). *Sean $U \subseteq \mathbb{C}^n$, $V \subseteq \mathbb{C}^m$ dos abiertos y sea $U \times V \subseteq \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ el abierto en la topología producto dado como un producto cartesiano. Sea $f : U \times V \longrightarrow \mathbb{C}^m$ una aplicación holomorfa. Sean $a \in U$, $b \in V$ tales que la siguiente matriz tiene rango m:*

$$D_{n+1,\ldots,m} f(a,b) := \left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j}(a,b) \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ n+1 \leq j \leq n+m}}$$

donde las coordenadas en $\mathbb{C}^{n+m}$ son representadas mediante $(z_1, \ldots, z_{n+m})$. Supongamos, además, que $f(a,b) = 0$.
Entonces, existen $U_{(a,b)} \subseteq U \times V$ un entorno abierto de (a,b) contenido en $U \times V$, $U_a \subseteq U \subseteq \mathbb{C}^n$ un entorno abierto de a en $\mathbb{C}^n$ y una aplicación holomorfa $g : U_a \longrightarrow \mathbb{C}^m$ tales que

i) $g(a) = b$, $\quad Gr(g) \subseteq U_{(a,b)}$
ii) $\{(x,y) \in U_{(a,b)} : f(x,y) = 0\} = Gr(g)$,

donde $Gr(g) = \{(x, g(x)) : \; x \in U_a\}$ es el grafo de g.

A partir de este resultado para aplicaciones holomorfas uno obtiene, mediante extensión local del real al complejo, la versión analítica del Teorema de la Función Implícita.

Corolario B.2.4 (**Teorema de la Aplicación Implícita para funciones analíticas reales**). *El anterior resultado es igualmente cierto si uno reemplaza $\mathbb{C}$ por $\mathbb{R}$ y reemplaza funciones y aplicaciones holomorfas por funciones y aplicaciones reales.*

B.2.2. Los Teoremas de División y Preparación de Weierstrass. Motivado por fundamentar el análisis complejo a partir de las series de potencias convergentes, K. Weierstrass impartió varios cursos basados en su trabajo [**Weierstrass, 1876**]. Los resultados de mayor relevancia fueron los Teoremas de División y Preparación, de los cuales nos ocuparemos en esta Sección.

Comenzamos introduciendo los anillos de series de potencias formales con coeficientes en un anillo A. Obtendremos como primer resultado el siguiente, que puede consultarse en [**Mat, 1980**]:

PROPOSICIÓN B.2.5. *Sea A un anillo conmutativo con unidad. Entonces, $A[[X_1, \ldots, X_n]]$ es el completado de $A[X_1, \ldots, X_n]$ con respecto a la topología definida por la filtración $\mathfrak{a}$-ádica, donde*

$$\mathfrak{a} := (X_1, \ldots, X_n).$$

En particular, concluimos:

COROLARIO B.2.6. *Con las anteriores notaciones:*

i) Si A es noetheriano, $A[[X_1, \ldots, X_n]]$ es noetheriano.
ii) Si A es un dominio, $A[[X_1, \ldots, X_n]]$ es un dominio.
iii) Si A es normal, entonces $A[[X_1, \ldots, X_n]]$ es normal.
iv) Si A es un anillo local, $A[[X_1, \ldots, X_n]]$ es un anillo local cuyo maximal está generado por el maximal de A y las variables $X_1, \ldots, X_n$.

Para la factoriabilidad se hace uso de los mencionados Teoremas de División y Preparación debidos a K. Weierstrass.

DEFINICIÓN 53. *Una serie de potencias formales $\sigma \in K[[X_1, \ldots, X_n, Y]]$ se denomina distinguida en Y de orden b si*

$$\sigma(0, \ldots, 0, Y) = Y^b e,$$

para alguna unidad $e \in K[[Y]]$. Se denomina polinomio de Weierstrass de grado b a toda serie $\sigma \in K[[X_1, \ldots, X_n, Y]]$ de la forma:

$$\sigma := Y^b + \sum_{k=0}^{b-1} a_k Y^k,$$

donde $a_k \in K[[X_1, \ldots, X_n]]$.

TEOREMA B.2.7 (**Teorema de Preparación de Weierstrass**). *Sea $\sigma \in K[[X_1, \ldots, X_n, Y]]$ una serie de potencias formales distinguida en Y de orden b, entonces, existe un polinomio de Weierstrass, $\omega \in K[[X_1, \ldots, X_n]][Y]$ de grado b y una unidad $e \in K[[X_1, \ldots, X_n]]^\times$ tales que*

$$\sigma = e\,\omega.$$

Más aún, si $K = \mathbb{C}$ y σ es una serie convergente, ω también es covergente.

TEOREMA B.2.8 (**Teorema de División de Weierstrass**). *Sea $\sigma \in K[[X_1, \ldots, X_n, Y]]$ una serie de potencias formales distinguida en Y de orden b, entonces la aplicación:*

$$K[[X_1, \ldots, X_n, Y]] \cdot \sigma \oplus K[[X_1, \ldots, X_n]][Y]_{b-1} \longrightarrow K[[X_1, \ldots, X_n, Y]],$$

dada mediante:

$$(q \cdot \sigma, r) \longmapsto q \cdot \sigma + r,$$

es un isomorfismo de $K[[X_1, \ldots, X_n]]$-módulos. En otras palabras, para toda serie de potencias formales $F \in K[[X_1, \ldots, X_n, Y]]$, existen series únicas $q \in K[[X_1, \ldots, X_n, Y]]$ y un polinomio distinguido de grado a lo sumo b-1 tales que

$$F = q\sigma + r$$

COROLARIO B.2.9. *El anillo de series de potencias formales $K[[X_1, \ldots, X_n]]$ es un dominio de factorización única, normal, local y noetheriano de dimensión n.*

B.2.3. Anillos Locales Regulares. La noción de Anillo Local Regular fue introducida por W. Krull.

DEFINICIÓN 54. *Diremos que un anillo local noetheriano* $(A, \mathfrak{m})$ *es un anillo local regular si su ideal maximal está generado por un sistema de parámetros. Esto es, si* $\dim(A) = d$ *y existen* $x_1, \ldots, x_d \in \mathfrak{m}$ *tales que*

$$(x_1, \ldots, x_d) = \mathfrak{m}.$$

A tales conjuntos se les denomina sistemas regulares de parámetros.

Son anillos locales regulares los anillos de series de potencias formales o los localizados del anillo de polinomios con coeficientes en un cuerpo (cf. [**Mat, 1980**], Capítulo 7, pp.126-127, por ejemplo).

TEOREMA B.2.10. *Sea* $(A, \mathfrak{m})$ *un anillo local regular de dimensión* d*. Son equivalentes:*

i) *A es un anillo local regular,*
ii) *El anillo graduado* $G_{\mathfrak{m}}(A)$ *es un anillo de polinomios en* d *variables con coeficientes en* $A/\mathfrak{m}$ *es un anillo de polinomios con coeficientes en* d *variables con coeficientes en* $A/\mathfrak{m}$*.*
iii) *El* $A/\mathfrak{m}$*-espacio vectorial* $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ *tiene dimensión* d*.*

COROLARIO B.2.11. *Un anillo local noetheriano* $(A, \mathfrak{m})$ *es local regular si y solamente si su completado* $\widehat{A}$ *es local regular. Además, dado que* $G_{\mathfrak{m}}(A)$ *es un anillo normal, todo anillo local regular es un anillo normal.*

COROLARIO B.2.12. *Todo anillo local regular* $(R, \mathfrak{m})$ *de cuerpo residual* $k := R/\mathfrak{m}$ *es dominio de integridad.*

PROPOSICIÓN B.2.13. *Sea* $(A, \mathfrak{m})$ *un anillo local regular de dimensión* d *y sean* $a_1, \ldots, a_j$ *una colección de* j *elementos de* A*. Son equivalentes:*

i) $\{a_1, \ldots, a_j\}$ *es parte de un sistema regular de parámetros de* A*.*
ii) *Las clases* $a_1 + \mathfrak{m}^2, \ldots, a_j + \mathfrak{m}^2$ *son* $A/\mathfrak{m}$*-linealmente independientes en* $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$*.*
iii) $A/(a_1, \ldots, a_j)$ *es un anillo local regular de dimensión* $d - j$*.*

En particular, para cada ideal primo $\mathfrak{p}$ *de* A*,* $A/\mathfrak{p}$ *es local regular de dimensión* $d - r$ *si y solamente si* $\mathfrak{p}$ *está generado por* r *elementos de* A *que forman parte de un sistema regular de parámetros de* A*.*

B.2.4. Criterio del Jacobiano. Sea $V \subseteq \mathbb{K}^n$ una variedad algebraica, $P \in V$ un punto, y $f_1, \ldots, f_s$ un conjunto de generadores de $I(V)$ en $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$.

DEFINICIÓN 55. *Una recta* $\{P + Tv : t \in \mathbb{K}\} \subseteq \mathbb{K}^n$ *pasando por el punto* P *se denomina tangente a* V *en* P*, si se verifica que el siguiente polinomio univariado:*

$$f(T) := gdc(f_1(P + Tv), \ldots, f_s(P + Tv)) \in \mathbb{K}[T],$$

tiene en $t = 0$ *una raíz de multiplicidad mayor que 1.*

Sea $\mathfrak{m}_P$ el ideal maximal de $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ asociado al punto P. Sea $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]_P$ la localización de $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ en el maximal $\mathfrak{m}_P$ (que es un anillo local regular de dimensión n). Obsérvese que

$$\mathbb{K}[X_1 - \alpha_1, \ldots, X_n - \alpha_n] \cong G_{\mathfrak{m}_P}(\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]),$$

donde $P = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Para cada $G \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ denotemos por $d_P(G)$ la diferencial de G en P, esto es, la componente homogénea de grado 1 de G como elemento de $G_{\mathfrak{m}_P}(\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n])$.

LEMA B.2.14. *Con las anteriores notaciones, una recta* $\{P + tv : t \in \mathbb{K}\}$ *es tangente a* V *en* P *si y solamente si* $d_P(f_i)(v) = 0$*,* $1 \leq i \leq s$*.*

Denotemos por $T_P V$ el espacio tangente a V en P y sea $D(f_1, \ldots, f_s)_P$ la matriz jacobiana en P de un sistema generador de $I(V)$. Se tiene:

$$T_P V := \{v \in \mathbb{K}^n : D(f_1, \ldots, f_s)_P(v) = 0\}$$

Más aún, sea $\overline{\mathfrak{m}}_P$ el ideal maximal de $\mathbb{K}[V]$ asociado al punto P y consideremos

$$d_P : \overline{\mathfrak{m}}_P/\overline{\mathfrak{m}}_P^2 \longrightarrow (T_P V)^*.$$

la aplicación inducida por d_P. Entonces, se tiene:

PROPOSICIÓN B.2.15. *La aplicación d_P define un isomorfismo de $\mathbb{K}$-espacios vectoriales.*

DEFINICIÓN 56. *Con las anteriores notaciones, diremos que un punto $P \in V$ es un punto regular o un punto simple si y solamente si*

$$\dim(T_P V) = \dim(V).$$

En caso contrario diremos que P es un punto singular de V.

Obsérvese que la condición de $\dim(T_P V) \geq \dim(V)$ se tiene siempre.

TEOREMA B.2.16 (**Criterio del Jacobiano**). *Sea $V \subseteq \mathbb{K}^n$ una variedad algebraica, supongamos $I(V) = (f_1, \ldots, f_s)$ y sea $D(f_1, \ldots, f_s)$ la matriz jacobiana definida por un sistema generador de I(V). Sea $P \in V$ un punto y $\overline{\mathfrak{m}}_P$ el maximal de $\mathbb{K}[V]$ asociado al punto P. Son equivalentes:*

i) $P \in V$ es un punto simple,
ii) El anillo local noetheriano $\mathbb{K}[V]_{\overline{\mathfrak{m}}_P}$ es un anillo local regular de dimensión igual a la dimensión de V.
iii) El rango de la matriz jacobiana en P es $n - \dim(V)$, i.e.

$$rang(D(f_1, \ldots, f_s)_P) = n - \dim(V) = n - \dim(V).$$

Obsérvese que la condición de ser simple es análoga a las hipótesis del Teorema de la Función Implícita en el que insistiremos más adelante. Conviene señalar que el conjunto de puntos singulares es un subconjunto algebraico propio de V y que la condición de ser un punto liso es una condición genérica en V.

B.2.5. Teorema de Estructura de Cohen. El teorema de I.S Cohen se lee del modo siguiente en [**ZarSam, 1960**], donde, según las autores, se da una prueba debida a A. Geddes:

TEOREMA B.2.17. *Si A es un anillo local regular completo y equicaracterístico, entonces, A contiene un cuerpo de representantes, esto es, existe un subcuerpo K de A tal que K es isomorfo a $A/\mathfrak{m}$.*

La conclusión de este Teorema se lee del modo siguiente:

COROLARIO B.2.18 (**Teorema de Estructura de I.S. Cohen**). *Todo anillo local regular equicaracterístico y completo es un anillo de series de potencias formales.*

COROLARIO B.2.19. *Si $(A, \mathfrak{m})$ es un anillo local regular, noetheriano, dominio de integridad y A es una K-álgebra, con $K \cong k(\mathfrak{m})$, entonces el completado $(\widehat{A}, \widehat{\mathfrak{m}})$ es isomorfo a un anillo de potencias formales y $\widehat{A}$ es, por tanto, dominio de factorización única y es normal (i.e. es dominio e íntegramente cerrado en su cuerpo de fracciones).*

Bibliografía

[Artin-Mazur, 1965] M. Artin, B. Mazur, *"On periodic points"*. Annals of Math. **81** (1965), 82-99.

[Artin-Schreier, 1927] E. Artin, O. Schreier: Eine Kennzeichnung der reell abgeschlossenen Körper. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, Springer-BerlinHeidelberg, **5** (1927), 225–231.

[AtMc, 1969] M.F. Atiyah, I.G. Macdonald, "*Introduction to Commutative Algebra*", Addison-Wesley Publishing Co., 1969. [Edición en español por Ed. Reverté, 1980].

[BCR, 1987] J. Bochnak, M. Coste, M.F. Roy, "*Géométrie Algébrique Réelle*" Ergeb. der Math. und ihrer Grenz. 3. Board **12**. Springer, 1987.

[Brumfiel, 1979] G. Brumfiel. *"Partially ordered rings and semi-algebraic geometry"*. Cambridge Univ. Press, 1979.

[Cohen, 1969] P.J. Cohen, *Decision procedures for real and p-adic fields* Comm. in Pure and Appl. Math. **22** (1969), 131-151.

[Coste, 1982] M. Coste. *Ensembles semi-algébraiques* . En *"Géometrie Algébrique Réelle et Formes Quadratiques"*; J.L. Colliot-Thélène, M. Coste, L. Mahé, M.F. Roy (eds). Lect. Notes in Math. **959**, 1982, 109-138.

[Dubois, 69] D.W. Dubois, *A nullstellensatz for ordered fields.* Ark. Mat. **8** (1969), 111-114.

[García-Hevia, 2018] S. García-Hevia, *"Sobre la finitud de los Equilirios de Nashen juegos genéricos"*. Trabajo de Fin de Grado, Grado en Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad de Cantabria, 2018.

[Heintz, 1983] J. Heintz, *Definability and fast quantifier elimination over algebraically closed fields.* Theoret. Comput. Sci. 1983.

[Kaup&Kaup, 1983] L. Kaup, B. Kaup, "*Holomorphic Functions of Several Complex Variables*". de Gruyter Studies in Mathematics **3**, 1983.

[Krull, 1928] W. Krull, "*Primidealketten in allgemeinen Ringbereichten*". Sitzungs berichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Mathematische-Naturwissenschaftliche Klasse **7** (1928).

[Łojasiewicz, 1964] S. Łojasiewicz, *"Ensembles semi-analytiques"*. Prépublication de l'I.H.E.S, 1964.

[Ma, 1989] H. Matsumura, "*Commutative Ring Theory*". Cambridge Studies in advanced Math. **8**, Cambridge Univ. Press, 1989.

[Mat, 1980] H. Matsumura, "*Commutative Algebra (2nd. Edition)*", Benjamin/Cummings, 1980.

[Mantecón, 2022] I.González Mantecón "*El Teorema de Serre-Auslander-Buchsbaum*", Trabajo de Fin de Grado, UC, Santander, 2022.

[Nasar, 1998] S. Nasar, "A beautiful mind: a Biographynof John Forbes Nash Jr., Winner of the Nobel Prize in Economics, 1994", Simon & Schuster, 1998.

[Nash, 1950] J. Nash, "Non Cooperative Games". PhD Thesis, Princeton University, 1950.

[Nash, 1951] J. Nash, *Non-cooperative games.* Annals of Math. **54** (1951), 286-295.

[Nash, 1952] J. Nash, *Real algebraic manifolds.* Annals of Math. **56**, 1952, 405-421.

[Pardo, 2024] L.M. Pardo, *Notas para un Curso Básico de Álgebra Conmutativa.* Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación, Universidad de Cantabria. Curso 2023/24.

[Po, 66] L.S. PONTRJAGIN, "Topological Groups". Gordon and Breach, 1966.

[Rag *et al.*, 1975] S. Raghavan, B. Singh, R. Sridharan, "*Homological Methods in Commutative Algebra*", Tata Institute for Fund. Res., Oxford University Press, 1975.

[Risler, 70] J.J. Risler , *Une caractérisation des idéaux des variétés algébriques réelles.* C.R. Acad. Sci. Paris **271** (1970), 1171-1173.

[Roy, 1982] M. F. Roy. *Faisceau structural sur le spectre réel et fonctions de Nash* . En *"Géometrie Algébrique Réelle et Formes Quadratiques"*; J.L. Colliot-Thélène, M. Coste, L. Mahé et M.F. Roy (eds). Lect. Notes in Math. **959**, Springer, 1982.

[Serre, 2000] J. P. Serre, *Local Algebra*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 2000. 46.

[Shafarevich, 1974] I.R. Shafarevich, *"Basic Algebraic Geometry"*. Springer-Verlag, 1974.

[Stewart, 1989] I. Stewart, *"Galois Theory"(2nd.edition)* Chapman & Hall Mathematics, 1989.

[Tarski, 1951] A. Tarski, *"A decision method for elementary algebra and geometry"*. Prepared for publication by J.C.C.Mac Kinsey, Berkeley, 1951.

[Tognoli, 1973] A. Tognoli, *Su una congettura di Nash.* Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, **27** (1973), 167-185.

[Weierstrass, 1876] K. WEIERSTRASS, "*Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen.*". Berl. Abh. (1876), 11-60.

[ZarSam, 1960] O. Zariski, P. Samuel, "*Commutative Algebra*", vols. I-II, Van Nostrand, Princeton, 1958,1960.