

**Facultad
de
Ciencias**

EQUIDISTRIBUCIÓN DE CEROS DE POLINOMIOS
(Equidistribution of Zeros of Polynomials)

**Trabajo de Fin de Grado
para acceder al
GRADO EN MATEMÁTICAS**

Autor: Pablo Cosío González
Director: Daniel Lear Claveras
Junio - 2024

Agradecimientos

Quiero empezar dando las gracias a mi director, Daniel. Te elegí sin conocerte y acerté, ¡cómo me ha gustado trabajar contigo! Muchas gracias por tu implicación y por tu disposición a ayudarme en todo momento.

No quiero olvidarme del resto del personal docente de la Universidad, vuestras clases han sido fundamentales para mi formación y me han permitido crecer tanto académicamente como personalmente.

Quiero agradecer también a mis compañeros de carrera, pero, en especial, aquellos que se han convertido en mis amigos. Sin vosotros a mi lado, el día a día no hubiera sido igual. A pesar de todo lo que hemos sufrido, hemos vivido momentos increíbles. ¡Sois mi mayor descubrimiento!

No puedo dejar de mencionar a mis amigos de siempre. Al final sois los que mejor me conocéis, muchas gracias por vuestro apoyo incondicional y por estar siempre conmigo.

Y, cómo no, toca agradecer a mi pilar fundamental, mi familia. Vosotros sois la clave de que haya conseguido terminar esta carrera. Mamá, Papá, no sabéis lo orgulloso que estoy de vosotros y, más aún, de la persona que me habéis hecho ser. Aída, seguir tus pasos no ha sido nada fácil. Solo tú y yo sabemos lo duro que ha sido esto, gracias por ser el mejor referente que he podido tener. Tu apoyo, tus consejos y ¡tus apuntes! han hecho que este camino sea mucho más llevadero.

Resumen

En esta memoria estudiaremos el teorema de Erdős-Turán enunciado en 1941 por los matemáticos húngaros Paul Erdős y Pál Turán que establece dos resultados principales:

- Si un polinomio mónico tiene magnitud pequeña en el círculo unitario y su coeficiente constante no es demasiado pequeño, entonces sus ceros se agrupan cerca del círculo unitario y se distribuyen uniformemente en ángulo.
- La discrepancia entre los ángulos de los ceros de un polinomio está limitada por una medida de la magnitud del polinomio en el círculo.

En otras palabras, el teorema nos dice que los ceros de un polinomio “bien comportado” tienden a ubicarse cerca del borde del círculo unitario y a distribuirse de manera uniforme a lo largo de él.

Palabras clave: Polinomios, ceros, Erdős-Turán, equidistribución, discrepancia.

Abstract

In this paper we will study the Erdős-Turán theorem, stated in 1941 by the Hungarian mathematicians Paul Erdős and Pál Turán, which establishes two main results:

- If a monic polynomial has small magnitude on the unit circle and its constant coefficient is not too small, then its zeros cluster near the unit circle and are equidistributed in angle.
- The discrepancy between the angles of the zeros of a polynomial is bounded by a measure of the magnitude of the polynomial on the circle.

In other words, the theorem tells us that the zeros of a “well-behaved” polynomial tend to be located near the edge of the unit circle and are evenly distributed along it.

Key words: Polynomials, zeros, Erdős-Turán, equidistribution, discrepancy.

Índice general

1. Introducción	1
2. El teorema de Erdős-Turán	3
2.1. Raíces de polinomios y su distribución	3
2.1.1. Algunos ejemplos ilustrativos	3
2.2. Distribución de las raíces del polinomio	4
2.2.1. Magnitud de los ceros	7
2.2.2. Equidistribución de los ángulos	10
2.2.2.1. Una observación de Schur	11
2.2.2.2. Sumas suavizadas sobre los ceros	13
2.2.2.3. Series de Fourier y conclusión del teorema	19
3. La fórmula de Jensen	33
4. Programas Matlab	36
A. Otras herramientas y resultados útiles	40
Bibliografía	42

Capítulo 1

Introducción

El teorema de Erdős-Turán, enunciado en 1941 por los matemáticos húngaros Paul Erdős y Pál Turán, es un resultado fundamental en la teoría de polinomios y el análisis complejo.



Paul Erdős (1913 - 1996).



Pál Turán (1910 - 1976).

Sin embargo, para comprender la importancia de este teorema, es necesario remontarnos a sus orígenes y al contexto histórico en el que surgió.

- El estudio de los polinomios y sus propiedades tiene una larga historia que se remonta al siglo XVIII. Es entonces cuando grandes matemáticos como Euler y Gauss realizaron importantes avances en la comprensión de estas funciones.
- A principios del siglo XX, el interés en los polinomios se intensificó, particularmente en lo que respecta a la distribución de sus ceros. Matemáticos como Bernstein y Pólya comenzaron a explorar este tema con herramientas del análisis complejo.
- A finales de la década de 1930, Erdős y Turán se interesaron en el estudio de la distribución de los ceros de polinomios “bien comportados”. Querían saber cómo se distribuían sus ceros en el plano complejo y entender si existía alguna relación entre su ubicación y las propiedades del polinomio.

En 1941, Erdős y Turán publicaron su famoso teorema [1], que proporcionó una respuesta a su interrogante. El teorema establece dos resultados principales:

Teorema 1.1. *Si un polinomio mónico tiene magnitud pequeña en el círculo unitario y su coeficiente constante no es demasiado pequeño, entonces sus ceros se agrupan cerca del círculo unitario y se distribuyen uniformemente en ángulo.*

Con la notación que introduciremos posteriormente en la memoria, lo anterior se expresará matemáticamente como

$$\mathcal{M}(P) \leq e^{2h(P)}.$$

Teorema 1.2. *La discrepancia entre los ángulos de los ceros de un polinomio está limitada por una medida de la magnitud del polinomio en el círculo.*

Del mismo modo, con la notación que introduciremos, este último resultado se expresará matemáticamente como

$$\mathcal{D}(P) \leq \frac{8}{\pi} \sqrt{Nh(P)}.$$

En otras palabras, el teorema nos dice que los ceros de un polinomio “bien comportado” tienden a ubicarse cerca del borde del círculo unitario y a distribuirse de manera uniforme a lo largo de él.

El teorema de Erdős-Turán tuvo un gran impacto en la teoría de polinomios y el análisis complejo. Se trata de un resultado elegante y simple, ya que usa únicamente herramientas vistas durante la carrera.

Las aplicaciones del teorema se extienden a diversos campos, como la teoría de números, la teoría de la aproximación y el análisis geométrico.

Además, el teorema inspiró a numerosos matemáticos a realizar investigaciones posteriores sobre la distribución de los ceros de polinomios y funciones complejas.

El resultado de Erdős-Turán fue posteriormente refinado y mejorado por Ganelius [3] y Mignotte [4]. En esta nota damos una prueba breve y autocontenida siguiendo las notas de Kannan Soundararajan [6].

Capítulo 2

El teorema de Erdős-Turán

Para la elaboración de este capítulo se ha consultado fundamentalmente [6].

2.1. Raíces de polinomios y su distribución

Cualquier conjunto de N números complejos puede ser considerado como el conjunto de ceros de un polinomio de grado N . Sea

$$P(z) = \prod_{j=1}^N (z - \alpha_j) = z^N + a_{N-1}z^{N-1} + \cdots + a_0,$$

un polinomio de grado N donde escribimos las N raíces $\{\alpha_j\}_{j=1}^N$ con notación compleja como

$$\alpha_j = \rho_j e^{i\theta_j},$$

con radio $\rho_j \geq 0$ y ángulo $\theta_j \in [0, 2\pi)$.

2.1.1. Algunos ejemplos ilustrativos

Puede ser útil pensar primero en situaciones donde las raíces no están equitativamente distribuidas cerca del círculo unitario.

Ejemplo 1: Consideramos el polinomio mónico

$$(z - 1)^N = \sum_{j=0}^N (-1)^j \binom{N}{j} z^j$$

que concentra todas sus raíces en el punto $z = 1$.

Claramente, en este caso las raíces no están distribuidas de manera uniforme ya que todas se concentran en un único punto. Por otro lado, este polinomio tiene coeficientes grandes, siendo

$\binom{N}{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}$ el coeficiente de mayor tamaño. Y, en el círculo unidad, su máximo tamaño es 2^N para $z = -1$.

Ejemplo 2: Veamos ahora otro polinomio mónico

$$z^N - \frac{1}{2^N}$$

que concentra todas sus raíces en el punto $z = \frac{1}{2}$.

A diferencia del polinomio anterior, este tiene coeficientes pequeños, siendo el mayor de ellos 1 y, el más pequeño, depende de N : $\frac{1}{2^N}$. Como su término independiente se hace cada vez más pequeño, el Teorema 1.1 falla y sus raíces no se distribuyen de manera uniforme.

Ejemplo 3: Otro ejemplo más extremo es el polinomio mónico z^N ya que directamente su término independiente es 0 que es justo lo que queríamos evitar en el Teorema 1.1. Esto hace que el polinomio concentre todas sus raíces en $z = 0$ por lo que sus ceros no se distribuyen equitativamente en ángulo.

2.2. Distribución de las raíces del polinomio

Estos tres ejemplos nos muestran que para establecer la equidistribución de los ceros es necesario asumir que

- el tamaño del polinomio P tiene que ser pequeño en el círculo unitario,
- el término constante a_0 no debe ser demasiado pequeño.

A partir de ahora, asumiremos que $a_0 \neq 0$ para poder garantizar que las raíces $\{\alpha_j\}_{j=1}^N$ son todas distintas de cero. Una medida para evaluar el tamaño del polinomio P en el círculo unitario vendrá dada por

$$H(P) = \max_{|z|=1} \frac{|P(z)|}{\sqrt{|a_0|}}. \quad (2.1)$$

Considerando $a_N = 1$, la desigualdad triangular (ver A.1) establece que

$$\begin{aligned} H(P) &= \max_{|z|=1} \frac{|P(z)|}{\sqrt{|a_0|}} = \max_{|z|=1} \frac{|z^N + a_{N-1}z^{N-1} + \cdots + a_0|}{\sqrt{|a_0|}} \\ &\leq \max_{|z|=1} \frac{|z|^N + |a_{N-1}||z|^{N-1} + \cdots + |a_0|}{\sqrt{|a_0|}} \\ &= \frac{1 + |a_{N-1}| + \cdots + |a_0|}{\sqrt{|a_0|}} = \frac{1}{\sqrt{|a_0|}} \sum_{j=0}^N |a_j|. \end{aligned}$$

Por otro lado, veamos que

$$|H(P)|^2 \geq \frac{1}{|a_0|} \sum_{j=0}^N |a_j|^2.$$

Demostración. En primer lugar, notamos que

$$|H(P)|^2 = \max_{|z|=1} \frac{|P(z)|^2}{|a_0|} = \frac{1}{|a_0|} \max_{|z|=1} |P(z)|^2.$$

Usando que cualquier número $z \in \mathbb{C}$ en el círculo unidad, esto es, cumpliendo $|z| = 1$, puede escribirse como $z = e^{i\tilde{\theta}}$ para algún $\tilde{\theta} \in [0, 2\pi)$. Es claro que el último término de la expresión anterior verifica que

$$\begin{aligned} \max_{|z|=1} |P(z)|^2 &= \max_{\tilde{\theta} \in [0, 2\pi)} |P(e^{i\tilde{\theta}})|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \max_{\tilde{\theta} \in [0, 2\pi)} |P(e^{i\tilde{\theta}})|^2 d\theta \\ &\geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P(e^{i\theta})|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{j=0}^N a_j e^{i\theta j} \right|^2 d\theta. \end{aligned}$$

Usando que para cualquier número complejo $w \in \mathbb{C}$ se tiene que $|w|^2 = w \cdot \bar{w}$, tendremos

$$\left| \sum_{j=0}^N a_j e^{i\theta j} \right|^2 = \sum_{j=0}^N a_j e^{i\theta j} \cdot \overline{\sum_{l=0}^N a_l e^{i\theta l}} = \sum_{j=0}^N a_j e^{i\theta j} \cdot \sum_{l=0}^N \bar{a}_l e^{-i\theta l} = \sum_{j,l=0}^N a_j \cdot \bar{a}_l e^{i\theta(j-l)}.$$

En particular, obtenemos que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{j=0}^N a_j e^{i\theta j} \right|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi} \sum_{j,l=0}^N a_j \cdot \bar{a}_l \int_0^{2\pi} e^{i\theta(j-l)} d\theta.$$

Recordando que (ver A.2)

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\theta(j-l)} d\theta = \begin{cases} 0 & j \neq l, \\ 1 & j = l, \end{cases}$$

es fácil concluir que

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{j,l=0}^N a_j \cdot \bar{a}_l \int_0^{2\pi} e^{i\theta(j-l)} d\theta = \sum_{j=0}^N |a_j|^2.$$

De este modo, combinándolo todo hemos probado que

$$|H(P)|^2 \geq \frac{1}{|a_0|} \sum_{j=0}^N |a_j|^2.$$

□

Ahora, combinando la cota superior para $H(P)$ con la desigualdad de Cauchy-Schwartz, se tiene que

$$\frac{1}{|a_0|} \sum_{j=0}^N |a_j|^2 \leq |H(P)|^2 \leq \frac{N+1}{|a_0|} \sum_{j=0}^N |a_j|^2. \quad (2.2)$$

Demostración. La primera desigualdad es cierta por el apartado anterior. A continuación, se estudia la segunda desigualdad. En primer lugar, notamos que

$$H(P) \leq \frac{1}{\sqrt{|a_0|}} \sum_{j=0}^N |a_j| \implies |H(P)|^2 \leq \frac{1}{|a_0|} \left(\sum_{j=0}^N |a_j| \right)^2. \quad (2.3)$$

Además, usando la desigualdad de Cauchy-Schwartz (ver A.3), tenemos que

$$\sum_{j=0}^N |a_j| \leq \left(\sum_{j=0}^N |a_j|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=0}^N 1^2 \right)^{1/2} = \sqrt{N+1} \left(\sum_{j=0}^N |a_j|^2 \right)^{1/2}. \quad (2.4)$$

De este modo, combinando (2.3) y (2.4), hemos probado que

$$|H(P)|^2 \leq \frac{N+1}{|a_0|} \sum_{j=0}^N |a_j|^2.$$

□

En conclusión, asumir que $H(P)$ es pequeño es equivalente a imponer que los coeficientes del polinomio $P(z)$ son pequeños y que el coeficiente constante a_0 no es demasiado pequeño.

Con el término “pequeño” nos referimos a que $H(P)$ no es exponencialmente grande en N ; por ejemplo, uno podría pensar en una condición como $H(P) \leq e^{\epsilon N}$ para un valor ϵ suficientemente pequeño.

De hecho, más adelante se formulará el teorema de Erdős-Turán en términos de una cantidad ligeramente más refinada

$$h(P) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \frac{|P(e^{i\theta})|}{\sqrt{|a_0|}} d\theta, \quad (2.5)$$

donde

$$\log^+ x = \max(0, \log x).$$

Notamos que $\log^+ H(P) = \log H(P)$ puesto que no es difícil ver que $H(P) \geq 1$. Hemos demostrado antes, ver (2.2), que

$$|H(P)|^2 \geq \frac{1}{|a_0|} \sum_{j=0}^N |a_j|^2 \geq \frac{|a_0|^2 + |a_N|^2}{|a_0|} = \frac{|a_0|^2 + 1}{|a_0|} \geq 1,$$

donde, en la última igualdad, estamos tomando por hipótesis que $a_N = 1$. Como sabemos que $H(P)$ es no negativo y acabamos de ver que $|H(P)|^2 \geq 1$, es claro que obtenemos que $H(P) \geq 1$.

Además, usando las definiciones $H(P)$ y $h(P)$ (ver (2.1) y (2.5)) tenemos que

$$\begin{aligned} \log H(P) &= \log \max_{|z|=1} \frac{|P(z)|}{\sqrt{|a_0|}} = \log \max_{\tilde{\theta} \in [0, 2\pi)} \frac{|P(e^{i\tilde{\theta}})|}{\sqrt{|a_0|}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \max_{\tilde{\theta} \in [0, 2\pi)} \frac{|P(e^{i\tilde{\theta}})|}{\sqrt{|a_0|}} d\tilde{\theta} \\ &\geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \frac{|P(e^{i\theta})|}{\sqrt{|a_0|}} d\theta = h(P). \end{aligned}$$

De este modo, hemos visto que

$$h(P) \leq \log \max_{|z|=1} \frac{|P(z)|}{\sqrt{|a_0|}} = \log H(P).$$

De esta desigualdad es claro que se puede deducir que

- si $1 \leq H(P)$ es pequeño, también lo será $\log H(P)$ y, en consecuencia, $h(P)$ también lo será.
- por el contrario, que $h(P)$ sea pequeño no implica que $H(P)$ lo sea.

Por lo tanto, la suposición de que $h(P)$ es pequeño es más débil que la suposición de que $H(P)$ es pequeño.

Ahora, se estudia cómo cuantificar la idea de que los ceros están equidistribuidos alrededor del círculo unitario. Se hace en dos etapas, primero estudiaremos la magnitud de los ceros y, después, la distancia entre sus argumentos.

2.2.1. Magnitud de los ceros

Para tratar la magnitud de los ceros (recordar que $\alpha_j = \rho_j e^{i\theta_j}$), se define

$$\mathcal{M}(P) = \prod_{j=1}^N \max \left(\rho_j, \frac{1}{\rho_j} \right).$$

Un ingrediente fundamental será la fórmula de Jensen, la cual pasamos a enunciar a continuación. En aras de simplificar la presentación, preferimos posponer su prueba al Capítulo 3.

Fórmula de Jensen: *Supongamos que $\Omega = D(0; R)$, $f \in H(\Omega)$, $f(0) \neq 0$, $0 < r < R$, y $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ son las raíces de f en $\overline{D}(0; r)$, listados de acuerdo a sus multiplicidades. Entonces,*

$$|f(0)| \prod_{j=1}^N \frac{r}{|\alpha_j|} = \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta \right). \quad (2.6)$$

Como estamos trabajando en el círculo unitario, esto es, cumpliendo $|z| = 1$. Consideramos la fórmula de Jensen (2.6) con $r = 1$. Como consecuencia inmediata, tomando la función logaritmo en ambos lados de (2.6) y aplicando las propiedades elementales del logaritmo, se deduce que

$$\log |f(0)| + \sum_{j=1}^N \log \frac{1}{|\alpha_j|} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |f(e^{i\theta})| d\theta. \quad (2.7)$$

Como una consecuencia de la fórmula de Jensen, se establece la siguiente cota superior para $\mathcal{M}(P)$ en términos de $h(P)$. Más concretamente, con las notaciones mencionadas anteriormente, probaremos el Teorema 1.1. Esto es,

$$\boxed{\mathcal{M}(P) \leq e^{2h(P)}}. \quad (2.8)$$

Demostración. Dado que $P(z) = \prod_{j=1}^N (z - \alpha_j) = z^N + a_{N-1}z^{N-1} + \dots + a_0$ es claro que

$$P(0) = a_0.$$

Recordemos además que

$$P(z) = \prod_{j=1}^N (z - \alpha_j) \implies |a_0| = |P(0)| = \prod_{j=1}^N |\alpha_j|. \quad (2.9)$$

Sea $f(z) = P(z)/\sqrt{|a_0|}$, aplicando la fórmula de Jensen (2.7) se tiene que

$$\log \frac{|P(0)|}{\sqrt{|a_0|}} + \sum_j \log \frac{1}{|\alpha_j|} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log \left| \frac{P(e^{i\theta})}{\sqrt{|a_0|}} \right| d\theta.$$

Usando que $|P(0)| = |a_0|$ y $\alpha_j = \rho_j e^{i\theta_j}$ tenemos que lo anterior se puede reescribir como

$$\log \sqrt{|a_0|} + \sum_{\rho_j < 1} \log \frac{1}{\rho_j} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log \left| \frac{P(e^{i\theta})}{\sqrt{|a_0|}} \right| d\theta,$$

o, equivalentemente

$$\frac{1}{2} \log |a_0| - \sum_{\rho_j < 1} \log \rho_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log \left| \frac{P(e^{i\theta})}{\sqrt{|a_0|}} \right| d\theta. \quad (2.10)$$

Vamos a estudiar con un poco más de detalle los términos involucrados en la expresión anterior. En primer lugar, aplicando (2.9) es claro que

$$\frac{1}{2} \log |a_0| = \frac{1}{2} \log \prod_{j=1}^N |\alpha_j| = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \log \rho_j. \quad (2.11)$$

Además, de (2.11) se deduce también que

$$\log |a_0| = \sum_{j=1}^N \log \rho_j \quad \implies \quad \frac{1}{2} \log |a_0| - \sum_{\rho_j < 1} \log \rho_j = -\frac{1}{2} \log |a_0| + \sum_{\rho_j > 1} \log \rho_j. \quad (2.12)$$

Combinando (2.10) y (2.12) obtenemos que

$$-\frac{1}{2} \log |a_0| + \sum_{\rho_j > 1} \log \rho_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log \left| \frac{P(e^{i\theta})}{\sqrt{|a_0|}} \right| d\theta. \quad (2.13)$$

Luego, recopilando (2.10) y (2.13) hemos probado que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log \left| \frac{P(e^{i\theta})}{\sqrt{|a_0|}} \right| d\theta &= +\frac{1}{2} \log |a_0| - \sum_{\rho_j < 1} \log \rho_j, \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log \left| \frac{P(e^{i\theta})}{\sqrt{|a_0|}} \right| d\theta &= -\frac{1}{2} \log |a_0| + \sum_{\rho_j > 1} \log \rho_j. \end{aligned}$$

Sumando ambas expresiones se tiene que

$$2 \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log \left| \frac{P(e^{i\theta})}{\sqrt{|a_0|}} \right| d\theta \right) = \sum_{\rho_j > 1} \log \rho_j - \sum_{\rho_j < 1} \log \rho_j = \sum_{j=1}^N \log \left(\max \left(\rho_j, \frac{1}{\rho_j} \right) \right). \quad (2.14)$$

Para concluir la demostración, solo tenemos que recordar que

$$h(P) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \frac{|P(e^{i\theta})|}{\sqrt{|a_0|}} d\theta, \quad \text{donde } \log^+ x = \max(0, \log x),$$

y

$$\mathcal{M}(P) = \prod_{j=1}^N \max \left(\rho_j, \frac{1}{\rho_j} \right),$$

de modo que

$$\begin{aligned} 2 \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| \frac{P(e^{i\theta})}{\sqrt{|a_0|}} \right| d\theta \right) &= 2 \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{|P(e^{i\theta})|}{\sqrt{|a_0|}} d\theta \right) \\ &\leq 2 \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \frac{|P(e^{i\theta})|}{\sqrt{|a_0|}} d\theta \right) = 2h(P), \end{aligned}$$

y

$$\sum_{j=1}^N \log \left(\max \left(\rho_j, \frac{1}{\rho_j} \right) \right) = \log \left(\prod_{j=1}^N \max \left(\rho_j, \frac{1}{\rho_j} \right) \right) = \log(\mathcal{M}(P)).$$

Combinando todo esto en (2.14) tenemos que

$$\log(\mathcal{M}(P)) \leq 2h(P),$$

y, en consecuencia, tomando la función exponencial en ambos lados de la expresión anterior, hemos probado nuestro objetivo (2.8), esto es, que

$$\mathcal{M}(P) \leq e^{2h(P)}.$$

□

Veamos las consecuencias de este resultado. Sea $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño y supongamos que tenemos una cota del tipo

$$\mathcal{M}(P) \leq e^{\epsilon^2 N}.$$

Queremos probar que, en tal caso, la mayoría de los ceros se encuentran dentro de una estrecha región $e^{-\epsilon} \leq |z| \leq e^\epsilon$ alrededor del círculo unitario. Asumimos que $\rho_j e^{i\theta_j}$ es un cero que está fuera de dicha región. Entonces, es claro que no cumple $e^{-\epsilon} \leq \rho_j \leq e^\epsilon$ y, por consiguiente,

$$\max\left(\rho_j, \frac{1}{\rho_j}\right) \geq e^\epsilon.$$

Recordando la definición de $\mathcal{M}(P)$ es claro que

$$e^{\epsilon^2 N} \geq \mathcal{M}(P) \geq \prod_{\text{ceros fuera}} e^\epsilon = e^{\#\{\text{ceros fuera}\}\epsilon}.$$

Por lo tanto, hemos visto que $\#\{\text{ceros fuera}\} \leq \epsilon N$.

Así pues, con este primer resultado hemos visto que la mayoría de los ceros de $P(z)$ se encuentran distribuidos dentro de una estrecha banda alrededor del círculo unidad.

2.2.2. Equidistribución de los ángulos

La parte más compleja del teorema de Erdős-Turán está relacionada con la equidistribución de los ángulos θ_j .

Dado un arco I en el círculo unitario, denotamos por $N(I; P)$ a la cantidad de raíces $\alpha_j = \rho_j e^{i\theta_j}$ con ángulo θ_j en este arco I . Si los ángulos θ_j están equidistribuidos, se puede esperar que $N(I; P)$ sea aproximadamente $\frac{N}{2\pi}$ veces la longitud del arco I , la cual denotaremos por $|I|$.

Una forma conveniente de medir la equidistribución es con la discrepancia. Esta se define

como

$$\mathcal{D}(P) = \max_I \left| N(I; P) - \frac{|I|}{2\pi} N \right|.$$

En otras palabras, la discrepancia mide la desviación en el peor de los casos entre la cantidad real de ángulos que se encuentran en un arco dado y la cantidad que uno esperaría si los ángulos estuvieran equidistribuidos. Una cota $\mathcal{D}(P) \leq \epsilon N$, para un ϵ suficientemente pequeño, indicaría que los ángulos θ_j están distribuidos de manera uniforme. Más concretamente, con las notaciones mencionadas anteriormente, establecemos el Teorema 1.2. Esto es,

$$\boxed{\mathcal{D}(P) \leq \frac{8}{\pi} \sqrt{Nh(P)}}. \quad (2.15)$$

Los Teoremas 1.1 y 1.2 juntos establecen que si $h(P)$ es pequeño en comparación con N , entonces los ceros de P se agrupan alrededor del círculo unitario y se distribuyen equitativamente en ángulo.

2.2.2.1. Una observación de Schur

El resto de este trabajo está dedicado a demostrar (2.15). Antes de comenzar con la demostración, estudiaremos una observación atribuida a Schur que permitirá estudiar únicamente polinomios con todos sus ceros en el círculo unitario.



Issai Schur (1875 - 1941).

Antes de comenzar con el enunciado de esta observación. Consideramos como hasta ahora polinomios del tipo

$$P(z) = \prod_{j=1}^N (z - \alpha_j), \quad \text{con } \alpha_j = \rho_j e^{i\theta_j}.$$

Además, consideramos el polinomio asociado al anterior, donde todas las raíces están en el

círculo unitario. Esto es, definimos

$$Q(z) = \prod_{j=1}^N (z - e^{i\theta_j}).$$

Lema 2.1. *Para cualquier $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = 1$, se tiene que*

$$\frac{|P(z)|}{\sqrt{|a_0|}} \geq |Q(z)|,$$

y, como consecuencia, tenemos que

$$h(P) \geq h(Q).$$

Demostración. En primer lugar, observamos que

$$\begin{aligned} \left| \frac{z}{\sqrt{\rho_j}} - \sqrt{\rho_j} e^{i\theta_j} \right|^2 &= \left| \frac{z}{\sqrt{\rho_j}} \right|^2 + |\sqrt{\rho_j} e^{i\theta_j}|^2 - 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{z}{\sqrt{\rho_j}} \cdot \overline{\sqrt{\rho_j} e^{i\theta_j}} \right\} \\ &= \frac{|z|^2}{|\sqrt{\rho_j}|^2} + |\sqrt{\rho_j}|^2 |e^{i\theta_j}|^2 - 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{z}{\sqrt{\rho_j}} \cdot \sqrt{\rho_j} e^{-i\theta_j} \right\} \\ &= \frac{1}{\rho_j} + \rho_j - 2 \operatorname{Re} \{ z e^{-i\theta_j} \} \geq 2 - 2 \operatorname{Re} \{ z e^{-i\theta_j} \} = |z - e^{i\theta_j}|^2, \end{aligned} \quad (2.16)$$

donde hemos usado que $|z| = 1$, junto con la desigualdad $\frac{1}{x} + x \geq 2$ para $x > 0$ y la igualdad

$$|z - e^{i\theta_j}|^2 = |z|^2 + |e^{i\theta_j}|^2 - 2 \operatorname{Re} \{ z \overline{e^{i\theta_j}} \} = 1 + 1 - 2 \operatorname{Re} \{ z e^{-i\theta_j} \} = 2 - 2 \operatorname{Re} \{ z e^{-i\theta_j} \}.$$

Por otro lado, recordando la definición de $P(z)$ y $Q(z)$ tenemos que

$$\begin{aligned} |a_0| = |P(0)| &= \prod_{j=1}^N |\alpha_j| = \prod_{j=1}^N \rho_j, \\ |Q(0)| &= \prod_{j=1}^N |e^{i\theta_j}| = 1. \end{aligned}$$

Luego, como consecuencia inmediata de (2.16) tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{|P(z)|}{\sqrt{|P(0)|}} &= \frac{\prod_{j=1}^N |z - \rho_j e^{i\theta_j}|}{\prod_{j=1}^N \sqrt{\rho_j}} = \prod_{j=1}^N \left| \frac{z}{\sqrt{\rho_j}} - \sqrt{\rho_j} e^{i\theta_j} \right| \\ &= \prod_{j=1}^N |z - e^{i\theta_j}| = |Q(z)| = \frac{|Q(z)|}{\sqrt{|Q(0)|}}. \end{aligned}$$

En particular, evaluando la expresión anterior en $z = e^{i\theta}$ tenemos que

$$\frac{|P(e^{i\theta})|}{\sqrt{|P(0)|}} \geq \frac{|Q(e^{i\theta})|}{\sqrt{|Q(0)|}}, \quad \forall \theta \in [0, 2\pi].$$

Como $\log^+(\cdot)$ es creciente, se tiene también que $\log^+\left(\frac{|P(e^{i\theta})|}{\sqrt{|P(0)|}}\right) \geq \log^+\left(\frac{|Q(e^{i\theta})|}{\sqrt{|Q(0)|}}\right)$ y, por lo tanto,

$$h(P) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \frac{|P(e^{i\theta})|}{\sqrt{|P(0)|}} d\theta \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \frac{|Q(e^{i\theta})|}{\sqrt{|Q(0)|}} d\theta = h(Q).$$

□

Dado que las discrepancias $\mathcal{D}(P)$ y $\mathcal{D}(Q)$ son las mismas y dado que $h(P) \geq h(Q)$, es suficiente establecer (2.15) para el polinomio Q y, luego, se seguiría la correspondiente cota para el polinomio P . En otras palabras, podemos asumir a partir de ahora que todos los ceros de P están en el círculo unitario, de modo que $\rho_j = 1$ para todo j desde 1 hasta N .

2.2.2.2. Sumas suavizadas sobre los ceros

Sea $P(z) = \prod_{j=1}^N (z - e^{i\theta_j})$ un polinomio de grado N con todas sus raíces en el círculo unitario. El siguiente lema establece un vínculo crucial entre las sumas de potencias de los ceros (por las cuales nos referimos a $\sum_{j=1}^N e^{ik\theta_j}$ para enteros k) y el tamaño de P en el círculo unitario.

Lema 2.2. *Sea $P(z) = \prod_{j=1}^N (z - \alpha_j)$ como se mencionó anteriormente. Para cualquier entero $k \neq 0$, tenemos que*

$$\sum_{j=1}^N e^{ik\theta_j} = -\frac{|k|}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} \log |P(e^{i\theta})| d\theta. \quad (2.17)$$

En consecuencia, para cualquier entero $k \neq 0$, se cumple

$$\left| \sum_{j=1}^N e^{ik\theta_j} \right| \leq 4|k|h(P). \quad (2.18)$$

Demostración. Dado $\phi \in \mathbb{R}$ y un entero $k \neq 0$, empezaremos probando que

$$e^{ik\phi} = -\frac{|k|}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} \log |e^{i\theta} - e^{i\phi}| d\theta.$$

Usando que podemos escribir $\theta = x + \phi$ para un cierto valor $x = \theta - \phi$, tenemos que

$$e^{ik\phi} = -\frac{|k|}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{ik(x+\phi)} \log |(e^{i(x+\phi)} - e^{i\phi})| dx.$$

Ahora, dividiendo por $e^{ik\phi}$, se tiene que

$$\begin{aligned} 1 &= -\frac{|k|}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ikx} e^{ik\phi}}{e^{ik\phi}} \log |e^{ix} e^{i\phi} - e^{i\phi}| dx = -\frac{|k|}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikx} \log |e^{i\phi}(e^{ix} - 1)| dx \\ &= -\frac{|k|}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikx} \log(|e^{i\theta}| \cdot |e^{ix} - 1|) dx = -\frac{|k|}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikx} \log |e^{ix} - 1| dx. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Notar que $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ puede escribirse como

$$|e^{ix} - 1|^2 = |\cos x - 1 + i \sin x|^2 = (\cos x - 1)^2 + (\sin x)^2 = 2 - 2 \cos x. \quad (2.20)$$

Además, la fórmula del seno del ángulo mitad nos da que

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \implies 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{2 - 2 \cos x}. \quad (2.21)$$

De este modo, combinando (2.20) y (2.21) tenemos que

$$|e^{ix} - 1| = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right),$$

y, aplicando esto último en (2.19), llegamos a la expresión

$$1 = -\frac{|k|}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikx} \log\left(2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) dx. \quad (2.22)$$

Lo anterior es consecuencia de

$$-\frac{|k|}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(kx) \log\left(2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) dx = 0, \quad (2.23)$$

$$-\frac{|k|}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(kx) \log\left(2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) dx = 1. \quad (2.24)$$

Comenzamos probando (2.23), esto es que la parte imaginaria de la expresión (2.22) se anula.

Para ello, realizamos el cambio de variable $z = x - \pi$, el cual nos da que

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin(kx) \log\left(2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(k(z + \pi)) \log\left(2 \sin\left(\frac{z + \pi}{2}\right)\right) dz \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{(-1)^k}_{\text{impar}} \sin(kz) \underbrace{\log\left(2 \cos\left(\frac{z}{2}\right)\right)}_{\text{par}} dz = 0, \end{aligned}$$

donde hemos usado que

$$\sin(kz + k\pi) = \begin{cases} +\sin(kz), & \text{si } k \text{ es par} \\ -\sin(kz), & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases} = (-1)^k \sin(kz),$$

$$\sin\left(\frac{z+\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{z}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{z}{2}\right).$$

A continuación, vamos a probar (2.24). Esto es,

$$-\frac{|k|}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(kx) \log\left(2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) dx = 1.$$

En primer lugar, como el coseno es una función par, es suficiente con estudiar el caso en que el entero k es positivo. Además, realizando el cambio de variable

$$u = \log\left(2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) \implies du = \frac{\cos(\frac{x}{2})}{2 \sin(\frac{x}{2})} dx$$

$$dv = \cos(kx) dx \implies v = \frac{\sin(kx)}{k}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} & -\frac{k}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(kx) \log\left(2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) dx \\ &= -\frac{k}{\pi} \left[\underbrace{\log\left(2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) \frac{\sin(kx)}{k}}_{=0} \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{\sin(kx)}{k} \cdot \frac{\cos(\frac{x}{2})}{2 \sin(\frac{x}{2})} dx \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(kx) \frac{\cos(\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(kx)}{\sin(\frac{x}{2})} \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx. \quad (2.25) \end{aligned}$$

Usando la identidad de Euler, $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$, es fácil deducir que $\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ y como consecuencia inmediata tendremos que

$$\frac{\sin(kx)}{\sin(\frac{x}{2})} = \frac{\frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}}{\frac{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}}{2i}} = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}}. \quad (2.26)$$

Del mismo modo, como $\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, es fácil concluir que $2 \cos\left(\frac{2j-1}{2}x\right) = e^{i\frac{2j-1}{2}x} + e^{-i\frac{2j-1}{2}x}$. Realizando el cambio de variable, $z = e^{ix}$, tenemos que $2 \cos\left(\frac{2j-1}{2}x\right) = z^{\frac{2j-1}{2}} + \bar{z}^{\frac{2j-1}{2}}$ y, por tanto,

$$2 \sum_{j=1}^k \cos\left(\frac{2j-1}{2}x\right) = \sum_{j=1}^k z^{\frac{2j-1}{2}} + \sum_{j=1}^k \bar{z}^{\frac{2j-1}{2}} = \frac{1}{z^{\frac{1}{2}}} \sum_{j=1}^k z^j + \frac{1}{\bar{z}^{\frac{1}{2}}} \sum_{j=1}^k \bar{z}^j.$$

Aplicando la fórmula de la suma de los primeros k términos de una serie geométrica, obtenemos

que los anteriores sumandos pueden escribirse como

$$\frac{1}{z^{\frac{1}{2}}} \frac{z - z^{k+1}}{1 - z} + \frac{1}{\bar{z}^{\frac{1}{2}}} \frac{\bar{z} - \bar{z}^{k+1}}{1 - \bar{z}} = \frac{1}{z^{\frac{1}{2}}} \frac{z(1 - z^k)}{1 - z} + \frac{1}{\bar{z}^{\frac{1}{2}}} \frac{\bar{z}(1 - \bar{z}^k)}{1 - \bar{z}} = z^{\frac{1}{2}} \frac{1 - z^k}{1 - z} + \bar{z}^{\frac{1}{2}} \frac{1 - \bar{z}^k}{1 - \bar{z}}.$$

Ahora, aplicamos que como $z = e^{ix}$ tenemos que $z \cdot \bar{z} = 1$ y, en consecuencia, $\bar{z} = \frac{1}{z}$. Por lo tanto, la ecuación anterior es igual a

$$z^{\frac{1}{2}} \frac{1 - z^k}{1 - z} + \frac{1}{z^{\frac{1}{2}}} \frac{1 - \frac{1}{z^k}}{1 - \frac{1}{z}} = z^{\frac{1}{2}} \frac{1 - z^k}{1 - z} + \frac{1}{z^{\frac{1}{2}}} \frac{\frac{z^k - 1}{z^k}}{\frac{z - 1}{z}} = z^{\frac{1}{2}} \frac{1 - z^k}{1 - z} + \frac{1}{z^{\frac{1}{2}}} \frac{z(z^k - 1)}{z^k(z - 1)}.$$

Sacando factor común y manipulando las expresiones tenemos que

$$z^{\frac{1}{2}} \frac{1 - z^k}{1 - z} \left(1 + \frac{1}{z^k}\right) = z^{\frac{1}{2}} \frac{1 - z^k}{1 - z} \frac{z^k + 1}{z^k} = z^{\frac{1}{2}} \frac{1 - z^{2k}}{z^k(1 - z)} = z^{\frac{1}{2}} \frac{z^k(z^{-k} - z^k)}{z^k z^{\frac{1}{2}}(z^{-\frac{1}{2}} - z^{\frac{1}{2}})}.$$

Simplificando y deshaciendo el cambio de variable, obtenemos que lo anterior es igual a

$$\frac{z^{-k} - z^k}{z^{-\frac{1}{2}} - z^{\frac{1}{2}}} = \frac{e^{-ikz} - e^{ikx}}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}} = \frac{e^{ikz} - e^{-ikx}}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}} = \frac{\sin(kx)}{\sin(\frac{x}{2})}.$$

Por lo tanto, hemos probado que

$$2 \sum_{j=1}^k \cos\left(\frac{2j-1}{2}x\right) = \frac{\sin(kx)}{\sin(\frac{x}{2})}. \quad (2.27)$$

Por lo que (2.26) es igual a (2.27). Luego, volviendo a (2.25), tenemos que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(kx)}{\sin(\frac{x}{2})} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2 \sum_{j=1}^k \cos\left(\frac{2j-1}{2}x\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx. \quad (2.28)$$

- Si $j = 1$, usamos la fórmula del ángulo mitad para obtener que

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) dx &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos x) dx \\ &= \frac{1}{2} [x + \sin x] \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi. \end{aligned}$$

- Si $j \neq 1$, usamos las identidades trigonométricas para obtener que

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos\left(\frac{2j-1}{2}x\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[\cos\left(\frac{2j-1}{2}x + \frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{2j-1}{2}x - \frac{x}{2}\right) \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [\cos(jx) + \cos((j-1)x)] dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(jx)}{j} \Big|_0^{2\pi} + \frac{\sin((j-1)x)}{j-1} \Big|_0^{2\pi} \right] = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, por (2.28) concluimos que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(kx)}{\sin(\frac{x}{2})} = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi = 1.$$

De este modo, para cualquier entero $k \neq 0$, hemos visto que se tiene que

$$\sum_{j=1}^N e^{ik\theta_j} = -\frac{|k|}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} \log |P(e^{i\theta})| d\theta.$$

Luego,

$$\left| \sum_{j=1}^N e^{ik\theta_j} \right| \leq \frac{|k|}{\pi} \int_0^{2\pi} |e^{ik\theta} \log |P(e^{i\theta})|| d\theta = \frac{|k|}{\pi} \int_0^{2\pi} |e^{ik\theta}| \cdot |\log |P(e^{i\theta})|| d\theta. \quad (2.29)$$

Aplicando que $|e^{ik\theta}| = 1$, obtenemos de (2.29) que

$$\left| \sum_{j=1}^N e^{ik\theta_j} \right| = \frac{|k|}{\pi} \int_0^{2\pi} |\log |P(e^{i\theta})|| d\theta.$$

Ahora, veamos que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\log |P(e^{i\theta})|| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (2 \log^+ |P(e^{i\theta})| - \log |P(e^{i\theta})|) d\theta. \quad (2.30)$$

Para ello, recordemos que $\log^+ x = \max(0, \log x)$ y distingamos tres casos:

- Si $|P(e^{i\theta})| > 1$, entonces $\log^+ |P(e^{i\theta})| = \log |P(e^{i\theta})| > 0$.
- Si $0 < |P(e^{i\theta})| < 1$, entonces $\log^+ |P(e^{i\theta})| = 0$ y $\log |P(e^{i\theta})| < 0$.
- Si $|P(e^{i\theta})| = 1$, entonces $\log^+ |P(e^{i\theta})| = \log |P(e^{i\theta})| = 0$.

En cualquiera de los tres casos previos tenemos que

$$2 \log^+ |P(e^{i\theta})| - \log |P(e^{i\theta})| = |\log |P(e^{i\theta})||.$$

Por lo tanto, por (2.30), tenemos que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\log |P(e^{i\theta})|| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2 \log^+ |P(e^{i\theta})| d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |P(e^{i\theta})| d\theta.$$

Aplicando la fórmula de Jensen vamos a probar que el último término de la expresión anterior se anula, esto es, veremos que

$$\int_0^{2\pi} \log |P(e^{i\theta})| d\theta = 0. \quad (2.31)$$

Empleando Jensen (ver 3.2) tenemos que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |P(e^{i\theta})| d\theta = \log |P(0)| + \sum_{j=1}^N \log \frac{1}{\rho_j}.$$

Recordando ahora que $P(z) = \prod_{j=1}^N (z - e^{i\theta_j})$, se tiene que

- $\rho_j = 1, \forall j \implies \log \frac{1}{\rho_j} = 0.$
- $|P(0)| = \prod_{j=1}^N |0 - e^{i\theta_j}| = 1 \implies \log |P(0)| = 0.$

Por lo tanto, usando ambas propiedades queda probado (2.31). Volviendo a (2.30), tenemos que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\log |P(e^{i\theta})|| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2 \log^+ |P(e^{i\theta})| d\theta.$$

Recordando la definición de $h(P)$ en (2.5), considerando $|a_0| = 1$, podemos concluir que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\log |P(e^{i\theta})|| d\theta = 2h(P).$$

Finalmente, como

$$\left| \sum_{j=1}^N e^{ik\theta_j} \right| \leq \frac{|k|}{\pi} \int_0^{2\pi} |\log |P(e^{i\theta})|| d\theta \quad \text{y} \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\log |P(e^{i\theta})|| d\theta = 2h(P),$$

entonces

$$\left| \sum_{j=1}^N e^{ik\theta_j} \right| \leq 2 \cdot |k| \cdot 2h(P) = 4|k|h(P).$$

□

Para demostrar el Teorema 1.2 es necesario conocer el número de ceros $N(I; P)$ en cualquier arco I de la circunferencia unidad, para conocer la distancia que habrá entre ellos en caso de que se encuentren equidistribuidos.

Consideremos un arco I en la circunferencia unitaria y denotemos, con un poco de abuso de notación, $\mathcal{I}(\theta)$ como la función indicadora del arco I , que es 2π periódica. Esto es,

$$\mathcal{I}(\theta) = \begin{cases} 1, & \text{si } e^{i\theta} \in I, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Nos interesa el número de ceros del polinomio P que están en el arco I :

$$N(I; P) = \sum_{j=1}^N \mathcal{I}(\theta_j).$$

Dado que \mathcal{I} es periódica, resulta tentador invocar su expansión de Fourier. Sin embargo, esto es un poco delicado, ya que la función \mathcal{I} es discontinua y su serie de Fourier no es absolutamente convergente. En su lugar, trabajaremos con “sumas suavizadas sobre los ceros”. Esto es, remplazaremos

$$\sum_{j=1}^N \mathcal{I}(\theta_j) \quad \text{por} \quad \sum_{j=1}^N g(\theta_j),$$

donde g es una función 2π periódica con una serie de Fourier de mejor comportamiento. Además, elegiremos g como una aproximación adecuada de la función indicadora \mathcal{I} .

2.2.2.3. Series de Fourier y conclusión del teorema

Sea $f(t)$ una función 2π periódica. Podemos representarla en serie de Fourier de la siguiente manera:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)), \quad (2.32)$$

donde sus coeficientes vienen dados por

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt, \quad n \geq 1. \quad (2.33)$$

Por la identidad de Euler se tiene que

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad \text{y} \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x.$$

Por lo tanto, sumando y restando ambas expresiones se obtiene respectivamente que

$$\cos(nt) = \frac{e^{int} + e^{-int}}{2} \quad \text{y} \quad \sin(nt) = \frac{e^{int} - e^{-int}}{2i}.$$

Sustituyendo en (2.32), se tiene que

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{e^{int} + e^{-int}}{2} + b_n \frac{e^{int} - e^{-int}}{2i} \right).$$

Aplicando que $\frac{1}{i} = -i$, tenemos que

$$a_n \frac{e^{int} + e^{-int}}{2} + b_n \frac{e^{int} - e^{-int}}{2i} = a_n \frac{e^{int} + e^{-int}}{2} - ib_n \frac{e^{int} - e^{-int}}{2}.$$

De este modo, agrupando términos nos da que

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - ib_n}{2} e^{int} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-int} \right).$$

Si denotamos

$$c_0 := \frac{a_0}{2}, \quad c_n := \frac{a_n - ib_n}{2} \quad y \quad c_{-n} := \frac{a_n + ib_n}{2}, \quad n \geq 1,$$

podemos escribir lo anterior usando la exponencial compleja de la siguiente manera

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int},$$

donde

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \quad y \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}.$$

Utilizando los a_n y b_n anteriormente definidos en (2.33), se calcula

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt - i \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) (\cos(nt) - i \sin(nt)) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} c_{-n} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt + i \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) (\cos(nt) + i \sin(nt)) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{int} dt. \end{aligned}$$

De aquí se deduce que

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Por lo tanto, la serie compleja de Fourier de $f(t)$, está dada por

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} \quad \text{con} \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Proposición 2.1. Sea $P(z) = \prod_{j=1}^N (z - e^{i\theta_j})$ el polinomio definido anteriormente. Además, consideramos $g(\theta)$ una función 2π periódica continua tal que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |k \hat{g}(k)| < \infty, \quad (2.34)$$

donde

$$\hat{g}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) e^{-ik\theta} d\theta,$$

denota los coeficientes de Fourier de g . Se define

$$G(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k| \hat{g}(k) e^{ik\theta} \quad y \quad G = \max_{\theta} |G(\theta)|. \quad (2.35)$$

Entonces,

$$\left| \sum_{j=1}^N g(\theta_j) - \frac{N}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta \right| \leq 4Gh(P).$$

Demostración. Por lo visto anteriormente, la expansión de Fourier de la función $g(\theta)$, que es 2π periódica, en el intervalo $[0, 2\pi)$ se puede expresar como:

$$g(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{g}(k) e^{ik\theta} \quad \text{donde} \quad \hat{g}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) e^{-ik\theta} d\theta.$$

Usando la expansión de Fourier de g , se obtiene que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N g(\theta_j) - \frac{N}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta &= \sum_{j=1}^N \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{g}(k) e^{ik\theta_j} - \frac{N}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{k \neq 0} \hat{g}(k) e^{ik\theta_j} + \sum_{j=1}^N \hat{g}(0) - \frac{N}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta \\ &= \sum_{k \neq 0} \hat{g}(k) \sum_{j=1}^N e^{ik\theta_j} + \sum_{j=1}^N \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta - \frac{N}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta \\ &= \sum_{k \neq 0} \hat{g}(k) \sum_{j=1}^N e^{ik\theta_j} + \frac{N}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta - \frac{N}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta \\ &= \sum_{k \neq 0} \hat{g}(k) \sum_{j=1}^N e^{ik\theta_j}. \end{aligned}$$

Ahora, aplicando el Lema 2.2, se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{k \neq 0} \hat{g}(k) \sum_{j=1}^N e^{ik\theta_j} &= \sum_{k \neq 0} \hat{g}(k) \left(\frac{-|k|}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} \log |P(e^{i\theta})| d\theta \right) \\ &= -\frac{1}{\pi} \sum_{k \neq 0} \hat{g}(k) \int_0^{2\pi} |k| e^{ik\theta} \log |P(e^{i\theta})| d\theta. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Consideramos $f_n := \sum_{k=-n}^{+n} \hat{g}(k) |k| e^{ik\theta} \log |P(e^{i\theta})|$. Al tratarse de una suma finita, se cumple que

$$\sum_{k=-n}^{+n} \int_0^{2\pi} \hat{g}(k) |k| e^{ik\theta} \log |P(e^{i\theta})| d\theta = \int_0^{2\pi} f_n(\theta) d\theta.$$

Ahora, tomando límites a ambos lados obtenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^{+n} \int_0^{2\pi} \hat{g}(k) |k| e^{ik\theta} \log |P(e^{i\theta})| d\theta = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f_n(\theta) d\theta.$$

Lo que queremos probar aplicando el teorema de la convergencia dominada (ver A.4) es que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f_n(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\theta) d\theta.$$

Esta propiedad se cumple ya que se verifican todas las condiciones:

- $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones integrables por estar bien definida.
- $|f_n| = \left| \sum_{k=-n}^{+n} \hat{g}(k) |k| e^{ik\theta} \log |P(e^{i\theta})| \right| \leq \log^+ |P(e^{i\theta})| \sum_{k \neq 0} |\hat{g}(k) k| := g$.
- Por (2.34), sabemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$, donde $f = \sum_{k \neq 0} \hat{g}(k) |k| e^{ik\theta} \log |P(e^{i\theta})|$.

Luego, aplicando este resultado en (2.36) tenemos que

$$-\frac{1}{\pi} \sum_{k \neq 0} \hat{g}(k) \int_0^{2\pi} |k| e^{ik\theta} \log |P(e^{i\theta})| d\theta = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k \neq 0} \hat{g}(k) |k| e^{ik\theta} \log |P(e^{i\theta})| d\theta.$$

Además, sabemos que

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k \neq 0} \hat{g}(k) |k| e^{ik\theta} \log |P(e^{i\theta})| d\theta &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{g}(k) |k| e^{ik\theta} \log |P(e^{i\theta})| d\theta \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \log |P(e^{i\theta})| G(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Como hemos visto que

$$\sum_{j=1}^N g(\theta_j) - \frac{N}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta = \sum_{k \neq 0} \hat{g}(k) \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \log |P(e^{i\theta})| G(\theta) d\theta,$$

tomando valor absoluto tenemos también que

$$\left| \sum_{j=1}^N g(\theta_j) - \frac{N}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta \right| = \left| \sum_{k \neq 0} \hat{g}(k) \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j} \right| = \left| -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \log |P(e^{i\theta})| G(\theta) d\theta \right|$$

y, en particular,

$$\left| \sum_{j=1}^N g(\theta_j) - \frac{N}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |\log |P(e^{i\theta})|| |G(\theta)| d\theta.$$

Como $G := \max_{\theta} |G(\theta)|$, es claro que

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |\log |P(e^{i\theta})|| |G(\theta)| d\theta \leq \frac{G}{\pi} \int_0^{\pi} |\log |P(e^{i\theta})|| d\theta.$$

Ahora, aplicamos el mismo argumento que el visto antes en el Lema 2.2 y tenemos que

$$\frac{G}{\pi} \int_0^{\pi} |\log |P(e^{i\theta})|| d\theta = \frac{G}{\pi} \int_0^{2\pi} (2\log^+ |P(e^{i\theta})| - \log |P(e^{i\theta})|) d\theta = 4Gh(P).$$

Por lo tanto, hemos demostrado que

$$\left| \sum_{j=1}^N g(\theta_j) - \frac{N}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta \right| \leq 4Gh(P).$$

□

Si una función g es 2π periódica y de clase C^3 , esto es derivable hasta orden tres con derivadas continuas, entonces la integración por partes proporciona (para $k \neq 0$):

$$|\hat{g}(k)| = \left| \frac{1}{(ik)^l} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g^{(l)}(\theta) e^{-ik\theta} d\theta \right| \leq \frac{1}{|k|^l} \max_{\theta \in [0, 2\pi]} |g^{(l)}(\theta)|.$$

Entonces, cualquier función de este tipo cumple con las hipótesis de la Proposición 2.1 y es claro que hay una amplia gama de tales funciones.

A continuación, recogemos el siguiente resultado que será empleado para realizar la prueba del lema que le sigue.

Proposición 2.2. *Un cálculo sencillo da la expansión de Fourier*

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\cos(2lx)}{4l^2 - 1}. \quad (2.37)$$

Demostración. Sabemos que la expansión de Fourier de $|\sin x|$ es

$$|\sin x| = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Vamos a calcular los coeficientes a_0 , a_n y b_n . Comenzamos calculando a_0 :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 -\sin x dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{1}{\pi} [\cos x]_{-\pi}^0 - \frac{1}{\pi} [\cos x]_0^{\pi} = \frac{4}{\pi}.$$

Una vez obtenido a_0 , calculamos el coeficiente a_n :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |\sin x| \cos(nx) dx,$$

donde hemos usado la paridad de la función. Además, aplicando que $\sin x \geq 0$ si $x \in [0, \pi]$ y que $\sin(\alpha) \cos(\alpha) = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) - \sin(\beta - \alpha))$, se tiene que

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (\sin(x + nx) - \sin(nx - x)) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} \sin((n+1)x) dx - \int_0^{\pi} \sin((n-1)x) dx \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos((n+1)x)}{n+1} + \frac{\cos((n-1)x)}{n-1} \right]_0^{\pi}. \end{aligned}$$

Evalutando en los extremos de integración, se obtiene que

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{n+1} (-1)^{n+1} + \frac{1}{n-1} (-1)^{n-1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1} \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1} \right] (1 + (-1)^n). \end{aligned}$$

Sabemos que si n es impar, entonces $1 + (-1)^n = 0$. Por lo tanto, si n es par, tenemos que

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\frac{2}{n+1} - \frac{2}{n-1} \right] = \frac{1}{\pi} \left[\frac{-4}{n^2 - 1} \right] = \frac{-4}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2 - 1}.$$

Por último, usando la imparidad de la función calculamos fácilmente b_n :

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| \sin(nx) dx = 0.$$

Hemos obtenido que

$$b_n = 0, \quad a_0 = \frac{4}{\pi}, \quad a_n = \begin{cases} \frac{-4}{\pi(n^2-1)}, & n \text{ par} \\ 0, & n \text{ impar} \end{cases}.$$

Luego,

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ par}}}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} \cos(nx) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\cos(2lx)}{4l^2-1}.$$

□

Lema 2.3. *Sea I un arco en el círculo unitario y sea $\mathcal{I}(\theta)$ su función indicadora, como se mencionó anteriormente. Sea k una función 2π periódica continua y no negativa cuyos coeficientes de Fourier son no negativos y cumplen que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{K}(n) < \infty$.*

Sea g la convolución de \mathcal{I} y de \mathcal{K} . Entonces, g cumple con las hipótesis de la Proposición 2.1 y, con la notación utilizada,

$$G = \max_{\theta} \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k| \hat{g}(k) e^{ik\theta} \right| \leq \frac{2}{\pi^2} \mathcal{K}(0).$$

Demostración. Como g es la convolución de \mathcal{I} y \mathcal{K} , tenemos por definición que

$$g(\theta) = (\mathcal{I} * \mathcal{K})(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{I}(\alpha) \mathcal{K}(\theta - \alpha) d\alpha.$$

Sea I el arco que va de $e^{i\alpha}$ a $e^{i\beta}$ como el que se observa en la Figura 2.2.

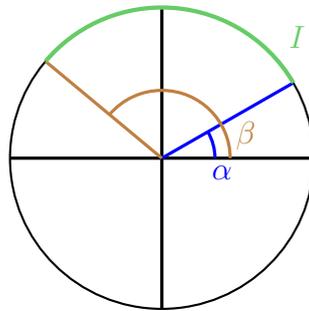


Figura 2.2: Arco que va de $e^{i\alpha}$ a $e^{i\beta}$.

Como tenemos que

$$\mathcal{I}(\theta) \equiv \mathcal{I}(e^{i\theta}) = \begin{cases} 1, & \text{si } \alpha \leq \theta \leq \beta \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

entonces

$$\hat{I}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{I}(\theta) e^{-ik\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-ik\theta} d\theta.$$

Luego, para $k \neq 0$,

$$\hat{\mathcal{I}}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-iky} dy = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{e^{-ik\beta} - e^{-ik\alpha}}{-ik} \right) = \frac{e^{-ik\alpha} - e^{-ik\beta}}{2\pi ik}. \quad (2.38)$$

Los coeficientes de Fourier de la convolución de dos funciones no es más que el producto de los coeficientes de Fourier de estas funciones. En nuestro caso tenemos $\hat{g}(k) = \hat{\mathcal{I}}(k) \cdot \hat{\mathcal{K}}(k)$. Luego,

$$|k\hat{g}(k)| = |k\hat{\mathcal{I}}(k) \cdot \hat{\mathcal{K}}(k)| = |k\hat{\mathcal{I}}(k)| |\hat{\mathcal{K}}(k). \quad (2.39)$$

Por (2.38) tenemos que

$$\begin{aligned} |k\hat{\mathcal{I}}(k)| &= \left| k \frac{e^{-ik\alpha} - e^{-ik\beta}}{2\pi ik} \right| = \frac{1}{2\pi} |e^{-ik\alpha} - e^{-ik\beta}| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} (\underbrace{|e^{-ik\alpha}|}_1 + \underbrace{|e^{-ik\beta}|}_1) = \frac{1}{\pi}. \end{aligned}$$

Se tiene en (2.39) que

$$|k\hat{g}(k)| \leq \frac{\hat{\mathcal{K}}(k)}{\pi}.$$

Entonces,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |k\hat{g}(k)| \leq \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{K}}(k). \quad (2.40)$$

Sabemos que

$$\mathcal{K}(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{K}}(k) e^{ik\theta} \implies \mathcal{K}(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{K}}(k).$$

Por lo tanto, de (2.40) tenemos que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |k\hat{g}(k)| \leq \frac{1}{\pi} \mathcal{K}(0) < \infty.$$

Esto muestra que

$$\boxed{\sum_k |k\hat{g}(k)| < \infty.}$$

Por la Proposición 2.1, sabemos que la función $G(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k\hat{g}(k)| e^{ik\theta}$ está bien definida y aplicando que $\hat{g}(k) = \hat{\mathcal{I}}(k) \hat{\mathcal{K}}(k)$, se tiene que

$$\begin{aligned} G(\theta) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k| \hat{\mathcal{K}}(k) \hat{\mathcal{I}}(k) e^{ik\theta} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k| \hat{\mathcal{K}}(k) \frac{e^{-ik\alpha} - e^{-ik\beta}}{2\pi ik} e^{ik\theta} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k| \hat{\mathcal{K}}(k) \frac{e^{ik(\theta-\alpha)} - e^{ik(\theta-\beta)}}{2\pi ik} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k \neq 0} \text{sign}(k) \hat{\mathcal{K}}(k) (e^{ik(\theta-\alpha)} - e^{ik(\theta-\beta)}). \end{aligned} \quad (2.41)$$

A continuación, utilizaremos una propiedad elemental (ver A.1) de la transformada de Fourier:

$$\boxed{k \text{ es una función real implica que } \widehat{\mathcal{K}} \text{ es real y par.}}$$

Emparejando los términos k y $-k$ en la ecuación (2.41) y, usando que $\widehat{\mathcal{K}}(k) = \widehat{\mathcal{K}}(-k)$, encontramos

$$\begin{aligned} G(\theta) &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k \geq 1} \widehat{\mathcal{K}}(k) [(e^{ik(\theta-\alpha)} - e^{-ik(\theta-\alpha)}) - (e^{ik(\theta-\beta)} - e^{-ik(\theta-\beta)})] \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{k \geq 1} \widehat{\mathcal{K}}(k) [\sin(k(\theta-\alpha)) - \sin(k(\theta-\beta))] \\ &\leq \frac{1}{\pi} \sum_{k \geq 1} \widehat{\mathcal{K}}(k) [|\sin(k(\theta-\alpha))| + |\sin(k(\theta-\beta))|] \\ &\leq \frac{2}{\pi} \max_{\phi \in [0, 2\pi)} \sum_{k \geq 1} \widehat{\mathcal{K}}(k) |\sin(k\phi)| = \frac{1}{\pi} \max_{\phi \in [0, 2\pi)} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{\mathcal{K}}(k) |\sin(k\phi)|. \end{aligned}$$

Notar que aquí estamos usando que, por hipótesis, sabemos que la serie $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{\mathcal{K}}(k)$ converge. Luego,

$$G = \max_{\theta} |G(\theta)| \leq \frac{1}{\pi} \max_{\phi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{\mathcal{K}}(k) |\sin(k\phi)|. \quad (2.42)$$

Utilizando la expansión de Fourier del $|\sin x|$ calculada en (2.37), sustituyendo en (2.42) se tiene que

$$G \leq \frac{1}{\pi} \max_{\phi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{\mathcal{K}}(k) \left(\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\cos(2lk\phi)}{4l^2 - 1} \right). \quad (2.43)$$

Veamos a qué es igual el sumatorio:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{\mathcal{K}}(k) \left(\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\cos(2lk\phi)}{4l^2 - 1} \right) &= \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{\mathcal{K}}(k) - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{\mathcal{K}}(k) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\cos(2lk\phi)}{4l^2 - 1} \\ &= \frac{2}{\pi^2} \mathcal{K}(0) - \frac{4}{\pi^2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{4l^2 - 1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{\mathcal{K}}(k) \cos(2lk\phi). \end{aligned}$$

Aplicando la definición de $\mathcal{K}(2l\phi)$, vemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(2l\phi) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{\mathcal{K}}(k) e^{ik(2l\phi)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{\mathcal{K}}(k) \cos(2kl\phi) + i \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{\mathcal{K}}(k) \sin(2kl\phi) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{\mathcal{K}}(k) \cos(2kl\phi), \end{aligned}$$

donde, en la última igualdad, hemos usado que $\widehat{\mathcal{K}}(k) = \widehat{\mathcal{K}}(-k)$ y que el seno es impar en k . De

este modo, estos términos se cancelan y, por ello,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{\mathcal{K}}(k) \sin(2kl\phi) = 0.$$

Por lo tanto,

$$\frac{2}{\pi^2} \mathcal{K}(0) - \frac{4}{\pi^2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{4l^2 - 1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{\mathcal{K}}(k) \cos(2lk\phi) = \frac{2}{\pi^2} \mathcal{K}(0) - \frac{4}{\pi^2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\mathcal{K}(2l\phi)}{4l^2 - 1} \leq \frac{2}{\pi^2} \mathcal{K}(0).$$

Con esto, sustituyendo los resultados previos en (2.43), concluimos el Lema 2.3, es decir,

$$\boxed{G \leq \frac{2}{\pi^2} \mathcal{K}(0).}$$

□

Después de todos estos preparativos, ahora ya disponemos de todos los ingredientes para proceder con la prueba del último resultado de la memoria.

Demostración del Teorema 1.2.

Por definición, sabemos que

$$\mathcal{D}(P) = \max_I \left| N(I; P) - \frac{|I|}{2\pi} N \right|,$$

y que

$$N(I; P) = \sum_{j=1}^N \chi_I(\theta_j).$$

Luego, probar (2.15) es equivalente a probar que

$$\max_I \left| N(I; P) - \frac{|I|}{2\pi} N \right| \leq \frac{8}{\pi} \sqrt{Nh(P)}.$$

Para ello, veremos que

$$\left| N(I; P) - \frac{|I|}{2\pi} N \right| \leq \frac{8}{\pi} \sqrt{Nh(P)}. \quad (2.44)$$

Sea g una función 2π periódica que mayoriza la función indicadora \mathcal{I} . Esto es, tal que $g(\theta) \geq 0$ para todo $\theta \in [0, 2\pi)$ y también cumple que $g(\theta) \geq 1$ si $e^{i\theta} \in I$. Luego,

$$\begin{aligned} N(I; P) - \frac{|I|}{2\pi} N &\stackrel{(2.3)}{\leq} \sum_{j=1}^N g(\theta_j) - \frac{|I|}{2\pi} N \\ &= \left(\sum_{j=1}^N g(\theta_j) - \frac{N}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta \right) + N \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta - \frac{|I|}{2\pi} \right). \end{aligned} \quad (2.45)$$

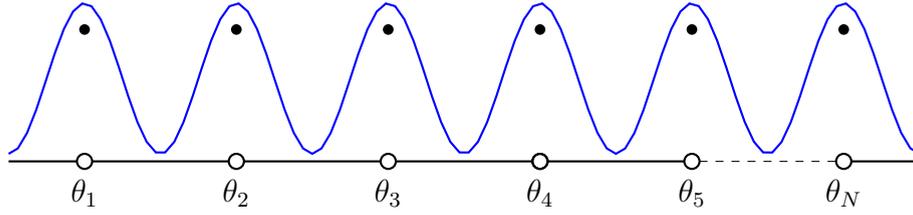
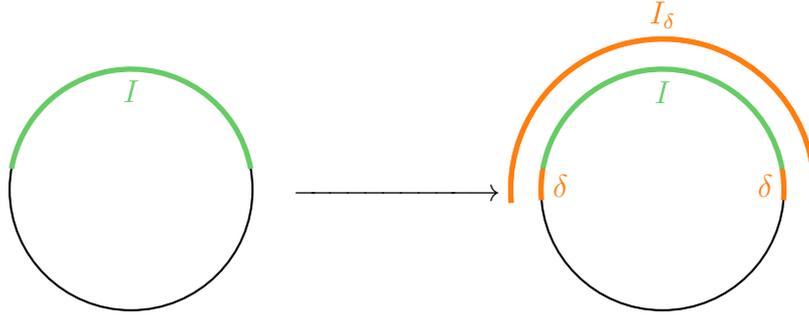


Figura 2.3: Función indicadora mayorizada.

Dado $\pi > \delta > 0$, sea χ_{I_δ} la función indicadora del arco obtenido ensanchado I a ambos lados por δ . Veámoslo gráficamente:

Figura 2.4: A la izquierda arco I , a la derecha arco I_δ .

Observación: si $|I| + 2\delta > 2\pi$, tomamos I_δ como toda la circunferencia unitaria.

Definimos la función

$$\mathcal{K}_\delta : (-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{K}_\delta(\theta) = \frac{2\pi}{\delta^2} \max(\delta - |\theta|, 0).$$

Notar que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{K}_\delta(\theta) d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2\pi}{\delta^2} \max(\delta - |\theta|, 0) d\theta = \frac{1}{\delta^2} \int_{-\delta}^{\delta} (\delta - |\theta|) d\theta = \frac{2}{\delta^2} \int_0^{\delta} (\delta - \theta) d\theta \\ &= \frac{2}{\delta^2} \left[\delta\theta - \frac{\theta^2}{2} \right]_0^{\delta} = \frac{2}{\delta^2} \left(\delta^2 - \frac{\delta^2}{2} \right) = \frac{2}{\delta^2} \cdot \frac{\delta^2}{2} = 1. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Ahora, definimos $g = \chi_{I_\delta} * \mathcal{K}_\delta$. Luego,

$$g(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \chi_{I_\delta}(\alpha) \mathcal{K}_\delta(\theta - \alpha) d\alpha.$$

Observamos que:

- g es continua por ser la convolución de una función continua \mathcal{K}_δ y una integrable χ_{I_δ} .
- $g \geq 0$ (no negativa) ya que $\chi_{I_\delta} \geq 0$ y $\mathcal{K}_\delta \geq 0$.
- $g(\theta) = 1$ si $e^{i\theta} \in I$, es decir, si el ángulo θ está en el arco I .

Vamos a demostrar este último punto. Para ello comenzaremos utilizaremos la propiedad conmutativa de la convolución, esto es $g = \chi_{I_\delta} * \mathcal{K}_\delta = \mathcal{K}_\delta * \chi_{I_\delta}$. Así pues

$$\begin{aligned} g(\theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \chi_{I_\delta}(\alpha) \mathcal{K}_\delta(\theta - \alpha) d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \chi_{I_\delta}(\theta - \alpha) \mathcal{K}_\delta(\alpha) d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \chi_{I_\delta}(\theta - \alpha) \frac{2\pi}{\delta^2} (\theta - \alpha) d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{2\pi}{\delta^2} (\theta - \alpha) d\alpha = 1, \end{aligned}$$

donde la última igualdad se deduce de las cuentas vistas en (2.46). También, se puede observar fácilmente en la Figura 2.5 que $\chi_{I_\delta}(\theta - \alpha) = 1$ porque $\theta - \alpha \in I_\delta$:

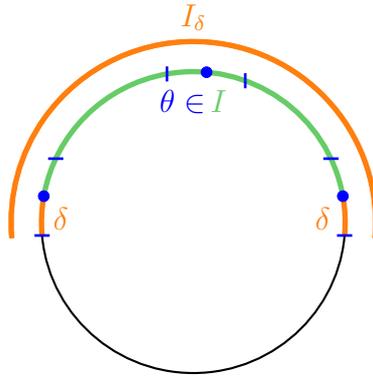


Figura 2.5: Representación gráfica de que $\theta - \alpha \in I_\delta$.

Otra propiedad de g , aplicando Fubini es que

$$\begin{aligned} \hat{g}(0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \chi_{I_\delta}(\alpha) \mathcal{K}_\delta(\theta - \alpha) d\alpha \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \chi_{I_\delta}(\alpha) \mathcal{K}_\delta(\theta - \alpha) d\theta \right) d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \chi_{I_\delta}(\alpha) \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{K}_\delta(\theta - \alpha) d\theta \right) d\alpha \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \chi_{I_\delta}(\alpha) d\alpha = \frac{|I_\delta|}{2\pi} = \frac{|I| + 2\delta}{2\pi}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Haciendo el cambio de variable $\theta - \alpha = z$, $d\theta = dz$, usando la 2π -periodicidad de \mathcal{K}_δ y (2.46) se tiene fácilmente la prueba de (*):

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{K}_\delta(\theta - \alpha) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{2\pi - \alpha} \mathcal{K}_\delta(z) dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{K}_\delta(z) dz = 1.$$

Ahora, ya tenemos todos los ingredientes para acotar (2.45). Para facilitar la lectura, recordamos

que queremos acotar la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} N(I; P) - \frac{|I|}{2\pi}N &\leq \sum_{j=1}^N g(\theta_j) - \frac{|I|}{2\pi}N \\ &= \left(\sum_{j=1}^N g(\theta_j) - \frac{N}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta \right) + N \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta - \frac{|I|}{N} \right). \end{aligned}$$

- Comenzamos acotando el segundo término usando (2.47) de modo que

$$N \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta - \frac{|I|}{N} \right) = N \left(\hat{g}(0) - \frac{|I|}{N} \right) = N \left(\frac{|I| + 2\delta}{2\pi} - \frac{|I|}{2\pi} \right) = N \frac{\delta}{\pi}.$$

- Para acotar el primer término, aplicamos la Proposición 2.1 y obtenemos que

$$\left| \left(\sum_{j=1}^N g(\theta_j) - \frac{N}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta \right) \right| \leq 4Gh(P) \stackrel{(2.35)}{=} 4 \max_{\theta} \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k| \hat{g}(k) e^{ik\theta} \right| h(P).$$

Aplicando el Lema 2.3, obtenemos que

$$4 \max_{\theta} \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k| \hat{g}(k) e^{ik\theta} \right| h(P) \leq 4 \cdot \frac{2}{\pi^2} \cdot \mathcal{K}_{\delta}(0) \cdot h(P) = \frac{8}{\pi^2} \mathcal{K}_{\delta}(0) h(P).$$

Además, sabemos que

$$\mathcal{K}_{\delta}(0) = \frac{2\pi}{\delta^2} \max(\delta, 0) = \frac{2\pi}{\delta^2} \delta = \frac{2\pi}{\delta}.$$

Luego,

$$\left| \left(\sum_{j=1}^N g(\theta_j) - \frac{N}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta \right) \right| \leq \frac{8}{\pi^2} \cdot \frac{2\pi}{\delta} \cdot h(P) = \frac{16}{\pi\delta} h(P).$$

Por lo tanto,

$$N(I; P) - \frac{|I|}{2\pi}N \leq \sum_{j=1}^N g(\theta_j) - \frac{|I|}{2\pi}N \leq \frac{16}{\pi\delta} h(P) + N \frac{\delta}{\pi}. \quad (2.48)$$

Para finalizar, solo tenemos que minimizar la expresión de la derecha. Sea

$$f(\delta) = \frac{16}{\pi\delta} h(P) + N \frac{\delta}{\pi} \implies f'(\delta) = -\frac{16}{\pi\delta^2} h(P) + \frac{N}{\pi}.$$

Por lo tanto, igualando a 0, despejando δ y quedándonos con la solución positiva, obtenemos

$$-\frac{16}{\pi\delta^2} h(P) + \frac{N}{\pi} = 0 \implies \delta^2 = \frac{16h(P)}{N} \implies \delta = 4\sqrt{\frac{h(P)}{N}}.$$

Haciendo la segunda derivada observamos que esta es positiva, por lo que se trata de un mínimo

$$f''(x) = \frac{32}{\pi\delta^3}h(P) > 0.$$

Sustituyendo en la ecuación (2.48) $\delta = 4\sqrt{\frac{h(P)}{N}}$, se verifica que

$$N(I; P) - \frac{|I|}{2\pi}N \leq \frac{8}{\pi}\sqrt{Nh(P)}.$$

y, por tanto, el resultado. □

Capítulo 3

La fórmula de Jensen

Para la elaboración de esta sección se han consultado los capítulos 13 y 15 de [5].

La demostración del Teorema 1.1 se deriva de la fórmula de Jensen, la cual pasamos a enunciar y a demostrar a continuación. Antes de comenzar con la fórmula de Jensen, enunciamos sin demostración un par de resultados auxiliares.

Teorema 3.1. *Si $f \in H(\Omega)$ donde Ω es cualquier conjunto abierto en el plano y f no tiene ceros en Ω , entonces $\log |f|$ es armónica en Ω .*

Otro resultado técnico que también usaremos es el siguiente:

Lema 3.1. *Se cumple la siguiente igualdad*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |1 - e^{i\theta}| d\theta = 0.$$

Teorema 3.2. (Fórmula de Jensen). *Supongamos que $\Omega = D(0; R)$, $f \in H(\Omega)$, $f(0) \neq 0$, $0 < r < R$, y $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ son las raíces de f en $\overline{D}(0; r)$, listados de acuerdo a sus multiplicidades. Entonces,*

$$|f(0)| \prod_{n=1}^N \frac{r}{|\alpha_n|} = \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta \right). \quad (3.1)$$

Usamos la hipótesis $f(0) \neq 0$ para evitar problemas en la demostración. Si f tiene una raíz de orden k en 0, la fórmula se puede aplicar a $\frac{f(z)}{z^k}$.

Demostración. Vamos a ordenar las raíces α_j de modo que $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in D(0; r)$ y $|\alpha_{m+1}| = \dots = |\alpha_N| = r$. (Por supuesto que podemos tener $m = N$ o $m = 0$). Sea

$$g(z) = f(z) \prod_{n=1}^m \frac{r^2 - \bar{\alpha}_n z}{r(\alpha_n - z)} \prod_{n=m+1}^N \frac{\alpha_n}{\alpha_n - z}. \quad (3.2)$$

Al definir g de esta forma, tenemos que $g \in H(D)$ donde $D = D(0; r + \epsilon)$ para algún $\epsilon > 0$. Además, g no tiene ceros en D , por lo que $|g| > 0$ y, por lo tanto, $\log |g|$ es armónica en D (por

el Teorema 3.1). Luego, tenemos que

$$\log |g(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |g(re^{i\theta})| d\theta. \quad (3.3)$$

Definimos

$$h(z) = \log |g(z)|. \quad (3.4)$$

Usando la fórmula integral de Cauchy, se tiene que

$$h(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(0)} \frac{h(z)}{z} dz. \quad (3.5)$$

Luego,

$$\log |g(0)| \stackrel{(3.4)}{=} \operatorname{Re}(h(0)) \stackrel{(3.5)}{=} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(0)} \frac{h(z)}{z} dz \right).$$

Sabiendo que $C_r(0)$ es la circunferencia de radio r y centro 0, tenemos que $C_r(0) = \{re^{i\theta} : \theta \in [-\pi, \pi]\}$. Por lo tanto, haciendo el cambio de variable $z = re^{i\theta} \implies dz = rie^{i\theta} d\theta$, la ecuación anterior es igual a

$$\operatorname{Re} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{h(re^{i\theta})}{re^{i\theta}} rie^{i\theta} d\theta \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(re^{i\theta}) d\theta \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re}(h(re^{i\theta})) d\theta.$$

Aplicando (3.4) probamos (3.3), es decir,

$$\log |g(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |g(re^{i\theta})| d\theta.$$

De la ecuación (3.2), evaluando en 0 se deduce que

$$|g(0)| = |f(0)| \prod_{n=1}^m \frac{r}{|\alpha_n|}. \quad (3.6)$$

Para $1 \leq n \leq m$, si $|z| = r$, entonces $\left| \prod_{n=1}^m \frac{r^2 - \bar{\alpha}_n z}{r(\alpha_n - z)} \right| = 1$. Veámoslo a continuación:

$$\left| \prod_{n=1}^m \frac{r^2 - \bar{\alpha}_n z}{r(\alpha_n - z)} \right| = \prod_{n=1}^m \left| \frac{r^2 - \bar{\alpha}_n z}{r(\alpha_n - z)} \right|.$$

Aplicando que $z = re^{i\theta}$, lo anterior es igual a

$$\prod_{n=1}^m \left| \frac{r^2 - \bar{\alpha}_n re^{i\theta}}{r(\alpha_n - re^{i\theta})} \right| = \prod_{n=1}^m \left| \frac{r(r - \bar{\alpha}_n e^{i\theta})}{r(\alpha_n - re^{i\theta})} \right| = \prod_{n=1}^m \frac{|r - \bar{\alpha}_n e^{i\theta}|}{|\alpha_n - re^{i\theta}|} = 1.$$

Para ver que la expresión anterior es igual a 1, tenemos que probar que $|r - \bar{\alpha}_n e^{i\theta}| = |\alpha_n - re^{i\theta}|$.

Para ello, vamos a aplicar que $|z| = |\bar{z}|$:

$$|\alpha_n - re^{i\theta}| = |\overline{\alpha_n - re^{i\theta}}| = |\bar{\alpha}_n - re^{-i\theta}| = |\bar{\alpha}_n - \frac{r}{e^{i\theta}}| = \frac{|\bar{\alpha}_n e^{i\theta} - r|}{|e^{i\theta}|} = |\bar{\alpha}_n e^{i\theta} - r| = |r - \bar{\alpha}_n e^{i\theta}|.$$

Si $\alpha_n = re^{i\theta_n} \implies |\alpha_n| = r$ para $m < n \leq N$, se tiene sustituyendo en (3.2) que

$$\log |g(re^{i\theta})| = \log |f(re^{i\theta})| - \sum_{n=m+1}^N \log |1 - e^{i(\theta - \theta_n)}|. \quad (3.7)$$

Esto es cierto porque

$$\sum_{n=m+1}^N \log \left| \frac{\alpha_n}{\alpha_n - z} \right| = \sum_{n=m+1}^N \log \left| \frac{1}{1 - \frac{re^{i\theta}}{\alpha_n}} \right| = - \sum_{n=m+1}^N \log |1 - re^{i(\theta - \theta_n)}|,$$

donde en la primera igualdad hemos simplificado la expresión dividiendo entre α_n y en la segunda igualdad hemos usado simplemente que $\alpha_n = re^{i\theta_n}$.

Probar (3.7) es equivalente a probar

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |g(re^{i\theta})| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=m+1}^N \log |1 - e^{i(\theta - \theta_n)}| d\theta. \quad (3.8)$$

Por lo tanto, aplicando el Lema 3.1 en (3.8), se tiene que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |g(re^{i\theta})| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta. \quad (3.9)$$

Aplicando (3.3) tenemos que

$$\log |g(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta.$$

Aplicando (3.6) se tiene que

$$\log(|f(0)| \prod_{n=1}^m \frac{r}{|\alpha_n|}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta.$$

Ahora, tomando exponenciales en la ecuación anterior, se obtiene (3.1), es decir

$$|f(0)| \prod_{n=1}^N \frac{r}{|\alpha_n|} = \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta \right).$$

□

Capítulo 4

Programas Matlab

Para la elaboración de esta sección se ha empleado Matlab que, a través de los siguientes códigos, nos representa gráficamente los ceros de los polinomios.

El Programa 4.1 calcula los ceros de un polinomio de grado n y los representa gráficamente alrededor del círculo unitario. Los coeficientes los genera de manera aleatoria, con números comprendidos entre -10 y 10 para así evitar que el tamaño del polinomio sea muy grande. Además, verifica las condiciones del Teorema 1.1 siendo $a_n = 1$ y $a_0 \neq 0$.

```
1 % Introduce el grado del polinomio
2 n = input('Introduce el grado del polinomio: ');
3
4 % Genera coeficientes aleatorios entre -10 y 10 para el polinomio de grado n
5 coeficientes = randi([-10, 10], 1, n+1);
6 coeficientes(1) = 1; % Polinomio monico
7 % Queremos que el termino constante no sea cero
8 while coeficientes(end) == 0
9     coeficientes(end) = randi([-10, 10]);
10 end
11
12 % Muestra en pantalla los coeficientes generados
13 disp('Los coeficientes del polinomio son:');
14 disp(coeficientes);
15
16 % Calcula las raices del polinomio
17 ceros = roots(coeficientes);
18
19 % Muestra en pantalla los ceros del polinomio
20 disp('Los ceros del polinomio son:');
21 disp(ceros);
22
```

```

23 % Crea una figura con el círculo unitario y los ceros del polinomio
24 figure;
25 theta = linspace(0, 2*pi, 1000);
26 plot(cos(theta), sin(theta), 'k-', 'LineWidth', 3); % Dibuja el círculo
27 hold on;
28 % Representa graficamente los ceros en el dibujo
29 plot(real(ceros), imag(ceros), 'bo', 'MarkerSize', 6, 'LineWidth', 1.5);
30
31 % Etiquetas de la figura
32 xlabel('Re');
33 ylabel('Im');
34 title('Distribucion de los ceros del polinomio en el círculo unitario');
35 grid on;
36 axis equal; % Evitar distorsionar el círculo unitario
37 legend('Círculo unitario', 'Ceros');
38
39 % Muestra el grafico
40 hold off;

```

Programa 4.1: Código en Matlab que calcula y representa los ceros del polinomio mónico con coeficientes aleatorios comprendidos entre -10 y 10 .

A continuación, se observa en la Figura 4.1 la distribución de los ceros de los polinomios alrededor del círculo unitario empleando el código anterior.

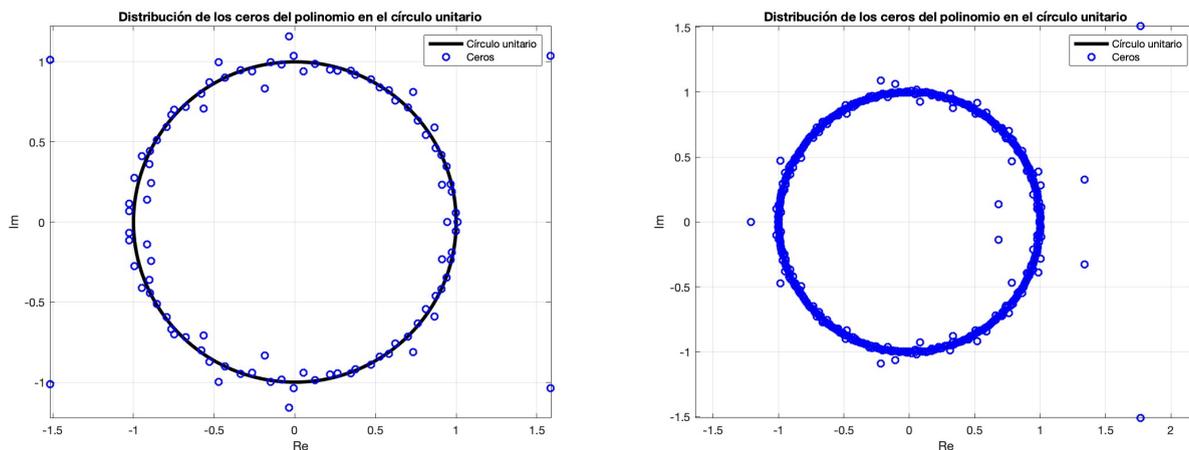


Figura 4.1: Representación de los ceros de un polinomio de grado 100 y 500 respectivamente, empleando el Programa 4.1.

Ahora, mostramos el Programa 4.2 que es una modificación del programa anterior. En este caso, sigue siendo un polinomio mónico que tiene el resto de coeficientes ± 1 generados aleatoriamente.

```

1  % Introduce el grado del polinomio
2  n = input('Introduce el grado del polinomio: ');
3
4  % Genera coeficientes aleatorios 1 y -1 para el polinomio de grado n
5  coeficientes = 2*randi([0, 1], 1, n+1) - 1;
6  coeficientes(1) = 1; % Polinomio monico
7
8  % Muestra en pantalla los coeficientes generados
9  disp('Los coeficientes del polinomio son:');
10 disp(coeficientes);
11
12 % Calcula las raices del polinomio
13 ceros = roots(coeficientes);
14
15 % Muestra en pantalla los ceros del polinomio
16 disp('Los ceros del polinomio son:');
17 disp(ceros);
18
19 % Crea una figura con el circulo unitario y los ceros del polinomio
20 figure;
21 theta = linspace(0, 2*pi, 1000);
22 plot(cos(theta), sin(theta), 'k-', 'LineWidth', 3); % Dibuja el circulo
23 hold on;
24 % Representa graficamente los ceros en el dibujo
25 plot(real(ceros), imag(ceros), 'bo', 'MarkerSize', 6, 'LineWidth', 1.5);
26
27 % Etiquetas de la figura
28 xlabel('Re');
29 ylabel('Im');
30 title('Distribucion de los ceros del polinomio en el circulo unitario');
31 grid on;
32 axis equal; % Evitar distorsionar el circulo unitario
33 legend('Circulo unitario', 'Ceros');
34
35 % Muestra el grafico
36 hold off;

```

Programa 4.2: Código en Matlab que calcula y representa los ceros del polinomio mónico con coeficientes aleatorios ± 1 .

En la Figura 4.2 se representa gráficamente la distribución de los ceros de los polinomios

alrededor del círculo unitario empleando este código.

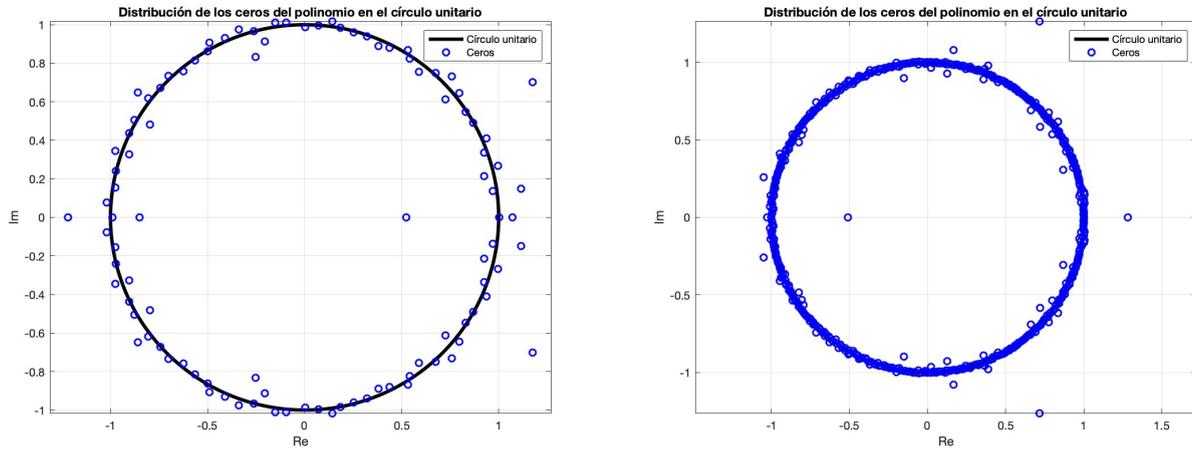


Figura 4.2: Representación de los ceros de un polinomio de grado 100 y 500 respectivamente, empleando el Programa 4.2.

Apéndice A

Otras herramientas y resultados útiles

Teorema A.1. (Desigualdad triangular). La desigualdad triangular establece que $\forall z, w \in \mathbb{C}$ se tiene que $|z + w| \leq |z| + |w|$.

Teorema A.2. Probar que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\theta(j-l)} d\theta = \begin{cases} 0 & j \neq l, \\ 1 & j = l. \end{cases}$$

Demostración.

- Es obvio que si $j = l$ entonces

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\theta(j-l)} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 d\theta = 1.$$

- Estudiamos el otro caso, es decir, si $j \neq l$. Aplicando la fórmula de Euler tenemos que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\theta(j-l)} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos(\theta(j-l)) + i \sin(\theta(j-l))) d\theta. \quad (\text{A.1})$$

Integrando (A.1) esta ecuación por separado, tenemos que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\theta(j-l)) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\theta(j-l)) d\theta.$$

por ser el seno una función 2π periódica. Además, como el seno es una función impar en un intervalo simétrico, tenemos que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\theta(j-l)) d\theta = 0.$$

Volviendo a (A.1), vamos a integrar el primer término

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\theta(j-l)) d\theta = \frac{\sin(\theta(j-l))}{j-l} \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Luego, hemos probado que (A.1) es 0.

□

Teorema A.3. (Desigualdad de Cauchy-Schwartz). Sean a_1, a_2, \dots, a_n y b_1, b_2, \dots, b_n números complejos cualesquiera. La desigualdad de Cauchy-Schwartz establece que

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right).$$

Propiedades A.1. (Propiedades de la transformada de Fourier). A continuación, comentamos algunas de las propiedades que utilizamos para demostrar el Lema 2.3:

- Si \mathcal{K} es real $\implies \widehat{\mathcal{K}}$ es también real.
- Luego, $\overline{\widehat{\mathcal{K}}(k)} = \mathcal{K}(k)$ (siendo $\overline{\widehat{\mathcal{K}}(k)}$ el conjugado de $\widehat{\mathcal{K}}(k)$).
- Por lo tanto,

$$\widehat{\mathcal{K}}(k) = \overline{\widehat{\mathcal{K}}(k)} = \overline{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{K}(\theta) e^{-ik\theta} d\theta}.$$

Y, como \mathcal{K} es real

$$\widehat{\mathcal{K}}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{K}(\theta) \overline{e^{-ik\theta}} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{K}(\theta) e^{ik\theta} d\theta = \widehat{\mathcal{K}}(-k). \quad (\text{A.2})$$

Teorema A.4. (Convergencia dominada). Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones integrables que converge puntualmente a una función medible f . Si existe una función g integrable tal que para todo n se cumple la desigualdad $|f_n| \leq g$, entonces la función f es integrable y se tiene que

$$\int f d\theta = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\theta.$$

Bibliografía

- [1] P. ERDŐS, P. TURÁN, *On the distribution of roots of polynomials*, Ann. of Math. 51: 105-119, 1950.
- [2] L.C. EVANS, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 1998.
- [3] T. GANELIUS, *Sequences of analytic functions and their zeros*, Ark. Mat. 3: 1-50, 1954.
- [4] M. MIGNOTTE, *Remarque sur une question relative à des fonctions conjuguées*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I. Math. 315(8): 907-911, 1992.
- [5] W. RUDIN, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill International Editions, 1987.
- [6] K. SOUNDARARAJAN, *Equidistribution of Zeros of Polynomials*, The American Mathematical Monthly, 126(3): 226-236, 2019.