Facultad
de
Ciencias

BASES DE SCHAUDER EN ESPACIOS DE BANACH

(Schauder Bases in Banach Spaces)

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autor: Iker Delgado Sánchez

Director: Jesús Araujo Gómez

Junio de 2024

Índice

Resumen

En algunos espacios de Banach, podemos encontrar ciertas sucesiones, llamadas bases de Schauder, que permiten representar de manera única cada elemento del espacio como una serie cuyos sumandos son múltiplos de los elementos de la sucesión.

En este trabajo, se estudian las principales características de las bases de Schauder y se introducen algunos ejemplos destacados. Se presta igualmente una especial atención a las bases de Schauder que son incondicionales, en el sentido de que el orden de los sumandos en la serie no altera la convergencia, y a otro concepto estrechamente relacionado con el de base de Schauder, como es el de sucesión básica.
Palabras clave: Bases de Schauder, Sucesiones básicas, Bases incondicionales, Espacios de Banach.

Abstract

In some Banach spaces, we can find certain sequences, called Schauder bases, that allow us to uniquely represent each element of the space as a series whose terms are multiples of the elements of the sequence.

This work studies the main characteristics of Schauder bases and introduces some prominent examples. Special attention is also paid to Schauder bases that are unconditional, in the sense that the order of the terms in the series does not alter convergence, and to another concept closely related to that of a Schauder basis, such as that of a basic sequence.
Keywords: Schauder Bases, Basic sequences, Unconditional Bases, Banach Spaces.

1. Introducción

1.1. Objetivos y estructura del trabajo.

Dado que en un espacio de Banach general no contamos con el concepto de ortogonalidad y, por lo tanto, a diferencia de lo que sucede en los espacios de Hilbert, tampoco podemos hablar de bases ortonormales, vamos a intentar generalizar en la medida de lo posible dicho concepto. En cualquier caso, en tanto que espacio vectorial, todo espacio de Banach admite una base en el sentido algebraico. Sin embargo, el interés de este trabajo es estudiar el concepto de base de Schauder.

Este trabajo está formado por tres capítulos. En el primero de ellos, hablaremos de las bases de Schauder, desde la definición hasta algunos ejemplos concretos y resultados relacionados con estas.

En el segundo capítulo nos dedicaremos a hablar de las sucesiones básicas (las cuales están estrechamente relacionadas con las bases de Schauder). Como en el primer capítulo, veremos la definición, ejemplos y resultados de gran interés.

Y, en el último capítulo, hablaremos de las bases incondicionales, las cuales son bases de Schauder que siguen siendo bases de Schauder aunque les apliquemos una permutación cualquiera.

1.2. Conceptos previos y notación.

En esta memoria, los espacios de Banach se consideran sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.

La clausura de un conjunto A la representaremos como $\bar{A}$

$\langle A \rangle$ representa el subespacio vectorial generado por A. Si $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$, escribiremos $\langle A \rangle$ como $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$.

La notación utilizada para las sucesiones será la siguiente:

- Las sucesiones de elementos de un espacio de Banach se denotarán con letras latinas. Por ejemplo, (x_n) será una sucesión de elementos del espacio.
- Las sucesiones de escalares del cuerpo $\mathbb{K}$ se representarán con letras griegas. Por ejemplo, (α_n) será una sucesión de escalares.

Ahora vamos a hablar de las definiciones de algunos conceptos y de algunas consideraciones previas que vamos a necesitar para seguir el trabajo adecuadamente:

Dado un espacio de Banach X, definimos la esfera unidad S_X como $S_X := \{x \in X : \|x\| = 1\}$.

En esta memoria, todos los operadores se considerarán lineales.

Recordemos finalmente que un operador $T : X \to Y$ es un isomorfismo si es biyectivo y ambos T y T^{-1} son continuos. Dos espacios normados X e Y son isomorfos si existe un isomorfismo $T : X \to Y$.

2. Bases de Schauder.

2.1. Definición, primeros ejemplos y resultados básicos.

En este capítulo vamos a hablar de las bases de Schauder, desde su definición hasta algunos resultados útiles relacionados con estas. Dichas bases, como veremos a continuación, nos permiten representar de forma única todos los elementos de un espacio de Banach como una serie cuyos términos son elementos de la base multiplicados por escalares.

Definición 1 *Sea (x_n) una sucesión (finita o infinita) en un espacio de Banach X. Se dice que (x_n) es una base de Schauder de dicho espacio X si, para todo x en X, existe una única sucesión de escalares (α_n) de forma que*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$$

Es claro que x_n es no nulo para todo n porque, en caso contrario, no tendríamos unicidad en las sucesiones de escalares: $0 = 7 \cdot 0$ y $0 = 8 \cdot 0$. También está claro que en todo espacio finitodimensional, una base algebraica es una base de Schauder. Por ello, en adelante, salvo mención expresa de lo contrario, supondremos que todos los espacios considerados tienen dimensión infinita.

Veamos a continuación algunos ejemplos de bases de Schauder:

Ejemplo 1 *Cualquier base ortonormal de un espacio de Hilbert es una base de Schauder.*

Ejemplo 2 *La sucesión de vectores canónicos (e_n) es base de Schauder de c_0 y de l_p, con $1 \leq p < \infty$.*

Ejemplo 3 *Vamos a dar un ejemplo de base de Schauder del espacio de las sucesiones convergentes c. Sea (x_n) la sucesión definida de la siguiente forma:*

$$x_1 := (1)$$

y, para $n \in \mathbb{N}$

$$x_{n+1} := e_n$$

En este caso, (1) denota la sucesión cuyos términos son todos iguales a 1. Entonces tenemos que (x_n) es base de Schauder de c.

Ejemplo 4 *La base de Schauder clásica (c_n) de $C[0,1]$ viene definida de la siguiente forma (ver Figura 1):*

- $c_0(t) := 1$ *para todo* $t \in [0,1]$.
- $c_1(t) := t$ *para todo* $t \in [0,1]$.
- *Para* $n \geq 2$ *con* $2^{m-1} < n \leq 2^m$, c_n *viene definida por:*

$$c_n(t) = \begin{cases} 2^m \left(t - \left(\dfrac{2n-2}{2^m} - 1 \right) \right) & \text{si } \dfrac{2n-2}{2^m} - 1 \leq t < \dfrac{2n-1}{2^m} - 1 \\ 1 - 2^m \left(t - \left(\dfrac{2n-1}{2^m} - 1 \right) \right) & \text{si } \dfrac{2n-1}{2^m} - 1 \leq t < \dfrac{2n}{2^m} - 1 \\ 0 \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

Vamos a ver que la sucesión (c_n) es una base de Schauder de $C[0,1]$. Para ello, vamos a ver que todo elemento f de $C[0,1]$ se puede expresar como $f = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n c_n$ con α_n escalar para todo $n \in \mathbb{N}$ (aquí se entiende que la convergencia se considera en $C[0,1]$, es decir, convergencia uniforme). El planteamiento a seguir va a ser constructivo, es decir, dada una función $f \in C[0,1]$, vamos a construir una sucesión de escalares (α_n) de forma que $f = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n c_n$.

Sea $f \in C[0,1]$ cualquiera. Primero vamos a definir una sucesión (p_n) de funciones en $C[0,1]$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} p_0 &:= f(0)c_0, \\ p_1 &:= p_0 + (f(1) - p_0(1))c_1, \\ p_2 &:= p_1 + (f(1/2) - p_1(1/2))c_2, \\ p_3 &:= p_2 + (f(1/4) - p_2(1/4))c_3, \\ p_4 &:= p_3 + (f(3/4) - p_3(3/4))c_4, \\ p_5 &:= p_4 + (f(1/8) - p_4(1/8))c_5, \end{aligned}$$

y de forma inductiva, obtenemos que en general, dados $n \geq 2$ y m tales que $2^{m-1} < n \leq 2^m$, p_n se define de la siguiente forma:

$$p_n := p_{n-1} + \left(f\left(\frac{2n-1}{2^m} - 1 \right) - p_{n-1}\left(\frac{2n-1}{2^m} - 1 \right) \right) c_n.$$

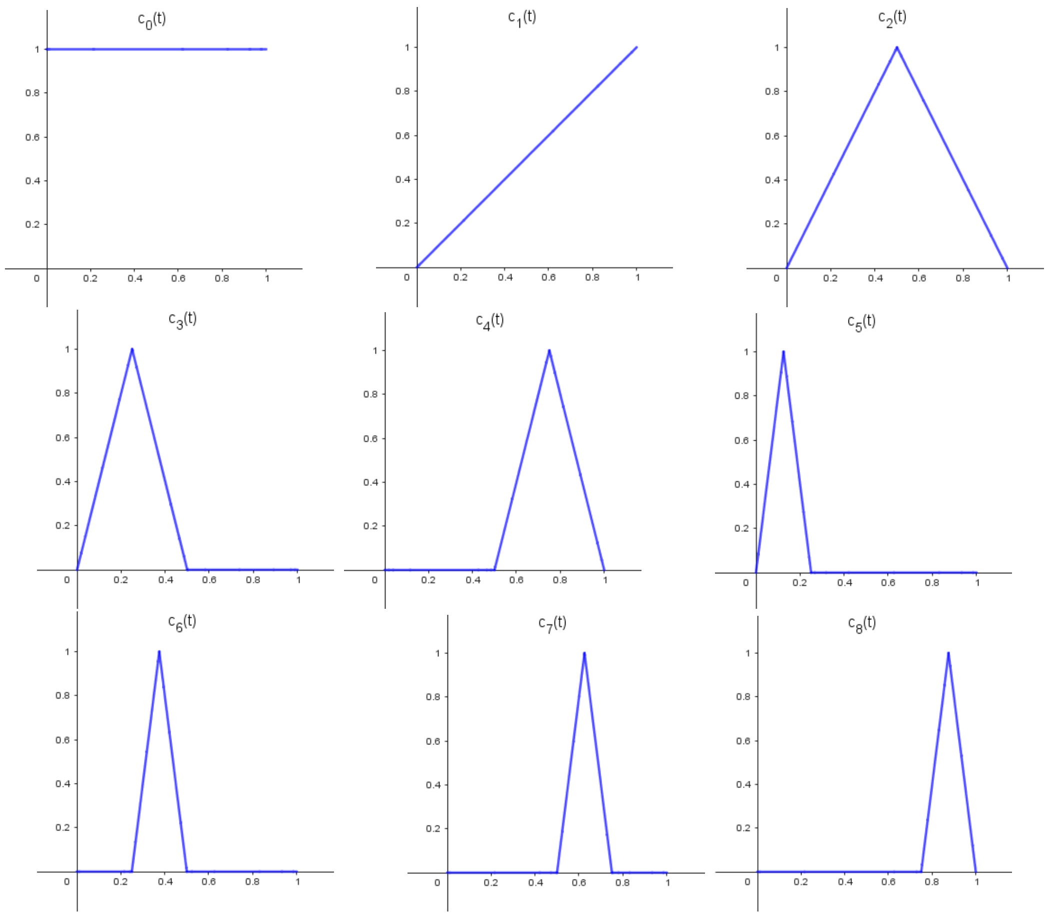

Figura 1: Primeros nueve elementos de la base de Schauder clásica de $C[0,1]$

Es directo ver que los p_n son funciones continuas en $[0,1]$ para todo $n \in \mathbb{N}$ ya que son combinaciones lineales de funciones continuas definidas en $[0,1]$. Ahora, llamamos x_n al punto donde f aparece evaluado en la definición de p_n, es decir

$$\begin{aligned}
x_0 &:= 0 \\
x_1 &:= 1 \\
x_2 &:= 1/2 \\
x_3 &:= 1/4 \\
x_4 &:= 3/4 \\
x_5 &:= 1/8
\end{aligned}$$

y, dados $n \geq 2$ y m tales que $2^{m-1} < n \leq 2^m$, entonces

$$x_n = \frac{2n-1}{2^m} - 1.$$

Es directo ver que, para $k, n \in \mathbb{N}$ con $k \leq n$ cualesquiera, se tiene que $p_n(x_k) = f(x_k)$.

Ahora, a partir de (p_n), vamos a construir la sucesión de escalares (α_n) que estábamos buscando. Para construir dicha sucesión vamos a tomar los coeficientes de cada c_n en el término p_n, es decir, los términos de la sucesión los definimos así:

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &:= f(0), \\
\alpha_1 &:= f(1) - p_0(1), \\
\alpha_2 &:= f(1/2) - p_1(1/2), \\
\alpha_3 &:= f(1/4) - p_2(1/4), \\
\alpha_4 &:= f(3/4) - p_3(3/4), \\
\alpha_5 &:= f(1/8) - p_4(1/8),
\end{aligned}$$

y, de forma análoga que con (p_n) (usando inducción), dados $n \geq 2$ y m tales que $2^{m-1} < n \leq 2^m$ tenemos que

$$\alpha_n := f\left(\frac{2n-1}{2^m} - 1\right) - p_{n-1}\left(\frac{2n-1}{2^m} - 1\right).$$

Vemos que

$$\begin{aligned}
p_0 &= \alpha_0 c_0, \\
p_1 &= p_0 + \alpha_1 c_1 = \alpha_0 c_0 + \alpha_1 c_1 = \sum_{n=1}^{2} \alpha_n c_n, \\
p_2 &= p_1 + \alpha_2 c_2 = \sum_{n=1}^{2} \alpha_n c_n + \alpha_3 c_3 = \sum_{n=1}^{3} \alpha_n c_n
\end{aligned}$$

y, en general, por construcción, es directo ver que $p_k = \sum_{n=0}^{k} \alpha_n c_n$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$*. Por lo tanto, tenemos lo siguiente:*

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n c_n \iff \sum_{n=1}^{k} \alpha_n c_n \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} f \iff p_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} f$$

Recordemos que dado un $n \in \mathbb{N}$*, la función* p_n *coincide con* f *en los puntos* x_k *con* $k \leq n$ *(*$k \in \mathbb{N}$*) e interpola poligonalmente entre estos puntos.*

Veamos que $f = \lim_{k\to\infty} p_k$*. Fijamos* $\epsilon > 0$*. Como* f *es uniformemente continua, existe* $\delta > 0$ *tal que, si* $|x - y| < \delta$*, entonces* $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}$*.*

Ahora tomamos $k_0 \in \mathbb{N}$ *tal que dos puntos* x_k *consecutivos (como elementos de* $[0, 1]$*) entre* $x_0, \ldots, x_{k_0}$ *estén a distancia entre sí menor que* δ*.*

Ahora, si $k \geq k_0$*, tendremos más puntos* x_k *y, por ello, dos puntos consecutivos distan entre sí menos que* δ*.*

Tomamos $m \in \mathbb{N}$ *tal que* $m \geq k_0$ *y sea* $x \in [0, 1]$*. Vamos a ver que* $|f(x) - p_m(x)| < \epsilon$*. Ahora, tomamos* $x_k \leq x \leq x_l$ *donde* x_k *y* x_l *son consecutivos. Entonces tenemos que* $|x_k - x_l| < \delta$ *y, por lo tanto,* $|f(x_k) - f(x_l)| < \frac{\epsilon}{2}$*, es decir,* $|p_m(x_k) - p_m(x_l)| < \frac{\epsilon}{2}$*.*

Por la forma en la que está definida p_m*, resulta que* $p_m(x)$ *está en el intervalo que tiene como extremos* $p_m(x_k)$ *y* $p_m(x_l)$*. Por ello, tenemos que*

$$|p_m(x) - p_m(x_l)| \leq |p_m(x_k) - p_m(x_l)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Por otra parte, $|x - x_l| < \delta$*, luego* $|f(x) - f(x_l)| < \frac{\epsilon}{2}$*. Así,*

$$\begin{aligned} |f(x) - p_m(x)| &\leq |f(x) - p_m(x_l)| + |p_m(x_l) - p_m(x)| \\ &\leq |f(x) - f(x_l)| + |p_m(x_l) - p_m(x)| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Para terminar, solo nos falta probar una cosa para demostrar que (c_n) *es una base de Schauder para* $C[0, 1]$ *y es que las sucesiones de escalares que generan un elemento deben de ser únicas. Por eso mismo, supongamos que existen* (α_n)*,* (β_n) *tales que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n c_n.$$

Entonces tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n - \beta_n)c_n = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n c_n - \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n c_n = 0$$

y, como es evidente que los c_n son positivos y no nulos por construcción, entonces $(\alpha_n - \beta_n)$ es la sucesión nula o, lo que es equivalente, $(\alpha_n) = (\beta_n)$ como queríamos demostrar.

Ahora veremos algunos resultados básicos sobre las bases de Schauder. El que vamos a ver a continuación nos va a permitir obtener nuevas bases de Schauder a partir de una dada multiplicándola por una sucesión de escalares.

Proposición 1 *Sea (x_n) una base de Schauder de un espacio de Banach X y sea (α_n) una sucesión de escalares no nulos. Entonces la sucesión $(\alpha_n x_n)$ es también una base de Schauder de X.*

Demostración: Sea $x \in X$ un elemento cualquiera. Entonces tenemos que $x = \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n x_n$ siendo esa (β_n) la única sucesión de escalares que permite la igualdad. Por una parte, considerando las sucesiones (α_n) y (α_n^{-1}), tenemos lo siguiente:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n x_n = \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n(\alpha_n^{-1}\alpha_n)x_n = \sum_{n=1}^{\infty}(\beta_n\alpha_n^{-1})(\alpha_n x_n).$$

Por otra parte, al ser (β_n) una sucesión de escalares única con tal propiedad, $(\beta_n\alpha_n^{-1})$ es una sucesión con las mismas características y así tenemos que $(\alpha_n x_n)$ es base de Schauder del espacio, como queríamos demostrar. ■

Obviamente, si dada una base de Schauder, podemos obtener otra multiplicándo esta primera por una sucesión de escalares, entonces podemos obtener una base de Schauder en la que todos los elementos tienen normal igual a 1. Esto nos lo va a mostrar el siguiente corolario.

Corolario 1 *Si (x_n) es una base de Schauder de un espacio de Banach, entonces $(\|x_n\|^{-1}x_n)$ es una base normalizada de dicho espacio.*

A continuación veremos la relación que tiene un espacio de Banach con base de Schauder con el espacio de las sucesiones con la propiedad de que la suma de la serie en términos de dicha base converge.

Proposición 2 *Sea X un espacio de Banach con una base de Schauder (x_n). Sea Y el espacio vectorial formado por las sucesiones de escalares (α_n) tales que $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ converge. Se tiene que la aplicación $\|\cdot\|_Y : Y \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\|(\alpha_n)\|_Y = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \right\|$$

es una norma en Y. Además, Y es un espacio de Banach y la aplicación

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \to (\alpha_n)$$

es una isometría lineal (sobreyectiva) de X en Y.

Demostración: Observamos que la aplicación Φ de X en Y tal que a cada $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \in X$ le asigna (α_n) está bien definida ya que, como (x_n) es base de Schauder de X, entonces para cada $x \in X$ existe una única sucesión de escalares (α_n) que cumpla dicha condición. Veamos a continuación que Φ es biyectiva.

Por una parte, es inmediato que si $(\alpha_n) = \Phi(x) = \Phi(y) = (\beta_n)$, necesariamente $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n x_n = y$, con lo cual Φ es inyectiva. Por otra parte, también está claro que, si $(\alpha_n) \in Y$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \in X$ y $(\alpha_n) = \Phi\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n\right)$ con lo cual Φ es sobreyectiva. Además, se puede ver que dicha aplicación es lineal teniendo en cuenta las propiedades de la suma de sucesiones y operando en el sumatorio.

Ahora vamos a ver que la aplicación $\|\cdot\|_Y$ es una norma. Consideramos $(\alpha_n), (\beta_n) \in Y$ tales que $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ e $y = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n x_n$ con $x, y \in X$. Entonces tenemos lo siguiente:

$$\|(\alpha_n)\|_Y = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \right\| = \|x\| \geq 0$$

alcanzándose la igualdad solo cuando $(\alpha_n) = (0)$.

Sea γ un escalar. Entonces

$$\begin{aligned} \|\gamma \cdot (\alpha_n)\|_Y = \|(\gamma\, \alpha_n)\|_Y = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \gamma\, \alpha_n x_n \right\| = \left\| \gamma \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \right\| \\ = \|\gamma \cdot x\| = |\gamma| \cdot \|x\|. \end{aligned} \tag{1}$$

Finalmente, solo nos falta ver que cumple la desigualdad triangular:

$$\begin{aligned}\|(\alpha_n)+(\beta_n)\|_Y = \|(\alpha_n+\beta_n)\|_Y &= \left\|\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n+\beta_n)x_n\right\| \\ &= \left\|\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n + \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n x_n\right\| \\ &= \|x+y\| \leq \|x\|+\|y\| = \|(\alpha_n)\|_Y + \|(\beta_n)\|_Y.\end{aligned}$$

Con todo lo anterior, ya tenemos demostrado que dicha aplicación es una norma.

A continuación, veremos que Φ es una isometría lineal, para lo cual solo nos falta ver que esa aplicación preserva la norma. Esto se deduce precisamente de la definición:

$$\left\|\Phi\left(\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n\right)\right\|_Y = \|(\alpha_n)\|_Y = \left\|\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n\right\|.$$

Para terminar, como Φ es una isometría lineal y X es completo, Y también lo es. ■

Hay un gran interés en saber si la imagen de una base de Schauder por un isomorfismo es también base de Schauder, es decir, queremos saber si los isomorfismos llevan bases en bases. Esto lo vamos ilustrar con la siguiente proposición.

Proposición 3 *Supongamos que X e Y son espacios de Banach y que T es un isomorfismo de X en Y. Si (x_n) es una base de Schauder de X, entonces (Tx_n) es una base de Schauder de Y.*

Demostración: Consideremos $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n \in X$. En primer lugar, tenemos lo siguiente:

$$T\left(\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n\right) = T\left(\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\alpha_n x_n\right) = \lim_{k\to\infty} T\left(\sum_{n=1}^{k}\alpha_n x_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n T(x_n).$$

Fijamos $y \in Y$ y entonces, por ser T biyectivo sabemos que existe un único $x \in X$ con $Tx = y$. Ahora, como (x_n) es base de Schauder, tenemos que existe una única sucesión de escalares (α_n) tal que $x = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n$ y, lo cual implica que $y = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n T(x_n)$.

Por otra parte, si existe (β_n) con $y = \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n T(x_n)$ entonces $y = T\left(\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n x_n\right)$ y así, necesariamente $\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n x_n = x$ ya que T es isomorfismo biyectivo e y era la imagen de

x por T. Ahora, gracias a que (x_n) es una base de Schauder, entonces $(\alpha_n) = (\beta_n)$ ya que la sucesión de escalares que forma un elemento es única. Con esto ya tenemos que (Tx_n) es una base de Schauder de Y como queríamos demostrar. ■

Podemos aplicar este resultado para relacionar los ejemplos 2 y 3.

Ejemplo 5 *Podemos definir el siguiente isomorfismo entre los espacios c_0 y c*

$$\begin{aligned} T:\, c_0 &\longrightarrow c \\ e_1 &\longrightarrow (1) \\ e_n &\longrightarrow e_{n+1} \end{aligned}$$

el cual transforma la base de Schauder (e_n) de c_0 en la base de Schauder (x_n) de c que definimos en Ejemplo 2. También hay que tener en cuenta que por lo visto en la demostración de Proposición 3, tenemos que una aplicación biyectiva entre las bases de Schauder nos define un isomorfismo biyectivo entre los espacios de Banach como es en este caso.

Podemos ver también que las bases de Schauder comparten algunas características con las bases algebraicas; por ejemplo, sus elementos son linealmente independientes.

Proposición 4 *Toda base de Schauder de un espacio de Banach es linealmente independiente.*

Demostración: Consideremos una base de Schauder (x_n) del espacio X. Sea $m \in \mathbb{N}$. Probaremos que los vectores $x_1, \ldots, x_m$ son linealmente independientes, es decir, veremos que para cualesquiera escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, si

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i = 0,$$

entonces $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 0$.

Supongamos por el contrario que no son linealmente independientes, es decir, existe algún α_j con $0 < j \leq m$ tal que $\alpha_j \neq 0$. Ahora consideramos la sucesión de escalares (α_n) de forma que los primeros m elementos son los $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ mencionados anteriormente y el resto son todos iguales a 0. Entonces tenemos lo siguiente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n = \sum_{n=1}^{m} \alpha_n x_n + \sum_{m+1}^{\infty} \alpha_n x_n = 0 + \sum_{m+1}^{\infty} 0 \cdot x_n = 0$$

Así tenemos que (α_n) y la sucesión nula dan lugar al elemento 0 del espacio de Banach X, con lo cual (x_n) no es base de Schauder. ■

Si sabemos que un espacio de Banach tiene una base de Schauder, ¿sabemos algo más al respecto de dicho espacio? Pues la respuesta es que sí:

Proposición 5 *Todo espacio de Banach que tenga una base de Schauder es separable.*

Demostración: Sea X un espacio de Banach que tiene una base de Schauder (x_n). Queremos ver que X contiene un subconjunto numerable y denso en dicho espacio. Consideramos la base normalizada de Schauder: $(\|x_n\|^{-1}x_n)$. Entonces, por una parte, dado un $x \in X$ podemos escribir $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(\|x_n\|^{-1}x_n)$, donde obviamente la convergencia de esta serie garantiza que la sucesión de sumandos $(\alpha_n\|x_n\|^{-1}x_n)$ converge a 0, es decir, $(\alpha_n) \in c_0$.

Por otra parte, gracias a Proposición 2, sabemos que X es isométrico a un subconjunto A de c_0. Vamos a ver que A es separable. Por simplicidad, vamos a usar la notación correspondiente al caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Consideremos $B_k = \{(\alpha_n) : \alpha_n \in \mathbb{Q},\ \alpha_n = 0\ \forall n \geq k\}$ y $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$. Tenemos que B es numerable por ser unión numerable de conjuntos numerables y que $\overline{B} = A$; así A es separable y, por lo tanto, X también lo es por isomorfismo. ■

Observación 1 *Dado que l_∞ no es separable, entonces l_∞ no puede tener ninguna base de Schauder y, por lo tanto, (e_n) no es base de Schauder l_∞.*

Dado que todo espacio de Banach es en particular un espacio vectorial y en dichos espacios existen el concepto de base en el sentido algebraico, vamos a hacer un pequeño inciso para distinguir las bases de Schuader de las bases en el sentido algebraico.

2.2. Bases de Hamel.

En primer lugar, sabemos que todo espacio vectorial V de dimensión $n \in \mathbb{N}$ tiene una base algebraica con n elementos. Pero, en general, todo espacio vectorial tiene una base algebraica y a dichas bases se les da el nombre de bases de Hamel.

Definición 2 *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y B un subconjunto no vacío de V tal que B es linealmente independiente. Diremos que B es base de Hamel si para todo $x \in X$ existen*

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \in B$$
$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$$

tales que

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$$

o, lo que es equivalente, podemos generar cualquier elemento de V mediante combinaciones lineales de elementos de B.

Haciendo uso del Axioma de elección o, lo que es equivalente, por medio del lema de Zorn, vamos a demostrar que todo espacio vectorial tiene una base en el sentido algebraico.

Teorema 1 *Todo espacio vectorial admite una base de Hamel.*

Demostración: Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión infinita y $\mathcal{A}$ el conjunto de las familias linealmente independientes en ese espacio. Obviamente $\mathcal{A}$ es no vacío. Consideramos $\{A_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ una cadena ascendente contenida en $\mathcal{A}$, es decir, dados A_α, A_β elementos de esa cadena, entonces tenemos que $A_\alpha \subset A_\beta$ ó $A_\beta \subset A_\alpha$. Veamos que toda cadena ascendente tiene una cota superior en $\mathcal{A}$.

A partir de ahora, cuando tengamos que $A_\beta \subset A_\gamma$, lo denotaremos como $A_\beta \leq A_\gamma$. Sean $B_0 := \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$ y $x_1, \ldots, x_n \in B_0$. Tenemos que existe un A_{α_1} tal que $x_1 \in A_{\alpha_1}$ y de la misma forma, existe un A_{α_j} tal que $x_j \in A_{\alpha_j}$ con $j = 1, \ldots, n$. Dado que los A_α son parte de una cadena ascendente, existe n_0 un entero positivo tal que $A_{\alpha_1}, \ldots, A_{\alpha_n} \subset A_{\alpha_{n_0}}$ y así, $x_1, \ldots, x_n \in A_{\alpha_{n_0}}$, con lo cual $x_1, \ldots, x_n$ son linealmente independientes y $B_0 \in \mathcal{A}$. Además B_0 es cota superior de la cadena

Ahora, por el lema de Zorn, en $\mathcal{A}$ existe un elemento maximal que denotaremos como C_0. Veamos que C_0 es base de V.

Sea $x \in V \setminus C_0$ y consideremos el conjunto $C_0 \cup \{x\}$. Dado que C_0 es un elemento maximal entre las familias libres de V, sabemos que $C_0 \cup \{x\}$ no es libre, lo que implica que existen

$$x_1, \ldots, x_n \in C_0$$
$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$$

tales que

$$x + \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$$

o, lo que es equivalente,

$$x = -\alpha_1 x_1 - \ldots - \alpha_n x_n.$$

Así, tenemos que podemos generar cualquier elemento de V a partir de C_0, lo que implica que C_0 es sistema generador y, como C_0 ya era familia libre, entonces C_0 es base de Hamel de V. ■

Como hemos comentado anteriormente, si un espacio de Banach tiene dimensión n ($n \in \mathbb{N}$), entonces toda base algebraica es base de Schauder con respecto a cualquier norma. Ahora nos podíamos preguntar qué pasa en el caso en el que la dimensión sea infinita y es lo que va a responder el siguiente resultado.

Proposición 6 *Si X es un espacio de Banach de dimensión infinita, entonces una base de Schauder no puede ser base de Hamel.*

Demostración: Supongamos que (x_n) es base de Schauder de X. Sabemos que (x_n) es una sucesión infinita de términos no nulos ya que, en caso contrario, X tendría dimensión finita. Sin pérdida de generalidad, por Corolario 1, podemos suponer que $\|x_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Consideramos $x = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x_n$. Tenemos lo siguiente

$$\|x\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x_n \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^2} \right| \|x_n\| = \frac{\pi^2}{6}$$

y entonces, como esa serie es absolutamente convergente en X, tenemos que $x \in X$. Ahora, si tuviésemos que (x_n) es una base de Hamel, tendríamos que x podría expresarse también como una combinación lineal finita, lo cual va en contra con la unicidad de expresión garantizada por la condición de ser base de Schauder y llegamos a un absurdo. Concluimos entonces que (x_n) no es base de Hamel. ■

Una vez visto que los conceptos de base de Hamel y base de Schauder son distintos, vamos centrarnos únicamente en estas últimas.

2.3. Proyecciones naturales, funcionales coordenados y x_n-norma.

En esta sección de la memoria, vamos a hablar de algunos operadores que son definidos a partir de una base de Schauder y algunos resultados sobre ellos. Además, definiremos una norma a partir de estos operadores y sacaremos resultados de gran interés.

En primer lugar, dada una base de Schauder (x_n), podemos definir operadores como los siguientes:

Definición 3 *Supongamos que el espacio de Banach X tiene una base de Schauder (x_n). Para cada entero positivo m, el m-ésimo funcional coordenado x_m^* para (x_n) es la aplicación $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \to \alpha_m$ de X en $\mathbb{K}$. Además, la m-ésima proyección natural P_m para (x_n) es la aplicación $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \to \sum_{n=1}^{m} \alpha_n x_n$ de X en X.*

Además de operadores, podemos definir una norma a partir de una base de Schauder. Dicha norma es la que llamaremos (x_n)-norma.

Definición 4 *Sea (x_n) una base de Schauder de un espacio de Banach X. Llamaremos (x_n)-norma de X a la dada por la siguiente fórmula.*

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \right\|_{(x_n)} := \sup_m \left\| \sum_{n=1}^{m} \alpha_n x_n \right\|$$

Teniendo ya definida la (x_n)-norma, podríamos preguntarnos si guarda alguna relación con la norma original del espacio. Veamoslo en el siguiente teorema.

Teorema 2 *Sea (x_n) una base de Schauder de un espacio de Banach X. Entonces la (x_n)-norma de X es una norma equivalente a la norma original del espacio y $\|x\| \leq \|x\|_{(x_n)}$ para todo x en X.*

Demostración: En primer lugar, tenemos lo siguiente:

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \right\| = \lim_{m\to\infty} \left\| \sum_{n=1}^{m} \alpha_n x_n \right\| \leq \sup_m \left\| \sum_{n=1}^{m} \alpha_n x_n \right\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \right\|_{(x_n)}$$

Con ello $\|x\| \leq \|x\|_{(x_n)}$ para todo $x \in X$. Vamos a ver seguidamente que $(X, \|\cdot\|_{(x_n)})$ es un espacio de Banach. Consideremos una sucesión de Cauchy $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{n,m} x_n \right)_{m=1}^{\infty}$ en X con respecto a la (x_n)-norma. Si $m_1, m_2, k \in \mathbb{N}$ y $k \geq 2$, entonces

$$\begin{aligned} |\alpha_{k,m_1} - \alpha_{k,m_2}| \|x_k\| &= \left\| \sum_{n=1}^{k} (\alpha_{n,m_1} - \alpha_{n,m_2}) x_n - \sum_{n=1}^{k-1} (\alpha_{n,m_1} - \alpha_{n,m_2}) x_n \right\| \\ &\leq 2 \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{n,m_1} - \alpha_{n,m_2}) x_n \right\|_{(x_n)} \end{aligned}$$

Por otra parte, para $k=1$, tenemos que

$$|\alpha_{1,m_1}-\alpha_{1,m_2}|\|x_1\| \leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_{n,m_1}-\alpha_{n,m_2})x_n\right\|_{(x_n)}$$

lo que implica que para cada n, la sucesión $(\alpha_{n,m})_{m=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $\mathbb{K}$ y, por lo tanto, convergente a un cierto escalar α_n. Por ello, obviamente, para todo $j \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{j}\alpha_{n,m}x_n = \sum_{n=1}^{j}\alpha_n x_n$$

.

Sea $\epsilon > 0$ y sea m_ϵ un entero positivo tal que si $m, m' \geq m_\epsilon$, entonces

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{n,m'}x_n - \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{n,m}x_n\right\|_{(x_n)} < \frac{\epsilon}{3}$$

y así,

$$\left\|\sum_{n=1}^{j}\alpha_{n,m'}x_n - \sum_{n=1}^{j}\alpha_{n,m}x_n\right\| < \frac{\epsilon}{3}$$

para cada j. Fijando $m = m_\epsilon$ y haciendo tender m' a infinito, tenemos que

$$\left\|\sum_{n=1}^{j}\alpha_n x_n - \sum_{n=1}^{j}\alpha_{n,m_\epsilon}x_n\right\| \leq \frac{\epsilon}{3} \tag{2}$$

para cada j. Ahora, si $j_2 \geq j_1 > 1$ entonces

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{n=j_1}^{j_2}\alpha_n x_n - \sum_{n=j_1}^{j_2}\alpha_{n,m_\epsilon}x_n\right\| &\leq \left\|\sum_{n=1}^{j_2}\alpha_n x_n - \sum_{n=1}^{j_2}\alpha_{n,m_\epsilon}x_n\right\| + \left\|\sum_{n=1}^{j_1-1}\alpha_n x_n - \sum_{n=1}^{j_1-1}\alpha_{n,m_\epsilon}x_n\right\| \\ &\leq \frac{2\epsilon}{3}\end{aligned} \tag{3}$$

Por otra parte, como $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{n,m_\epsilon}x_n$ converge, entonces podemos encontrar un j_ϵ tal que si $j_2 \geq j_1 > j_\epsilon$, entonces $\left\|\sum_{n=j_1}^{j_2}\alpha_{n,m_\epsilon}x_n\right\| < \frac{\epsilon}{3}$, lo que implica

$$\left\|\sum_{n=j_1}^{j_2}\alpha_n x_n\right\| \leq \left\|\sum_{n=j_1}^{j_2}\alpha_n x_n - \sum_{n=j_1}^{j_2}\alpha_{n,m_\epsilon}x_n\right\| + \left\|\sum_{n=j_1}^{j_2}\alpha_{n,m_\epsilon}x_n\right\| < \epsilon \tag{4}$$

cuando $j_2 \geq j_1 > j_\epsilon$ así que la sucesión de sumas parciales $\left(\sum_{n=1}^{j} \alpha_n x_n\right)_j$ es de Cauchy y, por tanto $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ converge. Ahora, si en (2) sustituimos m_ϵ por cualquier $m \geq m_\epsilon$ y tomamos el supremo sobre todos los j, tenemos que

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{n=1}^{j} \alpha_n x_n - \sum_{n=1}^{j} \alpha_{n,m} x_n \right\| \leq \frac{\epsilon}{3}$$

y podemos concluir que

$$\lim_m \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{n,m} x_n \right\|_{(x_n)} = 0$$

lo que demuestra que X es completo con respecto a la (x_n)-norma.

Finalmente, gracias a la desigualdad demostrada al principio de la demostración, tenemos que el operador identidad de $(X, \|\cdot\|_{(x_n)})$ en $(X, \|\cdot\|)$ es continuo, lo cual gracias al teorema de la aplicación inversa (también conocido por el nombre del teorema de la inversa acotada o el teorema del ismorfismo de Banach) nos permite asegurar que ambas normas son equivalentes. ■

Gracias al teorema que acabamos de probar, podemos demostrar que las proyecciones naturales son operadores acotados. Eso viene descrito en el siguiente resultado.

Teorema 3 *Cada proyección natural asociada a una base de Schauder de un espacio de Banach es acotada. Más aún, el conjunto de todas las proyecciones naturales es acotado.*

Demostración: Supongamos que (x_n) es una base de Schauder de un espacio de Banach X. Sean $m \in \mathbb{N}$ y P_m la m-ésima proyección natural para (x_n). Si $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \in X$, entonces

$$\left\| P_m \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \right) \right\|_{(x_n)} = \left\| \sum_{n=1}^{m} \alpha_n x_n \right\|_{(x_n)} \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \right\|_{(x_n)}$$

Con ello, si $\|P_m\|_{(x_n)}$ denota la norma de P_m cuando en X se considera la norma $\|\cdot\|_{(x_n)}$, entonces $\|P_m\|_{(x_n)} \leq 1$, lo que implica que P_m es continua con respecto a la (x_n)-norma. Entonces, por la equivalencia de normas recogida en Teorema 2, la continuidad de P_m con respecto a la norma original del espacio es inmediata o, lo que es lo mismo, P_m es acotado con respecto a la norma original.

Por lo comentado anteriormente, siendo $M > 0$ tal que $\|\cdot\|_{(x_n)} \leq M\|\cdot\|$ tenemos que para todo $x \in X$, $\|P_m(x)\| \leq \|P_m(x)\|_{(x_n)} \leq \|x\|_{(x_n)} \leq M\|x\|$ lo que implica que $\|P_m\| \leq M$ para todo $m \in \mathbb{N}$ y así el conjunto de las proyecciones es acotado. ■

Observación 2 *Si $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ es el conjunto de proyecciones naturales asociadas a una base de Schauder de un espacio de Banach, entonces $\sup_n \|P_n\| \in \mathbb{R}$. Además, notemos también que cada funcional coordenado es la diferencia de dos proyecciones naturales. En consecuencia, tenemos el siguiente corolario.*

Corolario 2 *Cada funcional coordenado asociado con una base de Schauder para un espacio de Banach es acotado. Más en general, el conjunto de todos los funcionales coordenados es acotado.*

Definición 5 *Sea $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ el conjunto de proyecciones naturales asociadas con una base de Schauder de un espacio de Banach. Se llama constante base de la base de Schauder a $\sup_n \|P_n\|$. Se dice que la base de Schauder es monótona u ortogonal si su constante base es 1.*

Ejemplo 6 *Si X es c_0 o l_p con $1 \leq p < \infty$, entonces la base de Schauder (e_n) de vectores canónicos para X es monótona.*

Proposición 7 *Supongamos que (x_n) es una base de Schauder de un espacio de Banach X y que K es la constante base de (x_n). Entonces K es el menor número real M tal que*

$$\left\|\sum_{n=1}^{m} \alpha_n x_n\right\| \leq M \left\|\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n\right\|$$

para todos los $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \in X$ y $m \in \mathbb{N}$. De hecho, K es el menor número real M tal que

$$\left\|\sum_{n=1}^{m_1} \alpha_n x_n\right\| \leq M \left\|\sum_{n=1}^{m_2} \alpha_n x_n\right\|$$

para cualesquiera $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ tales que $m_1 \leq m_2$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m_2} \in \mathbb{K}$.

Demostración: Por Definición 5, tenemos que $K = \sup\{\|P_m\| : m \in \mathbb{N}\}$ y, por las expresiones de la norma, tenemos que $\|P_m\| = \text{ínf}\{M \geq 0 : \|P_m x\| \leq M\,\|x\|\ \forall x \in X\}$. De donde tenemos que, para todo $m \in \mathbb{N}$ y $x \in X$,

$$\|P_m x\| \leq \|P_m\|\|x\| \leq K\|x\|$$

y, si tomamos un $M_0 > 0$ con dicha propiedad, entonces $\|P_m\| \leq M_0$ para todo $m \in \mathbb{N}$, luego $K := \sup\{\|P_m\| : m \in \mathbb{N}\} \leq M_0$. ■

Proposición 8 *Supongamos que (x_n) es una base de Schauder de un espacio de Banach X. Entonces son equivalentes*

1. *La base de Schauder (x_n) es monótona.*
2. $\|\sum_{n=1}^{m} \alpha_n x_n\| \leq \|\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n\|$ *para cada elemento $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ de X y para cada entero positivo m.*
3. $\|\sum_{n=1}^{m} \alpha_n x_n\| \leq \left\|\sum_{n=1}^{m+1} \alpha_n x_n\right\|$ *para cada colección de $m+1$ escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+1}$ y para cada entero positivo m.*
4. *La norma original de X y la (x_n)-norma de X son la misma.*

Demostración: Usando que la constante base es al menos 1, entonces tenemos que:

(1) $\iff$ (2) es inmediato utilizando Proposición 7. Por una parte, si la base es monótona, la constante base es 1 y, por definición, tenemos (2). Por otra parte, si tenemos (2), por Proposición 7 tenemos que la constante base es menor o igual que 1, lo que nos lleva a (1).

(2) $\iff$ (3) Como decimos, por Proposición 7, suponiendo cierto (2), entonces la constante base es menor o igual que 1 y, por la segunda parte de la misma proposición, es inmediato (3); y, de forma análoga, si tenemos (3), por el mismo razonamiento tenemos que la constante base es menor o igual que 1 y usando la misma proposición tenemos (2).

(3) $\iff$ (4) Por una parte, suponiendo que se da (3), tenemos que, dado $x \in X$, $\|P_m x\| \leq \|P_{m+1} x\|$, con lo que la sucesión $(\|P_m x\|)$ es creciente y, con ello, $\|x\|_{(x_n)} = \sup_{m\in\mathbb{N}} \|P_m x\| = \lim_{m\to\infty} \|P_m x\| = \|x\|$ ya que $P_m x \to x$ cuando m tiende a infinito. Por otra parte, si la (x_n)-norma y la norma original son la misma, tenemos que $\sup_{m\in\mathbb{N}} \|P_m x\| = \|x\|_{(x_n)} = \|x\|$ y, en particular, $\|P_m x\| \leq \|x\|$ para todo $x \in X$ y todo $m \in \mathbb{N}$, con lo que se satisface la condición (2) y, por tanto, tenemos (3). ∎

Corolario 3 *Si (x_n) es una base de Schauder de un espacio de Banach X, entonces (x_n) es monótona con respecto a la (x_n)-norma de X.*

Demostración: Por una parte, como la identidad $Id : (X, \|\cdot\|) \to (X, \|\cdot\|_{(x_n)})$ es un isomorfismo, por Proposición 3, (x_n) es una base de Schauder de $(X, \|\cdot\|_{(x_n)})$.
Por otra parte, considerando X como $(X, \|\cdot\|_{(x_n)})$,entonces es directo que tenemos el apartado (4) de la Proposición 8 y entonces tenemos inmediatamente que (x_n) es monótona con respecto a la norma $\|\cdot\|_{(x_n)}$. ∎

Definición 6 *Diremos que una base de Schauder* (x_n) *para un espacio de Banach* X *es estrictamente monótona si*

$$\left\|\sum_{n=1}^{m}\alpha_n x_n\right\| < \left\|\sum_{n=1}^{m+1}\alpha_n x_n\right\|$$

para cada entero positivo m *y para cada* $m+1$ *escalares* $\alpha_1,\ldots,\alpha_{m+1}$ *con* $\alpha_{m+1}\neq 0$.

Ejemplo 7 *La base* (e_n) *de vectores canónicos para cada* l_p, *con* $1\leq p<\infty$, *es estrictamente monótona. En cambio, si consideramos la misma base en* c_0 *es monótona pero no estrictamente monótona: por ejemplo,* $\|e_1+e_2\|_0=\|e_1\|_0$.

Teorema 4 *Una sucesión* (x_n) *en un espacio de Banach* X *es una base de Schauder si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *cada* x_n *es no nulo;*
2. *existe un número real* M *tal que*

$$\left\|\sum_{n=1}^{m_1}\alpha_n x_n\right\| \leq M\left\|\sum_{n=1}^{m_2}\alpha_n x_n\right\|$$

   para cada $m_1,m_2\in\mathbb{N}$ *con* $m_1\leq m_2$ *y para cada* $\alpha_1,\ldots,\alpha_{m_2}\in\mathbb{K}$*;*

3. $\overline{\langle\{x_n : n\in\mathbb{N}\}\rangle}=X$.

Demostración: Ya hemos visto que toda base de Schauder (x_n) de X cumplía (1), (2) y (3) (Definición 1 junto con la observación posterior a esta y Proposición 7). Con esto, solo nos falta probar que, si una sucesión (x_n) de X cumple esas tres condiciones, entonces es base de Schauder de X.

Sea (x_n) una sucesión en X que satisface (1), (2) y (3).
Veamos en primer lugar que la forma de escribir cada elemento como serie basada en los (x_n) es necesariamente única. Supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n x_n$ es una serie convergente. Veamos entonces que, para cada m,

$$\left\|\sum_{n=1}^{m}\gamma_n x_n\right\| \leq M\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n x_n\right\|$$

Fijamos $m\in\mathbb{N}$. Tenemos que, por la condición (2), para cada $k\geq m$,

$$\left\|\sum_{n=1}^{m}\gamma_n x_n\right\| \leq M\left\|\sum_{n=1}^{k}\gamma_n x_n\right\|$$

Como $\sum_{n=1}^{k}\gamma_n x_n \to \sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n x_n$, entonces $\left\|\sum_{n=1}^{k}\gamma_n x_n\right\| \to \left\|\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n x_n\right\|$.
Con ello, tenemos que

$$\left\|\sum_{n=1}^{m}\gamma_n x_n\right\| \leq M\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n x_n\right\|. \tag{5}$$

Supongamos ahora que las sucesiones de escalares (α_n) y (β_n) son tales que $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n = \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n x_n$ donde ambas series son convergentes. Veamos que $\alpha_n = \beta_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Por una parte, por (5) tenemos en particular que

$$|\alpha_1 - \beta_1|\,\|x_1\| \leq M\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n - \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n x_n\right\| = 0$$

así que $\alpha_1 = \beta_1$. Inductivamente, podemos ver que $\alpha_n = \beta_n$ para todo entero positivo n. De esta forma, tenemos que no hay ningún elemento x de X para el cual exista más de una sucesión de escalares (α_n) tal que $x = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n$, como queríamos probar.

Una vez tenemos garantiza la unicidad, veremos ahora que cada $x \in X$ se puede escribir como $x = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n$. En primer lugar, para cada entero positivo m y cada sucesión **finita** de escalares no nulos (α_n), definimos $p_m\left(\sum_{n\geq 1}\alpha_n x_n\right) = \sum_{n=1}^{m}\alpha_n x_n$. Por la condición (2), tenemos que cada p_m es un operador acotado de $\langle\{x_n : n \in \mathbb{N}\}\rangle$ en $\langle\{x_1, \ldots, x_m\}\rangle$ de norma menor o igual que M. Para continuar con la prueba, necesitaremos el siguiente resultado (Teorema 1.9.1 en [3]):

Sean M un subespacio denso de X e Y un espacio de Banach. Consideremos un operador acotado $T_0 : M \to Y$. Entonces existe un único operador acotado $T : X \to Y$ tal que T y T_0 coinciden en M. Además, $\|T\| = \|T_0\|$.

Gracias a esto último, existe una extensión P_m de p_m, $P_m : X = \overline{\langle\{x_n : n \in \mathbb{N}\}\rangle} \to \langle\{x_1, \ldots, x_m\}\rangle$ con la misma norma que p_m. De esta forma, para x en X, cada y en $\langle\{x_n : n \in \mathbb{N}\}\rangle$ y cada entero positivo m,

$$\begin{aligned}\|P_m x - x\| &\leq \|P_m x - P_m y\| + \|P_m y - y\| + \|y - x\| \\ &\leq M\|x - y\| + \|P_m y - y\| + \|y - x\| \\ &\leq (M+1)\|x - y\| + \|P_m y - y\|.\end{aligned}$$

Si hacemos tender m a infinito en la expresión anterior, tendremos que $y = \lim_{m\to\infty} p_m y = \lim_{m\to\infty} P_m y$, y así podemos ver que

$$\limsup_m \|P_m x - x\| \leq (M+1)\|x-y\|$$

para cada $x \in X$ y cada $y \in \langle\{x_n : n \in \mathbb{N}\}\rangle$. Cómo además y es un elemento arbitrario de un subconjunto denso de X, tenemos que $\limsup_m \|P_m x - x\| = 0$ para todo $x \in X$. Así acabamos de probar que

$$\lim_m P_m x = x$$

para cada $x \in X$.

Por último, fijamos $x \in X$ y consideramos α_1 tal que $P_1 x = \alpha_1 x_1$. Para cada y en el subconjunto denso $\langle\{x_n : n \in \mathbb{N}\}\rangle$ de X, $P_1 P_2 y = p_1 p_2 y = p_1 y = P_1 y$, de donde vemos que $P_1 P_2 = P_1$. Por lo tanto, $P_1 P_2 x = \alpha_1 x_1$ y, así, existe un α_2 tal que $P_2 x = \sum_{n=1}^{2} \alpha_n x_n$. Aplicando inducción, obtenemos una sucesión de escalares (α_n) tal que, para cada m, $P_m x = \sum_{n=1}^{m} \alpha_n x_n$, de forma que

$$x = \lim_m P_m x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n.$$

Con esto y con la unicidad probada anteriormente, tenemos que (x_n) es base de Schauder de X. ■

Observación 3 *En el resultado anterior necesitamos que el espacio de Banach X sea separable ya que como hemos comentado anteriormente, si no lo fuese, no tendría sentido hablar de que exista alguna base de Schauder de dicho espacio.*

Por último, vamos a ver una definición que tiene que ver con la constante base definida previamente y con los espacios de Banach.

Definición 7 *Supongamos que X es un espacio de Banach que admite una base de Schauder. Para cada base de Schauder (x_n) de X, denotamos a su constante base por $K_{(x_n)}$. Entonces llamaremos constante base de X a*

$$K_X = \inf\{K_{(x_n)} : (x_n) \textit{es base de Schauder de} X\}.$$

2.4. Base de Haar.

Llegados a este punto, tenemos todas las herramientas necesarias para poder probar que la base de Haar es base de Schauder para los espacios $L_p[0,1]$ para $1 \leq p < \infty$. Vamos a ver este ejemplo con detalle ya que es de gran interés y se apoya en varios resultados de la sección anterior. Además, como $L_\infty[0,1]$ no es separable, no cabe hablar de base de Schauder en este caso.

Ejemplo 8 *La base de Haar (h_n) de $L_p[0,1]$, con $1 \leq p < \infty$, viene definida de la siguiente forma (ver Figura 2), donde consideramos representantes adecuados de las clases de equivalencia:*

$$h_1(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \in [0,1) \\ 0 \text{ si } t = 1 \end{cases}$$

y, para $n \geq 2$, siendo m el entero positivo tal que $2^{m-1} < n \leq 2^m$,

$$h_n(t) = \begin{cases} \quad 1 \text{ si } \dfrac{2n-2}{2^m} - 1 \leq t < \dfrac{2n-1}{2^m} - 1 \\ -1 \text{ si } \dfrac{2n-1}{2^m} - 1 \leq t < \dfrac{2n}{2^m} - 1 \\ \quad 0 \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

Nótese que el conjunto donde h_n es no nula conforma un intervalo. Lo denotaremos por J_n. Así,

$$J_n = \left[\frac{2n-2}{2^m} - 1, \frac{2n}{2^m} - 1\right).$$

Vemos así que los intervalos J_n con $2^{m-1} < n \leq 2^m$ definen una partición P_m del intervalo $[0,1)$ mediante intervalos de longitud $\frac{1}{2^{m-1}}$. Los intervalos contenidos en la partición P_m son aquellos de extremos consecutivos

$$0,\ \frac{1}{2^{m-1}},\ \frac{2}{2^{m-1}},\ \dots\ ,\ \frac{2^{m-1}}{2^{m-1}}.$$

Así, si $m_2 > m_1$, los puntos $\frac{k}{2^{m_2-1}}$ están entre los puntos de la forma $\frac{l}{2^{m_1-1}}$. Vamos a ver que (h_n) es base de Schauder de $L_p[0,1]$. Para ello, vamos a demostrar que cumple (1), (2) y (3) de Teorema 4.

Por construcción es evidente que $h_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ya que todas esas funciones toman valores no nulos en subconjuntos de medida distinta de 0. Esto nos da (1).

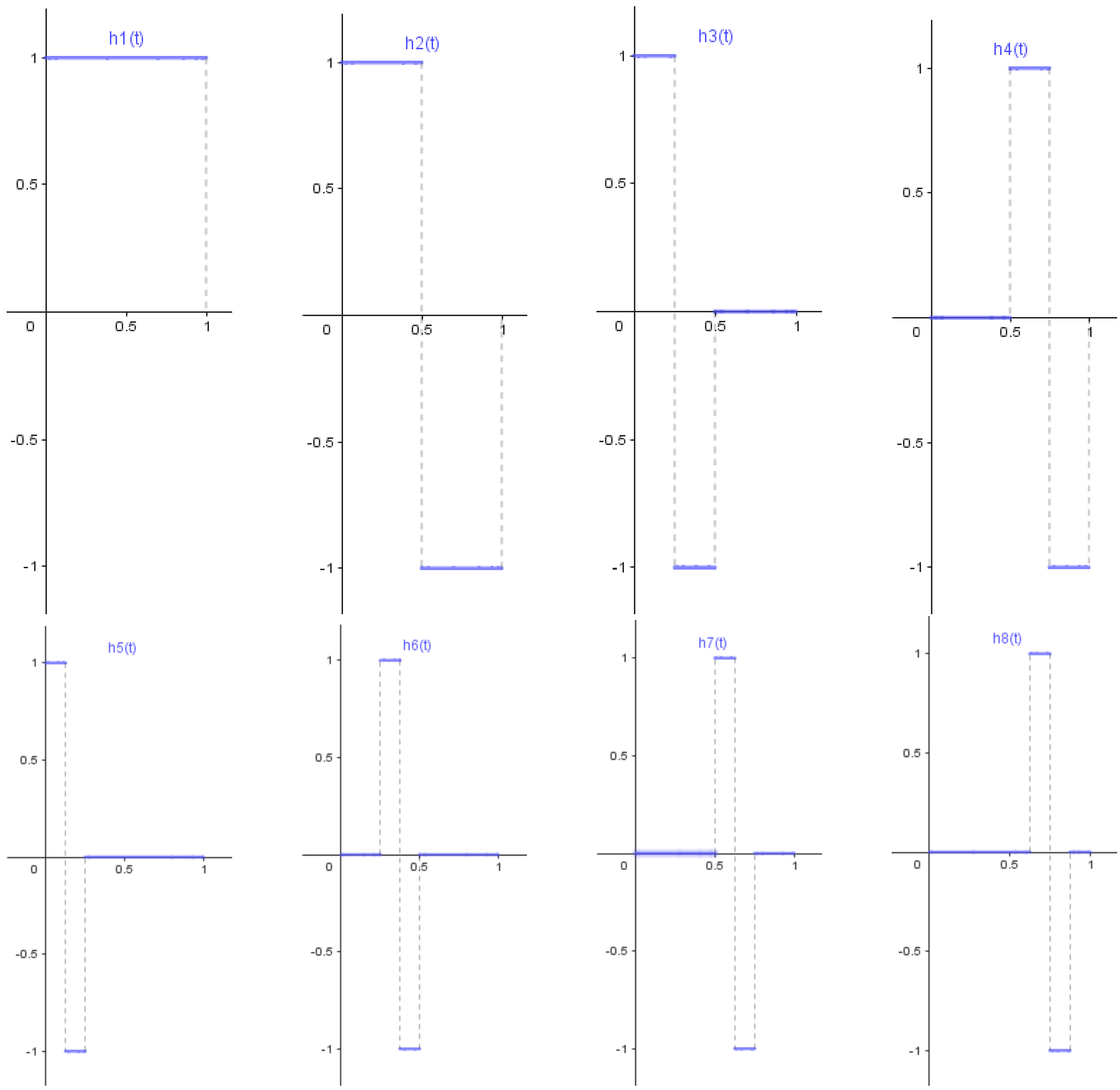

Figura 2: Primeros ocho elementos de la base de Haar

Ahora, para probar (2), fijamos $n_0, m_0 \in \mathbb{N}$ tales que $n_0 \geq 2$ y $2^{m_0-1} < n_0 \leq 2^{m_0}$. Para simplificar la prueba, vamos a introducir la siguiente notación:

- $I_1 := \left[\frac{2n_0-2}{2^{m_0}} - 1, \frac{2n_0-1}{2^{m_0}} - 1\right)$
- $I_2 := \left[\frac{2n_0-1}{2^{m_0}} - 1, \frac{2n_0}{2^{m_0}} - 1\right)$
- $A := [0,1] \setminus (I_1 \cup \ I_2) = [0,1] \setminus J_{n_0}$

Es decir, I_1 es el intervalo donde la función h_{n_0} vale 1, I_2 es donde vale -1 y A donde es nula.

Sea (α_n) una sucesión de escalares. Veamos a continuación que el valor de $\displaystyle\sum_{n=1}^{n_0-1} \alpha_n h_n$ es constante en $I_1 \cup I_2$ en casi todo punto. Para ello, veremos que si $n < n_0$, entonces h_n es constante en $I_1 \cup I_2$ en casi todo punto. En primer lugar, es obvio que h_1 es constante en $[0,1]$ c.t.p.

Por otra parte, vamos a demostrar que si $2^{m-1} < n, k \leq 2^m$ y $n \neq k$, entonces, h_n y h_k toman valores no nulos en intervalos disjuntos. Para ello, vamos a probar que dos h_n consecutivas h_{n_1}, h_{n_2}, donde $2^{m-1} < n_1 < n_2 \leq 2^m$ con $n_2 = n_1 + 1$, toman valores no nulos en intervalos consecutivos de longitud $\frac{1}{2^{m-1}}$. Por definición, tenemos que

$$\begin{aligned} J_{n_1} &= \left\{ x \in [0,1] : \frac{2n_1 - 2}{2^m} - 1 \leq x < \frac{2n_1}{2^m} - 1 \right\} \\ &= \left\{ x \in [0,1] : \frac{2(n_2-1) - 2}{2^m} - 1 \leq x < \frac{2(n_2-1)}{2^m} - 1 \right\} \\ &= \left[\left(\frac{2n_2 - 2}{2^m} - 1 \right) - \frac{1}{2^{m-1}}, \frac{2n_2 - 2}{2^m} - 1 \right) \end{aligned}$$

y que

$$\begin{aligned} J_{n_2} &= \left\{ x \in [0,1] : \frac{2n_2 - 2}{2^m} - 1 \leq x < \frac{2n_2}{2^m} - 1 \right\} \\ &= \left[\frac{2n_2 - 2}{2^m} - 1, \frac{2n_2}{2^m} - 1 \right) \end{aligned}$$

De aquí es directo ver que J_{n_1} y J_{n_2} son disjuntos y consecutivos, lo que implica que, para cualquier par de valores consecutivos de n que comparten el mismo m, las funciones asociadas toman valores no nulos en intervalos disjuntos y consecutivos. Con todo esto, podemos asegurar que todas las h_n con n cumpliendo que $2^{m_0-1} < n < n_0 \leq 2^{m_0}$ toman valor nulo en $I_1 \cup I_2$.

Por otra parte, ahora vamos a ver que los h_n tales que $n \leq 2^m < 2^{m_0}$ toman valores constantes en $I_1 \cup I_2$. Para ello, vamos a probar que, si $m_1 = m_2 - 1$ y tenemos que

$2^{m_2-1} < n_2 \leq 2^{m_2}$, *entonces, para todos los posibles valores de* n_1 *con* $2^{m_1-1} < n_1 \leq 2^{m_1}$, h_{n_1} *es constante donde* h_{n_2} *toma valores no nulos.*

Por lo comentado anteriormente, si comparamos P_{m_1} *y* P_{m_2}, *tenemos que los intervalos de* P_{m_2} *son subintervalos de los de* P_{m_1}, *de forma que las funciones asociodas a* n_1 *toman valor constante en* J_{n_2} *(ya sea -1, 0 ó 1) como queríamos probar.*

Aplicando lo anterior de forma recursiva, tenemos que los h_n *tales que* $n \leq 2^m < 2^{m_0}$ *toman valores constantes en* $I_1 \cup I_2$.

Utilizando todo lo que hemos probado anteriormente, tenemos que todas las h_n *con* $n < n_0$ *son constantes en* $I_1 \cup I_2$ *y que, por lo tanto,* $\sum_{n=1}^{n_0-1} \alpha_n h_n$ *es constante. Llamaremos* α *a dicho valor constante. Entonces, tenemos que*

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{n_0} \alpha_n h_n\right|^p - \int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{n_0-1} \alpha_n h_n\right|^p = \\
{\scriptstyle (h_{n_0}\,=\,0\ en\ A)} &= \int_{I_1\cup I_2} \left(\left|\sum_{n=1}^{n_0} \alpha_n h_n\right|^p - \left|\sum_{n=1}^{n_0-1} \alpha_n h_n\right|^p\right) + \int_A \underbrace{\left(\left|\sum_{n=1}^{n_0} \alpha_n h_n\right|^p - \left|\sum_{n=1}^{n_0-1} \alpha_n h_n\right|^p\right)}_{=0} \\
&= \int_{I_1} \left|\sum_{n=1}^{n_0} \alpha_n h_n\right|^p + \int_{I_2} \left|\sum_{n=1}^{n_0} \alpha_n h_n\right|^p - \int_{I_1\cup I_2} \left|\sum_{n=1}^{n_0} \alpha_n h_n\right|^p \\
&= \int_{I_1} \left|\sum_{n=1}^{n_0-1} \alpha_n h_n + \alpha_{n_0} h_{n_0}\right|^p + \int_{I_2} \left|\sum_{n=1}^{n_0-1} \alpha_n h_n + \alpha_{n_0} h_{n_0}\right|^p - \int_{I_1\cup I_2} \left|\sum_{n=1}^{n_0-1} \alpha_n h_n\right|^p \\
&= \int_{I_1} |\alpha + \alpha_{n_0}|^p + \int_{I_2} |\alpha - \alpha_{n_0}|^p - \int_{I_1\cup I_2} |\alpha|^p \\
&= \frac{|\alpha + \alpha_{n_0}|^p + |\alpha - \alpha_{n_0}|^p - 2|\alpha|^p}{2^{m_0}} \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\left\|\sum_{n=1}^{n_0-1} \alpha_n h_n\right\|_p \leq \left\|\sum_{n=1}^{n_0} \alpha_n h_n\right\|_p$$

lo cual, como n_0 *es arbitriario, es equivalente a que*

$$\left\|\sum_{n=1}^{m_1} \alpha_n h_n\right\|_p \leq \left\|\sum_{n=1}^{m_2} \alpha_n h_n\right\|_p$$

donde $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ *con* $m_1 \leq m_2$. *Con esto queda probado que se da* (2) *de Teorema 4 con* $M = 1$.

Vamos a ver finalmente que $\langle\{h_n : n \in \mathbb{N}\}\rangle$ contiene las funciones características de todos los intervalos diádicos de la forma $\left[\frac{n-1}{2^m}, \frac{n}{2^m}\right)$, donde m es un entero no negativo y n es un entero tal que $1 \leq n \leq 2^m$. Es obvio que $\chi_{[0,1)}$ es h_1. Podemos obtener $\chi_{[0,\frac{1}{2})}$ como $\frac{h_1 + h_2}{2}$ y $\chi_{[\frac{1}{2},1)}$ como $\frac{h_1 - h_2}{2}$. En general, aplicando inducción, se puede ver que podemos obtener $\chi_{[\frac{n-1}{2^m},\frac{n}{2^m})}$ como combinación lineal de las h_n.

Con esto, como el conjunto de las funciones características en esos intervalos diádicos genera un subespacio denso, concluimos que $L_p[0,1] = \overline{\langle\{h_n : n \in \mathbb{N}\}\rangle}$, y queda probado (3).

Además, con la prueba de (2) *de Teorema 4, hemos probado también que se da* (3) *de Proposición 8, lo que nos permite asegurar que* (h_n) *es monótona.*

2.5. Propiedad de aproximación.

Esta sección de la memoria tiene como objetivo responder a la pregunta de si todo espacio de Banach separable tiene al menos una base de Schauder que, como veremos a continuación, la respuesta es que no todo espacio separable tiene una base de Schauder. Para poder ver esto, necesitamos las siguientes definiciones:

Definición 8 *Diremos que un operador $T : X \to Y$ es compacto si dada un sucesión acotada $(x_n) \subset X$ cualquiera, entonces $(Tx_n) \subset Y$ tiene una subsucesión convergente. Denotaremos por $K(X,Y)$ al espacio de los operadores compactos.*

Definición 9 *Un espacio de Banach X tiene la propiedad de aproximación si para cada espacio de Banach Y, el conjunto de los operadores de rango finito de $B(Y,X)$ es denso en $K(Y,X)$.*

Ahora que ya sabemos lo que es que un espacio de Banach tenga la propiedad de aproximación, ya podemos ver el siguiente resultado.

Teorema 5 *Todo espacio de Banach con una base de Schauder tiene la propiedad de aproximación.*

Para probar este resultado, vamos a necesitar hacer uso del siguiente Teorema:

Teorema 6 *Sea X un espacio de Banach. Entonces son equivalentes:*

- *El espacio X tiene la propiedad de aproximación.*
- *El operador identidad en X pueda ser aproximado en subconjuntos compactos de X por operadores de rango finito, es decir, para cada subconjunto compacto K de X y para cada $\epsilon > 0$, existe un operador de rango finito $T_{K,\epsilon} \in B(X)$ tal que $\|T_{K,\epsilon}x - x\| < \epsilon$ para cualquier $x \in K$.*

Demostración de Teorema 5: Supongamos que X es un espacio de Banach con al menos una base de Schauder, la cual denotaremos por (x_n). Supongamos que (P_n) es la sucesión de proyecciones naturales asociadas a (x_n) y que M es la constante base de (x_n). Sea K un subconjunto compacto no vacío de X y sea $\epsilon > 0$.

Basándonos en el Teorema 6, para probar este teorema nos basta con encontrar un entero positivo n_0 tal que $\|P_{n_0}x - x\| < \epsilon$ para cualquier $x \in K$.

Sean $y_1, \ldots, y_m$ elementos de K tales que cada elemento de K se encuentra a una distancia menor de $\dfrac{\epsilon}{(M+2)}$ de algún y_j con $j \in \{1, \ldots, m\}$. Ahora tomamos un entero postivo n_0 tal que $\|P_{n_0}y_j - y_j\| < \dfrac{\epsilon}{(M+2)}$ para cualquier $j = 1, \ldots, m$.

Tomamos ahora un elemento x cualquiera de K y consideremos j_0 tal que $\|x - y_{j_0}\| < \dfrac{\epsilon}{(M+2)}$. Entonces, teniendo en cuenta la definición de constante base como $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_n\|$, tenemos lo siguiente

$$
\begin{aligned}
\|P_{n_0}x - x\| &\leq \|P_{n_0}(x - y_{j_0})\| + \|P_{n_0}y_{j_0} - y_{j_0}\| + \|y_{j_0} - x\| \\
&\leq |M|\|x - y_{j_0}\| + \|P_{n_0}y_{j_0} - y_{j_0}\| + \|y_{j_0} - x\| \\
&< M \cdot \frac{\epsilon}{(M+2)} + \frac{\epsilon}{(M+2)} + \frac{\epsilon}{(M+2)} \\
&= (M+2) \cdot \frac{\epsilon}{(M+2)} = \epsilon
\end{aligned}
$$

como queríamos demostrar. ■

Gracias al resultado anterior, podemos deducir que todo espacio de Banach que no tenga la propiedad de aproximación carece de base de Schauder. Por lo tanto, si encontramos un espacio de Banach separable sin la propiedad de aproximación, tendremos un ejemplo de un espacio de Banach separable sin base de Schauder, como mencionamos al principio de la sección. Un ejemplo de estos espacios es el proporcionado por Enflo en 1973.

Ahora vamos a cambiar de sección, vamos a pasar de las bases de Schauder a las sucesiones básicas. Estas sucesiones tienen mucha relación con las bases de Schauder y son de gran interés.

3. Sucesiones básicas

Tras todo lo que hemos visto de bases de Schauder, ahora vamos a estudiar un concepto bastante relacionado con estas, el de sucesión básica. Dichas sucesiones básicas son las que podemos usar para representar todos los elementos de un subespacio del espacio de Banach a través de las series como las de las bases de Schauder.

Definición 10 *Diremos que una sucesión* (x_n) *en un espacio de Banach* X *es una sucesión básica si es una base de Schauder de* $\overline{\langle\{x_n : n \in \mathbb{N}\}\rangle}$

Para que se entienda mejor el concepto anterior, proporcionamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 9 *En el caso de los espacios de Banach* $X = c_0$ *ó* l_p *con* $1 \leq p < \infty$, *tenemos que la sucesión* (e_n) *de vectores canónicos es una base de Schauder de X. Sin embargo, si consideramos la misma sucesión para el espacio de Banach* l_∞, *tal sucesión no constituye una base de Schauder ya que no hay ninguna sucesión de escalares* (α_n) *para la cual* $(1, 1, 1, \ldots) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ *(obviamente, si se toma* $\alpha_n = 1$ *para todo* n, *tal serie no converge). Sin embargo,* (e_n) *sí es una sucesión básica en* l_∞, *asociada con el subespacio* c_0.

Definición 11 *Dada una sucesión básica* (x_n) *en un espacio de Banach X, diremos que* (x_n) *es acotada si* $0 < \operatorname{ínf}_n \|x_n\| \leq \sup_n \|x_n\| < +\infty$. *Por otra parte, si* $\|x_n\| = 1$, *diremos que la sucesión está normalizada.*

Observación 4 *Gracias a Proposición 3 y por la definición de sucesión básica, tenemos que los isomorfismos transforman sucesiones básicas en sucesiones básicas.*

Observación 5 *Como toda sucesión básica es base de Schauder para la clausura del espacio generado por los elementos de la base, entonces por Proposición 4, tenemos que las sucesiones básicas son linealmente independientes.*

Corolario 4 *Una sucesión* (x_n) *en un espacio de Banach* X *es una sucesión básica si y solo si cada* x_n *es no nulo y existe un número real* M *tal que*

$$\left\| \sum_{n=1}^{m_1} \alpha_n x_n \right\| \leq M \left\| \sum_{n=1}^{m_2} \alpha_n x_n \right\|$$

para cada $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ *con* $m_1 \leq m_2$ *y para cada* $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m_2} \in \mathbb{K}$.

Demostración: Como toda sucesión básica (x_n) es base de Schauder de $\overline{\langle\{x_n : n \in \mathbb{N}\}\rangle}$, entonces aplicando Teorema 4 obtenemos directamente el corolario. ■

Corolario 5 *Toda subsucesión de una sucesión básica en un espacio de Banach es básica en sí misma.*

Demostración: Es inmediato ya que, si una sucesión cumple las condiciones del corolario anterior, una subsucesión de esta también lo hace. ■

Al igual que en un espacio de Hilbert en el cual el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt nos garantiza que en todo subespacio de dimensión infinita existe una sucesión ortonormal, en el caso de los espacios de Banach, podemos enunciar un resultado equivalente.

Teorema 7 *Supongamos que X es una espacio de Banach de dimensión infinita y que $M > 1$. Entonces hay una sucesión básica en X tal que todos sus elementos tienen norma 1 y tal que su constante base no es mayor que M.*

Para la demostración de este teorema, vamos a necesitar previamente los siguientes varios resultados, entre ellos dos lemas. Primero veremos un resultado clásico.

Lema 1 *Sea V un espacio vectorial. Supongamos que f y $f_1, \ldots, f_n$ son funcionales lineales en V. Entonces, f es combinación lineal de $f_1, \ldots, f_n$ si, y solo si,* $\ker(f_1) \cap \ldots \cap \ker(f_n) \subseteq \ker(f)$.

Demostración: Para probar este lema, vamos a probar por separado cada una de las implicaciones.

La implicación de izquierda a derecha es trivial: si tenemos que f es combinación lineal de $f_1, \ldots, f_n$, es decir,

$$f = \alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_n f_n,$$

para ciertos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, entonces, para todo $x \in \bigcap_{i=1}^{n} \ker(f_i)$, tenemos que

$$f(x) = \alpha_1 f_1(x) + \ldots + \alpha_n f_n(x) = \alpha_1 \cdot 0 + \ldots + \alpha_n \cdot 0 = 0$$

lo que implica que $x \in \ker(f)$ y, por lo tanto, $\bigcap_{i=1}^{n} \ker(f_i) \subseteq \ker(f)$.

Para probar la otra implicación, vamos a utilizar un argumento de inducción. Denotaremos por P_k la propiedad de que si f y $f_1, \ldots, f_k$ son funcionales lineales en el espacio vectorial V y $\bigcap_{i=1}^{k} \ker(f_i) \subseteq \ker(f)$, entonces f debe de ser una combinación lineal de los $f_1, \ldots, f_k$.

En primer lugar, vamos a probar P_1. Supongamos que f y f_1 son funcionales lineales en V y que $\ker(f_1) \subseteq \ker(f)$. Si f es el funcional nulo, P_1 es inmediato, así que consideraremos f no nulo y, por lo tanto, f_1 tampoco puede ser nulo. Para probar esta propiedad, vamos a necesitar el siguiente resultado clásico del álgebra lineal:

Si g es un funcional lineal no nulo en V, entonces $\ker(g)$ *es un subespacio propio maximal de V.*

Con esto, tenemos que $\ker(f_1) = \ker(f)$. Ahora, tomamos un elemento cualquiera $x \in V \setminus \ker(f)$ y definimos $h := f - \dfrac{f(x)}{f_1(x)} f_1$. Tenemos que h es un funcional lineal que toma valores nulos en los puntos de $\ker(f)$ y en x, por lo que es cero en $\langle \{x\} \cup \ker(f) \rangle$. Obviamente, como $\ker(f)$ es maximal, concluimos que $V = \langle \{x\} \cup \ker(f) \rangle$ y que h es idénticamente nulo, con lo cual tenemos que $f = \dfrac{f(x)}{f_1(x)} f_1$, quedando probado P_1.

Ahora vamos a ver que se cumple P_k con $k \geq 2$. Supongamos como hipótesis de inducción que P_j se satisface para $j = 1, \ldots, k-1$. Sean f y $f_1, \ldots, f_k$ cumpliendo las hipótesis de P_k. Ahora consideramos el subespacio vectorial $\ker(f_k)$ y las restricciones g y $g_1, \ldots, g_{k-1}$ de f y $f_1, \ldots, f_{k-1}$ a $\ker(f_k)$.

Supongamos entonces que $x \in \displaystyle\bigcap_{j=1}^{k-1} \ker(g_j)$. Como cada g_j está definido en $\ker(f_k)$, esto significa que

$$x \in \ker(f_k) \cap \bigcap_{j=1}^{k-1} \ker(g_j) \subset \ker(f_k) \cap \bigcap_{j=1}^{k-1} \ker(f_j),$$

con lo que, por hipótesis, $x \in \ker(f)$ y, con ello,

$$x \in \ker(g) = \ker(f_k) \cap \ker(f).$$

Deducimos que $\displaystyle\bigcap_{j=1}^{k-1} \ker(g_j) \subset \ker(g)$.

Entonces, por P_{k-1}, existen escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$ tales que $g = \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j g_j$ (en $\ker(f_k)$).

Así, si x es un punto cualquiera de $\ker(f_k)$, entonces $g(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j g_j(x)$, es decir, $g(x) - \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j g_j(x) = 0$ y, por la definición de g y de los g_j, $f(x) - \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j f_j(x) = 0$.

De este modo, tenemos que $\ker(f_k) \subseteq \ker\left(f - \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j f_j\right)$ y, aplicando P_1, existe un escalar α_k tal que $f - \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j f_j = \alpha_k f_k$. Así, es inmediato que $f = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \alpha_j f_j$ y que P_k se satisface como queríamos demostrar. ■

Lema 2 *Supongamos que Y es un subespacio finitodimensional no trivial de un espacio de Banach X. Sea $0 < \epsilon < 1$. Sean $y_1, \ldots, y_m$ elementos del conjunto compacto S_Y de forma que cada elemento de S_Y se encuentra a una distancia menor que $\frac{\epsilon}{4}$ de algún y_j. Sean $x_1^*, \ldots, x_m^*$ elementos de S_{X^*} tales que $x_j^*(y_j) = 1$ para cada j. Supongamos que (x_n) es una sucesión en X tal que $\inf_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| > 0$ y que cumple que $\lim_{n\to\infty} x_j^*(x_n) = 0$ para cada $j = 1, \ldots, m$.*
Entonces, para cada entero positivo N, existe un entero positivo $n_{\epsilon,N} > N$ tal que,

$$\|y\| \leq (1+\epsilon)\|y + \alpha x_{n_{\epsilon,N}}\|$$

para cualesquiera $y \in Y$ y $\alpha \in \mathbb{K}$.

Se puede ver que todas las hipótesis que aparecen en el lema son razonables. La existencia de los $x_1^*, \ldots, x_m^*$ es consecuencia del Teorema de Hahn-Banach y S_Y es compacto puesto que Y es de dimensión finita: por ello, tenemos que $S_Y \subset \bigcup_{x\in S_Y} B\left(x, \frac{\epsilon}{4}\right)$ y entonces existen $y_1, \ldots, y_m$ con $S_Y \subset \bigcup_{j=1}^{m} B\left(y_j, \frac{\epsilon}{4}\right)$. Con todo lo anterior, si $x \in S_Y$, existe y_j con $x \in B\left(y_j, \frac{\epsilon}{4}\right)$ y, lo que es equivalente, $\|x - y_j\| < \frac{\epsilon}{4}$.

Demostración de Lema 2: Sea $N \in \mathbb{N}$. Tomamos un entero positivo $n_{\epsilon,N} > N$ tal que

$$|x_j^*(x_{n_{\epsilon,N}})| < \frac{\epsilon \inf_n \|x_n\|}{8} \tag{6}$$

para cualquier $j = 1, \ldots, m$. Suponemos en primer lugar que $y \in S_Y$ y tomamos $\alpha \in \mathbb{K}$. Vamos a probar que

$$1 = \|y\| \leq (1+\epsilon)\|y + \alpha x_{n_{\epsilon,N}}\|$$

o, lo que es equivalente,

$$\frac{1}{1+\epsilon} \leq \|y + \alpha x_{n_{\epsilon,N}}\|$$

y, como $\epsilon \in (0,1)$, $\frac{1}{1+\epsilon} < 1 - \frac{\epsilon}{2}$, con lo que nos basta con probar que

$$\|y + \alpha x_{n_{\epsilon,N}}\| \geq 1 - \frac{\epsilon}{2}.$$

Ahora tenemos dos posibilades:

- Caso 1: $|\alpha| \geq \dfrac{2}{\|x_{n_{\epsilon,N}}\|}$.

Entonces tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
|\alpha|\|x_{n_{\epsilon,N}}\| &\geq 2 \\
&> 2 - \frac{\epsilon}{2} \\
&= \|y\| + 1 - \frac{\epsilon}{2},
\end{aligned}$$

con lo que

$$\|y + \alpha x_{n_{\epsilon,N}}\| \geq \|\alpha x_{n_{\epsilon,N}}\| - \|y\| > 1 - \frac{\epsilon}{2}.$$

- Caso 2: $|\alpha| < \dfrac{2}{\|x_{n_{\epsilon,N}}\|}$.

Dado que existe un j_0 tal que $\|y - y_{j_0}\| < \dfrac{\epsilon}{4}$ y teniendo en cuenta que $\|x^*_{j_0}\| = 1$, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\|y + \alpha x_{n_{\epsilon,N}}\| &> \|y_{j_0} + \alpha x_{n_{\epsilon,N}}\| - \frac{\epsilon}{4} \\
&\geq |x^*_{j_0}(y_{j_0} + \alpha x_{n_{\epsilon,N}})| - \frac{\epsilon}{4} \\
&\geq |x^*_{j_0}(y_{j_0})| - |\alpha||x^*_{j_0}(x_{n_{\epsilon,N}})| - \frac{\epsilon}{4}
\end{aligned} \tag{7}$$

Recordemos ahora que $|x^*_{j_0}(y_{j_0})| = 1$ y, por otra parte, teniendo en cuenta que $|\alpha| < \dfrac{2}{\|x_{n_{\epsilon,N}}\|}$, usando la desigualdad (6), tenemos que

$$|\alpha||x^*_{j_0}(x_{n_{\epsilon,N}})| < \frac{2}{\|x_{n_{\epsilon,N}}\|}\frac{\epsilon \operatorname{ínf}_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|}{8} < \frac{2\epsilon}{8}\overbrace{\frac{\operatorname{ínf}_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|}{\|x_{n_{\epsilon,N}}\|}}^{\leq 1} < \frac{\epsilon}{4}.$$

Así por (7) concluimos que

$$\begin{aligned}
\|y + \alpha x_{n_{\epsilon,N}}\| &\geq |x^*_{j_0}(y_{j_0})| - |\alpha||x^*_{j_0}(x_{n_{\epsilon,N}})| - \frac{\epsilon}{4} \\
&> 1 - \frac{\epsilon}{4} - \frac{\epsilon}{4} = 1 - \frac{\epsilon}{2},
\end{aligned}$$

como queríamos demostrar.

Ahora estudiamos el caso general, es decir, cuando no tenemos necesariamente la restricción $\|y\| = 1$. Tomamos $y \in Y \setminus \{0\}$. Consideramos $z := \dfrac{y}{\|y\|}$. Por la primera parte, dado $\beta \in \mathbb{K}$, se tiene que

$$\|z\| \leq (1+\epsilon)\|z + \beta x_{n_{\epsilon,N}}\|.$$

En particular, tenemos que

$$\|z\| \leq (1+\epsilon)\left\| z + \frac{\alpha}{\|y\|} x_{n_{\epsilon,N}} \right\|$$

y multiplicando por $\|y\|$, tenemos que

$$\|y\| \leq (1+\epsilon)\|y + \alpha x_{n_{\epsilon,N}}\|,$$

como queríamos ver. ■

A continuación, damos un resultado estrechamente relacionado con el anterior.

Lema 3 *Supongamos que Y es un subespacio finitodimensional de un espacio de Banach de dimensión infinita X. Entonces para cada $\epsilon > 0$, existe un $x_\epsilon \in S_X$ tal que $\|y\| \leq (1+\epsilon)\|y + \alpha x_\epsilon\|$ para cualesquiera $y \in Y$ y $\alpha \in \mathbb{K}$.*

Demostración: Sea $0 < \epsilon < 1$. Como el resultado es evidente si $Y = \{0\}$, entonces asumimos que $Y \neq \{0\}$. Fijamos $y_1, \ldots, y_m$ y $x_1^*, \ldots, x_m^*$ tales que cumplen las condiciones del lema anterior. Como X es infinitodimensional, entonces no todos los elementos de X^* se pueden obtener como una combinación de $x_1^*, \ldots, x_m^*$. Aplicando ahora Lema 1, tenemos que $\displaystyle\bigcap_{j=1}^{m} \ker x_j^* \neq \{0\}$. A continuación, tomamos cualquier elemento de norma 1 de $\displaystyle\bigcap_{j=1}^{m} \ker x_j^*$, que denotaremos x_ϵ, y tomamos la sucesión (x_n) tal que $x_n = x_\epsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, por Lema 1 tenemos que $\|y\| \leq (1+\epsilon)\|y + \alpha x_\epsilon\|$ para cualesquiera $y \in Y$ y $\alpha \in \mathbb{K}$. ■

Ahora que ya tenemos todas las herramientas necesarias para probar Teorema 7, vamos a demostrarlo.

Demostración de Teorema 7: Tomemos cualquier elemento x_1 de S_X. Si consideramos $Y = \{x_1\}$ y $\epsilon = M^{1/2} - 1$, por Lema 2, existe un elemento x_2 en S_X tal que

$$\|\alpha_1 x_1\| \leq M^{1/2}\|\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\|$$

para cualesquiera $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$. Siguiendo la misma idea y aplicando de forma inductiva dicho lema, obtenemos una sucesión (x_n) en S_X tal que

$$\left\| \sum_{n=1}^{m} \alpha_n x_n \right\| \leq M^{1/2^m} \left\| \sum_{n=1}^{m+1} \alpha_n x_n \right\|$$

para cualquier entero positivo m y cualesquiera escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+1}$. Entonces, tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^{m_1} \alpha_n x_n \right\| &\leq M^{1/2^{m_1}} \left\| \sum_{n=1}^{m_1+1} \alpha_n x_n \right\| \\ &\leq M^{1/2^{m_1}} \cdot M^{1/2^{m_1+1}} \left\| \sum_{n=1}^{m_1+2} \alpha_n x_n \right\| \\ &\leq \ldots \leq \left(\prod_{n=m_1}^{m_2-1} M^{1/2^n} \right) \left\| \sum_{n=1}^{m_2} \alpha_n x_n \right\| \leq M \left\| \sum_{n=1}^{m_2} \alpha_n x_n \right\| \end{aligned}$$

para cualesquiera $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m_2} \in \mathbb{K}$. Ahora, gracias a Corolario 4, tenemos que (x_n) es una sucesión básica y, además, por Proposición 6, tenemos que la constante base es menor o igual que M, como queríamos demostrar.

La prueba del siguiente teorema hace uso de ideas similares a las utilizadas en la demostración del Teorema 4.

Teorema 8 *Supongamos que (x_n) es una sucesión en un espacio de Banach de forma que (x_n) converge débilmente a cero pero que no converge a cero en norma. Entonces existe una subsucesión de (x_n) que es sucesión básica.*

Demostración: Podemos suponer que $\inf_n \|x_n\| > 0$ ya que, en otro caso, podemos encontrar una subsucesión que lo satisface. Sea un número real cualquiera $M \geq 1$ y sea $n_1 = 1$. Por Lema 2, existe un entero positivo $n_2 > n_1$ tal que

$$\|\alpha_1 x_1\| \leq M^{1/2} \|\alpha_1 x_{n_1} + \alpha_2 x_{n_2}\|$$

para cualesquiera $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$. Aplicando dicho lema de forma inductiva, podemos obtener una subsucesión (x_{n_j}) de (x_n) tal que

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_{n_j} \right\| \leq M^{1/2^m} \left\| \sum_{j=1}^{m+1} \alpha_j x_{n_j} \right\|$$

para cualquier $m \in \mathbb{N}$ y cualesquiera $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+1}$ escalares. Ahora solo nos falta probar que dicha subsucesión es una sucesión básica. Así, de forma análoga a la demostración del Teorema 4, tenemos que

$$\left\| \sum_{j=1}^{m_1} \alpha_j x_{n_j} \right\| \leq \left(\prod_{j=m_1}^{m_2-1} M^{1/2^j} \right) \left\| \sum_{j=1}^{m_2} \alpha_j x_{n_j} \right\| \leq M \left\| \sum_{j=1}^{m_2} \alpha_j x_{n_j} \right\|$$

para cualesquiera $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ con $m_1 < m_2$ y para cualesquiera $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m_2}$ escalares. Entonces, aplicando Corolario 4 tenemos que (x_{n_j}) es una sucesión básica como queríamos demostrar. ■

4. Bases Incondicionales.

Ahora, en esta sección de la memoria, vamos a trabajar con unas bases de Schauder que tienen la propiedad de que el orden en el que estén dispuestos los elementos de la sucesión no importa. Aún así, para poder hablar de estas, antes vamos a necesitar ver el concepto de convergencia incondicional.

Definición 12 *Diremos que una serie* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *es incondicionalmente convergente si, para cualquier permutación* $\sigma_{\mathbb{N}}$ *de los naturales, entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{\mathbb{N}}(x_n)$ *converge. Si una serie no converge incondicionalmente, diremos que es condicionalmente convergente.*

A continuación vamos a ver que si una serie converge incondicionalmente, entonces las series en las que los términos están permutados convergen a lo mismo que la que teníamos incialmente.

Proposición 9 *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *es una serie incondicionalmente convergente en un espacio normado, entonces, para cada permutación* σ *de los naturales, tenemos que* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$.

Demostración: Supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es una serie en un espacio normado y que σ es una permutación de los naturales tal que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ convergen pero a límites distintos cada una. Lo que queremos ver es que existe una permutación $\tilde{\sigma}$ de $\mathbb{N}$ tal que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_{\tilde{\sigma}(n)}$ no converge y, así, tendríamos demostrado que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es condicionalmente convergente.

Fijamos $\epsilon = \left\| \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)} - \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right\|$, que sabemos que es mayor que cero ya que las series convergen a límites distintos y, sea p_1 un numero entero positivo tal que

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)} - \sum_{n=1}^{p_1} x_{\sigma(n)} \right\| \leq \frac{\epsilon}{3}$$

.

Entonces podemos encontrar un entero positivo q_1 tal que

$$\{\sigma(n) : n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq p_1\} \subset \{n : n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq q_1\}$$

y, que además

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n - \sum_{n=1}^{q_1} x_n \right\| \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

De la misma forma, podemos encontrar un entero positivo p_2 tal que

$$\{n : n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq q_1\} \subset \{\sigma(n) : n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq p_2\}$$

y, que además

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)} - \sum_{n=1}^{p_2} x_{\sigma(n)} \right\| \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

Aplicando de nuevo lo anterior, podemos encontrar un q_2 con

$$\{\sigma(n) : n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq p_2\} \subset \{n : n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq q_2\}$$

y

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n - \sum_{n=1}^{q_2} x_n \right\| \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

Por inducción, podemos construir dos sucesiones (p_n) y (q_n) con propiedades similares a las anteriores.

Ahora vamos a definir la permutación $\tilde{\sigma}$ que estábamos buscando. Sea $\tilde{\sigma}$ la permutación de los naturales obtenida de ordenar los naturales siguiendo el siguiente criterio: los primeros elementos serán $\sigma(1), \ldots, \sigma(p_1)$, seguidos de los elementos $1, \ldots, q_1$ que no estén entre los primeros. Los siguientes elementos son los elementos de $\sigma(p_1), \ldots, \sigma(p_2)$

que no hayan aparecido ya antes. Así seguimos el procedimiento con los p_n y los q_n hasta definir inductivamente $\tilde{\sigma}$. Ahora por construcción de los p_n, los q_n y de $\tilde{\sigma}$, tenemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\tilde{\sigma}(n)}$ va alternando entre estar a una distancia menor que $\frac{\epsilon}{3}$ de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ y estar a una distancia menor que $\frac{\epsilon}{3}$ de $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$. Dado que esas dos últimas series convergen a límites distintos, tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\tilde{\sigma}(n)}$ no puede ser convergente como queríamos demostrar. ■

Observación 6 *En el caso de las series de escalares, tenemos un resultado muy conocido que nos dice que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ *donde* $\alpha_n \in \mathbb{K}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *es incondicionalmente convergente si y solo si es absolutamente convergente. Sin embargo, en los espacios de Banach infinitodimensionales podemos encontrar casos de series que convergen incondicionalmente pero no absolutamente. Vamos a ver un ejemplo de ello:*

Consideramos la sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)$ *en* l_2. *Obviamente,* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e_n$ *es incondicionalmente convergente pero no absolutamente convergente.*

Para el próximo resultado necesitamos conocer el concepto de subserie, así que vamos a definirlo.

Definición 13 *Dada una serie* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, *llamaremos subserie de* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *a la serie obtenida de una subsucesión* (x_{n_j}) *de* (x_n). *Diremos así que* $\sum_{j=1}^{\infty} x_{n_j}$ *es una subserie de* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Proposición 10 *Una serie* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *en un espacio de Banach es incondicionalmente convergente si y solo si cada una de las subseries de* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *es convergente.*

Demostración: Supongamos primero que (x_{n_j}) es una subsucesión de (x_n) tal que $\sum_{j=1}^{\infty} x_{n_j}$ no converge. Entonces, como la sucesión (S_n) de las sumas parciales no es de Cauchy, existe $\epsilon > 0$ tal que, dado $n_0 \in \mathbb{N}$, se pueden encontrar $n, m \geq n_0$ con $\|S_n - S_m\| \geq \epsilon$. Así podemos encontrar $p_1 < q_1$ con $\|S_{q_1} - S_{p_1}\| \geq \epsilon$ y, en general, podemos encontrar unas sucesiones (p_n) y (q_n) de enteros positivos tales que

$$p_1 < q_1 < p_2 < q_2 < p_3 < q_3 < \dots$$

y, además, $\|S_{q_k} - S_{p_k}\| = \left\| \sum_{j=p_k+1}^{q_k} x_{n_j} \right\| \geq \epsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por la construcción de las sucesiones, entre q_n y p_{n+1} pueden existir términos entre medias que no estemos teniendo en cuenta y de hecho, podemos suponer que dichos términos son infinitos. Llamaremos (r_n) a la sucesión de dichos términos omitidos ordenados en orden ascendente como números naturales y sea σ la permutación de $\mathbb{N}$ que sigue el siguiente orden:

$$n_{p_1}, n_{p_1+1}, \dots, n_{q_1}, r_1, n_{p_2}, n_{p_2+1}, \dots, n_{q_2}, r_2, n_{p_3}, n_{p_3+1}, \dots, n_{q_3}, r_3, \dots$$

Ahora, puesto que $\sum_{j=1}^{\infty} x_{n_j}$ no converge, es directo ver que $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ tampoco converge porque tendrá sumas parciales muy distantes entre sí (con diferencias iguales a las de arriba) y, por lo tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es condicionalmente convergente.

En cuanto a la otra implicación, supongamos que existe una permutación σ de los naturales tal que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ no converge. De forma análoga a lo anterior, ya que la sucesión de la sumas parciales es no convergente, podemos encontrar $\epsilon > 0$ y dos sucesiones (s_n) y (t_n) tales que

$$s_1 < t_1 < s_2 < t_2 < s_3 < t_3 < \dots.$$

y, además, $\left\| \sum_{n=s_k+1}^{t_k} x_{\sigma(n)} \right\| \geq \epsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Podemos asumir además que, al tratar con conjuntos finitos, para todo $k \in \mathbb{N}$

$$\text{máx}\{\sigma(n) : s_k \leq n \leq t_k\} < \text{mín}\{\sigma(n) : s_{k+1} \leq n \leq t_{k+1}\}.$$

Ahora vamos a construir una subsucesión (n_j) cuya serie no converja. Vamos a tomar los x_{n_j} cuyo índice sea el conseguido al ordenar de forma ascendente lo obtenido al aplicar σ a $s_1,\ldots,t_1,s_2,\ldots,t_2,\ldots$, es decir, (x_{n_j}) es la subsucesión formada por los índices n_j de $\sigma(s_1),\ldots,\sigma(t_1),\sigma(s_2),\ldots,\sigma(t_2),\ldots$ ordenados de forma ascendente. Puesto que $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ no converge, entonces la subserie $\sum_{j=1}^{\infty} x_{n_j}$ de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ tampoco converge, como queríamos demostrar. ■

Ahora que ya conocemos el concepto de convergencia incondicional y que ya sabemos que las permutaciones no afectan al límite de una serie incondicionalmente convergente, podemos definir lo que es una base de Schauder incondicional.

Definición 14 *Diremos que una base de Schauder (x_n) de un espacio de Banach X es incondicional si, para todo $x \in X$, la expansión $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ de x en términos de la base es incondicionalmente convergente. Diremos que una base de Schauder de un espacio de Banach es condicional si no es incondicional.*

La idea de una base incondicional de Schauder es que da igual el orden en el que se encuentren los elementos de la base en la expansión ya que siempre converge. Para ver esto mejor, vamos a ver algunos ejemplos de bases de Schauder incondicionales y de bases de Schauder condicionales.

Ejemplo 10 *Si X es c_0 o l_p, con $1 \leq p < \infty$, la base (e_n) de vectores canónicos es base incondicional de Schauder de X.*

Ejemplo 11 *Si consideramos X como $L_p(0,1)$, con $1 < p < \infty$, entonces tenemos que la base de Haar es una base incondicional de Schauder de X. Sin embargo, la base de Haar es condicional para $L_1(0,1)$.*

Ejemplo 12 *La base clásica de Schauder de $C[0,1]$ es una base de Schauder condicional.*

Ahora, dada la naturaleza de las definiciones de base de Schauder incondicional y de sucesión básica, podemos dar la definición de sucesión básica incondicional. Aunque cabe destacar que no es un concepto que vayamos a trabajar en profundidad en esta memoria.

Definición 15 *Dada (x_n) una sucesión del espacio de Banach X, entonces diremos que (x_n) es una sucesión básica incondicional si es una base de Schauder incondicional de $\overline{\langle\{x_n : n \in \mathbb{N}\}\rangle}$.*

A continuación vamos a ver un resultado que nos permite obtener los resultados equivalentes de las bases incondicionales a partir de los vistos para bases de Schauder.

Proposición 11 *Si (x_n) es una base incondicional de Schauder, entonces toda permutación de dicha base es también base incondicional de Schauder.*

Demostración: Sea (x_n) una base incondicional de X. Dados $x \in X$ cualquiera tal que su representación en términos de la base sea $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ y σ una permutación de los naturales cualquiera, tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{\sigma(n)} x_{\sigma(n)}$ converge y, por lo tanto, también tenemos que $(x_{\sigma(n)})$ es base de Schauder. Puesto que cualquier permutación es base de Schauder y que aplicar una permutación a $(x_{\sigma(n)})$ es lo mismo que aplicar la permutación formada de la composición de ambas a (x_n), tenemos que $(x_{\sigma(n)})$ es base incondicional de Schauder. $\blacksquare$

Ahora, partiendo de todo lo que hemos visto de las bases de Schuader, podemos obtener los siguientes resultados para las bases incondicionales de Schauder cuya prueba es trivial gracias a la proposición anterior.

Proposición 12 *Supongamos que (x_n) es una base incondicional de Schauder de un espacio de Banach X y que (α_n) es una sucesión de escalares no nulos. Entonces $(\alpha_n x_n)$ es también una base incondicional de Schauder de X.*

Puesto que este resultado es el equivalente a Proposición 1 pero para bases incondicionales, también tenemos un corolario equivalente al Corolario 1.

Corolario 6 *Si (x_n) es una base incondicional de Schauder de un espacio de Banach X, entonces $(\|x_n\|^{-1} x_n)$ es una base normalizada incondicional de Schauder de X.*

Ahora veremos el resultado equivalente a Proposición 3 pero para bases incondicionales de Schauder.

Proposición 13 *Supongamos que X e Y son espacios de Banach y que T es un isomorfismo de X en Y. Si (x_n) es una base incondicional de Schauder de X, entonces (Tx_n) es una base incondicional de Schauder de Y.*

Por último, vamos a ver un resultado que nos permite saber si una sucesión es base incondicional de Schauder y que está estrechamente relacionado con Teorema 4.

Teorema 9 *Una sucesión (x_n) en un espacio de Banach X es una base incondicional de Schauder de X si y solo si*

1. *cada x_n es no nulo;*

2. *existe un número real M tal que*

$$\left\| \sum_{n \in A} \alpha_n x_n \right\| \leq M \left\| \sum_{n \in B} \alpha_n x_n \right\|$$

   para cualesquiera A y B subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ de forma que $A \subset B$ y para cada colección $\{\alpha_n : n \in B\}$ de escalares;

3. $\overline{\langle \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \rangle} = X$.

Demostración: Solo vamos a probar la implicación de derecha a izquierda, es decir, que si una sucesión cumple (1), (2) y (3), entonces esa sucesión es una base incondicional de Schauder. Esto se debe a que la otra implicación se apoya en resultados que no están recogidos en la memoria.

Supongamos que (x_n) satisface (1), (2) y (3). Gracias a Teorema 4, ya sabemos que (x_n) es una base de Schauder de X, así que solo nos falta probar que (x_n) es incondicional. Para ello, supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \in X$ y que $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{n_j} x_{n_j}$ es una subserie de $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$. Solo necesitamos probar que la subserie $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{n_j} x_{n_j}$ converge, ya que entonces tendríamos que $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ converge incondicionalmente y, por lo tanto, (x_n) sería base incondicional de Schauder. Puesto que ya sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ es convergente y como por (2) tenemos que para cualesquiera m_1, m_2 enteros positivos tales que $m_1 \leq m_2$ se satisface

$$\left\| \sum_{j=m_1}^{m_2} \alpha_{n_j} x_{n_j} \right\| \leq M \left\| \sum_{n=n_{m_1}}^{n_{m_2}} \alpha_n x_n \right\|,$$

ya tenemos que la subserie es convergente como queríamos demostrar. ■

Vamos a usar Teorema 9 para dar un último ejemplo.

Ejemplo 13 *En c, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos*

$$x_1 := (1, 1, 1, \dots)$$
$$x_2 := (0, 1, 1, \dots)$$

y, para cualquier $n \in \mathbb{N}$

$$x_n := (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-1}, 1, 1, \dots).$$

Así tenemos la base de Schauder (x_n), llamada base sumante.
Fijamos $n \in \mathbb{N}$ cualquiera y tomamos $B := \{1, 2, \dots, 2n\}$. Definimos

$$y_{2n} := \sum_{j=1}^{2n} (-1)^j x_j = (-1, 0, -1, 0, -1, \dots, 0, -1, -1, -1, \dots).$$

Así tenemos que $\|y_{2n}\| = 1$.

Ahora consideramos $A := \{2, 4, \ldots, 2n\}$*, tenemos que*

$$\left\| \sum_{j \in B} (-1)^j x_j \right\| = \|y_{2n}\| = 1,$$

mientras que

$$\left\| \sum_{j \in A} (-1)^j x_j \right\| = \|(0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, \ldots, n-1, n-1, n, n, n, n, \ldots)\| = n.$$

Con ello, como m *es tan grande como queramos, no se satisface la condición* (2) *de Teorema 9 y, por lo tanto,* (x_n) *es condicional.*

Bibliografía

[1] Diestel, J., *Sequences and Series in Banach Spaces*. Springer, New York, 1984

[2] Lindenstrauss, J., Tzafriri, L., *Classical Banach Spaces I and II*. Springer, New York, 1996

[3] Megginson, R.E., *An Introduction to Banach Space Theory*. Springer, New York, 1998

[4] Sanz Torres, A., *Bases en espacios de Banach*. Universidad de Valladolid, 2015. Disponible en: https://uvadoc.uva.es/bitstream/handle/10324/14179/TFG-G1200.pdf?sequence=1&isAllowed=y