

Modelado de Medios Quirales en Simuladores FDTD Mediante la Técnica de la Transformación de Moebius

Ana Grande, José A. Pereda, Oscar González y Ángel Vegas

Departamento de Ingeniería de Comunicaciones (DCom), Universidad de Cantabria.

grandeam@unican.es; peredaj@unican.es

Abstract—In this paper we present a new Finite Difference Time Domain (FDTD) model of transient wave propagation in dispersive chiral media. The constitutive relationships in the Laplace domain are mapped onto the Z-transform domain by means of the Mobius transformation and a formulation discretized according to Yee's scheme is derived using appropriate digital-processing methodologies. The resulting approach preserves the second-order accuracy of the conventional FDTD technique. The method has been validated by computing the reflection and transmission coefficients of a chiral slab.

Index Terms—Finite-difference methods, Mobius transformation, chiral media

I. INTRODUCCIÓN

Durante las últimas décadas los medios quirales han sido objeto de un profundo estudio. Sus aplicaciones potenciales y la posibilidad de fabricar artificialmente materiales que presentan comportamiento quiral en un cierto rango de frecuencias, han despertado un interés creciente en el desarrollo de nuevos medios artificiales. Por otra parte, los avances conseguidos en el diseño de dichos materiales, han ido acompañados de una necesidad de desarrollar extensiones de los métodos numéricos existentes que permitan su modelado.

Entre las técnicas numéricas en el dominio del tiempo, el método FDTD es, hoy en día, uno de los más empleados para la resolución de problemas en electromagnetismo. El acoplamiento magneto-eléctrico que aparece en las relaciones de constitución de los medios quirales y el carácter dispersivo de los parámetros constitutivos, hacen que la extensión del método FDTD para el modelado de estos medios requiera modificar el esquema original de Yee en su parte espacial y temporal, respectivamente. Existen algunas aproximaciones para la incorporación de los medios quirales en el método FDTD, como es el caso de la presentada en [1], válida para medios quirales con parámetros constitutivos no dispersivos, o la técnica desarrollada en [2] y [3] cuya aplicación está restringida a la resolución de problemas sencillos, en los que las ondas propias no están acopladas. La formulación introducida en [4] y [5] permite el modelado de medios biisótropos dispersivos, sin embargo, desarrolla una nueva malla para medios quirales, por lo que es necesario implementar una interfaz específica entre esta nueva malla y la malla original de Yee. Recientemente, se ha presentado una formulación para

modelar medios quirales dispersivos empleando la malla de Yee [6], pero la discretización realizada no conserva la exactitud de segundo orden del método FDTD original.

En este trabajo presentamos un modelo FDTD para simular la propagación electromagnética en medios quirales dispersivos. La técnica desarrollada parte de las ecuaciones de Maxwell del rotacional en el dominio de Laplace para posteriormente realizar una discretización en el dominio del tiempo compatible con el esquema de Yee.

Siguiendo el desarrollo introducido en [7], las ecuaciones constitutivas se discretizan empleando la transformación de Moebius y métodos de procesamiento digital. El algoritmo resultante mantiene la exactitud de segundo orden y la naturaleza explícita del método FDTD convencional.

Finalmente, se presentan una serie de resultados que permiten mostrar la validez y exactitud de la técnica desarrollada así como visualizar el comportamiento de las ondas electromagnéticas en los medios quirales.

II. TEORÍA

A. Modelo Diferencial

Consideremos las ecuaciones de Maxwell del rotacional en el dominio de Laplace:

$$s\vec{B}(\vec{r}, s) = -\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, s), \quad (1a)$$

$$s\vec{D}(\vec{r}, s) = \nabla \times \vec{H}(\vec{r}, s). \quad (1b)$$

Las relaciones constitutivas de los medios quirales dispersivos pueden escribirse como [8]:

$$\vec{B}(\vec{r}, s) = \mu(s)\vec{H}(\vec{r}, s) + \frac{1}{c}j\kappa(s)\vec{E}(\vec{r}, s), \quad (2a)$$

$$\vec{D}(\vec{r}, s) = \epsilon(s)\vec{E}(\vec{r}, s) - \frac{1}{c}j\kappa(s)\vec{H}(\vec{r}, s). \quad (2b)$$

Medidas realizadas en medios quirales artificiales muestran que el comportamiento en frecuencia de la permitividad $\epsilon(s)$ y la permeabilidad $\mu(s)$ se aproxima a un modelo resonante de Lorentz, mientras que el carácter dispersivo de la quiralidad $\kappa(s)$, puede describirse mediante un modelo de Condon [8]

$$\epsilon(s) = \epsilon_\infty + \frac{(\epsilon_s - \epsilon_\infty)\omega_e^2}{\omega_e^2 + 2\delta_e s + s^2}, \quad (3a)$$

$$\mu(s) = \mu_\infty + \frac{(\mu_s - \mu_\infty)\omega_h^2}{\omega_h^2 + 2\delta_h s + s^2}, \quad (3b)$$

$$\hat{\kappa}(s) = j\kappa(s) = \frac{\tau_k \omega_k^2 s}{\omega_k^2 + 2\delta_k \omega_k s + s^2}, \quad (3c)$$

Este trabajo ha sido financiado por la Dirección General de Investigación del MEC a través del proyecto TIC2003-09677-C03-01

donde ϵ_∞ (μ_∞) es la permitividad (permeabilidad) a altas frecuencias y ϵ_s (μ_s) es la permitividad (permeabilidad) a frecuencia cero, ω_e , ω_h y ω_k son las frecuencias angulares de resonancia, δ_e , δ_h y δ_k son los factores de amortiguamiento y τ_k es una constante de tiempo característica que describe la magnitud de la quiralidad.

Sustituyendo (2) en (1) y ordenando los términos, obtenemos:

$$\mu_\infty s \vec{H}(\vec{r}, s) = -\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, s) - \vec{J}_{hh}(\vec{r}, s) - \vec{J}_{he}(\vec{r}, s), \quad (4a)$$

$$\epsilon_\infty s \vec{E}(\vec{r}, s) = \nabla \times \vec{H}(\vec{r}, s) - \vec{J}_{ee}(\vec{r}, s) - \vec{J}_{eh}(\vec{r}, s), \quad (4b)$$

donde las densidades de corriente auxiliares \vec{J}_{hh} , \vec{J}_{ee} , \vec{J}_{eh} y \vec{J}_{he} se definen como:

$$\vec{J}_{hh}(\vec{r}, s) = \sigma_h(s) \vec{H}(\vec{r}, s), \quad (5a)$$

$$\vec{J}_{eh}(\vec{r}, s) = \varsigma_h(s) \vec{H}(\vec{r}, s), \quad (5b)$$

$$\vec{J}_{ee}(\vec{r}, s) = \sigma_e(s) \vec{E}(\vec{r}, s), \quad (5c)$$

$$\vec{J}_{he}(\vec{r}, s) = \varsigma_e(s) \vec{E}(\vec{r}, s), \quad (5d)$$

siendo $\sigma_h = s(\mu - \mu_\infty)$, $\varsigma_h = -s\hat{k}/c$, $\sigma_e = s(\epsilon - \epsilon_\infty)$ y $\varsigma_e = -\varsigma_h$.

Nuestro objetivo ahora será realizar una discretización de las ecuaciones (4) y (5) que sea compatible con el esquema FDTD convencional.

B. Modelo en Diferencias

Por simplicidad, consideraremos el problema unidimensional de la propagación de ondas planas en la dirección z

La celda FDTD empleada en el proceso de discretización se muestra en la figura 1.

Para discretizar (4), en primer lugar escribimos las ecuaciones en el dominio del tiempo continuo empleado la propiedad $sF(s) \longleftrightarrow dF(t)/dt$. Después, las expresiones resultantes se aproximan empleando diferencias centradas para las derivadas, promediado en el tiempo para \vec{J}_{hh} y \vec{J}_{ee} , y promediado espacial para \vec{J}_{he} y \vec{J}_{eh} , con lo que obtenemos:

$$\begin{aligned} \vec{H}^{n+\frac{1}{2}}(k + \frac{1}{2}) &= \vec{H}^{n-\frac{1}{2}}(k + \frac{1}{2}) \\ &- \frac{\Delta t}{\mu_\infty} \left\{ \left[\nabla \times \vec{E} \right]^n(k + \frac{1}{2}) \right. \\ &+ \frac{1}{2} [\vec{J}_{hh}^{n+\frac{1}{2}}(k + \frac{1}{2}) + \vec{J}_{hh}^{n-\frac{1}{2}}(k + \frac{1}{2})] \\ &\left. + \frac{1}{2} [\vec{J}_{he}^n(k) + \vec{J}_{he}^n(k + 1)] \right\}, \quad (6a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{E}^{n+1}(k) &= \vec{E}^n(k) + \frac{\Delta t}{\epsilon_\infty} \left\{ \left[\nabla \times \vec{H} \right]^{n+\frac{1}{2}}(k) \right. \\ &- \frac{1}{2} [\vec{J}_{eh}^{n+\frac{1}{2}}(k - \frac{1}{2}) + \vec{J}_{eh}^{n+\frac{1}{2}}(k + \frac{1}{2})] \\ &\left. - \frac{1}{2} [\vec{J}_{ee}^{n+1}(k) + \vec{J}_{ee}^n(k)] \right\}, \quad (6b) \end{aligned}$$

Por simplicidad, las expresiones del rotacional no se especifican.

Para obtener las ecuaciones correspondientes a (5a) en el dominio del tiempo discreto, expresamos estas ecuaciones en el dominio Z , considerando que un producto en el dominio de Laplace se mantiene como un producto en el dominio Z :

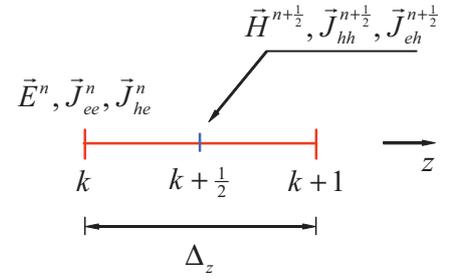


Fig. 1. Celda FDTD unidimensional empleada para medios quirales.

$$\vec{J}_{hh}(\vec{r}, Z) = \sigma_h(Z) \vec{H}(\vec{r}, Z).$$

Para obtener $\sigma_h(Z)$ emplearemos la técnica de la transformación de Moebius descrita en [7], la cual es equivalente a realizar el cambio de variable

$$s = \frac{2}{\Delta t} \frac{1 - Z^{-1}}{1 + Z^{-1}},$$

en (5a), con lo que se obtiene

$$\vec{J}_{hh}(\vec{r}, Z) = \frac{c_0^{(\sigma_h)} + c_1^{(\sigma_h)} Z^{-1} + c_2^{(\sigma_h)} Z^{-2}}{1 + d_1^{(\sigma_h)} Z^{-1} + d_2^{(\sigma_h)} Z^{-2}} \vec{H}(\vec{r}, Z),$$

donde $c_m^{(\sigma_h)}$ y $d_m^{(\sigma_h)}$ son coeficientes reales. Esta expresión la podemos interpretar como un filtro digital de respuesta impulsiva infinita, que implementamos empleando la forma directa transpuesta II [9]:

$$\vec{J}_{hh}^{n+\frac{1}{2}} = \vec{W}_{hh,1}^{n-\frac{1}{2}} + c_0^{(\sigma_h)} \vec{H}^{n+\frac{1}{2}}, \quad (7a)$$

$$\vec{W}_{hh,1}^{n+\frac{1}{2}} = \vec{W}_{hh,2}^{n-\frac{1}{2}} - d_1^{(\sigma_h)} \vec{J}_{hh}^{n+\frac{1}{2}} + c_1^{(\sigma_h)} \vec{H}^{n+\frac{1}{2}}, \quad (7b)$$

$$\vec{W}_{hh,2}^{n+\frac{1}{2}} = c_2^{(\sigma_h)} \vec{H}^{n+\frac{1}{2}} - d_2^{(\sigma_h)} \vec{J}_{hh}^{n+\frac{1}{2}}. \quad (7c)$$

Estas ecuaciones se evalúan en el punto $z = (k + \frac{1}{2})\Delta_z$, por brevedad, no se especifica. Las ecuaciones (7) están acopladas con (6a). Desacoplándolas y eliminando $\vec{W}_{hh,2}$ para reducir el número de variables de almacenamiento adicionales, obtenemos

$$\begin{aligned} \vec{H}^{n+\frac{1}{2}}(k + \frac{1}{2}) &= \frac{1}{2\mu_\infty + \Delta t c_0^{(\sigma_h)}} \left(2\mu_\infty \vec{H}^{n-\frac{1}{2}}(k + \frac{1}{2}) \right. \\ &- \Delta t \left\{ 2 \left[\nabla \times \vec{E} \right]^n(k + \frac{1}{2}) \right. \\ &+ \vec{W}_{hh}^{n-\frac{1}{2}}(k + \frac{1}{2}) + \vec{J}_{hh}^{n-\frac{1}{2}}(k + \frac{1}{2}) \\ &\left. \left. + \vec{J}_{he}^n(k) + \vec{J}_{he}^n(k + 1) \right\} \right) \quad (8) \end{aligned}$$

y

$$\vec{J}_{hh}^{n+\frac{1}{2}} = \vec{W}_{hh}^{n-\frac{1}{2}} + c_0^{(\sigma_h)} \vec{H}^{n+\frac{1}{2}}, \quad (9a)$$

$$\begin{aligned} \vec{W}_{hh}^{n+\frac{1}{2}} &= c_2^{(\sigma_h)} \vec{H}^{n-\frac{1}{2}} - d_2^{(\sigma_h)} \vec{J}_{hh}^{n-\frac{1}{2}} \\ &- d_1^{(\sigma_h)} \vec{J}_{hh}^{n+\frac{1}{2}} + c_1^{(\sigma_h)} \vec{H}^{n+\frac{1}{2}}, \quad (9b) \end{aligned}$$

donde $\vec{W}_{hh} \equiv \vec{W}_{hh,1}$.

La relación (5b) se discretiza siguiendo el mismo procedimiento descrito para (5a), lo que da como resultado:

$$\vec{J}_{eh}^{n+\frac{1}{2}} = \vec{W}_{eh}^{n-\frac{1}{2}} + c_0^{(\xi_h)} \vec{H}^{n+\frac{1}{2}}, \quad (10a)$$

$$\vec{W}_{eh}^{n+\frac{1}{2}} = c_2^{(\xi_h)} \vec{H}^{n-\frac{1}{2}} - d_2^{(\xi_h)} \vec{J}_{eh}^{n-\frac{1}{2}} - d_1^{(\xi_h)} \vec{J}_{eh}^{n+\frac{1}{2}} + c_1^{(\xi_h)} \vec{H}^{n+\frac{1}{2}}, \quad (10b)$$

donde (10) se evalúa en $z = (k + \frac{1}{2})\Delta_z$.

A continuación, (5c) se discretiza de la misma forma que (5a) y (5b). Las ecuaciones resultantes están acopladas con (6b). Desacoplándolas, obtenemos las siguientes expresiones:

$$\vec{E}^{n+1}(k) = \frac{1}{2\epsilon_\infty + \Delta_t c_0^{(\sigma_e)}} \left(2\epsilon_\infty \vec{E}^n(k) + \Delta_t \left\{ 2 \left[\nabla \times \vec{H} \right]^{n+\frac{1}{2}}(k) - \vec{W}_{ee}^n(k) - \vec{J}_{ee}^n(k) - \vec{J}_{eh}^{n+\frac{1}{2}}(k - \frac{1}{2}) - \vec{J}_{eh}^{n+\frac{1}{2}}(k + \frac{1}{2}) \right\} \right) \quad (11)$$

y

$$\vec{J}_{ee}^{n+1} = \vec{W}_{ee}^n + c_0^{(\sigma_e)} \vec{E}^{n+1}, \quad (12a)$$

$$\vec{W}_{ee}^{n+1} = c_2^{(\sigma_e)} \vec{E}^n - d_2^{(\sigma_e)} \vec{J}_{ee}^n - d_1^{(\sigma_e)} \vec{J}_{ee}^{n+1} + c_1^{(\sigma_e)} \vec{E}^{n+1}, \quad (12b)$$

donde (12) se evalúa en $z = k\Delta_z$.

Finalmente, (5d) se discretiza empleando la transformación de Moebius de la misma forma en que se hizo para (5a), (5b) y (5c), y se implementa como:

$$\vec{J}_{he}^{n+1} = \vec{W}_{he}^n + c_0^{(\xi_e)} \vec{E}^{n+1}, \quad (13a)$$

$$\vec{W}_{he}^{n+1} = c_2^{(\xi_e)} \vec{E}^n - d_2^{(\xi_e)} \vec{J}_{he}^n - d_1^{(\xi_e)} \vec{J}_{he}^{n+1} + c_1^{(\xi_e)} \vec{E}^{n+1}, \quad (13b)$$

Estas ecuaciones se evalúan en $z = k\Delta_z$.

El desarrollo teórico anterior da lugar a un algoritmo FDTD que conlleva los siguientes cálculos en cada iteración temporal: 1) $\vec{H}^{n+\frac{1}{2}}$ se calcula a partir de la ecuación (8); 2) $\vec{J}_{hh}^{n+\frac{1}{2}}$ y $\vec{W}_{hh}^{n+\frac{1}{2}}$ se calculan usando (9), donde $\vec{H}^{n+\frac{1}{2}}$ lo habíamos calculado en el paso 1); 3) $\vec{J}_{eh}^{n+\frac{1}{2}}$ y $\vec{W}_{eh}^{n+\frac{1}{2}}$ se calculan empleando (10), donde $\vec{H}^{n+\frac{1}{2}}$ lo habíamos obtenido en el paso 1); 4) \vec{E}^{n+1} se calcula a por medio de (11); 5) \vec{J}_{ee}^{n+1} y \vec{W}_{ee}^{n+1} se calculan empleando (12), donde \vec{E}^{n+1} lo habíamos calculado en 4); 6) finalmente, \vec{J}_{he}^{n+1} y \vec{W}_{he}^{n+1} se obtiene empleando (13), donde \vec{E}^{n+1} lo habíamos calculado en 4).

El algoritmo resultante mantiene la exactitud de segundo orden y la naturaleza explícita del método FDTD convencional.

III. VALIDACIÓN

Con el fin de validar el modelo FDTD presentado, hemos simulado la propagación de una onda electromagnética a través de una lámina quiral y hemos calculado los coeficientes de reflexión y de transmisión. Dado que los medios quirales son recíprocos, una onda que se refleja en una lámina de material quiral no modifica su polarización. Sin embargo, debido a la dispersión óptica rotatoria y al dicroísmo circular la polarización de la onda que se propaga a través de la lámina quiral se modifica. Como resultado, la onda transmitida presentará una componente de polarización cruzada. En un

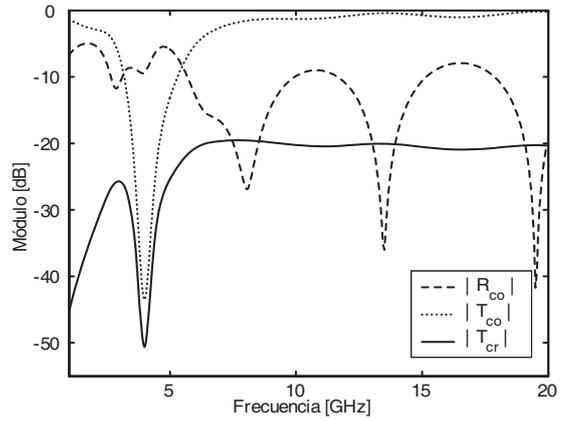


Fig. 2. Módulo de los coeficientes de reflexión y transmisión teóricos.

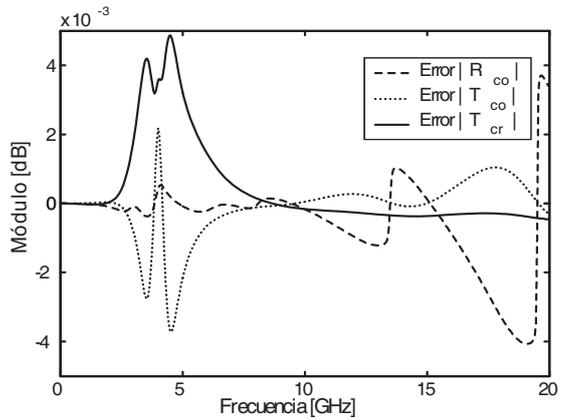


Fig. 3. Error absoluto de los coeficientes de reflexión y transmisión.

medio quiral, la onda reflejada y la transmitida se definen a través de la diádica de reflexión y transmisión, respectivamente [8]:

$$\bar{\bar{R}} = \begin{pmatrix} R_{co} & 0 \\ 0 & R_{co} \end{pmatrix} \quad \bar{\bar{T}} = \begin{pmatrix} T_{co} & T_{cr} \\ T_{cr} & T_{co} \end{pmatrix}$$

donde R_{co} es el coeficiente de reflexión copolarizada y T_{co} , T_{cr} son el coeficiente de transmisión copolarizada y el de polarización cruzada respectivamente.

En la primera simulación realizada se ha considerado una onda electromagnética que se propaga en la dirección del eje z e incide en una lámina de material quiral de espesor $d = 15$ mm caracterizada por los siguientes parámetros: $\epsilon_s = 4.4\epsilon_0$, $\epsilon_\infty = 3.5\epsilon_0$, $\mu_s = 1.1\mu_0$, $\mu_\infty = \mu_0$, $\omega_e = \omega_h = \omega_k = 2\pi \times 8$ GHz, $\delta_e = 0.07\omega_e$, $\delta_h = 0.07\omega_h$, $\delta_k = 0.09$ y $\tau_k = 1$ ps. El tamaño de la celda utilizada fue $\Delta_z = 0.3$ mm y el paso temporal $\Delta_t = 1$ ps. Como excitación se ha considerado un pulso gaussiano polarizado en la dirección x . En la figura 2 se presentan los valores teóricos de los coeficientes de reflexión y transmisión. La figura 3 muestra el error absoluto de los valores calculados empleando la técnica FDTD presentada.

Finalmente, para visualizar el comportamiento característico de la propagación electromagnética en un medio quiral se ha considerado un pulso gaussiano con polarización lineal en

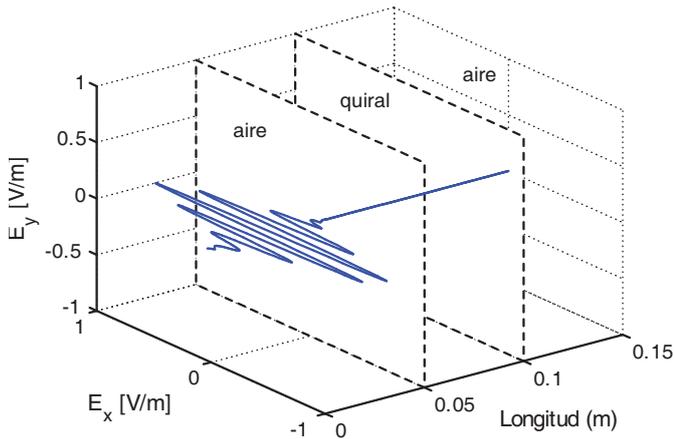


Fig. 4. Un pulso linealmente polarizado en el eje x incide en una lámina de medio quiral dispersivo.

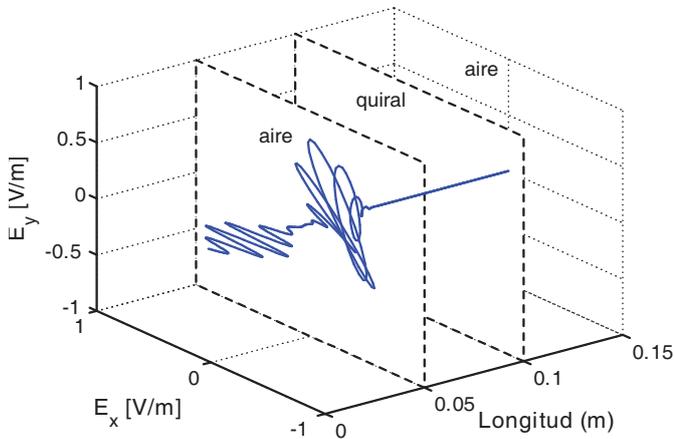


Fig. 5. Pulsos reflejado y transmitido en la interfaz aire-medio quiral. Debido a la dispersión óptica rotatoria y al discoísmo circular la polarización del pulso transmitido rota y se convierte en elíptica a medida que se propaga en la lámina quiral.

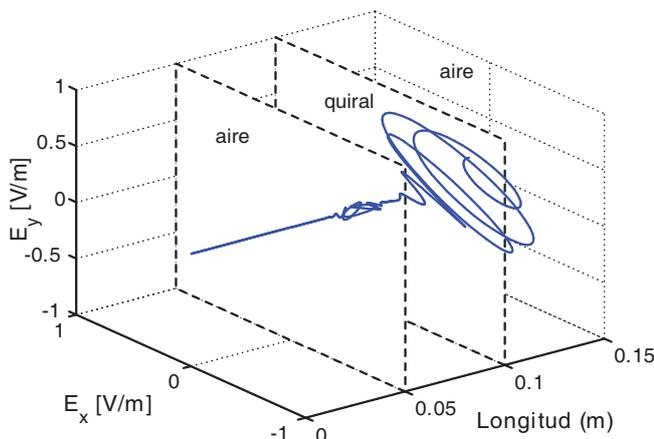


Fig. 6. Pulsos reflejado y transmitido en la interfaz medio quiral-aire. El pulso que se transmite al medio 3 (aire) presenta componente de polarización cruzada.

el eje x que incide normalmente en una lámina quiral de parámetros $\epsilon_s = 4.4\epsilon_0$, $\epsilon_\infty = 4\epsilon_0$, $\mu_s = 1.1\mu_0$, $\mu_\infty = \mu_0$, $\omega_e = \omega_h = \omega_k = 2\pi \times 15$ GHz, $\delta_e = 0.014\omega_e$, $\delta_h = 0.014\omega_h$, $\delta_k = 0.016$ y $\tau_k = 2$ ps. El tamaño de la celda utilizada fue $\Delta_z = 0.2$ mm y el paso temporal $\Delta_t = 0.667$ ps.

En la figura 4 se ha representado el pulso incidente. En la figura 5 se muestra el pulso reflejado y transmitido en la interfaz aire-medio quiral. Debido a la dispersión óptica rotatoria la polarización del pulso que se transmite en la lámina quiral rota. El discoísmo circular hace que la naturaleza de la polarización se modifique, pasando de ser lineal a ser elíptica, a medida que el pulso se propaga y atenúa en la lámina. La figura 6 muestra el pulso reflejado y transmitido en la interfaz medio quiral-aire. Se aprecia como el pulso transmitido presenta componente de polarización cruzada.

IV. CONCLUSIÓN

En este trabajo se ha desarrollado una nueva extensión del método FDTD para el modelado de medios quirales dispersivos. Partiendo de las ecuaciones de Maxwell del rotacional y de las relaciones de constitución en el dominio de Laplace empleamos la técnica de la transformación de Moebius para obtener unas ecuaciones en diferencias compatibles con la formulación original de Yee. El esquema FDTD que se obtiene resuelve las principales limitaciones de las técnicas ya existentes: permite el modelado de medios quirales dispersivos, es aplicable a problemas en los que las ondas propias están acopladas y dado que el modelo es consistente con el esquema original de Yee, no requiere del desarrollo de ninguna interfaz específica. El algoritmo resultante mantiene la exactitud de segundo orden y la naturaleza explícita del método FDTD convencional. Además, sólo requiere de cuatro variables adicionales por cada componente del campo y celda.

REFERENCES

- [1] S. González-Carcía, I. Villó-Pérez, R. Gómez-Martín, y B. García-Olmedo, "Extension of Berenger's PML for bi-isotropic media," *IEEE Microwave and Guided Wave Lett.*, vol. 8, no. 9, pp. 297-299, Sep. 1998.
- [2] A. Akyurtlu y D. H. Werner, "BI-FDTD: A new technique for modeling electromagnetic wave propagation interaction with bi-isotropic media," *Microwave Opt. Technol. Lett.*, vol. 26, no. 4, pp. 239-242, Aug. 2000.
- [3] A. Akyurtlu y D. H. Werner, "A novel dispersive FDTD formulation for modeling transient propagation in chiral metamaterials," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 52, no. 9, pp. 2267-2276, Sep. 2004.
- [4] A. Grande, I. Barba, A. C. L. Cabeceira, J. Represa, P. M. So, y W. J. R. Hofer, "FDTD modeling of transient microwave signals in dispersive and lossy bi-isotropic media," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 52, no. 3, pp. 773-783, Mar. 2004.
- [5] A. Grande, I. Barba, A. C. L. Cabeceira, J. Represa, K. Kärkkäinen, y A. H. Sihvola, "Two-dimensional extension of a novel FDTD technique for modeling dispersive lossy bi-isotropic media using the auxiliary differential equation method," *IEEE Microwave and Wireless Components Lett.*, vol. 15, no. 5, pp. 375-377, May 2005.
- [6] V. Demir, A. Z. Elsherbeni, y E. Arvas, "FDTD formulation for dispersive chiral media using the Z transform method," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 53, no. 10, pp. 3374-3384, Oct. 2005.
- [7] J. A. Pereda, A. Vegas y A. Prieto, "FDTD modeling of wave propagation in dispersive media by using the Mobius transformation technique," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 50, no. 7, pp. 1689-1695, July 2002.
- [8] I. V. Lindell, A. H. Sihvola, S. A. Tretyakov y A. J. Viitanen, *Electromagnetic waves in chiral and bi-isotropic media*. Norwood, MA: Artech House, 1994.
- [9] J. G. Proakis y D. G. Manolakis, *Digital Signal Processing. Principles, Algorithms and Applications*. New York: Macmillan, 1992.