

# ESTUDIO DE LA PROPAGACIÓN ELECTROMAGNÉTICA EN GUÍA DE ONDA RECTANGULAR PARCIALMENTE LLENA DE MEDIOS BI-ISÓTROPAS

Álvaro Gómez  
Dpto. Ing. de Comunicaciones  
Universidad de Cantabria  
e-mail: gomezal@unican.es

Miguel A. Solano  
Dpto. Ing. de Comunicaciones  
Universidad de Cantabria  
e-mail: solanom@unican.es

Angel Vegas  
Dpto. Ing. de Comunicaciones  
Universidad de Cantabria  
e-mail: vegasa@unican.es

**Abstract**—This paper reviews the different formulations of the coupled mode method (CMM) that have been used in the literature for computing the propagation constants and the electromagnetic field in uniform waveguides in the propagation direction. These formulations are the EH-indirect and EH-direct formulations. We outline the main characteristics of these formulations and point out the reasons underlying their accuracy. The results of both formulations are compared and it is found that the EH-indirect formulation gives better results than the EH-direct one for rectangular waveguides partially loaded with bi-isotropic media. When the EH-indirect or EH-direct formulations of the CMM are combined with the classical Mode Matching Method (MMM) a hybrid technique is obtained that is capable of solving three dimensional (3D) discontinuities without restriction in number. The results of the generalized scattering matrix for the two formulations are compared and it is concluded that the indirect formulation gives more accurate results than the direct formulation.

## I. INTRODUCCIÓN

El problema de propagación del campo electromagnético en el interior de una guía de onda rectangular parcialmente llena con un medio bi-isótropo carece de solución analítica, por lo que es necesario utilizar un método semi-analítico o numérico en un caso general. Uno de los métodos utilizado para resolver este problema es el método de modos acoplados (MMA), que en la literatura también es referenciado como el método de Schelkunoff [1]. El objetivo del MMA es obtener el campo electromagnético y las constantes de propagación en una guía de onda uniforme en la dirección de propagación de la energía. En los diferentes trabajos publicados sobre el MMA, se han presentado diversas formulaciones de este método, aunque con frecuencia, no se han justificado las razones por las que se elige una u otra formulación. A nuestro entender, resulta útil conocer las condiciones que determinan la aplicación, precisión y limitaciones de las diferentes formulaciones del MMA.

El propósito de esta comunicación consiste en analizar las diferentes formulaciones del MMA con el fin de determinar las razones por las que una formulación o la otra trabajan mejor o peor. Finalmente, se describirán los pasos esenciales

del MMA el cual, combinado con una formulación común del método de adaptación modal (MAM), nos da una herramienta híbrida para analizar discontinuidades tridimensionales (3D) en guías de onda rectangulares.

## II. FORMULACIONES DEL MMA

El MMA es un método de momentos en el que las funciones incógnita son las componentes del campo electromagnético de la guía a analizar y las funciones base son las componentes del campo electromagnético de una guía similar pero vacía. Las expresiones en funciones de los potenciales T son [1]

$$E_x = \sum_{q=1}^{nte} V_{[q]} \frac{\partial T_{[q]}}{\partial y} + \sum_{p=1}^{ntm} V_{(p)} \frac{\partial T_{(p)}}{\partial x}, \quad (1)$$

$$E_y = -\sum_{q=1}^{nte} V_{[q]} \frac{\partial T_{[q]}}{\partial x} + \sum_{p=1}^{ntm} V_{(p)} \frac{\partial T_{(p)}}{\partial y}, \quad (2)$$

$$H_x = \sum_{q=1}^{nte} I_{[q]} \frac{\partial T_{[q]}}{\partial x} - \sum_{p=1}^{ntm} I_{(p)} \frac{\partial T_{(p)}}{\partial y}, \quad (3)$$

$$H_y = \sum_{q=1}^{nte} I_{[q]} \frac{\partial T_{[q]}(x, y)}{\partial y} + \sum_{p=1}^{ntm} I_{(p)} \frac{\partial T_{(p)}}{\partial x}, \quad (4)$$

$$E_z = \sum_{p=1}^{ntm} k_{c(p)} V_{(p)}^z T_{(p)}, \quad (5)$$

$$H_z = \sum_{q=1}^{nte} k_{c[q]} I_{[q]}^z T_{[q]} + H_0, \quad (6)$$

donde  $V$ 's (voltios) e  $I$ 's (amperios) son los coeficientes de los desarrollos y  $k_{c(i)}$  y  $k_{c(j)}$  son los números de onda de corte de los modos base. Los corchetes se refieren a los modos  $TE$  y los paréntesis a los modos  $TM$ . Además,  $i$  y  $j$  son los subíndices que representan el doble subíndice nm habitual. Las expresiones de los potenciales vienen dadas por:

### Modos $TE$

$$T_{[n,m]}(x,y) = \frac{\eta_{[n,m]}}{k_{c[n,m]}\sqrt{ab}} \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right), \quad (7)$$

$$n, m = 0, 1, 2, \dots \text{ con } n = m \neq 0,$$

### Modos $TM$

$$T_{(n,m)}(x,y) = \frac{\eta_{(n,m)}}{k_{c(n,m)}\sqrt{ab}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right), \quad (8)$$

$$n, m = 1, 2, 3, \dots$$

siendo

$$\eta_{[n,m]} = \begin{cases} 2 & \text{si } n \neq 0 \text{ y } m \neq 0 \\ \sqrt{2} & \text{si } n = 0 \text{ ó } m = 0 \end{cases}. \quad (9)$$

Sustituyendo (1)–(6) en las componentes  $x$  e  $y$  de las ecuaciones de Maxwell en forma rotacional, y aplicando el método de Galerkin, se obtienen las ecuaciones del Telegrafista generalizadas [1]

$$\frac{dV_{[n]}}{dz} = j\omega \int_s \left( B_x \frac{\partial T_{[n]}}{\partial y} - B_y \frac{\partial T_{[n]}}{\partial x} \right) ds + k_{c(n)} V_{[n]}^z, \quad (10)$$

$$\frac{dV_{[m]}}{dz} = -j\omega \int_s \left( B_x \frac{\partial T_{[m]}}{\partial x} + B_y \frac{\partial T_{[m]}}{\partial y} \right) ds, \quad (11)$$

$$\frac{dI_{[n]}}{dz} = -j\omega \int_s \left( D_x \frac{\partial T_{[n]}}{\partial x} + D_y \frac{\partial T_{[n]}}{\partial y} \right) ds, \quad (12)$$

$$\frac{dI_{[m]}}{dz} = -j\omega \int_s \left( D_x \frac{\partial T_{[m]}}{\partial y} - D_y \frac{\partial T_{[m]}}{\partial x} \right) ds + k_{c[m]} I_{[m]}^z, \quad (13)$$

Para obtener las ecuaciones que proporcionan las relaciones entre la derivada respecto a la coordenada  $z$  de los coeficientes y los propios coeficientes, hay que realizar dos tareas. La primera es expresar las componentes de los campos en función de los potenciales  $T$ , lo cual se puede conseguir a partir de las relaciones de constitución del medio material, que para medios bi-isótropos son [3]–[4]

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} + (\chi - j\kappa) \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \vec{H}, \quad (14)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} + (\chi + j\kappa) \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \vec{E}, \quad (15)$$

donde  $\varepsilon$  es la permitividad,  $\mu$  es la permeabilidad,  $\kappa$  es el parámetro de Pasteur y  $\chi$  es el parámetro de Tellegen o de no reciprocidad. Sustituyendo (1)–(4) en (14) y (15), las componentes transversales de  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  se pueden expresar en función de las funciones  $T$ . La segunda tarea consiste en expresar las amplitudes de las componentes longitudinales de los campos  $E_z$  y  $H_z$  a partir de las amplitudes de las componentes transversales. Para ello se pueden seguir dos estrategias (o formulaciones) que se describen a continuación.

### II-A. Estrategia directa (EHD)

La forma más intuitiva de encontrar las relaciones buscadas, es obtener  $E_z$  y  $H_z$  a partir de  $D_z$  y  $B_z$ . Usando (14) y (15) se obtiene

$$E_z = \frac{1}{\xi} \left[ \frac{\mu_r}{\varepsilon_0} D_z - \frac{\chi - j\kappa}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} B_z \right], \quad (16)$$

$$H_z = -\frac{1}{\xi} \left[ \frac{\chi + j\kappa}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} D_z - \frac{\varepsilon_r}{\mu_0} B_z \right], \quad (17)$$

donde  $\xi = \mu_r \varepsilon_r - (\chi^2 + \kappa^2)$  es un parámetro adimensional.  $D_z$  y  $B_z$  se pueden expresar en términos de las funciones  $T$ , usando la componente  $z$  de las ecuaciones de Maxwell del rotacional

$$E_z = \frac{1}{\xi} \left[ \frac{\mu_r}{\varepsilon_0} \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) D_z + \frac{\chi - j\kappa}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \right], \quad (18)$$

$$H_z = -\frac{1}{\xi} \left[ \frac{\chi + j\kappa}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) + \frac{\varepsilon_r}{\mu_0} \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \right]. \quad (19)$$

Utilizando (1)–(6), se sustituyen los desarrollos en serie de cada una de las componentes en (18) y (19). A continuación, se aplica el método de Galerkin y se obtiene las relaciones deseadas. Examinando (18) y (19) vemos que las amplitudes de las componentes longitudinales del campo se obtienen directamente en función de las amplitudes de las componentes transversales, no siendo necesario la inversión de matriz alguna (todo el proceso algebraico se manipula en forma matricial). Pero lo que aquí es más importante, es el hecho de que (18) y (19) (o equivalentemente, (16) y (17)) expresan, para guías de onda parcialmente llenas, una componente continua del campo ( $E_z$  y  $H_z$ ) como el producto de dos funciones discontinuas: una es la compuesta por los diferentes parámetros constitutivos del medio que se encuentra en el interior de la guía, y la otra cualquiera de las componentes discontinuas del campo  $D_z$  o  $B_z$ . Aunque analíticamente esta situación no presenta problema alguno, no es lo mismo cuando las componentes del campo se calculan de forma numérica a partir de una combinación lineal de funciones base continuas expresadas a partir de las funciones potenciales  $T$ . Esta no es la situación ideal para obtener las amplitudes de  $E_z$  y  $H_z$  y es la principal razón por la que, en el caso de que los valores de los parámetros constitutivos sean altos, la estrategia directa da resultados menos exactos que la estrategia indirecta.

### II-B. Estrategia Indirecta (EHI)

En esta estrategia, para encontrar las expresiones que ligan las amplitudes de las componentes longitudinales y transversales de los campos, se utilizan directamente la componente  $z$  de las relaciones de constitución (14) y (15). Es importante notar que para obtener el valor de las amplitudes de las

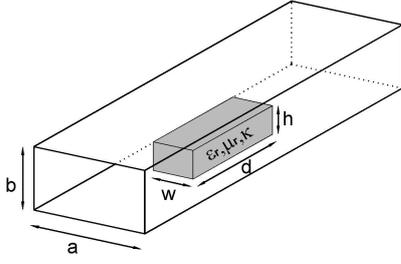


Fig. 1. Esquema de la guía de onda rectangular parcialmente llena de un medio quiral con forma paralelepípeda.

componentes longitudinales del campo es necesario obtener también el valor de la constante  $H_0$ . En el caso de la estrategia directa, el valor de  $H_0$  no tiene influencia en el proceso de obtención de las relaciones buscadas, aunque su cálculo no puede ser evitado a la hora de determinar la componente  $H_z$ . El procedimiento a seguir para la obtención de  $H_0$  se muestra en la sección 2.2 de [5]. En este caso, las amplitudes de  $E_z$  y  $H_z$  no se pueden obtener directamente y es necesario tener que realizar la inversión de matrices. La principal diferencia con respecto a la estrategia directa es que ahora, ambas ecuaciones (14) y (15) expresan las componentes del campo  $D_z$  y  $B_z$ , que son funciones analítica y numéricamente discontinuas, como el producto de las componentes del campo  $E_z$  y  $H_z$ , que son analítica y numéricamente continuas, y las funciones discontinuas correspondientes a los parámetros constitutivos. Ésta es la situación ideal para obtener una mejor convergencia en el cálculo de las amplitudes de las amplitudes de las componentes longitudinales, a pesar de que esta estrategia requiere la inversión de matrices, lo que conlleva los correspondientes errores numéricos.

### II-C. Método de adaptación modal

Una vez que se ha obtenido el campo electromagnético y las constantes de propagación en una guía uniforme en la dirección de propagación de la energía, la aplicación del método de adaptación modal (MAM) para el estudio de las discontinuidades es independiente del tipo de material que llene cada una de las guías que forman la estructura. La formulación del MAM se puede ver en detalle en [6] si la estructura tiene el mismo contorno o en [7] si éste es diferente. En el primer caso (mismo contorno metálico), las integrales de acoplo que aparecen el MAM se reducen a una simple reordenación de los vectores propios (coeficientes de los desarrollos en serie (1)-(4)), y en el segundo caso se reducen a un sumatorio de productos de los mismos vectores propios.

## III. RESULTADOS

En la literatura no se encuentran resultados correspondientes a la convergencia del valor de la constante de propagación del campo electromagnético en el interior de una guía de onda rectangular parcialmente llena de un medio quiral, los únicos que se disponen son los correspondientes a la matriz

de scattering de la estructura formada por una sección de guía de onda parcialmente llena de un medio quiral alojada entre dos guías vacías (Fig. 1) [8].

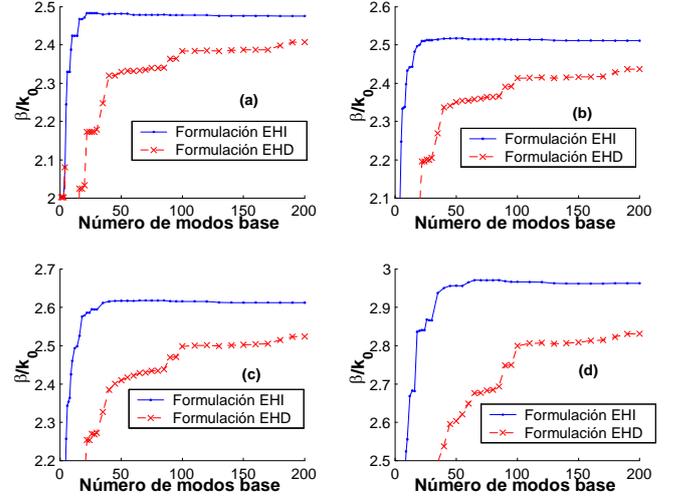


Fig. 2. Variación de la constante de fase normalizada al número de onda del vacío del modo fundamental en función del número de modos base  $TE$  y  $TM$  (diagrama de convergencia) para una guía de onda rectangular quiral imagen (guía central de la Fig. 1) tomando  $\kappa$  como parámetro. Dimensiones en mm:  $a = 22,86$ ,  $b = 10,16$ ,  $w = 11$ ,  $h = 5$ ,  $f = 9 \text{ GHz}$ ,  $\epsilon_r = 10$ ,  $\mu_r = 1$ . En (a)  $\kappa = 0$  (caso aquiral), en (b)  $\kappa = 0,25$ , en (c)  $\kappa = 0,5$  y en (d)  $\kappa = 1$ .

En la Fig. 4 se muestra el diagrama de convergencia del modo fundamental. Las dimensiones se muestran en la propia figura y el medio quiral tiene  $\epsilon_r = 10$  (valor alto) y valores del parámetro de quiralidad que van desde  $\kappa = 0$  (medio isotrópico) a  $\kappa = 1$ . Como se puede ver, la constante de fase proporcionada por la formulación indirecta para el "peor caso",  $\kappa = 1$ , alcanza un valor estable con 120 modos base. En cambio, los resultados obtenidos a partir de la formulación directa para el mismo caso no convergen adecuadamente a menos que se tomen 180 modos base. Para valores más bajos de  $\epsilon_r$  o  $\kappa$  se obtienen resultados similares. Podemos decir que, en general, los resultados obtenidos de ambas formulaciones convergen con unos 120 modos base, aunque resulta conveniente determinar el número de modos base para cada caso.

Además de la convergencia de la constante de propagación, hemos analizado lo que sucede con la convergencia de los parámetros de scattering. En la Fig. 3 se muestra la variación del módulo y fase del parámetro de scattering  $S_{11}$  en función del número de modos base para la estructura de la Fig. 1 con las dimensiones indicadas en la figura y un medio quiral con valores altos de la permitividad ( $\epsilon_r = 10$ ,  $\kappa = 1,5$ ). Tal y como se puede ver en la Fig. 8, con 120 modos base se alcanzan valores estables del parámetro  $S_{11}$  para ambas formulaciones.

En la Fig. 4 se muestra la variación de los parámetros de scattering  $S_{11}$  y  $S_{21}$  para la misma estructura de la Fig. 3. Examinando la figura, se puede ver que en el rango superior de frecuencias, la diferencias entre ambas formulaciones son evidentes.

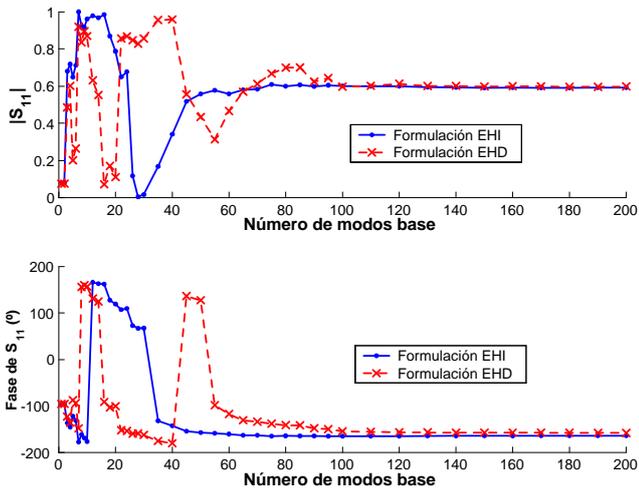


Fig. 3. Variación del módulo (a) y fase (b) del parámetro  $S_{11}$  en función del número de modos base para la estructura de la Fig. 1 obtenidas a partir de las formulaciones indirecta (EHI) y directa (EHD). Dimensiones en mm:  $a = 22,86$ ,  $b = 10,16$ ,  $w = 11$ ,  $h = 5$ ,  $f = 9,5$  GHz,  $\epsilon_r = 10$ ,  $\mu_r = 1$  y  $\kappa = 1,5$ .

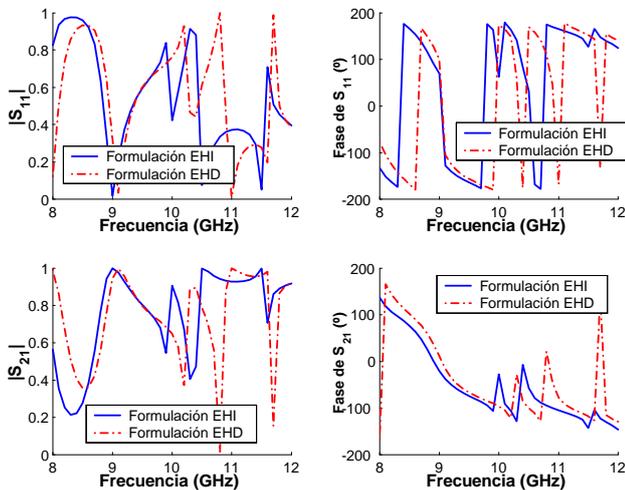


Fig. 4. Variación del módulo (a) y fase (b) del parámetro  $S_{11}$  con la frecuencia para la estructura de la Fig. 1 obtenidas a partir de las formulaciones indirecta (EHI) y directa (EHD). El número de modos base utilizado es 120. Dimensiones en mm:  $a = 22,86$ ,  $b = 10,16$ ,  $w = 11$ ,  $h = 5$ ,  $\epsilon_r = 10$ ,  $\mu_r = 1$  y  $\kappa = 1,5$ .

#### IV. CONCLUSIONES

Los resultados aquí presentados han demostrado que las formulaciones directa e indirecta dan resultados diferentes cuando el valor de los diversos parámetros constitutivos del material que llena la guía son altos. La pregunta crucial es: ¿cuál de las dos formulaciones es la más correcta? La única respuesta posible es que la formulación indirecta es la más apropiada en un caso general. Puesto que no hay medidas disponibles, nuestra conclusión se debe basar en otro tipo de argumentos y que se enumeran a continuación. En primer lugar, se ha mostrado teóricamente que la formulación indirecta utiliza una estrategia que expresa las componentes

longitudinales del campo en función de las transversales de tal forma que asegura una buena un buen tratamiento de las propiedades de continuidad de las diferentes componentes del campo. En segundo lugar, para estructuras quirales sencillas y que disponen de solución analítica [9], se ha mostrado que la formulación indirecta es más precisa que la directa. Por último, para otro tipo de materiales, tales como dieléctrico o ferritas magnetizadas anisótricamente, la formulación indirecta genera resultados más precisos que la directa, tal y como se puede ver en Solano 1993. Por tanto, parece obvio que esto mismo ocurrirá para medios quirales contenidos en guías de onda rectangular.

#### AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado por la Dirección General de Investigación del MEC a través del proyecto TIC2003-09677-C03-01.

#### REFERENCIAS

- [1] S. A. Schelkunoff: "Generalized Telegraphist's equations for waveguides", *Bell Sys. Tech. J.*, vol. **31**, pp. 784–801, julio 1952.
- [2] K. Ogusu: "Numerical analysis of the rectangular dielectric waveguide and its modifications", *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. **MTT25**, pp. 874–885, noviembre 1977.
- [3] J. A. Kong, *Electromagnetic wave theory*, New York: Wiley, 1986.
- [4] A. H. Sihvola and I. V. Lindell: "Bi-isotropic constitutive relations", *Microw. Opt. Technol. Lett.*, vol. **4**, pp. 295–297, febrero.1991.
- [5] M. A. Solano, A. Vegas and A. Prieto: "Numerical analysis of discontinuities in a rectangular waveguide loaded with isotropic or anisotropic obstacles by means of the coupled mode method and the moide matching method", *International J. Num. Modelling*, vol. **7**, pp. 433–452, 1995.
- [6] M. A. Solano, A. Vegas and A. Prieto: "Modelling multiple discontinuities in rectangular waveguide partially filled with non-reciprocal ferrites", *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. **41**, pp. 797–802, abril 1993.
- [7] M. A. Solano, A. Prieto and A. Vegas: "Theoretical and experimental study of two port structures composed of different size rectangular waveguides partially filled with isotropic dielectrics", *Int. J. Electronics*, vol. **84**, pp. 521–528, mayo 1998.
- [8] X. Wu and D. L. Jaggard: "A comprehensive study of discontinuities in chirowaveguides," *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. **50**, pp. 2320–2330, octubre 2002.
- [9] A. Gómez, A. Vegas and M. A. Solano: "A brief discussion on the different formulations of the coupled mode method in chiral media: application to the parallel-plate chirowaveguide", *Microw. Opt. Technol. Lett.*, vol. **42**, pp. 181–185, agosto 2004.