Universidad de Cantabria

FACULTAD DE CIENCIAS

Capacidad de Shannon de un grafo y el número de Lovász

Trabajo de fin de Grado

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autora: Eva Calle Tirilonte

Director: Francisco Santos Leal

Junio de 2024

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mi tutor Paco toda la ayuda que me ha proporcionado durante este curso, resolviendo todas y cada una de mis dudas por muy insignificantes que fueran.

A mi abuelo Plácido, por siempre escucharme y compartir conmigo el amor a las matemáticas.

A mi hermano Samu, el corazón de la casa, gracias por hacerme reír y aguantar mis tonterías todos los días.

Y por último, a mi madre, la mujer más valiente y fuerte que existe y sin duda mi modelo a seguir, te quiero.

Abstract

The Shannon capacity of a graph describes the maximum amount of information that can be reliably transmitted using a graph as a model of the restrictions imposed by a noisy communication channel.

The Lovász number or Lovász theta function is a graph parameter that provides an upper bound for the Shannon capacity and can be calculated more easily and efficiently. Using this function, Lovász was able to demonstrate, for example, that the Shannon capacity of a C_5 graph is in fact $\sqrt{5}$.

This work explores both concepts taking as its starting point Lovász's original 1979 paper. Additionally, some very recent theorems on the Shannon capacity of strongly regular graphs are also included.

Keywords: Shannon capacity of a graph, Lovász number, Graph theory, Information theory, Graph spectra.

Resumen

La capacidad de Shannon de un grafo describe la máxima cantidad de información que se puede transmitir de manera fiable utilizando un grafo como modelo de las restricciones impuestas por un canal de comunicación con ruido.

El número de Lovász o función theta de Lovász es un parámetro del grafo que proporciona una cota superior para la capacidad de Shannon y puede calcularse de manera más sencilla y eficiente. Mediante esta función, Lovász consiguió demostrar por ejemplo que la capacidad de Shannon de un grafo C_5 es $\sqrt{5}$.

Este trabajo profundiza en ambos conceptos tomando como base el artículo original de Lovász de 1979. Además, también se incluyen algunos teoremas muy recientes sobre la capacidad de Shannon de grafos fuertemente regulares.

Palabras clave: Capacidad de Shannon de un grafo, Número de Lovász, Teoría de grafos, Teoría de la información, Espectro de grafos.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

En el ámbito de la teoría de la información y la teoría de grafos, la capacidad de Shannon de un grafo y el número de Lovász son conceptos fundamentales que han sido objeto de investigación desde finales del siglo XX.

Este trabajo tiene como objetivo profundizar en estos conceptos, tomando como punto de partida el artículo *On the Shannon Capacity of a Graph* [7] publicado por László Lovász en 1979, donde introduce el número de Lovász, también conocido como función theta de Lovász y explora su relación con la capacidad de Shannon. Además, se incluirán y analizarán algunos teoremas recientes sobre ambas nociones.

La **capacidad de Shannon de un grafo** es un concepto introducido por Claude Shannon en su artículo de 1956 *The zero error capacity of a noisy channel* [12] como una extensión de su teoría de la información. Esta capacidad describe la máxima cantidad de información que se puede transmitir de manera fiable utilizando un grafo como modelo de las restricciones impuestas por un canal de comunicación con ruido.

Es decir, el problema se centra en determinar cuántos mensajes distintos se pueden enviar de manera que no haya confusión entre ellos, respetando las conexiones representadas en el grafo.

A pesar de su importancia, determinar la capacidad de Shannon de muchos grafos específicos sigue siendo un problema abierto y difícil. Por ejemplo, todavía no se ha podido determinar la capacidad de Shannon del grafo ciclo C_7 (Figura 1.1).

El número de Lovász fue introducido por László Lovász en su artículo de 1979 *On the Shannon Capacity of a Graph* como una manera de aproximar y acotar la capacidad de Shannon de un grafo. En este artículo, Lovász demostró que su función theta es un parámetro del grafo que no solo proporciona una cota superior para la capacidad de Shannon, sino que también puede ser calculada de manera más sencilla y eficiente. Además, también establece cuál es la capacidad de Shannon del grafo ciclo C_5, problema que llevaba sin resolverse desde la introducción del concepto por parte de Shannon en 1956.

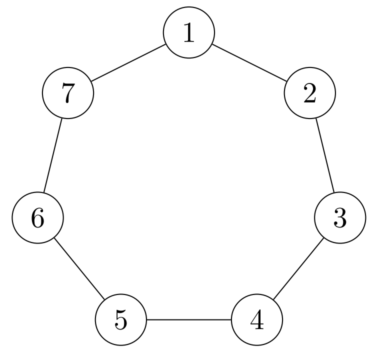

Figura 1.1: Grafo ciclo C_7. Todavía no se sabe su capacidad de Shannon.

Desde la publicación del artículo de Lovász, han habido numerosos avances en la comprensión de la capacidad de Shannon y la aplicación de la función theta de Lovász. Recientemente, se han podido ampliar a nuevos grafos ciertos teoremas y propiedades que Lovász ya había demostrado para otro tipo de grafos. En este trabajo se han incluído algunos de estos **nuevos descubrimientos** publicados en el artículo de 2023 *Observations on Graph Invariants with the Lovász* ϑ *- Function* [10] de Igal Sason.

Este trabajo está estructurado en varios capítulos. El primero consiste en un repaso de conceptos esenciales para la comprensión óptima del trabajo. El segundo se centra en la capacidad de Shannon de un grafo, profundizando en su expresión y en el Teorema de Shannon. El tercer capítulo sigue de cerca el artículo oiginal de Lovász dondes se define la función theta, demostrando sus muchas propiedades y aplicaciones para calcular la capacidad de Shannon. Por último, el cuarto capítulo consiste en una selección de resultados muy recientes (2023) sobre la capacidad de Shannon de grafos fuertemente regulares.

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Grafos

Esta sección está dedicada a la explicación de algunos conceptos sobre grafos que se utilizarán a lo largo de este trabajo y cuyo conocimiento será necesario para la comprensión del mismo. Las definiciones de esta sección y de la siguiente se han obtenido del libro [4].

Definición 2.1. *Un **Grafo** G consiste en un conjunto de vértices $V(G)$ y un conjunto de aristas $E(G)$, donde una arista se define como un par no ordenado de vértices distintos de G. La arista formada por los vértices x e y se denota xy.*

Observación 2.2. *de manera más precisa lo que estamos definiendo son grafos simples. Es decir, no admitimos lazos (aristas que unan un vértice consigo mismo) ni aristas múltiples (dos vértices unidos por varias aristas).*

Si dos vértices están unidos por una arista los llamamos **adyacentes**. Un subgrafo de G es un grafo H con $V(H) \subset V(G)$ y $E(H) \subset E(G)$.

Al grafo con $\binom{n}{2}$ aristas, o sea, con todas las aristas posibles, lo llamamos el **grafo completo** y a los subgrafos completos de un grafo G los llamamos **clanes**[1] de G.

Además, llamamos **número de clan** y lo denotamos por $\omega(G)$ al tamaño máximo de los clanes de un grafo G.

Definición 2.3. *El **grafo complementario** de un grafo G, denotado por $\overline{G}$, es un grafo tal que $V(\overline{G}) = V(G)$ en el cual dos vértices son adyacentes en $\overline{G}$ si y solo si no lo son en G.*

En la figura 2.1 podemos ver un ejemplo de un grafo y su complementario

Definición 2.4. *Una **k-coloración de un grafo** G es una partición de $V(G)$ en k conjuntos de modo que ninguno de ellos contiene una arista. (Es decir, cada uno es un conjunto independiente, como veremos en la Definición 2.7).*

[1] Utilizamos “clan” como traducción de “clique”, igual que se hace en [1]

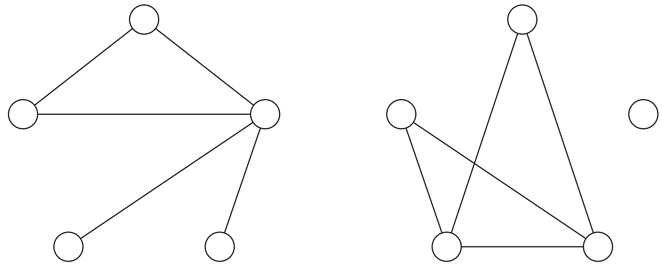

Figura 2.1: Un grafo y su grafo complementario.

*Llamamos **número cromático** y lo denotamos por $\chi(G)$ a la k más pequeña para la cual G admite una k-coloración.*

En la imagen 2.2 a continuación podemos ver una 3-coloración del grafo de Petersen. Además, tenemos que el número cromático de este grafo es el 3, ya que es la k mínima que permite una coloración.

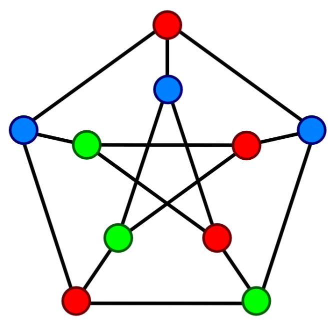

Figura 2.2: Una 3-coloración del grafo de Petersen (fuente: Wikipedia).

Definición 2.5. *Un **automorfismo** de un grafo G es una permutación de $V(G)$ que mantiene la adyacencia de los vértices. Los automorfismos de G forman el **grupo de automorfismos** de G. Si para cada par de vértices x e $y \in V(G)$ existe un automorfismo que envía x a y entonces el grupo de automorfismos se dice que es **transitivo por vértices**. La **transitividad de aristas** se define de manera análoga.*

Definición 2.6. *Un grafo G se denomina **grafo regular de grado d** si cada vértice tiene grado d, es decir, cada vértice es incidente a d aristas.*

Definición 2.7. *Un conjunto de vértices de un grafo G es **independiente** si no hay ninguna arista entre ellos. El **número de independencia** de G, denotado por $\alpha(G)$, es el tamaño máximo de los conjuntos independientes de G.*

Por ejemplo, si consideramos el grafo C_5, el cual es un grafo ciclo que consiste en un camino simple cerrado de cinco vértices, tenemos que su número de independencia es dos ($\alpha(C_5)$=2), ya que en este grafo, el tamaño máximo de los conjuntos independientes es dos. Vemos un ejemplo en la figura 2.3.

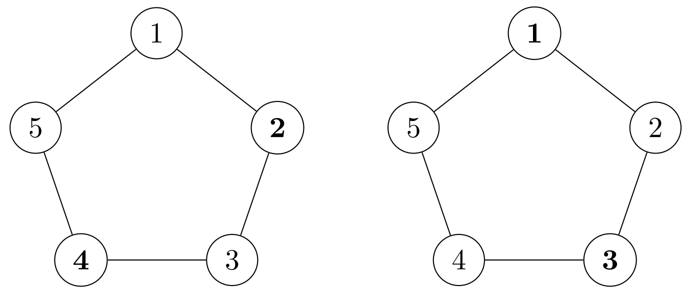

Figura 2.3: Dos grafos C_5, en negrita vemos señalados los dos conjuntos independendientes: $\{4, 2\}$ en el primer caso y $\{1, 3\}$ en el segundo.

Definición 2.8. *El* ***producto fuerte*** $G \boxtimes H$ *de dos grafos* G *e* H *es un grafo tal que* $V(G \boxtimes H) = V(G) \times V(H)$ *donde* (x_1, y_1) *es adyacente a* (x_2, y_2) *si* x_1 *es igual o adyacente a* x_2 *y* y_1 *es igual o adyacente a* y_2

A este producto se le llama "fuerte" porque existe otro producto "débil" $G \times H$ en el que (x_1, y_1) es adyacente a (x_2, y_2) si en una de las coordenadas son iguales y en la otra son adyacentes.

Lema 2.9. *Todo clan* $C_{G \boxtimes H}$ *de* $G \boxtimes H$ *es el producto cartesiano de un clan* C_G *de* G *y otro clan* C_H *de* H*.*

Demostración. Sea $C_{G \boxtimes H}$ un clan de $G \boxtimes H$. Por definición de clan, sabemos que $C_{G \boxtimes H}$ es un subgrafo completo de $G \boxtimes H$, es decir, todos los vértices de $C_{G \boxtimes H}$ son adyacentes o iguales entre sí.

Esto quiere decir que, sean dos vértices (x_1, y_1) y $(x_2, y_2) \in V(G) \times V(H)$ de $C_{G \boxtimes H}$, por definición de producto fuerte, x_1 es igual o adyacente a x_2 y y_1 es igual o adyacente a y_2.

Y como sabemos que los vértices de C_G son adyacentes o iguales entre sí y los vértices de C_H también son adyacentes o iguales entre sí, tenemos que:

$$C_{G \boxtimes H} = C_G \times C_H.$$

□

2.2. Representaciones ortonormales de un grafo

A continuación, explicaremos algunos conceptos relacionados con representación de un grafo mediante vectores. También enunciaremos y demostraremos algunos lemas sobre álgebra lineal que nos serán de utilidad más adelante.

Cuando hablemos de matrices y vectores pensaremos implícitamente en que los coeficientes son reales, y denotaremos como $u^T v$ el producto escalar de vectores. Recordemos que un vector es unitario si $u^T u = 1$, y que u y v son ortogonales si $u^T v = 0$.

Definición 2.10. *Una matriz cuadrada (de tamaño $n \times n$) es **simétrica** si es igual a su traspuesta. Una matriz simétrica A es **semidefinida positiva** si $v^T Av \geq 0$ para todos los vectores v.*

Recordemos que toda matriz simétrica es diagonalizable, es decir, tiene n valores propios contados con multiplicidad y, por tanto, tiene una base de vectores propios. [2]

Lema 2.11. *Sea A una matriz simétrica, entonces existe una base ortonormal de vectores propios.*

Demostración. Como ya hemos dicho, existe una base de vectores propios. Basta ver que los vectores propios se pueden tomar ortogonales entre sí, porque con eso ya no hay más que dividirlos por su norma.

La demostración tiene dos partes:

1) Por un lado, vamos a ver que si λ_1 y λ_2 son valores propios distintos, entonces sus vectores propios son automáticamente ortogonales. Si uno de los valores propios, por ejemplo λ_2 es cero, tenemos que:

$$\lambda_1 v_1^T v_2 = v_1^T A^T v_2 = v_1^T Av_2 = \lambda_2 v_1^T v_2 = 0$$

Si los dos valores propios son distintos de cero, entonces:

$$\lambda_2 v_1^T Av_2 = \lambda_1 \lambda_2 v_1^T v_2 = \lambda_1 v_1^T Av_2.$$

Como λ_1 y λ_2 son ambos no nulos y distintos, la única posibilidad es que estas expresiones sean cero. En particular:

$$\lambda_1 \lambda_2 v_1^T v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1^T v_2 = 0.$$

2) Por otro lado, los vectores propios con el mismo valor propio forman un subespacio vectorial. Podemos, por tanto, tomar una base ortogonal en cada uno de esos subespacios. □

Lema 2.12. *Si A es una matriz semidefinida positiva, entonces existe una matriz B simétrica tal que $A = B^T B$.*

Demostración. Como A es una matriz semidefinida positiva, en particular es simétrica, y por el Teorema espectral para matrices diagonales (Teorema 11.24 de [3]), tenemos que A es ortogonalmente semejante a una matriz diagonal real, es decir, existe una matriz ortogonal C y una matriz diagonal Λ que cumplen:

$$A = C^T \Lambda C.$$

Como A es una matriz semidefinida positiva, las entradas de Λ son no negativas y, por lo tanto, existe una matriz diagonal (y por tanto simétrica) D tal que $D^2 = \Lambda$. Si definimos $B = C^T DC$,

$$B^T = (C^T DC)^T = C^T D^T C = C^T DC = B,$$

[2]podemos encontrar la demostración en la página 66 de [3].

y en consecuencia:

$$B^T B = (C^T DC)(C^T DC) = C^T D(CC^T)DC = C^T D^2 C = C^T \Lambda C = A.$$

Como queríamos demostrar.

$\square$

Lema 2.13. *Sea A una matriz simétrica y sea $\vartheta \in \mathbb{R}$. Entonces, $\vartheta I - A$ es semidefinida positiva si y solo si ϑ es mayor o igual que todos los valores propios de A.*

Demostración. 1) Para la implicación hacia la derecha, sea λ un valor propio de A cualquiera. Es decir, $Av = \lambda v$ para algún $v \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. Por lo tanto

$$(\vartheta I - A)v = \vartheta v - \lambda v = (\vartheta - \lambda)v$$

y

$$v^T(\vartheta I - A)v = v^T(\vartheta - \lambda)v = (\vartheta - \lambda)v^T v = (\vartheta - \lambda)\|v\|_2^2.$$

Y como sabemos que

$$v^T(\vartheta I - A)v \geq 0 \quad \text{y} \quad \|v\|^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \vartheta - \lambda \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \vartheta \geq \lambda.$$

2) Para la implicación hacia la izquierda, sea $\vartheta \in \mathbb{R}$ mayor o igual que todos los valores propios de A, tenemos que demostrar que $v^T(\vartheta I - A)v \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$.

Como la matriz A es simétrica, entonces es diagonalizable y, por lo tanto, los vectores propios son base y los puedes escoger ortogonales entre sí.

Podemos escribir entonces: $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(\mu_i v_i)$, con v_i vectores propios y con valor propio λ_i,

en consecuencia:

$$v^T(\vartheta I - A)v = v^T(\vartheta - \lambda)v = v^T(\vartheta - \lambda)\left(\sum_{i=1}^{n}(\mu_i v_i)\right) = v^T\left(\sum_{i=1}^{n}(\mu_i(\vartheta - \lambda_i)v_i)\right) =$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(\mu_i v_i)\right)^T\left(\sum_{i=1}^{n}(\mu_i(\vartheta - \lambda_i)v_i)\right) = \sum_{i=1}^{n}(\mu_i^2(\vartheta - \lambda_i)v_i^T v_i) = \sum_{i=1}^{n}(\mu_i^2(\vartheta - \lambda_i)\|v_i\|^2) \geq 0.$$

$\square$

Definición 2.14. *Llamamos* ***producto tensorial*** *$v \otimes w$ de dos vectores $v = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ y $w = (w_1, w_2, \cdots, w_m)$ al vector $(v_1 w_1, \cdots, v_1 w_m, v_2 w_1, \cdots, v_n w_m)$ de longitud nm.*

Veamos que existe una manera muy útil de relacionar el producto escalar y el producto tensorial que nos servirá de utilidad más adelante.

Sean $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), y = (y_1, y_2, \cdots, y_m), v = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ y $w = (w_1, w_2, \cdots, w_m)$ vectores, tenemos que se cumple la siguiente expresión:

$$(x \otimes y)^T (v \otimes w) = (x^T v)(y^T w). \tag{2.1}$$

Demostración. Lado izquierdo de la ecuación:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_i y_j)^T (v_i w_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_i^T v_i)(y_j^T w_j).$$

Lado derecho de la ecuación:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i^T v_i) \right) \left(\sum_{j=1}^{m} (y_j^T w_j) \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_i^T v_i)(y_j^T w_j).$$

$\square$

Definición 2.15. *Sea G un grafo y $V(G) = 1, 2, \cdots, n$. Una* ***representación ortonormal*** *de G es un sistema de vectores unitaros $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ en algún $\mathbb{R}^d$ tal que, si i y j son vértices distintos y no adyacentes, entonces v_i y v_j son ortogonales.*

Lema 2.16 ([7, Lema 1])**.** *Sean $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ y $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ representaciones ortonormales de G y H respectivamente. Entonces, los vectores $u_i \otimes v_j$ forman una representación ortonormal de $G \boxtimes H$.*

Demostración. Tenemos que demostrar que si (i, j) y (k, l) son dos vértices distintos de $G \boxtimes H$ que no son adyacentes, es decir, i es distinto y no adyacente a k en G ($u_i^T u_k = 0$) o k es distinto y no adyacente a l en H ($v_j^T v_l = 0$), entonces $(u_i \otimes v_j)^T (u_k \otimes v_l) = 0$.

Como tenemos que:

$$(u_i \otimes v_j)^T (u_k \otimes v_l) \underbrace{=}_{(2.1)} (u_i^T u_k)(v_j^T v_l) = 0 \text{ si } u_i^T u_k = 0 \text{ o } v_j^T v_l = 0,$$

vemos que el lema se cumple. $\square$

Lema 2.17. *Sean G y H dos grafos. Si $G \subseteq H$, entonces toda representación ortonormal de G es también representación ortonormal de H.*

Demostración. Sea $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ una representación ortonormal de G. Es decir, si i y j son distintos y no adyacentes en G ($ij \notin E(G)$), entonces $u_i^T u_j = 0$.

Para ver que también son representación ortonormal de H, consideramos una arista $ij \in E(\overline{H})$. Como $G \subseteq H$, tenemos que $ij \in E(\overline{G})$. Por hipótesis, $u_i^T u_j = 0$. Concluimos que $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ es una representación ortonormal de H.

□

Lema 2.18 ([7, Lema 4])**.** *Sean $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ y $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ representaciones ortonormales de G y de $\overline{G}$ respectivamente, y sean c y d dos vectores cualesquiera. Entonces:*

$$\sum_{i=1}^{n} (u_i^T c)^2 (v_i^T d)^2 \leq c^2 d^2.$$

Demostración. Sabemos que los vectores $u_i \otimes v_i$ cumplen:

$$(u_i \otimes v_i)^T (u_j \otimes v_j) \underbrace{=}_{(2.1)} (u_i^T u_j)(v_i^T v_j) = \delta_{ij},$$

donde la función δ_{ij} se conoce como "Delta de Dirac" y se define tal que:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases},$$

por lo que los vectores $\{u_i \otimes v_i\}_i$ son ortonormales entre sí en $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{n^2}$, y obtenemos:

$$\sum_{i=1}^{n} \left((c \otimes d)^T (u_i \otimes v_i)\right)^2 \overset{*}{\leq} (c \otimes d)^2 \quad \underbrace{\Rightarrow}_{(2.1)} \quad \sum_{i=1}^{n} (u_i^T c)^2 (v_i^T d)^2 \leq c^2 d^2.$$

Donde (*) se da porque $(u_i \otimes u_i)$ se puede extender a una base ortonormal, y en una base ortonormal tendríamos la igualdad. □

Capítulo 3

Capacidad de Shannon de un grafo

En esta sección profundizaremos sobre la Capacidad de Shannon de un grafo, número introducido en 1956 por Claude Elwood Shannon [12], matemático recordado como el padre de la teoría de la información [8].

3.1. Definición y expresión

Comenzaremos explicando en qué consiste la capacidad de Shannon de un grafo.

Imaginemos que tenemos un canal de comunicación con ruido en el que podemos enviar n diferentes tipos de letras siendo algunas de estas similares entre sí, por lo que pueden ser confundidas a causa del ruido. Esto se puede representar mediante un grafo G que llamaremos *grafo de confusión*, cuyos vértices consistirán en las n letras y donde dos vértices serán adyacentes si las letras pueden ser confundidas entre sí.

La pregunta que nos interesa es, para cada longitud n, cuántos mensajes hay de esa longitud que no puedan ser confundidos entre sí. Por ejemplo, si queremos enviar <u>una</u> letra (mensaje de longitud 1), entonces deberemos escoger como conjunto de posibles mensajes un conjunto independiente del grafo G. Por otra parte, si queremos enviar un mensaje de longitud $\underline{k}$, debemos elegir un conjunto independiente de G^k. Siendo $G^k = \underbrace{(G \boxtimes G \boxtimes \cdots \boxtimes G)}_{k \text{ veces}}$.

El tamaño máximo de un conjunto independiente en ambos casos y, por lo tanto, el máximo número de mensajes que pueden ser enviados sin confusión, sería $\alpha(G)$ y $\alpha(G^K)$ respectivamente.

Veamos un ejemplo:

Sean a, b, c, d, e cinco letras y C_5 su grafo de confusión. Tal y como se puede apreciar en la figura 3.1, tenemos que a se puede confundir con b y e; b se puede confundir con a y c, etc. El máximo número de mensajes de longitud 1 que se pueden enviar sin confusión en este caso es $\alpha(C_5)$, que es igual a 2 como se explica tras la Definición 2.7.

Pasemos ahora a ver qué ocurre si queremos enviar un mensaje de longitud 2. En este caso

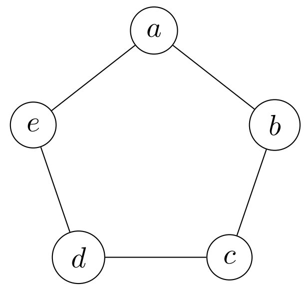

Figura 3.1: Grafo de confusión C_5 de las letras a, b, c, d y e.

tendríamos 25 posibles cadenas de letras en total. Podemos representar estas cadenas con un grafo de confusión de 25 vértices, donde cada vértice es adyacente, es decir, confundible, a otros 8 vértices (Figura 3.2). En este caso el máximo número de mensajes de longitud 2 sería $\alpha({C_5}^2)$ que es igual a 5. En la Figura se han marcado cinco vértices independientes, y como consecuencia de los cálculos de este capítulo veremos que no puede haber seis.

En base a esto, Shannon [12] introdujo el siguiente concepto, que captura la idea de cuántos mensajes distintos se pueden mandar con un grafo G concreto cuando la longitud de los mensajes es muy grande.

Definición 3.1. *,La **capacidad de Shannon de un grafo** G se define como:*

$$\Theta(G) = \sup_k \sqrt[k]{\alpha(G^k)} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\alpha(G^k)}$$

En esta definición estamos implícitamente usando la siguiente propiedad:

Proposición 3.2. *Para todo grafo,*

$$\sup_k \sqrt[k]{\alpha(G^k)} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\alpha(G^k)}.$$

Esta propiedad es consecuencia inmediata de los dos lemas siguientes:

Lema 3.3. *Para todo par de grafos G_1 y G_2 se tiene que*

$$\alpha(G_1 \boxtimes G_2) \geq \alpha(G_1)\alpha(G_2).$$

En particular, para todo grafo G:

$$\alpha(G^{n+m}) \geq \alpha(G^n)\alpha(G^m).$$

Demostración. Sea I un conjunto independiente de tamaño máximo de G_1 y J un conjunto independiente de tamaño máximo de G_2.

Es fácil comprobar que el producto cartesiano $I \times J$ es un conjunto independiente de $G_1 \boxtimes G_2$ ya que:

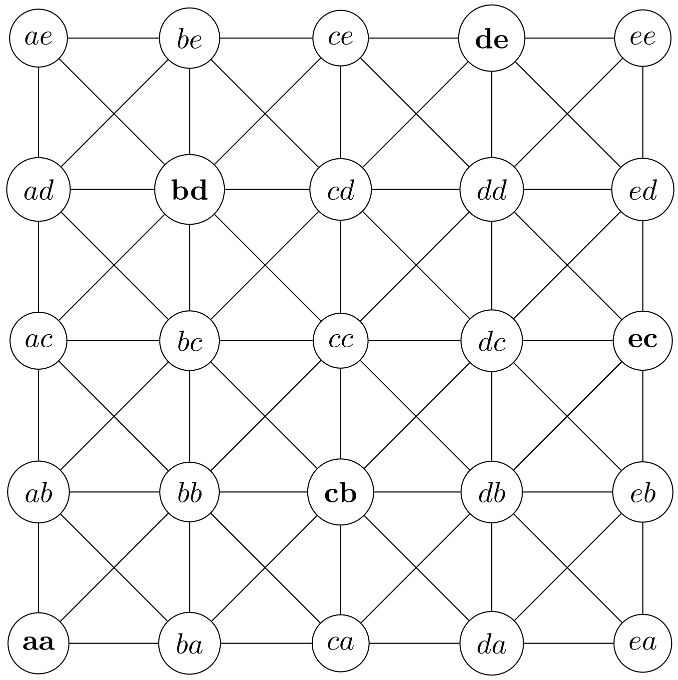

Figura 3.2: Grafo de confusión ${C_5}^2$ de las letras a, b, c, d y e. Hay que tener en cuenta que en esta figura los vértices situados al inicio de cada fila y columna son adyacentes a los del final de cada fila y columna siguiendo el mismo patrón, de modo que el grafo formaría una estructura similar a un Toro. Los vértices señalados en negrita conforman un subconjunto independiente de tamaño $\alpha({C_5}^2) = 5$

.

Si tomamos (x_1, y_1) y $(x_2, y_2) \in I \times J$ $(x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2)$, tenemos que x_1 y x_2 no son adyacentes en G_1 y y_1 y y_2 tampoco lo son en G_2. Por lo que (x_1, y_1) no es adyacente a (x_2, y_2).

Además, si escribimos $\alpha(G_1) = card(I) = n$, $\alpha(G_2) = card(J) = m$ obtenemos:

$$\alpha(G_1 \boxtimes G_2) \geq card(I \times J) = nm \quad \Rightarrow \quad \alpha(G_1 \boxtimes G_2) \geq \alpha(G_1)\alpha(G_2). \qquad \square$$

Lema 3.4 (Lema de Fekete, [5, Lema 11.6])**.** *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de términos positivos. Si se cumple que*

$$a_{n+m} \geq a_n a_m \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}, \tag{3.1}$$

entonces la sucesión $(\sqrt[n]{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ tiene límite y además

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{a_n}.$$

Demostración. Fijamos m y l tal que $l \leq m$. Por inducción, y haciendo uso de la desigualdad (3.1), encontramos que $a_{l+km} \geq a_l(a_m)^k$. Por lo que

$$\liminf_{k\to\infty} \sqrt[l+km]{a_{l+km}} \geq \lim_{k\to\infty} \sqrt[l+km]{a_l(a_m)^k} = \sqrt[m]{a_m}.$$

Como la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se descompone en la unión de las m subsucesiones $(a_{l+km})_{k\in\mathbb{N}}$ con $l = 1, 2, \ldots, m$ y todas tienen $\liminf$ mayor o igual que $\sqrt[m]{a_m}$, tenemos que también: $\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \geq \sqrt[m]{a_m}$.

Como esto vale para todo m, tenemos que:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \sup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n},$$

por tanto:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \sup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

□

3.2. Grafos perfectos

En su artículo [12], Shannon demostró el siguiente teorema:

Teorema 3.5. *Si G se puede cubrir con $\alpha(G)$ cliques disjuntos, entonces*

$$\alpha(G) = \Theta(G)$$

Un ejemplo importante de grafos a los que se aplica este teorema son los llamados *grafos perfectos.*

Definición 3.6. *Un grafo G se denomina grafo* **perfecto** *si para cada subgrafo inducido H de G se tiene que el número cromático de H es igual al tamaño máximo de los clanes de H, es decir, $\chi(H) = \omega(H)$.*

El *Teorema de los grafos perfectos* demostrado por Lovász en [6] establece que, si G es perfecto, entonces su complementario también lo es. De aquí se deduce que:

Corolario 3.7. *Si G es un grafo perfecto con número de independencia $\alpha(G)$, G se puede cubrir por $\alpha(G)$ clanes disjuntos. En particular, su capacidad de Shannon es igual a $\alpha(G)$.*

Demostración. El número de independencia de un grafo coincide con el número de clan de su complementario. O sea

$$\alpha(G) = \omega(G^*).$$

Como G^* es perfecto, $\omega(G^*) = \chi(G^*)$. Es decir, los vértices de G^* los podemos descomponer en $\alpha(G) = \chi(G^*)$ conjuntos independientes, que son clanes en G. □

3.3. Teorema de Shannon

Esta sección está dedicada a enunciar y demostrar el Teorema de Shannon.

En primer lugar, comenzaremos explicando términos necesarios para demostrar la existencia de un límite inferior y superior de la Capacidad de Shannon de un grafo.

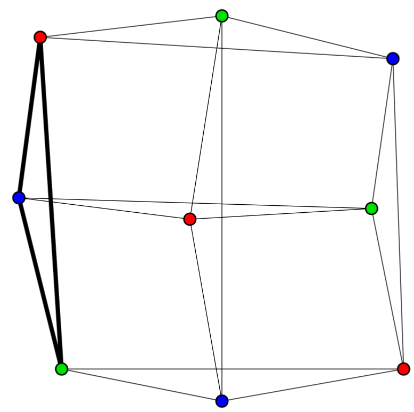

Figura 3.3: Grafo Paley de orden 9 (producto débil de dos triángulos). Como el número crómatico de cada subgrafo inducido es igual al tamaño máximo de los clanes, es un grafo perfecto (fuente:Wikipedia).

Llamamos ***empaquetamiento fraccionario de vértices*** a cualquier asignación de pesos no negativos $w(x)$ a los vértices x de G que cumpla que para cada clan C en G:

$$\sum_{x \in C} w(x) \leq 1.$$

Además, definimos $\alpha^*(G)$ como el máximo de $\sum_{x \in V} w(x)$, tomados de todos los empaquetamientos fraccionarios de vértices. Obsérvese que todo conjunto independiente define un empaquetamiento fraccionario (tomando w igual a uno para los vértices del conjunto, y cero para los demás). De hecho, si en un empaquetamiento fraccionario los w son enteros, el conjunto de vértices con $w \neq 0$ es un empaquetamiento. Por tanto $\alpha(G) \leq \alpha^*(G)$.

A su vez, haciendo uso del *teorema de dualidad de programación lineal*[1],

podemos inferir que $\alpha^*(G)$ puede también ser expresado como el mínimo de $\sum_C q(C)$ donde hemos asignado pesos no negativos $q(C)$ a los clanes C de G tal que:

$$\sum_{x \in C} q(C) \geq 1$$

para cada punto x de G.

Lema 3.8. *Dados dos grafos* $G = (V, E)$ *y* $H = (W, F)$ *se tiene que*

$$\alpha^*(G \boxtimes H) = \alpha^*(G)\alpha^*(H).$$

Demostración. Dados dos empaquetamientos fraccionarios v y w de G y H, vamos a construir el empaquetamiento fraccionario producto $v \times w$ en $G \boxtimes H$ del siguiente modo:

$$v \times w(x_1, x_2) = v(x_1)w(x_2).$$

Se tiene que:

[1]En este caso, la versión que usamos es el ejercicio 2.23 de [11].

- Esa asignación $v \times w$ es, en efecto, un empaquetamiento fraccionario en $G \boxtimes H$:

  Sabemos que todo clan de $G \boxtimes H$ es el producto cartesiano de un clan C_G de G y otro clan C_H de H por el Lema 2.9.

  Las asignaciones v y w, cumplen, por definición de empaquetamiento fraccionario, que:

  $$\sum_{x \in C_G} v(x) \leq 1 \quad \text{y} \quad \sum_{x \in C_H} w(x) \leq 1$$

  donde C_G y C_H son los clanes de G y H respectivamente. Por lo que, la asignación $v \times w$ cumple:

  $$\sum_{x_1 \in C_G} \sum_{x_2 \in C_H} v(x_1)w(x_2) = \sum_{(x_1,x_2) \in C_G \times C_H} v \times w(x_1, x_2) \leq 1$$

  y como consecuencia $v \times w$ es un empaquetamiento fraccionario en $G \boxtimes H$.

- Si $s = \sum_{x \in V} v(x)$ y $t = \sum_{x \in W} w(x)$ entonces:

  $$\sum_{(x_1,x_2) \in V \times W} v \times w(x_1, x_2) = \sum_{(x_1,x_2) \in V \times W} v(x_1)w(x_2) = \sum_{x \in V} v(x) \sum_{x \in W} w(x) = st.$$

Supongamos ahora que v y w eran los empaquetamientos fraccionarios óptimos de G y H, de modo que $\alpha^*(G) = s$ y $\alpha^*(H) = t$. Entonces tenemos que:

$$\alpha^*(G \boxtimes H) \geq \sum_{(x_1,x_2) \in V \times W} v \times w(x_1, x_2) = st = \alpha^*(G)\alpha^*(H).$$

Para la otra desigualdad usamos la definición dual de α^*. Sean p y q asignaciones de pesos a los clanes de G y H, vamos a construir una asignación de pesos $p \times q$ a los clanes de $G \boxtimes H$.

A los clanes $K_1 \times K_2$ obtenidos como producto de un clan de G y otro de H les asignamos peso:

$$p \times q(K_1 \times K_2) = p(K_1)q(K_2),$$

y a los demás les asignamos peso cero.

De nuevo, tenemos que:

- Esa asignación $p \times q$ cumple la desigualdad del programa dual. Por definición, sabemos que tanto p como q cumplen que:

  $$\sum_{x \in K_1} p(K_1) \geq 1 \quad \text{y} \quad \sum_{x \in K_2} q(K_2) \geq 1.$$

  Consecuentemente:

  $$\sum_{x_1 \in K_1} \sum_{x_2 \in K_2} p(K_1)q(K_2) = \sum_{(x_1,x_2) \in K_1 \times K_2} p \times q(K_1 \times K_2) \geq 1$$

- Si $s = \sum_{K_1 \subset V} p(K_1)$ y $t = \sum_{K_2 \subset W} q(x)$ entonces:
$$\sum_{K \in V \times W} p \times q(K) = st,$$
donde las sumas son sobre los clanes. La demostración es que
$$\sum_{K \in V \times W} p \times q(K) = \sum_{K_1 \in V, K_2 \in W} p(K_1) \times q(K_2) = st.$$

Si, como antes, suponemos que p y q son óptimos, obtenemos:
$$\alpha^*(G \boxtimes H) \leq \sum_{K_1 \times K_1 \subset V \times W} p \times q(K_1, K_2) = st = \alpha^*(G)\alpha^*(H).$$

□

Teorema 3.9 (Teorema de Shannon). $\alpha(G) \leq \Theta(G) \leq \alpha^*(G)$.

Demostración. La desigualdad $\alpha(G) \leq \Theta(G)$ es trivial por definición de Capacidad de Shannon (sustituyendo $k = 1$ en la Definición 3.1).

Para la segunda desigualdad, como $\Theta(G) = \sup_k \sqrt[k]{\alpha(G^k)}$, lo que hemos de demostrar es que para todo $k \in \mathbf{N}$,
$$\alpha(G^k) \leq \alpha^*(G)^k.$$
Eso ahora es fácil, ya que:
$$\alpha(G^k) \leq \alpha^*(G^k) \leq \alpha^*(G)^k.$$

□

Ahora veamos la **aplicación del Teorema de Shannon al grafo C_5:**

Sabemos que $\alpha(C_5) = 2$ y por lo tanto $2 \leq \Theta(G)$. También conocemos que $\alpha({C_5}^2)$ es por lo menos cinco (ejemplo encima de la Definición 3.1), por lo que la capacidad de Shannon de C_5 va a ser por lo menos $\sqrt{5}$, es decir, $\sqrt{5} \leq \Theta(G)$.

A continuación vamos a calcular el valor de $\alpha^*(C_5)$.

Proposición 3.10. $\alpha^*(C_5) = \frac{5}{2}$*:*

Demostración. 1) Si asignamos pesos $w(i) = 1/2$ a todos los vértices, observamos que $\sum_{x \in C} w(x) \leq 1$ se cumple, ya que, en un grafo C_5, los clanes que hay están formados por una arista con sus dos vértices (además de los vértices individuales, que también son clanes):
$$\begin{array}{ll} w(1) + w(2) & \leq 1 \\ w(2) + w(3) & \leq 1 \\ \cdots & \\ w(5) + w(1) & \leq 1 \end{array}.$$

Como estos cinco clanes son los más grandes que hay en C_5, tenemos que:

$$\alpha^*(G) \leq 5/2.$$

2) Ahora vamos a ver cómo asignar pesos a los clanes de modo que se cumpla que $\sum_{x \in C} q(C) \geq 1$. Si asignamos peso cero a los vértices y peso 1/2 a las aristas obtenemos que el peso de cada clan es igual al peso de su correspondiente arista, es decir: $q(C_i) = 1/2$. Y como cada vértice está en dos aristas y por lo tanto en dos clanes, se cumple que:

$$\begin{array}{ll} q(C_1) + q(C_2) & \geq 1 \\ q(C_2) + q(C_3) & \geq 1 \\ \cdots & \\ q(C_5) + q(C_1) & \geq 1 \end{array}.$$

Por tanto, $\alpha^*(G)$ es mayor o igual que la suma de todos los pesos asignados, que vuelve a ser 5/2. Y finalmente obtenemos que $\alpha^*(G) = 5/2$. □

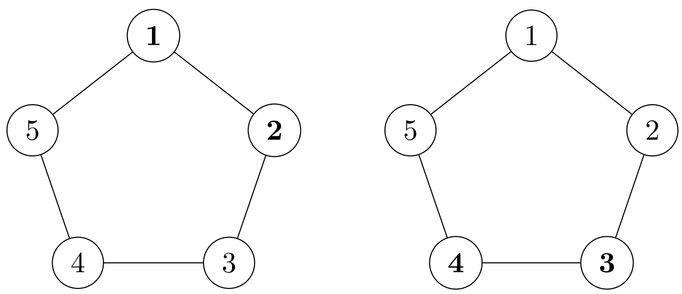

Figura 3.4: Dos grafos C_5, en negrita vemos señalados dos clanes: $\{1, 2\}$ en la primera figura y $\{3, 4\}$ en la segunda.

Podemos concluir finalmente que la capacidad de Shannon de un grafo C_5 queda acotada entre los siguientes valores: $\sqrt{5} \leq \Theta(C_5) \leq \frac{5}{2}$.

Capítulo 4

El número de Lovász: $\vartheta(G)$

4.1. Primeras propiedades; relación con la capacidad de Shannon

Para poder afinar más las cotas superiores a la capacidad de Shannon de un grafo, el matemático László Lovász introdujo en su artículo *On the Shannon Capacity of a Graph* [7] de 1979 un número real, comúnmente denotado por $\vartheta(G)$, que actualmente se conoce como función theta de Lovász o número de Lovász. Para ilustrar la utilidad de este número, gracias a él Lovász demostró que la capacidad de Shannon del grafo C_5, que Shannon solo pudo acotar entre $\sqrt{5}$ y $5/2$, es de hecho $\sqrt{5}$.

A continuación, veamos cómo se define $\vartheta(G)$. Para ello primero vamos a definir un nuevo concepto denominado *valor* de una representación ortonormal $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$.

Recordemos que dado un grafo G con vértices V y aristas E, una representación ortonormal de G en $\mathbb{R}^d$ consiste en asociar un vector unitario u_i a cada vértice $i \in V$ de modo que se cumpla que si i y j son distintos y no adyacentes, entonces u_i y u_j son ortogonales (Definición 2.15).

Llamamos *valor* de la representación ortonormal a

$$\min_{c} \max_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{(c^T u_i)^2}$$

donde c es un vector unitario.

El número de Lovász de un grafo es el mínimo *valor* de todas las representaciones ortonormales:

Definición 4.1. *Sea $U = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$ una representación ortonormal y c un vector unitario, denominamos* ***número de Lovász*** *de un grafo G a:*

$$\vartheta(G) = \min_{c,U} \max_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{(c^T u_i)^2}.$$

Una representación ortonormal es llamada *óptima* si esta alcanza el mínimo valor $\vartheta(G)$. Además, se puede comprobar que este mínimo existe ya que el *valor* de una representación ortonormal es una función continua y el conjunto de todas las representaciones ortonormales es un compacto.

Además, denominamos *mango* al vector c que produce el mínimo.

Lema 4.2. *El mango está en el subespacio lineal generado por la representación ortonormal.*

Demostración. Supongamos por reducción al absurdo que no. Es decir, tenemos una representación ortonormal $u_1, \dots, u_n$ cuyo mango c no está en su subespacio generado. Sea L dicho subespacio. Podemos portanto escribir:

$$c = c_t + c_n,$$

donde $c_t \in L$ y c_n es perpendicular a L.

Se tiene entonces que:

$$\max_{1\leq i\leq n} \frac{1}{(c^T u_i)^2} = \max_{1\leq i\leq n} \frac{1}{(c_t^T u_i)^2}.$$

Como suponemos que $c_n \neq 0$, tenemos que $||c_t|| < 1$. Si ahora tomamos $c' = c_t/||c_t||$, que es un vector unitario, obtenemos:

$$\max_{1\leq i\leq n} \frac{1}{(c'^T u_i)^2} = ||c_t||^2 \max_{1\leq i\leq n} \frac{1}{(c_t^T u_i)^2} < \max_{1\leq i\leq n} \frac{1}{(c_t^T u_i)^2} = \max_{1\leq i\leq n} \frac{1}{(c^T u_i)^2}.$$

Lo cual contradice que c sea el mango de la representación ortonormal. □

Lovász también da la siguiente **definición alternativa** de $\vartheta(G)$. Su demostración es un poco complicada y se realizará en la Sección 4.3.

Teorema 4.3 ([7, Teorema 5])**.**

$$\vartheta(G) = \max \sum_{i=1}^{n} (d^T v_i)^2.$$

donde el máximo se toma sobre todas las representaciones ortonormales $(v_1, v_2, \cdots, v_m)$ *de* $\overline{G}$ *y todos los vectores unitarios* d.

Corolario 4.4 ([7, Teorema 11])**.** *Sea G un grafo que admite una representación ortonormal en dimensión d. Entonces:*

$$\vartheta(G) \leq d.$$

Demostración. Sea $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ una representación ortonormal de G en un espacio de dimensión d. Vemos que $(u_1 \otimes u_1, u_2 \otimes u_2, \cdots, u_n \otimes u_n)$ también es una representación ortonormal de G utilizando la ecuación (2.1).

Sea $\{e_1, e_2, \cdots, e_d\}$ una base ortonormal, definimos:

$$b = \frac{1}{\sqrt{d}}(e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2 + \cdots + e_d \otimes e_d).$$

Se tiene que $b^2 = d\left(\frac{1}{\sqrt{d}}\right)^2 = 1$, y por otro lado:

$$\begin{aligned}(u_i \otimes u_i)^T b &= \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{k=1}^{d} (e_k \otimes e_k)^T (u_i \otimes u_i) \\ &\underbrace{=}_{(2.1)} \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{k=1}^{d} (e_k^T u_i)^2 = \frac{1}{\sqrt{d}} u_i^2 = \frac{1}{\sqrt{d}}.\end{aligned}$$

Por lo que:

$$\frac{1}{\sqrt{d}} = (u_i \otimes u_i)^T b \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{d} = ((u_i \otimes u_i)^T b)^2 \quad \Rightarrow \quad d = \frac{1}{((u_i \otimes u_i)^T b)^2} \underbrace{\geq}_{\text{Teo } 4.3} \vartheta(G).$$

Concluyendo finalmente con que $\vartheta(G) \leq d$. □

En el resto de esta sección enunciaremos y demostraremos algunos de los **primeros lemas y teoremas** relacionados con la capacidad de Shannon de un grafo y el número de Lovász.

Lema 4.5 ([7, Lema 2])**.** $\vartheta(G \boxtimes H) \leq \vartheta(G)\vartheta(H)$.

Demostración. Sean $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ y $(v_1, v_2, \cdots, v_m)$ representaciones ortonormales óptimas de G y H, con mangos g y h respectivamente.

Tenemos que $g \otimes h$ es un vector unitario ya que:

$$\sqrt{(g \otimes h)^T (g \otimes h)} \underbrace{=}_{(2.1)} \sqrt{(g^T g)(h^T h)} = \sqrt{(1)(1)} = 1.$$

Por otro lado, $(u_i \otimes v_j)_{i,j}$ es una representación ortonormal del grafo $G \boxtimes H$ por el Lema 2.16.

Por tanto, aplicando la definición del número de Lovász:

$$\vartheta(G \boxtimes H) \underbrace{\leq}_{\text{Def } 4.1} \max_{i,j} \frac{1}{((g \otimes h)^T (u_i \otimes v_j))^2} \underbrace{=}_{(2.1)} \max_{i,j} \frac{1}{(g^T u_i)^2} \frac{1}{(h^T v_j)^2} = \vartheta(G)\vartheta(H).$$

□

Lema 4.6 ([7, Lema 3])**.** $\alpha(G) \leq \vartheta(G)$.

Demostración. Sea $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ una representación ortonormal de G con mango g y supongamos que $\{u_1, u_2, \cdots, u_k\}$ es un conjunto independiente de tamaño máximo en G y por tanto $k = \alpha(G)$. Tenemos, por definición de representación ortonormal, que los vectores $(u_1, u_2, \cdots, u_k)$ son ortogonales dos a dos.

Sean $v_1, \ldots, v_l$ vectores adicionales tales que $\{u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_l\}$ es una base ortonormal, podemos escribir el mango g tal que:

$$g = \sum_{i=1}^{k}(\lambda_i u_i) + \sum_{i=1}^{l}(\mu_i v_i) \quad \Rightarrow \quad g^2 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^2 + \sum_{i=1}^{l} \mu_i^2 \geq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^2 \quad \Rightarrow \quad g^2 \geq \sum_{i=1}^{k}(g^T u_i)^2.$$

Por otro lado, sabiendo que $\alpha(G) = k$, tenemos $\forall i \in \{1, 2, \cdots, k\}$ que:

$$\vartheta(G) \geq \frac{1}{(g^T u_i)^2} \Rightarrow (g^T u_i)^2 \geq \frac{1}{\vartheta(G)} \Rightarrow \sum_{i=1}^{k}(g^T u_i)^2 \geq \frac{\alpha(G)}{\vartheta(G)}.$$

$$\text{Y como } 1 = g^2 \geq \sum_{i=1}^{k}(g^T u_i)^2 \geq \frac{\alpha(G)}{\vartheta(G)}, \quad \text{concluimos que } \Rightarrow \alpha(G) \leq \vartheta(G).$$

□

Teorema 4.7 ([7, Teorema 10])**.** $\vartheta(G) \leq \alpha^*(G)$

Demostración. Sea (u_i) una representación ortonormal de $\overline{G}$ y sea c un vector unitario tal que, por el Teorema 4.3:

$$\vartheta(G) = \sum_{i=1}^{n}(c^T u_i)^2.$$

Si consideramos C un clan cualquiera en G, tenemos que $\{u_i : i \in C\}$ es un conjunto de vectores ortonormales, ya que los vértices del clan son adyacentes en $G \Rightarrow$ No son adyacentes en $\overline{G} \Rightarrow u_i^T u_j = 0$. Por lo que, como los vectores u_i forman parte de una base ortonormal, vemos que se cumple que:

$$\sum_{i \in C}(c^T u_i)^2 \leq c^2 = 1$$

Por tanto, los pesos $(c^T u_i)^2$ forman un empaquetamiento fraccionario de vértices y teniendo en cuenta la definición de $\alpha^*(G)$, concluimos:

$$\vartheta(G) = \sum_{i=1}^{n}(c^T u_i)^2 \leq \alpha^*(G) \quad \Rightarrow \quad \vartheta(G) \leq \alpha^*(G).$$

□

Teorema 4.8 ([7, Teorema 1])**.** $\Theta(G) \leq \vartheta(G)$.

Demostración. Por el Lema 4.6 aplicado a g^k sabemos que:

$$\alpha(G^k) \leq \vartheta(G^k).$$

A su vez, por el Lema 4.5, tenemos que:

$$\vartheta(G \boxtimes H) \leq \vartheta(G)\vartheta(H) \quad \underbrace{\Rightarrow}_{H=G} \quad \vartheta\underbrace{(G \boxtimes \cdots \boxtimes G)}_{k \text{ veces}} \leq \underbrace{\vartheta(G)\vartheta(G)\cdots\vartheta(G)}_{k \text{ veces}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vartheta(G^k) \leq \vartheta(G)^k \quad \forall k.$$

En consecuencia:

$$\alpha(G^k) \leq \vartheta(G)^k \quad \forall k \quad \Rightarrow \quad \sqrt[k]{\alpha(G^k)} \leq \vartheta(G) \quad \forall k \quad \Rightarrow \quad \Theta(G) \leq \vartheta(G).$$

□

Lema 4.9 ([7, Corolario 1])**.** *Si $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ es una representación ortonormal de $\overline{G}$ y d es un vector unitario cualquiera, entonces:*

$$\sum_{i=1}^{n} (v_i^T d)^2 \leq \vartheta(G).$$

Demostración. Sea $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ la representación ortonormal óptima de G y sea c su mango. Por definición de $\vartheta(G)$ tenemos que:

$$\vartheta(G) = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{(c^T u_i)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\vartheta(G)} = \min_{1 \leq i \leq n} (c^T u_i)^2.$$

Como c y d son vectores unitarios, obtenemos:

$$1 = c^2 d^2 \underbrace{\geq}_{\text{Lema 2.18}} \sum_{i=1}^{n} (u_i^T c)^2 (v_i^T d)^2 \geq \sum_{i=1}^{n} (\min_j (u_j^T c)^2)(v_i^T d)^2 =$$

$$= (\min_j (u_j^T c)^2) \sum_{i=1}^{n} (v_i^T d)^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (v_i^T d)^2}{\vartheta(G)}.$$

Por lo que concluimos que:

$$\sum_{i=1}^{n} (v_i^T d)^2 \leq \vartheta(G).$$

□

Teorema 4.10 ([7, Corolario 2])**.** *Para todo grafo G,*

$$\vartheta(G)\vartheta(\overline{G}) \geq n.$$

Demostración. Sea $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ la representación ortonormal óptima de $\overline{G}$ y d su mango. Por definición de $\vartheta(\overline{G})$ (Definición 4.1) se tiene que:

$$\vartheta(\overline{G}) = \max_{1\leq i\leq n} \frac{1}{(d^T v_i)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\vartheta(\overline{G})} = \min_{1\leq i\leq n} (d^T v_i)^2.$$

Ahora, utilizando el Lema 4.9, obtenemos:

$$\vartheta(G) \underbrace{\geq}_{\text{Lema 4.9}} \sum_{i=1}^{n} (v_i^T d)^2 \geq n \min_{1\leq i\leq n} (d^T v_i)^2 = \frac{n}{\vartheta(\overline{G})}.$$

De esta manera concluimos que:

$$\vartheta(G)\vartheta(\overline{G}) \geq n.$$ □

4.2. Capacidad de Shannon de un grafo ciclo C_5

Ahora, haciendo uso de los lemas y teoremas enunciados y demostrados anteriormente, probaremos que la capacidad de Shannon de un grafo C_5 es $\sqrt{5}$.

Teorema 4.11. $\vartheta(C_5) \leq \sqrt{5}$.

Demostración. Imaginemos un paraguas cuyo mango y cinco varillas son seis vectores unitarios orientados en la dirección opuesta a su punto común y representados por c y $u_1, u_2, \cdots, u_5$ respectivamente. Cuando el paraguas está cerrado el ángulo entre varillas es cero y cuando está abierto del todo el ángulo entre varillas no adyacentes es $2\pi/5$. Existe por tanto una posición en la que el ángulo entre varillas no adyacentes es $\pi/2$. Es fácil ver que en esta posición $(u_1, u_2, \cdots, u_5)$ es una representación ortonormal de C_5 ya que las varillas no adyacentes son ortogonales.

Ahora, calculemos el valor de $c^T u_i$ [1]:

Vemos que $c^T u_i = \|c\|\|u_i\| \cos(\alpha) = \cos(\alpha)$, donde α es el ángulo entre el mango c y cualquiera de las varillas u_i. Utilizando la ley de los senos y fijándonos en la Figura 4.2 obtenemos:

$$r = \frac{b}{2\,\mathrm{sen}(A)},$$

donde A es el ángulo opuesto al lado b. Además, sabemos que $A = \frac{3\pi}{5}$ y que $b = \sqrt{2}$ ya que es la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos dos catetos son dos varillas no adyacentes. Por lo que:

$$r = \frac{\sqrt{2}}{2\,\mathrm{sen}(\frac{3\pi}{5})}.$$

[1] Estos cálculos se han hecho tomando como guía: `https://math.stackexchange.com/questions/1811180/how-to-find-the-angle-of-lovasz-umbrella`

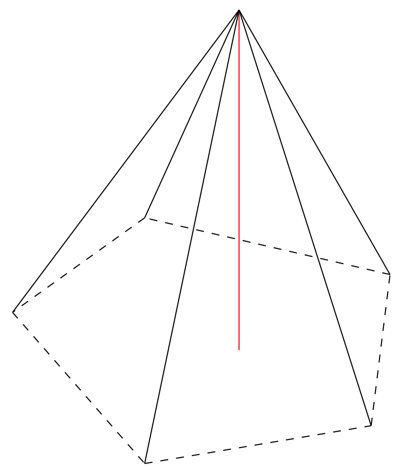

Figura 4.1: Representación gráfica del paraguas definido en el Teorema 4.11

.

Por último, y teniendo en cuenta que $r = \operatorname{sen}(\alpha)$ y que $\operatorname{sen}(\frac{3\pi}{5}) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$: [2]

$$r = \frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \frac{2}{\sqrt{5+\sqrt{5}}} \quad \Rightarrow \quad r^2 = \frac{4}{5+\sqrt{5}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$c^T u_i = \cos(\alpha) = \sqrt{1-r^2} = \frac{1}{\sqrt[4]{5}}.$$

Y, por tanto:

$$\vartheta(C_5) \underbrace{\leq}_{\text{Def 4.1}} \max_i \frac{1}{(c^T u_i)^2} = \sqrt{5}.$$

□

Corolario 4.12 ([7, Teorema 2])**.**

$$\Theta(C_5) = \vartheta(C_5) = \sqrt{5}.$$

Demostración. Sabemos que $\sqrt{5} \leq \Theta(C_5)$ se cumple por la observación que se hace tras el Teorema 3.9, $\Theta(C_5) \leq \vartheta(C_5)$ por el Teorema 4.8, y $\vartheta(C_5) \leq \sqrt{5}$ por el Teorema anterior (Teo 4.11). □

4.3. Fórmulas para el cálculo de $\vartheta(G)$

En esta sección veremos tres maneras alternativas de calcular la función ϑ. En todas ellas se obtiene ϑ como el valor óptimo de un invariante matricial, para matrices que satisfacen ciertas propiedades. Por el camino, incluimos la demostración del Teorema 4.3 enunciado en la Sección 4.1.

[2] Cálculo hecho con wolfram alpha: `https://www.wolframalpha.com/`

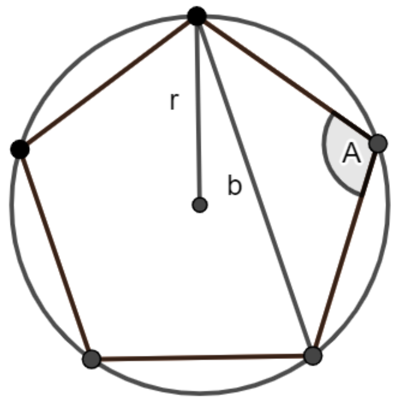

Figura 4.2: Perspectiva del paraguas visto desde arriba

Teorema 4.13 ([7, Teorema 3]). *Sea G un grafo con vértices $\{1, 2, ..., n\}$. Entonces $\vartheta(G)$ es el mínimo del valor propio más grande de cualquier matriz simétrica $(a_{ij})_{i,j=1}^n$ tal que*

$$a_{ij} = 1, \qquad \text{si } i = j \text{ o si } i \text{ y } j \text{ son no adyacentes.} \tag{4.1}$$

Demostración. 1) Primero vamos a ver cómo construir una matriz A en las condiciones del enunciado y con todos sus valores propios mayores o iguales que $\vartheta(G)$.

Sea $(u_1, u_2, ..., u_n)$ una representación óptima de G con mango c. Definimos:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= 1 - \frac{u_i^T u_j}{(c^T u_i)(c^T u_j)}, \qquad \text{con } i \neq j, \\ a_{ii} &= 1, \\ A &= (a_{ij})_{i,j=1}^n. \end{aligned}$$

Se puede comprobar fácilmente que (4.1) se satisface ya que:

- Si $i = j \Rightarrow a_{ii} = 1$ por definición.
- Si i y j son no adyacentes $\Rightarrow u_i^T u_j = 0$ por definición de representación ortonormal y por tanto $a_{ij} = 1$.

Además, vemos que se cumple que:

1. $$-a_{ij} = \left(c - \frac{u_i}{(c^T u_i)}\right)^T \left(c - \frac{u_j}{(c^T u_j)}\right), \qquad \text{con } i \neq j.$$
2. $$\vartheta(G) - a_{ii} = \left(c - \frac{u_i}{(c^T u_i)}\right)^2 + \left(\vartheta(G) - \frac{1}{(c^T u_i)^2}\right).$$

Puesto que:

1. $\left(c-\frac{u_i}{(c^Tu_i)}\right)^T\left(c-\frac{u_j}{(c^Tu_j)}\right)=c^Tc-c^T\frac{u_j}{(c^Tu_j)}-\frac{u_i^T}{(c^Tu_i)}c+\frac{u_i^Tu_j}{(c^Tu_i)(c^Tu_j)}=$
$=1-1-1+\frac{u_i^Tu_j}{.}(c^Tu_i)(c^Tu_j)=-a_{ij}.$
2. $\left(c-\frac{u_i}{(c^Tu_i)}\right)^2+\left(\vartheta(G)-\frac{1}{(c^Tu_i)^2}\right)=c^2+\frac{1}{(c^Tu_i)^2}-2\frac{(c^Tu_i)}{(c^Tu_i)}+\left(\vartheta(G)-\frac{1}{(c^Tu_i)^2}\right)=$
$=-1+\frac{1}{(c^Tu_i)^2}+\left(\vartheta(G)-\frac{1}{(c^Tu_i)^2}\right)=\vartheta(G)-a_{ii},$

Por el Lema 2.13, lo que necesitamos ver es que $\vartheta(G)I-A$ es una matriz semidefinida positiva. Definiendo

$$W=\left(c-\frac{u_1}{(c^Tu_1)},c-\frac{u_2}{(c^Tu_2)},\cdots,c-\frac{u_n}{(c^Tu_n)}\right),$$
$$D=diag\left(\vartheta(G)-\frac{1}{(c^Tu_1)^2},\vartheta(G)-\frac{1}{(c^Tu_2)^2},\cdots,\vartheta(G)-\frac{1}{(c^Tu_n)^2}\right).$$

podemos reescribir $\vartheta(G)I-A$ como:

$$\vartheta(G)I-A=W^TW+D,$$

lo cual demuestra que es semidefinida positiva:

- Sabemos que D es semidefinida positiva puesto que es una matriz diagonal con entradas positivas ya que $\vartheta(G)\geq\frac{1}{(c^Tu_i)^2}\quad\forall i\in\{1,2,...,n\}$
- Sabemos que W^TW es semidefinida positiva puesto que:
$$v^TW^TWv=(Wv)^T(Wv)=\|Wv\|^2\geq0,\quad\forall v\in\mathbb{R}^n.$$
- La suma de dos matrices semidefinidas positivas es semidefinida positiva.

2) Pasemos a ver el recíproco: si A es una matriz cualquiera con las hipótesis del enunciado, entonces algún valor propio de A es mayor o igual que $\vartheta(G)$.

Sea $A=(a_{ij})$ cualquier matriz que satisfaga (4.1) y λ su valor propio más grande. Entonces $\lambda I-A$ es semidefinida positiva por el Lema 2.13 y, por tanto, por el Lema 2.12 existen vectores $v_1,v_2,...,v_n$ tal que:
$$\lambda\delta_{ij}-a_{ij}=v_i^Tv_j.$$

Como $\lambda I-A$ no es regular, los v_i no generan $\mathbb{R}^n$. Sea c un vector unitario ortogonal a $v_1,v_2,...,v_n$, como la suma de los valores propios de A es igual a $tr(A)=n$, tenemos que $\lambda>0$ y podemos definir:
$$u_i=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}(c+v_i).$$

Por tanto

$$u_i^2 = \frac{1}{\lambda}(c^2 + v_i^2 + 2c^T v_i) = \frac{1}{\lambda}(1 + v_i^2) = \frac{1}{\lambda}(1 + \lambda - 1) = 1 \quad i = 1, 2, \cdots, n$$
$$u_i^T u_j = \frac{1}{\lambda}(c^2 + c^T v_j + v_i^T c + v_i^T v_j) = \frac{1}{\lambda}(1 + v_i^T v_j) = \frac{1}{\lambda}(1 + 0 - 1) = 0.$$

Y $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ constituye una representación ortonormal de G. Además,

$$(c^T u_i)^2 = \left(\frac{c^2 + c^T v_i}{\sqrt{\lambda}}\right)^2 = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{(c^T u_i)^2}.$$

Con lo que concluimos que: $\vartheta(G) \leq \lambda$.

□

Definición 4.14. *La* ***envolvente convexa*** *de un conjunto de puntos S de dimensión n es la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a S. La denotamos* conv(S). *Dados N puntos $p_1, p_2, \cdots, p_N$, su envolvente convexa se define por:*

$$C \equiv \left\{ \sum_{i=1}^{N} \alpha_i p_i : \alpha_i \in [0, \infty) \ \forall i, \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1 \right\}.$$

Donde además un conjunto se dice convexo si para cada par de puntos contenidos en él, el segmento que los une también está contenido en el conjunto.

Sean $(i_1, j_1), (i_2, j_2), \cdots, (i_m, j_m)$ con $(i_k < j_k)$ las aristas de un grafo G con n vértices. En el siguiente enunciado, para cada vector unitario $h = (h_1, h_2, \cdots, h_n)$ consideramos el siguiente vector de dimensión $(m + 1)$:

$$\hat{h} = \left(h_{i_1} h_{j_1}, h_{i_2} h_{j_2}, \cdots, h_{i_m} h_{j_m}, \left(\sum_{i=1}^{n} h_i \right)^2 \right)^T.$$

Sea $\hat{H}$ el conjunto de los posibles $\hat{h}$:

$$\hat{H} := \{\hat{h} : h \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^{m+1}.$$

Proposición 4.15. *Sea G un grafo de vértices $\{1, 2, \cdots, n\}$. Entonces el vector de dimensión $(m + 1)$:*

$$z = (0, 0, \cdots, \vartheta(G))^T$$

está en conv$(\hat{H})$.

Demostración. Por reducción al absurdo, supongamos que z no está en la envolvente convexa de los vectores $\hat{h}$.

Como el conjunto $\hat{H}$ es compacto, por el Lema de Farkas (ver Teorema 2.1 de [11]) existe un hiperplano que separa z de $\hat{H}$; es decir, existe un vector a y un número real α tal que $a^T\hat{h} \leq \alpha$ para todos los vectores h pero $a^T z > \alpha$. Tomamos:

$$a = (a_1, a_2, \cdots, a_m, y)^T.$$

En particular, para $h = (1, 0, \cdots, 0)$ obtenemos que $a^T\hat{h} \leq \alpha$ implica $y \leq \alpha$ y que $a^T z > \alpha$ implica $\vartheta(G)y > \alpha$. Esto lleva a

$$y < \vartheta(G)y,$$

y como $\vartheta(G) \geq 1$ se tiene que $y > 0$, por tanto:

$$y > 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha > 0.$$

En base a esto podemos suponer que $y = 1$ y así obtenemos que $\alpha < \vartheta(G)$.

Ahora, definimos la matriz $A = (b_{ij})_{i,j}$ con

$$b_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_k + 1, & \text{si } (i,j) = (i_k, j_k) \\ 1, & \text{para el resto} \end{cases}$$

Es decir,

$$A = J + \frac{1}{2}M(a),$$

donde M es una matriz que en le entrada (i,j) tiene un 0 si (i,j) no es arista y tiene a_k si $(i,j) = (i_k, j_k)$.

Entonces tenemos que:

$$h^T A h = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}h_i h_j = a^T\hat{h},$$

ya que:

$$h^T A h = h^T J h + \frac{1}{2}h^T M(a) h = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_i h_j + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \begin{cases} 0 & \text{si } i \text{ y } j \text{ son no vecinos} \\ \frac{a_k}{2} & \text{si } (i,j) = (i_k, j_k) \end{cases} =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} h_i\right)^2 + \sum_{k=1}^{m} a_k h_{i_k} h_{j_k} = \left(\sum_{i=1}^{n} h_i\right)^2 + \sum_{k=1}^{m} a_k \hat{h}_k = a^T\hat{h}.$$

Como $a^T\hat{h} \leq \alpha$ para todo vector unitario h y el valor propio más grande de A es igual a $\max\{h^T A h : |h| = 1\}$, esto implica que el valor propio más grande de A es, como mucho, α.

Además, A satisface (4.1), por lo que, por el Teorema 4.13, $\vartheta(G) \leq \alpha$, lo cual es una contradicción con que $\alpha < \vartheta(G)$.

$\square$

En el siguiente enunciado denotamos como J a la matriz $n \times n$ cuyas entradas son todas 1. Se tiene entonces que para toda matriz $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$ de ese tamaño,

$$Tr(BJ) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij}.$$

Teorema 4.16 ([7, Teorema 4]). *Sea G un grafo de vértices $\{1, 2, \cdots, n\}$. Entonces se cumple que:*

$$\vartheta(G) = \max_B Tr(BJ),$$

donde el máximo se toma sobre todas las matrices $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$ simétricas, semidefinidas positivas, con

$$Tr(B) = 1. \tag{4.2}$$

y tales que para cada par (i, j) de vértices adyacentes diferentes se tiene que:

$$b_{ij} = 0. \tag{4.3}$$

Demostración. 1) Comenzaremos estableciendo una desigualdad que nos servirá para la demostración.

Por el Teorema 4.13, existe una matriz $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ que satisface $a_{ij} = 1$ si i y j son no adyacentes o $i = j$, y cuyo valor propio más grande es $\vartheta(G)$.

Sea B una matriz simétrica y semidefinida positiva que satisface (4.3) y (4.2). Entonces se tiene que:

$$Tr(BJ) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \underbrace{=}_{(4.1)(4.3)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij} = Tr(AB).$$

Por tanto:

$$\vartheta(G) - Tr(BJ) = \vartheta(G) - Tr(AB) \underbrace{=}_{(4.2)} Tr(\vartheta(G)B - AB) = Tr(\vartheta(G)I - A)B.$$

Donde tanto $\vartheta(G)I - A$ como B son matrices semidefinidas positivas, B por el enunciado del teorema y $\vartheta(G)I - A$ por el Lema 2.13.

Ahora, por el Lema 2.11 sabemos que existe una base ortonormal de vectores propios de B: $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ con valores propios correspondientes $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \geq 0$ (por ser semidefinida positiva). Gracias a lo cual se cumple que:

$$Tr(\vartheta(G)I - A)B = \sum_{i=1}^n e_i^T(\vartheta(G)I - A)Be_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^T(\vartheta(G)I - A)e_i \underbrace{\geq}_{\text{Def 2.10, } \lambda_i \geq 0} 0.$$

2) A continuación vamos a construir una matriz B para la cual la desigualdad anterior sea una igualdad y por lo tanto consigamos que:

$$Tr(\vartheta(G)I - A)B = \vartheta(G) - Tr(BJ) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vartheta(G) = Tr(BJ).$$

Por la Proposición 4.15, z está en la envolvente convexa de los vectores $\hat{h}$ asociados a todos los vectores unitarios h. En base a la Definición 4.14 sabemos que existen un número finito de vectores unitarios $h_1, h_2, \cdots, h_N \in \mathbb{R}^n$ y números reales $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N \geq 0$ tales que

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N = 1, \tag{4.4}$$

$$\alpha_1 \hat{h}_1 + \alpha_2 \hat{h_2} + \cdots + \alpha_N \hat{h_N} = z = (0, 0, \cdots, \vartheta(G))^T. \tag{4.5}$$

Definimos la matriz $B = (b_{ij})$ que buscamos como:

$$B = \sum_{p=1}^{N} \alpha_p h_p h_p^T.$$

Es decir, llamando $h_{p,i}$ a la coordenada i de cada vector h_p,

$$b_{ij} = \sum_{p=1}^{N} \alpha_p h_{p,i} h_{p,j}.$$

Se tiene que B es simétrica y semidefinida positiva por construcción. Además, recordando el valor de $\hat{h}$:

$$\hat{h} = \left(h_{i_1} h_{j_1}, h_{i_2} h_{j_2}, \cdots, h_{i_m} h_{j_m}, \left(\sum_{i=1}^{n} h_i \right)^2 \right)^T,$$

y utilizando la ecuación (4.5) tenemos que:

$$b_{i_k j_k} = \sum_{p=1}^{N} \alpha_p h_{p,i_k} h_{p,j_k} = \sum_{p=1}^{N} \alpha_p \hat{h}_{p,k} = 0 \quad k = 1, 2, \cdots, m$$

y

$$Tr(BJ) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{p=1}^{N} \alpha_p h_{p,i} h_{p,j} = \sum_{p=1}^{N} \alpha_p \hat{h}_{i,m+1} = \vartheta(G).$$

Por otro lado, por la ecuación 4.4 sabemos que:

$$Tr(B) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{p=1}^{N} \alpha_p h_{p,i} h_{p,i} = \sum_{p=1}^{N} \alpha_p |h_p|^2 = \sum_{p=1}^{N} \alpha_p = 1.$$

Así queda el teorema queda demostrado. □

Podemos ya demostrar el Teorema 4.3 que enunciamos en la Sección 4.1:

Demostración del Teorema 4.3. 1) Por el Lema 4.9 ya sabemos que $\vartheta(G) \geq \max \sum_{i=1}^{n} (d^T v_i)^2$ se cumple.

2) Ahora, vamos a construir una representación ortonormal de $\overline{G}$ con un vector unitaro d que cumpla la igualdad.

Sea $B = (b_{ij})$ una matriz simétrica semidefinida positiva que alcanza el máximo en el Teorema 4.16. Es decir, B satisface (4.2) y (4.3) y $\vartheta(G) = Tr(BJ)$. Como B es una matriz semidefinida positiva, por el Lema 2.12 podemos escribir $B = W^T W$ y, llamando w_i a la columna i de W, tenemos que:

$$b_{ij} = w_i^T w_j. \tag{4.6}$$

Donde además, por la ecuación (4.2) y sabiendo que $\vartheta(G) = Tr(BJ)$, obtenemos, respectivamente:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i^2 = 1, \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} w_i\right)^2 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ij} = Tr(BJ) = \vartheta(G).$$

Si escribimos:

$$v_i = \frac{w_i}{|w_i|} \qquad d = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i\right) / \left|\sum_{i=1}^{n} w_i\right|.$$

Vemos que los vectores v_i forman una representación ortonormal de $\overline{G}$ por (4.6) y (4.3).

Por último, utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz [3] obtenemos:

$$\sum_{i=1}^{n}(d^T v_i)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}(d^T v_i)^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n}|w_i|(d^T v_i)\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} d^T w_i\right)^2 =$$
$$= \left(d\sum_{i=1}^{n} w_i\right)^2 \overset{*}{=} d^2\left(\sum_{i=1}^{n} w_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i\right)^2 = \vartheta(G),$$

donde la igualdad (*) se da porque los vectores d y $\sum_{i=1}^{n} w_i$ son proporcionales por definición de d.

Por lo que ya podemos concluir que:

$$\vartheta(G) = \max \sum_{i=1}^{n}(d^T v_i)^2.$$

□

Observemos que, como la desigualdad de Cauchy-Schwarz se da con igualdad, tenemos que los vectores $(w_1^2, w_2^2, \cdots, w_n^2)$ y $((d^T v_1)^2, (d^T v_2)^2, \cdots, (d^T v_n)^2)$ son proporcionales. Sea k la constante que cumple: $(d^T v_i)^2 = k w_i^2$. Entonces:

$$\vartheta(G) = \sum_{i=1}^{n}(d^T v_i)^2 = k(\sum_{i=1}^{n} w_i^2) \quad \Rightarrow \quad k = \vartheta(G).$$

Y podemos concluir con:

$$(dv_i)^2 = \vartheta(G) w_i^2 = \vartheta(G) b_{ii}. \tag{4.7}$$

[3] Se puede encontrar la demostración de la desigualdad de Cauchy-Schwarz en el artículo [13].

Teorema 4.17 ([7, Teorema 6]). *Se tiene que*

$$\vartheta(G) = \max_A \left\{ 1 - \frac{\lambda_1(A)}{\lambda_n(A)} \right\},$$

donde el máximo es sobre todas las matrices $A \neq 0$ que cumplen que $a_{ij} = 0$ si i, j son adyacentes en G o si $i = j$, y llamando $\lambda_1(A) \geq \lambda_2(A) \geq \cdots \lambda_n(A)$ a los valores propios de A.

Demostración. 1) Primero vamos a probar que $\vartheta(G) \geq 1 - \frac{\lambda_1(A)}{\lambda_n(A)}$.

Tomamos $A = (a_{i,j})$ una matriz cualquiera que cumpla las condiciones del enunciado. Como $a_{i,i} = 0$ para todo i, $Tr(A) = 0$ y por tanto $\lambda_1 < 0 < \lambda_n$. Sea $f = (f_1, f_2, \cdots, f_n)^T$ un vector propio con valor propio $\lambda_1(A)$, normalizado tal que $|f|^2 = \frac{-1}{\lambda_n(A)}$.

Consideramos las matrices $F = diag(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ y

$$B = F(A - \lambda_n(A)I)F.$$

Tenemos que B es semidefinida positiva. Además, $b_{ij} = 0$ si i y j son vértices adyacentes distintos ($i \neq j$) y se tiene que:

$$\begin{aligned} Tr(B) = Tr(F(A - \lambda_n(A)I)F) = Tr(FAF - \lambda_n(A)FF) = Tr(FAF) - \lambda_n(A)Tr(F^2) = \\ = -\lambda_n(A)Tr(F^2) = -\lambda_n(A)|f|^2 = -\lambda_n(A)\frac{-1}{\lambda_n(A)} = 1, \end{aligned}$$

donde usamos que

$$Tr(FAF) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} f_i^2 = 0,$$

porque la diagonal de A es 0.

Aplicando el Teorema 4.16:

$$\begin{aligned} \vartheta(G) \underbrace{\geq}_{\text{Teo 4.16}} Tr(BJ) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_i f_j - \lambda_n(A) \sum_{i=1}^{n} f_i^2 = \\ = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_1(A) f_i^2 - \lambda_n(A) f_i^2) = \lambda_1(A)\frac{-1}{\lambda_n(A)} - \lambda_n(A)\frac{-1}{\lambda_n(A)} = 1 - \frac{\lambda_1(A)}{\lambda_n(A)}. \end{aligned}$$

2) Sobre este apartado el artículo de Lovász dice solamente que "The fact that equality is attained here follows by a more or less straightforward inversion of this argument and is omitted". Sin embargo, no he conseguido desarrollar el argumento de la demostración.[4] □

[4] Hay otros lugares del artículo donde Lovász omite detalles diciendo que son "fáciles", y en ellos sí he conseguido rellenarlos con ayuda de mi tutor, pero en este no.

Corolario 4.18 ([7, Corolario 3])**.** *Sean* $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ *los valores propios de la matriz de adyacencia de un grafo* G*. Entonces:*

$$\chi(G) \geq 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_n}.$$

Donde $\chi(G)$ *es el número cromático de* G*.*

Demostración. Sea $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ una representación ortonormal de G y c un vector unitario que alcanzan la igualdad en el Teorema 4.3, y sean $J_1, J_2, \cdots, J_k$ las clases de colores en una k-coloración de G con $k = \chi(G)$. Entonces:

$$\vartheta(\overline{G}) = \sum_{i=1}^{n} (c^T u_i)^2 = \sum_{m=1}^{k} \sum_{i \in J_m} (c^T u_i)^2 \overset{*}{\leq} \sum_{m=1}^{k} 1 = k = \chi(G),$$

donde la desigualdad $(*)$ se sigue de que los u_i de los vectores del mismo color son ortonormales y c es unitario.

Ahora la matriz A de adyacencia de G cumple que $a_{ij} = 0$ si i y j son adyacentes en $\overline{G}$, por lo que, por el Teorema 4.17, obtenemos:

$$\chi(G) \geq \vartheta(\overline{G}) \underbrace{\geq}_{4.17} 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_n} \quad \Rightarrow \quad \chi(G) \geq 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_n}.$$

□

4.4. Más propiedades relevantes de $\vartheta(G)$

A continuación, haciendo uso de los resultados obtenidos en la sección anterior, veremos más propiedades relevantes asociadas al número de Lovász $\vartheta(G)$.

Teorema 4.19 ([7, Teorema 7])**.** $\vartheta(G \boxtimes H) = \vartheta(G)\vartheta(H)$.

Demostración. 1) Ya sabemos por el Lema 4.5 que $\vartheta(G \boxtimes H) \leq \vartheta(G)\vartheta(H)$.

2) Ahora veamos que se cumple $\vartheta(G \boxtimes H) \geq \vartheta(G)\vartheta(H)$.

Sean $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ y $(w_1, w_2, \cdots, w_n)$ representaciones ortonormales de $\overline{G}$ y $\overline{H}$ respectivamente, y sean c, d vectores unitarios que alcanzan la igualdad en el Teorema 4.3; es decir:

$$\sum_{i=1}^{n} (v_i^T c)^2 = \vartheta(G), \quad \sum_{i=1}^{m} (w_i^T d)^2 = \vartheta(H).$$

Como, por el Lema 2.16, $v_i \otimes w_j$ es una representación ortonormal de $\overline{G} \boxtimes \overline{H}$; y $\overline{G} \boxtimes \overline{H} \subseteq \overline{G \boxtimes H}$, por el lema 2.17 concluimos que $v_i \otimes w_j$ también es una representación normal de

$\overline{G \boxtimes H}$. Además, $c \otimes d$ es un vector unitario. Por lo que:

$$\vartheta(G \boxtimes H) \underbrace{\geq}_{\text{Teo 4.3}} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}((v_i \otimes w_j)^T(c \otimes d))^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(v_i^T c)^2(w_j^T d)^2 =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}(v_i^T c)^2 \sum_{j=1}^{m}(w_j^T d)^2 = \vartheta(G)\vartheta(H).$$

Así queda demostrado el teorema. □

Teorema 4.20 ([7, Teorema 8]). *Si G es un grafo cuyo grupo de automorfismos es transitivo por vértices, entonces:*

$$\vartheta(G)\vartheta(\overline{G}) = n.$$

Demostración. 1) Ya sabemos que $\vartheta(G)\vartheta(\overline{G}) \geq n$ por el Corolario 4.10.

2) Ahora veamos que $\vartheta(G)\vartheta(\overline{G}) \leq n$.

Sea Γ el grupo de automorfismos de G. Podemos considerar los elementos de Γ como matrices de permutación de tamaño $n \times n$.

Por el teorema 4.16 existe una matriz $B = (b_{ij})$ simétrica y semidefinida positiva, que satisface (4.3) y (4.2) y con $Tr(BJ) = \vartheta(G)$. Consideramos:

$$\overline{B} = (\overline{b_{ij}}) = \frac{1}{|\Gamma|}\left(\sum_{P \in \Gamma} P^{-1}BP\right).$$

La matriz $\overline{B}$ también satisface (4.3), ya que cada una de las permutaciones P mantiene la adyacencia de los vértices, y satisface (4.2) porque:

$$Tr(\overline{B}) = \frac{1}{|\Gamma|}Tr\left(\sum_{P \in \Gamma} P^{-1}BP\right) = \frac{1}{|\Gamma|}\sum_{P \in \Gamma} Tr(P^{-1}BP) = \frac{|\Gamma|}{|\Gamma|} = 1.$$

Como Γ es transitivo por vértices, tenemos que todos los elementos $\overline{b_{ii}}$ de la diagonal de $\overline{B}$ son iguales, es decir: $\overline{b_{ii}} = \frac{1}{n}, \forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

Además, $\overline{B}$ es simétrica semidefinida positiva por ser suma de matrices semidefinidas positivas.

Por último, se tiene que

$$Tr(\overline{B}J) = \frac{1}{|\Gamma|}\left(\sum_{P \in \Gamma} Tr((P^{-1}BP)J)\right) = \frac{1}{|\Gamma|}\left(\sum_{P \in \Gamma} Tr(BJ)\right) = \vartheta(G),$$

donde la segunda igualdad se sigue de que para una matriz arbitraria A, $Tr(AJ)$ es la suma de las entradas de A, y las entradas de B y de $P^{-1}BP$ son las mismas, solo que permutadas.

Es decir, $\overline{B}$ también es una matriz de las que alcanzan el máximo en el Teorema 4.16. Por tanto, a la matriz $\overline{B}$ le podemos aplicar la construcción de la demostración del Teorema 4.3 y obtener una representación ortonormal de $\overline{G}$ con vectores w_i, y un vector unitario d que satisfacen la Ecuación (4.7):

$$(dv_i)^2 = \vartheta(G)w_i^2 = \vartheta(G)b_{ii} = \vartheta(G)/n.$$

Aplicando la definición de $\vartheta(\overline{G})$:

$$\vartheta(\overline{G}) \leq \max_{1\leq i\leq n} \frac{1}{(d^T v_i)^2} = \frac{n}{\vartheta(G)},$$

y por tanto:

$$\vartheta(G)\vartheta(\overline{G}) \leq n.$$

Como queríamos demostrar.

□

Corolario 4.21 ([7, Corolario 4])**.** *Si G es un grafo con un grupo de automorfismos transitivo por vértices, entonces:*

$$\Theta(G)\Theta(\overline{G}) \leq n.$$

Demostración. Por el Teorema 4.8 y el Teorema 4.20 sabemos respectivamente que:

$$\Theta(G) \leq \vartheta(G) \quad \wedge \quad \vartheta(G)\vartheta(\overline{G}) = n,$$

por lo que concluimos que:

$$\Theta(G)\Theta(\overline{G}) \leq n.$$

□

Lema 4.22. *Sea G un grafo regular de grado d. Entonces, d es el valor propio más grande de su matriz de adyacencia. Si el grafo es conexo, tiene multiplicidad uno.*

Demostración. Sea A la matriz de adyacencia del grafo G. Como G es un grafo regular, todos sus vértices tienen el mismo grado d, por lo que, si llamamos $\mathbf{j}$ al vector cuyas coordenadas son todo unos y teniendo en cuenta que en cada fila de A tenemos d unos, obtenemos:

$$A\mathbf{j} = d\mathbf{j}.$$

Ahora veamos que para todo vector propio v de A que no sea múltiplo de $\mathbf{j}$ su valor propio es menor o igual que d, y que si el grafo es conexo el menor es estricto.

Consideramos $v = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ vector propio de A:

$$A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Sea v_i la coordenada más grande de v en valor absoluto; podemos suponer sin pérdida de generalidad que $v_i \geq 0$. Sea a_i la fila i-esima de A, que es un vector de unos o ceros, con d unos. Como sabemos que

$$a_i v = \lambda v_i,$$

tenemos que hay una suma de d de los v_j que da λv_i. Como $v_j \leq v_i$ para todo j, $\quad \Rightarrow \lambda \leq d$.

Además, para que se de la igualdad (para que $\lambda = d$) hace falta que todos los v_j que aparecen en la suma, es decir, los de de los vértices vecinos de i, sean todos iguales a v_i. Aplicando el argumento a esos vértices j, los vecinos de cada uno de ellos también tienen que tener coordenada igual a v_i, de modo que nos podemos ir moviendo por todo el grafo y tenemos que en v todas las coordenadas son iguales a v_i, es decir, v es múltiplo de $\mathbf{j}$.

□

Teorema 4.23 ([7, Teorema 9]). *Sea G un grafo regular, y sean $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ los valores propios de su matriz de adyacencia A. Entonces:*

$$\vartheta(G) \leq \frac{-n\lambda_n}{\lambda_1 - \lambda_n}.$$

Donde la igualdad se cumple si el grupo de automorfismos de G es transitivo por aristas.

Demostración. Llamamos d al grado del grafo regular G.

1) Primero vamos a demostrar que se cumple la desigualdad:

Consideramos la matriz $B = J - xA$, donde x es mayor que cero y se escogerá más adelante. Como B cumple la condición 4.1, el Teorema 4.13 nos dice que $\vartheta(G)$ es menor o igual que el valor propio más grande de B.

Sea v_i el vector propio asociado a cada valor propio λ_i de A. Entonces, como G es un grafo regular, $v_1 = d\mathbf{j}$, donde $\mathbf{j}$ es el vector de todo unos.

Cada v_i, $i = 2, \ldots, n$ es ortogonal a v_1. Por tanto, tiene suma de coordenadas igual a cero, es decir, es un autovector de J con autovalor cero. Como todos los autovectores de A son también autovectores de J, A y J se pueden diagonalizar a la vez y tenemos que cada v_i $(i \geq 2)$ es también un autovector de $J - xA$ con valor propio $-x\lambda_i$. Es decir, los valores propios de $J - xA$ son:

$$n - x\lambda_1, -x\lambda_2, \ldots, -x\lambda_n.$$

El más grande es o bien el primero o bien el último, dependiendo del valor de x. Si tomamos

$$x = \frac{n}{\lambda_1 - \lambda_n},$$

tenemos que el primero y el último coinciden y son iguales:

$$n - x\lambda_1 = \frac{n(\lambda_1 - \lambda_n) - n\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_n} = \frac{-n\lambda_n}{\lambda_1 - \lambda_n} = -x\lambda_n.$$

Y con esto ya queda probado que:

$$\vartheta(G) \leq \frac{-n\lambda_n}{\lambda_1 - \lambda_n}.$$

2) Ahora veamos cómo se cumple la igualdad si el grupo de automorfismos de G es transitivo por aristas.

Sea Γ el grupo de automorfismos transitivo por aristas de G y sea C una matriz simétrica que cumpla (4.1) y cuyo valor propio más grande es $\vartheta(G)$.

De igual manera que en la demostración del Teorema 4.20, consideramos:

$$\overline{C} = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{P \in \Gamma} P^{-1}CP.$$

Por lo que $\overline{C}$ también satisface (4.1) y por el Teorema 4.13, se tiene que $\vartheta(G)$ es menor o igual que el valor propio más grande de $\overline{C}$.

Por otro lado, el valor propio más grande de $\overline{C}$ es como mucho igual al valor propio más grande de C porque el valor propio más grande de una suma de matrices no puede ser más grande que el máximo de los sumandos. Por tanto, el valor propio más grande de $\overline{C}$ sigue siendo $\vartheta(G)$.

Por otro lado, $\overline{C}$ es de la forma $J - xA$. Esto es porque C tenía un 1 en cada entrada que no sea arista y números arbitrarios en las que son aristas. Eso hace que en $\overline{C}$ los unos sigan siendo unos y el resto sean todos iguales. Se tiene por tanto que:

$$\vartheta(G) = \frac{-n\lambda_n}{\lambda_1 - \lambda_n}.$$

□

Proposición 4.24. *Si G es un grafo d-regular con n vértices y con autovalores*

$$d = \lambda_1 > \lambda_2 > \ldots, \lambda_n,$$

los autovalores de $\overline{G}$ son

$$n - d - 1, -\lambda_n - 1, \ldots, -\lambda_2 - 1.$$

Demostración. Consideremos la matriz de adyacencia A de G. Entonces la matriz de $\overline{G}$ es $J - (I + A)$.

Los autovectores de A son también autovectores de $I + A$ con autovalor una unidad más grande, ya que

$$(A + I)v = Av + v = \lambda v + v = (\lambda 1)v.$$

Por tanto, los autovalores de $J - (A + I)$ se obtienen tomando $x = 1$ en la demostración anterior, y el resultado es lo que dice el enunciado. □

Corolario 4.25 ([7, Corolario 5])**.** *Sea n un número impar, entonces:*

$$\vartheta(C_n) = \frac{n\ cos(\pi/n)}{1 + cos(\pi/n)}.$$

Demostración. Los valores propios de un ciclo C_n son [4, p.172]:

$$e^{2\pi ji/n} + e^{-2\pi ji/n} = 2\cos(2\pi j/n), \quad j = 0, \ldots, n-1.$$

El mayor es siempre 2, por ser regular de grado dos, y el menor es -2 en el caso par y $-2\cos(\pi/n)$ en el caso impar. Por tanto,

$$\vartheta(C_n) = \frac{-n\lambda_n}{\lambda_1 - \lambda_n} = \frac{2n\cos(\pi/n)}{2 + 2\cos(\pi/n)}.$$

□

Como observación, en el caso par la misma demostración nos da $\vartheta(C_n) = 2n/4 = n/2$.

4.5. Aplicaciones de $\vartheta(G)$ para calcular la capacidad de Shannon

En esta sección veremos diferentes métodos para calcular la capacidad de Shannon de grafos distintos al pentágono con ayuda del número de Lovász $\vartheta(G)$.

Teorema 4.26 ([7, Teorema 12])**.** *Si G es un grafo con un grupo de automorfismos transitivo por vértices, entonces*

$$\alpha(G \boxtimes \overline{G}) = \theta(G \boxtimes \overline{G}) = \Theta(G \boxtimes \overline{G}) = |V(G)|.$$

Si, además, G es autocomplementario, entonces $\vartheta(G) = \Theta(G) = \sqrt{|V(G)|}$.

Demostración. 1) Veamos que la diagonal en la matriz que forma $G \boxtimes \overline{G}$ es independiente. Dados $u \neq v$ dos vértices cualesquiera de G, tenemos que (u, u) no es adyacente a (v, v) en $G \boxtimes \overline{G}$. Si lo fuesen, por definición de producto fuerte (Definición 2.8) u y v deberían ser adyacentes en G y en $\overline{G}$ pero esto es imposible.

Por tanto:

$$\Theta(G \boxtimes \overline{G}) \underbrace{\geq}_{\text{Teo 3.9}} \alpha(G \boxtimes \overline{G}) \geq |V(G)|.$$

Por otro lado tenemos que:

$$\Theta(G \boxtimes \overline{G}) \underbrace{\leq}_{\text{Teo 4.8}} \vartheta(G \boxtimes \overline{G}) \underbrace{=}_{\text{Teo 4.19}} \vartheta(G)\vartheta(\overline{G}) \underbrace{=}_{\text{Teo 4.20}} |V(G)|.$$

Así que concluimos que $\Theta(G \boxtimes \overline{G}) = |V(G)|$.

2) Si, además, G es autocomplementario, entonces:

$$|V(G)| = \Theta(G \boxtimes \overline{G}) = \Theta(G^2) \underbrace{=}_{\text{Def 3.1}} \Theta(G)^2 \quad \Rightarrow \quad \Theta(G) = \sqrt{|V(G)|}.$$

Y, teniendo en cuenta lo que vimos en el apartado anterior:

$$|V(G)| = \vartheta(G)\vartheta(\overline{G}) = \vartheta(G)^2 \quad \Rightarrow \quad \vartheta(G) = \sqrt{|V(G)|}.$$

Por lo que concluimos que:

$$\vartheta(G) = \Theta(G) = \sqrt{|V(G)|}.$$

□

Observación 4.27. *El grafo C_5 es un caso particular del Teorema anterior, ya que es transitivo por vértices y autocomplementario, por lo que se demuestra de otra forma que su capacidad de Shannon es $\sqrt{5}$:*

$$\Theta(C_5) = \vartheta(C_5) = \sqrt{5}.$$

Como aplicación de estos resultados, Lovász calcula la **capacidad de Shannon de los grafos de Knesser**.

Se llama Grafo de Knesser de parámetros n y r con $n \geq 2r$ (denotado $K(n,r)$) al grafo cuyos vértices son los subconjuntos de tamaño r de un conjunto S con n elementos, donde dos subconjuntos son adyacentes si son disjuntos. Por ejemplo, el grafo $K(5,2)$ es el famoso Grafo de Petersen (ver Figura 2.2).

A continuación, enunciamos este teorema sin su demostración:

Teorema 4.28 ([7, Teorema 13])**.**

$$\Theta(K(n,r)) = \binom{n-1}{r-1}.$$

En particular:

Corolario 4.29 ([7, Corolario 6])**.** *El grafo de Petersen, el cual es isomorfo a $K(5,2)$ tiene Capacidad de Shannon igual a cuatro, es decir, $\Theta(K(5,2)) = 4$.*

Por otro lado, se puede usar el Teorema 4.28 para dar una demostración del siguiente Teorema de Erdös-Ko-Rado [2].

Teorema 4.30 (Erdös-Ko-Rado [2], [7, Corolario 7])**.** *Sea S un conjunto de tamaño n, el número máximo de subconjuntos de S de tamaño r que se puede hacer de modo que no haya dos disjuntos es:*

$$\binom{n-1}{r-1}$$

Obsérvese que el número que se busca en el enunciado es $\alpha(K(n,r))$.

Demostración. 1) Si se toma un elemento fijo de S y se consideran todos los subconjuntos que contienen a ese elemento, obtenemos:

$$\binom{n-1}{r-1} \quad \text{subconjuntos.}$$

Por lo que:

$$\alpha(K(n,r)) \geq \binom{n-1}{r-1}.$$

2) Ahora, utilizando el Teorema 3.9 y el Teorema 4.28:

$$\binom{n-1}{r-1} \leq \alpha(K(n,r)) \underbrace{\leq}_{\text{Teo 3.9}} \Theta(K(n,r)) \underbrace{=}_{\text{Teo 4.28}} \binom{n-1}{r-1}. \qquad \square$$

Capítulo 5

Resultados recientes sobre la capacidad de Shannon de grafos fuertemente regulares

En este capítulo mostraremos algunas propiedades y teoremas recientemente descubiertos sobre la Capacidad de Shannon de un grafo en los cuales se hace uso también de la función $\vartheta(G)$ de Lovász.

Los resultados de este capítulo se han obtenido del artículo *Observations on Graph Invariants with the Lovász ϑ - Function* de Igal Sason [10]. Básicamente, se trata de extender algunos de los resultados de Lovasz sobre grafos con grupo de simetrías transitivo por vértices a grafos fuertemente regulares, que se definen como sigue:

Definición 5.1. *Dados números enteros positivos v, k, λ, μ, decimos que un grafo es* ***fuertemente regular*** *de tipo $srg(n, d, \lambda, \mu)$ si tiene n vértices, es regular de grado d y posee las siguientes propiedades:*

1) Para cualquier par de vértices adyacentes x, y hay exactamente λ vértices adyacentes a x e y a la vez.

2) Para cualquier par de vértices no adyacentes x, y hay exactamente μ vértices adyacentes a x e y a la vez.

Como ejemplo de grafo fuertemente regular podemos mencionar el grafo de Paley, ver Figura 5.1, o el grafo de Petersen 2.2, que es un srg(10,3,0,1).

El parámetro λ puede ser cero (como ocurre en el grafo de Petersen) pero μ pdemos suponer que es distinto de cero porque los únicos grafos fuertemente regulares con $\mu = 0$ son los gafos completos (o uniones disjuntas de ellos). Obsérvese que, en particular, saber que $\mu > 0$ implica que el grafo es conexo: si dos vértices no son vecinos tienen al menos un vecino común.

Lo sisguientes resultados sobre grafos fuertemente regulares son clásicos. El primero nos

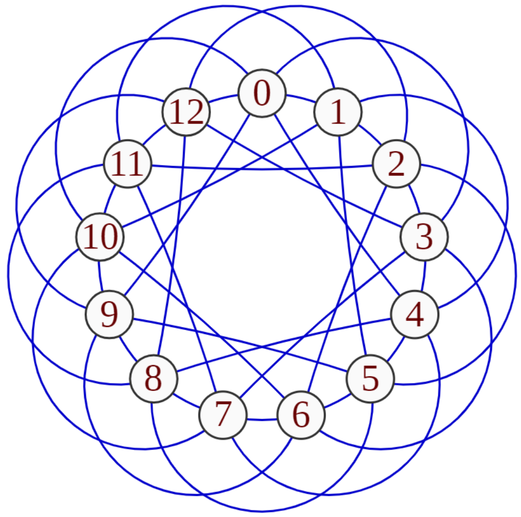

Figura 5.1: Grafo Paley fuertemente regular con parámetros srg(13, 6, 2, 3) (fuente: Wikipedia).

dice que los parámetros n, d, μ, λ no son independientes, y el segundo que el espectro de un grafo fuertemente regular está determinado por los parámetros:

Lema 5.2 ([4, Ecuación (10.1)])**.** *En un grafo fuertemente regular se cumple que:*

$$\mu(n - d - 1) = d(d - \lambda - 1).$$

Demostración. Para empezar, cada vértice x tiene d vértices vecinos, por lo que en total tiene $n - d - 1$ vértices no vecinos.

La demostración consiste en contar de dos maneras distintas el número de aristas que van desde un vecino de x a un no vecino de x.

En primer lugar, cada uno de los d vecinos de x es adyacente a x y a λ vecinos de x y por lo tanto es adyacente a $d - \lambda - 1$ no vecinos de x. En total tenemos una cantidad de $d(d - \lambda - 1)$ aristas.

En segundo lugar, cada uno de los $n - d - 1$ no vecinos de x es adyacente a μ vértices vecinos de x. Por lo que, en total, tenemos $\mu(n - d - 1)$ aristas.

Concluimos así:

$$\mu(n - d - 1) = d(d - \lambda - 1).$$

$\square$

Lema 5.3 ([4, Sección 10.2])**.** *Un grafo fuertemente regular $srg(n, d, \lambda, \mu)$ tiene tres autovalores:*

$$\lambda_1(G) = d, \text{ con multiplicidad uno.}$$
$$\lambda_2(G) = \cdots = \lambda_p(G) = \frac{1}{2}\left(\lambda - \mu + \sqrt{(\lambda-\mu)^2 + 4(d-\mu)}\right).$$
$$\lambda_{p+1}(G) = \cdots = \lambda_n(G) = \frac{1}{2}\left(\lambda - \mu - \sqrt{(\lambda-\mu)^2 + 4(d-\mu)}\right).$$

Demostración. Sea A la matriz de adyacencia de un grafo fuertemente regular $srg(n, d, \lambda, \mu)$. La entrada ij de la matriz A^2 es el número de pasos de longitud dos desde el vértice i al vértice j. En un grafo fuertemente regular, este número está determinado por la adyacencia de i y j (si i y j son adyacentes, iguales, o distintos y no adyacentes). En consecuencia, obtenemos la ecuación:

$$A^2 = dI + \lambda A + \mu(J - I - A) \Rightarrow A^2 - (\lambda-\mu)A - \mu J - (d-\mu)I = 0.$$

Como todo autovector de A lo es también de A^2, de J y de I, los autovalores λ_i de A distintos de d tienen que cumplir la ecuación:

$$\lambda_i^2 - (\lambda-\mu)\lambda_i - \mu 0 - (d-\mu) = 0.$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado obtenemos lo que queríamos demostrar:

$$\lambda_i = \frac{1}{2}(\lambda - \mu \pm \sqrt{(\lambda-\mu)^2 + 4(d-\mu)}.$$

□

Corolario 5.4. $\lambda_2(G) + \lambda_n(G) = \lambda - \mu, \qquad \lambda_2(G)\lambda_n(G) = \mu - d.$

Para estudiar la función θ de uns grafos fuertemente regulares, primero damos unas cotas que valen para todos los regulares

Lema 5.5. *Si G es un grafo regular con n vértices y de grado d entonces*

$$\frac{n-d+\lambda_2(G)}{1+\lambda_2(G)} \leq \vartheta(G) \quad y \quad \vartheta(\overline{G}) \leq \frac{n(1+\lambda_2(G))}{n-d+\lambda_2(G)}.$$

Demostración. Por el Teorema 4.10, sabemos que para todo grafo G:

$$\vartheta(G)\vartheta(\overline{G}) \geq n.$$

Ahora, como $\overline{G}$ también es regular, aplicando el Teorema 4.23 y sustituyendo sus autovalores por los de la Proposición 4.24, tenemos que:

$$\vartheta(\overline{G}) \underbrace{\leq}_{\text{Teo 4.23}} -\frac{n\lambda_n(\overline{G})}{\lambda_1(\overline{G}) - \lambda_n(\overline{G})} \underbrace{=}_{\text{Prop 4.24}} -\frac{n(-1-\lambda_2(G))}{n-d-1-(-1-\lambda_2(G))} = \frac{n(1+\lambda_2(G))}{n-d+\lambda_2(G)}.$$

Por tanto,

$$\vartheta(G) \geq \frac{n}{\vartheta(\overline{G})} \geq \frac{n-d+\lambda_2(G)}{1+\lambda_2(G)}.$$

□

Lema 5.6. *Si G es un grafo regular, entonces:*

$$1 - \frac{\lambda_1(G)}{\lambda_n(G)} \leq \vartheta(\overline{G}).$$

Demostración. Por el Teorema 4.10, sabemos que para todo grafo G:

$$\vartheta(G)\vartheta(\overline{G}) \geq n.$$

A su vez, como G es regular, por el Teorema 4.23:

$$\vartheta(G) \leq -\frac{n\lambda_n(G)}{\lambda_1(G)-\lambda_n(G)},$$

por lo que:

$$\vartheta(\overline{G}) \geq \frac{n}{\vartheta(G)} = \frac{\lambda_1(G)-\lambda_n(G)}{-\lambda_n(G)} = 1 - \frac{\lambda_1(G)}{\lambda_n(G)}.$$

□

Lema 5.7 ([10, Corolario 3.4])**.** *Sea G un grafo con n vértices transitivo por vértices o fuertemente regular, entonces:*

$$\vartheta(G)\vartheta(\overline{G}) = n.$$

Demostración. 1) Si G es un grafo transitivo por vértices, la demostración es la del Teorema 4.20.

2) Si G es un grafo fuertemente regular, entonces:

Como G y $\overline{G}$ son grafos regulares, por el Lema 5.5, el Lema 5.6 y por El Teorema 4.23, tenemos que:

$$\frac{n-d+\lambda_2(G)}{1+\lambda_2(G)} \underbrace{\leq}_{\text{Lema 5.5}} \vartheta(G) \underbrace{\leq}_{\text{Teo 4.23}} \frac{-n\lambda_n(G)}{\lambda_1(G)-\lambda_n(G)}. \tag{5.1}$$

$$1 - \frac{\lambda_1(G)}{\lambda_n(G)} \underbrace{\leq}_{\text{Lema 5.6}} \vartheta(\overline{G}) \underbrace{\leq}_{\text{Lema 5.5}} \frac{n(1+\lambda_2(G))}{n-d+\lambda_2(G)}. \tag{5.2}$$

Ahora vamos a demostrar que tanto en la ecuación (5.1) como en la ecuación (5.2) ambas cotas son iguales [1], es decir:

$$\begin{aligned} & (n-d+\lambda_2(G))(\lambda_1(G)-\lambda_n(G)) = (1+\lambda_2(G))(-n\lambda_n(G)) \\ \Rightarrow \quad & (n-d+\lambda_2(G))(\lambda_1(G)-\lambda_n(G)) - (1+\lambda_2(G))(-n\lambda_n(G)) = 0. \end{aligned}$$

Como sabemos los autovalores de G por el Lema 5.3, operando:

$$\begin{aligned} & nd-d^2+d(\lambda_2(G)+\lambda_n(G))+(n-1)(\lambda_2(G)\lambda_n(G)) = \\ & = nd-d^2+d(\lambda-\mu)+(n-1)(\mu-d) = \\ & = -d(d-\lambda-1)+\mu(n-d-1) \underbrace{=}_{\text{Lema 5.2}} 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, hemos obtenido la igualdad y podemos concluir con que:

$$\vartheta(G)\vartheta(\overline{G}) = \left(\frac{n-d+\lambda_2(G)}{1+\lambda_2(G)}\right)\left(\frac{n(1+\lambda_2(G))}{n-d+\lambda_2(G)}\right) = n. \qquad \square$$

Teorema 5.8 ([10, Teorema 3.26(1)]). *Sea G un grafo con n vértices, si G es transitivo por vértices o fuertemente regular, entonces*

$$\alpha(G \boxtimes \overline{G}) = \Theta(G \boxtimes \overline{G}) = \vartheta(G \boxtimes \overline{G}) = n.$$

Demostración. 1) De nuevo, el caso transitivo por vértices lo demostró Lovász (Teorema 4.26).

2) Para un grafo G fuertemente regular, la demostración en realidad es la misma, una vez que tenemos el Lema 5.7:

Como sabemos que $\{(1,1),(2,2),\cdots,(n,n)\}$ es un conjunto independiente de $G \boxtimes \overline{G}$, entonces

$$n \leq \alpha(G \boxtimes \overline{G}).$$

Por lo que tenemos:

$$n \leq \alpha(G \boxtimes \overline{G}) \underbrace{\leq}_{\text{Lema 4.6}} \Theta(G \boxtimes \overline{G}) \underbrace{\leq}_{\text{Teo 4.8}} \vartheta(G \boxtimes \overline{G}) \underbrace{=}_{\text{Teo 4.19}} \vartheta(G)\vartheta(\overline{G}) \underbrace{=}_{\text{Lema 5.7}} n.$$

Y concluimos con lo que queríamos demostrar:

$$\alpha(G \boxtimes \overline{G}) = \Theta(G \boxtimes \overline{G}) = \vartheta(G \boxtimes \overline{G}) = n.$$

$\square$

[1] La demostración de la igualdad de estas cotas se ha obtenido de la Proposición 1 del artículo [9].

Teorema 5.9 ([10, Teorema 3.26(4)]). *Si un grafo autocomplementario G con n vértices es transitivo por vértices o fuertemente regular, entonces*

$$\Theta(G) = \sqrt{n} = \vartheta(G),$$

$$\sqrt{\alpha(G \boxtimes G)} = \Theta(G).$$

Demostración. Si un grafo autocomplementario G con n vértices es transitivo por vértices o fuertemente regular, entonces:

$$n \underbrace{=}_{\text{Teo 5.8}} \vartheta(G \boxtimes \overline{G}) \underbrace{=}_{\text{Teo 4.19}} \vartheta(G)\vartheta(\overline{G}) = \vartheta(G)^2 \quad \Rightarrow \quad \vartheta(G) = \sqrt{n}.$$

Por otro lado, tenemos que

$$\Theta(G) \geq \sqrt{\alpha(G \boxtimes G))} = \sqrt{\alpha(G \boxtimes \overline{G})} \underbrace{=}_{\text{Teo 5.8}} \sqrt{n},$$

donde la primera desigualdad es por definición de Θ (Def 3.1) mientras que la primera igualdad es por ser G autocomplementario.

Juntando ambas condiciones, obtenemos:

$$\sqrt{n} \leq \Theta(G) \underbrace{\leq}_{\text{Teo 4.8}} \vartheta(G) = \sqrt{n} \quad \Rightarrow \quad \Theta(G) = \sqrt{n} = \vartheta(G).$$

Y por lo tanto:

$$\sqrt{\alpha(G \boxtimes G)} = \sqrt{n} = \Theta(G).$$

Como queríamos demostrar. $\square$

Bibliografía

[1] Martin Aigner, Günter M. Ziegler, *El libro de las demostraciones*, Nivola, 2004. (Traducción de Lourdes Figueiras, Julian Pfeifle y Pedro A. Ramos).

[2] Paul Erdős, Chao Ko, Richard Rado, *Intersection theorems for systems of finite sets*, The Quarterly Journal of Mathematics, Volume 12, Issue 1, 1961, Pages 313–320.

[3] Ujué Etayo, *Álgebra Lineal 2* (notas del curso 2021-22), Universidad de Cantabria, 2021-2022.

[4] Chris Godsil, Gordon Royle, *Algebraic Graph Theory*, Graduate Texts in Mathematics 207, Springer (2001).

[5] Jacobus H. van Lint, Richard M. Wilson, *A course in Combinatorics*, Cambridge University Press, 2a edición, 2001.

[6] László Lovász, *Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture*, Discrete Mathematics, Volume 2, Issue 3, 1972, Pages 253-267, ISSN 0012-365X.

[7] László Lovász, *On the Shannon Capacity of a Graph*, IEEE Transactions on Information Theory, 25:1, (1979), 1–7.

[8] Siobhan Roberts, *The Forgotten Father of the Information Age*. The New Yorker, April 30, 2016. ISSN 0028-792X. Retrieved September 28, 2023. `https://www.newyorker.com/tech/annals-of-technology/claude-shannon-the-father-of-the-information-age-turns-1100100`

[9] Igal Sason, *Observations on the Lovász ϑ-function, graph capacity, eigenvalues, and strong products*, Entropy 2023, 25(1), paper 104; doi:10.3390/e25010104.

[10] Igal Sason, *Observations on Graph Invariants with the Lovász ϑ- Function*, AIMS Mathematics 2024, Volume 9, Issue 6: pp. 15385–15468. doi:10.3934/math.2024747. Preprint también disponible en `https://arxiv.org/abs/2310.19169`.

[11] Anders Schrijver, *A Course in Combinatorial Optimization*, University of Amsterdam, 2017. Disponible online en `https://homepages.cwi.nl/~lex/files/dict.pdf`

[12] Claude Shannon, *The zero error capacity of a noisy channel*, in IRE Transactions on Information Theory, vol. 2, no. 3, pp. 8-19, September 1956, doi:10.1109/TIT.1956.1056798.

[13] Hui-Hua Wu y Shanhe Wu, *Various proofs of the Cauchy-Schwarz inequality*, Octogon Math. Mag., 17 (2009), no. 1, 221–229.