

CARACTERIZACIÓN MODAL EFICIENTE DE GUÍAS DE ONDA BIANISÓTROPAS

J. Pitarch⁽¹⁾, B. García-Baños⁽¹⁾, R. Pérez⁽¹⁾, J.M. Catalá⁽¹⁾, M. A. Solano⁽²⁾

jaipipor@upvnet.upv.es, beagarba@doctor.upv.es, roprepe@doctor.upv.es, jmcatala@dcom.upv.es, solanom@unican.es.

⁽¹⁾ Dpto. de .Comunicaciones. Universidad Politécnica de Valencia. Camino de Vera s/n, 46022, Valencia.

⁽²⁾ Dpto. de Ingeniería de Comunicaciones. Universidad de Cantabria. Avda. de los Castros s/n, 39005, Santander.

Abstract- A modal analysis based on the coupled mode method (CMM) is performed for the analysis of waveguides partially filled with a general bianisotropic material. The calculation of the generalized telegraphist's equations (GTE) can be made by the direct and the indirect formulations, so in this contribution, the convergence of both formulations is analyzed and compared. It is shown that the indirect formulation converges much faster than the direct formulation, which means that less number of modes is required for a given precision. Some results of scattering parameters obtained with both formulations are presented and analyzed.

I. INTRODUCCIÓN

Los medios bianisótropos [1] son los medios lineales más generales y han sido un foco de atención importante durante los últimos años. Debido a las relaciones constitutivas del campo electromagnético en ese tipo de medios, existe un acoplo adicional entre los campos eléctrico y magnético, que ha dado lugar a nuevas y muy atractivas aplicaciones [2]. Algunos casos particulares de medios bianisótropos conocidos son los medios dieléctricos y magnéticos, medios quirales [3], ferritas [4] o medios quiral-faraday [5].

En el análisis de guías parcialmente rellenas, el CMM es una técnica ya conocida [6]-[9] que puede calcular las constantes de propagación y las componentes de campo de los modos característicos de la guía inhomogénea (modos propios) en función de los modos de la correspondiente guía vacía (modos base). Esto tiene su fundamento en la propiedad de completitud de las autofunciones de una guía vacía. La gran ventaja del CMM es que todos los modos propios se resuelven en un único cálculo sin la necesidad de resolver ecuaciones trascendentes, y por lo tanto, no es necesario realizar búsquedas de ceros en el plano complejo.

Schelkunoff, con su artículo [6] formulado para un hipotético medio lineal caracterizado por un tensor de permitividad ε y otro de permeabilidad μ , puede ser considerado como el padre del CMM.

Uno de los trabajos más importantes en este tema es un artículo de Ogusu [7]. Este trabajo trata con dieléctricos isotrópicos, con aplicación al estudio de guías abiertas. Es, por tanto un caso menos general que el de Schelkunoff. La diferencia esencial entre ambas maneras de formular el problema del CMM en ambos artículos es la diferente forma de expresar los campos axiales como función de los campos transversales. La formulación original de Schelkunoff

necesita la inversión de dos matrices para realizar esta operación (si el estudio se limita a medios no magnéticos, solamente se requiere una inversión), mientras que la formulación de Ogusu evita estas inversiones. Nos referiremos a la formulación de Schelkunoff como la "formulación indirecta", mientras que la formulación de Ogusu se llamará "formulación directa".

En el año 95, Xu y Bosisio desarrollaron formulación directa para materiales bianisótropos [8], mientras que en una contribución posterior [9], los autores han presentado la formulación indirecta para este tipo de materiales. En esta comunicación, se presentan por primera vez resultados obtenidos para el caso de materiales bianisótropos, como los plasmas quirales, con esta formulación indirecta, y se realiza un análisis de la convergencia.

II. TEORÍA

Sea una sección de guía de onda rellena de un material bianisótropo. Las relaciones constitutivas en este material son

$$\begin{cases} \mathbf{B} = \mu\mathbf{H} + \eta\mathbf{E} \\ \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} + \xi\mathbf{H} \end{cases} \quad (1)$$

donde μ , η , ε y ξ son matrices 3x3.

Los campos, flujos y parámetros constitutivos que los relacionan se descomponen en función de las coordenadas transversales y de la coordenada z:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_t \\ B_z \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_{tt} & \mu_{tz} \\ \mu_{zt} & \mu_{zz} \end{pmatrix} \quad (3)$$

y, análogamente, para el resto.

Por tanto, (1) se puede escribir de la forma

$$\begin{cases} B_t = \mu_{tt}H_t + \mu_{tz}H_z + \eta_{tt}E_t + \eta_{tz}E_z \\ B_z = \mu_{zt}H_t + \mu_{zz}H_z + \eta_{zt}E_t + \eta_{zz}E_z \\ D_t = \varepsilon_{tt}E_t + \varepsilon_{tz}E_z + \xi_{tt}H_t + \xi_{tz}H_z \\ D_z = \varepsilon_{zt}E_t + \varepsilon_{zz}E_z + \xi_{zt}H_t + \xi_{zz}H_z \end{cases} \quad (4)$$

En el CMM, los campos eléctrico y magnético transversales se expresan como combinación lineal de los modos de la correspondiente guía vacía, de forma que:

$$\mathbf{E}_t = \sum_n v_n \mathbf{e}_n \quad (5)$$

$$E_z = \sum_n v_{z,n} e_{z,n} \quad (6)$$

$$\mathbf{H}_t = \sum_n i_n \mathbf{h}_n \quad (7)$$

$$H_z = \sum_n i_{z,n} h_{z,n} + H_0 \quad (8)$$

donde \mathbf{e}_n y $e_{z,n}$ son las funciones base eléctricas transversales y axiales, \mathbf{h}_n y $h_{z,n}$ son las funciones base magnéticas transversales y axial, v_n y $v_{z,n}$ son las amplitudes eléctricas axiales y transversales, i_n e $i_{z,n}$ son las amplitudes magnéticas axiales y transversales. El subíndice t representa la componente transversal, mientras que el subíndice z representa la componente axial. Obsérvese que el término H_0 , que no tiene dependencia de las coordenadas transversales ha sido añadido a H_z .

Se sustituyen (5)-(8) en las ecuaciones rotacionales de Maxwell y se aplica el operador $\times \hat{\mathbf{z}}$. Posteriormente, se multiplica escalarmente por cada una de las funciones base y se integran las dos ecuaciones en la sección transversal (procedimiento de Galerkin). Se obtiene lo siguiente:

$$\left. \begin{aligned} \partial_z v_k &= -v_{z,k} \frac{k_{c,k}^2}{\gamma_k} - j\omega \int_{\Omega} \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{B}_t \times \hat{\mathbf{z}} dS \\ \partial_z i_k &= -i_{z,k} \frac{k_{c,k}^2}{\gamma_k} + j\omega Z_k^2 \int_{\Omega} \mathbf{h}_k \cdot \mathbf{D}_t \times \hat{\mathbf{z}} dS \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

donde ∂_z es la derivada parcial respecto de z , $k_{c,k}$ es el número de onda de corte, γ_k es las constante de propagación y Z_k es la impedancia transversal del k -ésimo modo base. El dominio de integración Ω es la sección transversal de la guía.

Análogamente, substituyendo (5)-(8) en las ecuaciones de Maxwell y aplicando el operador $\cdot \hat{\mathbf{z}}$, se obtiene

$$\left. \begin{aligned} B_z &= \mu_0 \sum_n v_n h_{z,n} \\ D_z &= \epsilon_0 \sum_n i_n e_{z,n} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Para obtener las GTE, hay que relacionar las tensiones transversales v_n y las corrientes transversales i_n con sus derivadas, en (9). Es necesario, por ello, conocer los valores de $v_{z,n}$, $i_{z,n}$, \mathbf{B}_t y \mathbf{D}_t .

En la formulación directa, se realiza esto despejando de forma analítica a partir de (4) los valores de \mathbf{B}_t , \mathbf{D}_t , H_z y E_z en función de \mathbf{E}_t , \mathbf{H}_t , B_z y D_z , los cuáles dependen solamente de v_n y de i_n . Las corrientes axiales $v_{z,n}$ e $i_{z,n}$ se obtienen aplicando el procedimiento de Galerkin a E_z y H_z en (6) y (8) y substituyendo estos campos por las expresiones

mencionadas. El valor de H_0 se demuestra irrelevante para el cálculo de las GTE en esta formulación.

En el caso de la formulación indirecta, se llega a las GTE de una forma algo más complicada [9]. Para resolver los valores de $v_{z,n}$, $i_{z,n}$ y H_0 , se obtiene un sistema de tres ecuaciones a partir de (5)-(8) y (4) que relaciona estos valores con v_n e i_n . Después, los valores de \mathbf{B}_t y \mathbf{D}_t se substituyen a partir de (4).

Finalmente, se obtienen las GTE:

$$\partial_z \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{i} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{i} \end{pmatrix} \quad (11)$$

Los valores propios de (11) son las constantes de propagación de los modos propios de la guía rellena del material bianisótropo, mientras que los vectores propios son los coeficientes de los modos base que dan lugar a los modos propios.

Con este método, una guía rellena de cualquier material puede ser caracterizada de forma completa. En situaciones físicas de un determinado obstáculo en una guía de onda, se puede aplicar el método de adaptación modal para llegar a obtener la matriz S de toda la estructura.

III. RESULTADOS

La formulación general descrita en la sección previa se aplica a una guía rectangular rellena con una muestra rectangular, de tamaño y posición arbitrarias, tal como se describe en Fig. 1. Se trata de una guía de anchura a y altura b . Dentro de ella, existe una muestra de anchura a_s , altura b_s y longitud c , a una horizontal de la guía x_s y una distancia vertical y_s . Esta muestra tiene unos parámetros constitutivos μ , ϵ , η y ξ , según la notación de (1).

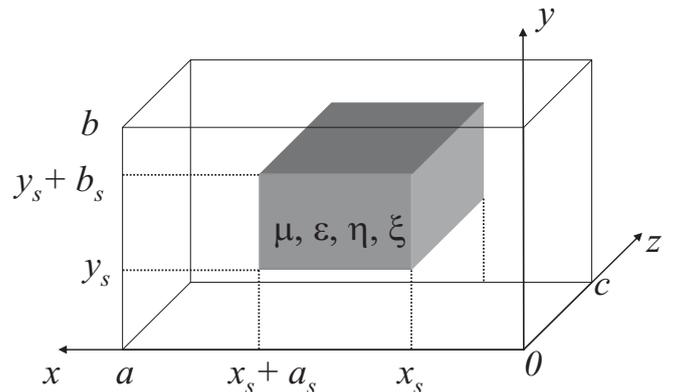


Fig. 1. Una pieza rectangular de material bianisótropo de anchura a_s , altura b_s y longitud c en el interior de una guía de onda de anchura a y altura b .

Para demostrar la potencia del método desarrollado, se han obtenido resultados de convergencia y parámetros S para un material bianisótropo como es el plasma quiral [5].

Un plasma quiral es el caso más conocido de anisotropía eléctrica. Consiste en un plasma en el que se introducen objetos que dotan al material de propiedades quirales. Al contrario de los materiales quirales, los plasmas quirales son no recíprocos, y sus propiedades pueden ser controladas externamente con un campo magnético estático de

alimentación. Esta mezcla de quiralidad y anisotropía tiene aplicaciones en guías quirales, en el control de la sección recta radar de blancos o el control de radiación y polarización de antenas y arrays en medios quirales.

Un plasma quiral tiene los siguientes parámetros constitutivos:

$$\hat{\epsilon} = \hat{\epsilon}_\infty \left(1 - \frac{f_p^2}{f^2 - f_g^2} \right) \tag{12}$$

$$\hat{\epsilon}_z = \hat{\epsilon}_\infty \left(1 - \frac{f_p^2}{f^2} \right) \tag{13}$$

$$\hat{g} = \hat{\epsilon}_\infty \frac{f_p^2 f_g}{f(f^2 - f_g^2)} \tag{14}$$

donde $\hat{\epsilon}_\infty$ es la permitividad asintótica de alta frecuencia, f_p es la frecuencia de plasma y f_g es la frecuencia de resonancia giroeléctrica.

Estas variables dependen a su vez de otros parámetros físicos y del campo magnético estático de alimentación, al igual que otros materiales como las ferritas. Sin embargo, como se pretende únicamente comprobar el buen comportamiento del método en este tipo de materiales, se van a escoger valores arbitrarios de los valores recogidos en (12)-(14).

Para un plasma magnetizado longitudinalmente (z), la permitividad tiene la forma

$$\epsilon_c = \begin{pmatrix} \hat{\epsilon} & -j\hat{g} & 0 \\ j\hat{g} & \hat{\epsilon} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\epsilon}_z \end{pmatrix} \tag{15}$$

Mientras que, para un plasma magnetizado verticalmente (y), la permitividad tiene la forma

$$\epsilon_c = \begin{pmatrix} \hat{\epsilon} & 0 & -j\hat{g} \\ 0 & \hat{\epsilon}_z & 0 \\ j\hat{g} & 0 & \hat{\epsilon} \end{pmatrix} \tag{16}$$

Este caso de magnetización vertical es más general desde el punto de vista del CMM, puesto que existe acoplo entre las componentes transversales y axial, a través del valor de \hat{g} , lo que no ocurre magnetizando en z, donde se consiguen efectos girótopos.

El plasma quiral tiene además una admitancia quiral ξ_c , que contribuye a los parámetros constitutivos de la forma

$$\left. \begin{aligned} \epsilon &= \epsilon_c + \xi_c^2 \mu_0 \mu_r I \\ \mu &= \mu_0 \mu_r I \\ \eta &= -j\mu_0 \mu_r \xi_c I \\ \xi &= j\mu_0 \mu_r \xi_c I \end{aligned} \right\} \tag{17}$$

donde I es la matriz identidad de orden 3. Dado que no existen precedentes en la literatura sobre el análisis de plasmas quirales en guía rectangular, ni simuladores comerciales que sean capaces de modelar estos materiales, no se han podido comparar las gráficas siguientes con los resultados de otros métodos. Se hace la comparación de los resultados obtenidos mediante las formulaciones directa e indirecta del CMM para comprobar las diferencias de comportamiento de ambas.

Se han simulado dos plasmas quirales diferentes, para los casos de parámetros constitutivos altos y bajos. El plasma quiral de valores bajos tiene $\epsilon_\infty=6$, $\xi_c=0.001$ mho y $\mu_r=1.2$, mientras que el plasma quiral de valores altos tiene $\epsilon_\infty=15$, $\xi_c=0.005$ mho y $\mu_r=2$. En ambos casos, se ha tomado $f_p=1.5$ GHz y $f_g=10$ GHz. Ambos casos se han simulado para los casos de magnetización en z y en y, lo que da lugar a cuatro situaciones físicas diferentes. La guía de onda es la WR-340 ($a=86.36$ mm, $b=43.18$ mm). Las posiciones en la guía de onda son $x_s=35.18$ mm, (centrado en x) $y_s=0$, $a_s=16$ mm, $b_s=30$ mm, y $c=10$ mm. Nótese que, aunque el material es no recíproco, su posición centrada en la guía convierte la estructura total en recíproca.

En Fig. 2, se realiza un estudio de convergencia para $f=2.45$ GHz. Se representa la parte imaginaria de la constante de propagación del modo fundamental de la guía inhomogénea normalizada al número de onda del vacío, en función del número de modos base empleados. En los casos de parámetros constitutivos bajos, a) y c), se comprueba que para 50 modos, la formulación indirecta ha llegado a un valor estable, mientras que la directa no lo hace hasta pasados los 150 modos. En el caso de los valores altos, b) y d), la formulación indirecta converge para unos 120 modos, mientras que la directa no ha convergido todavía cuando se usan 200 modos. Se observa un comportamiento similar en el caso de la convergencia para el caso de polarización en y y en z.

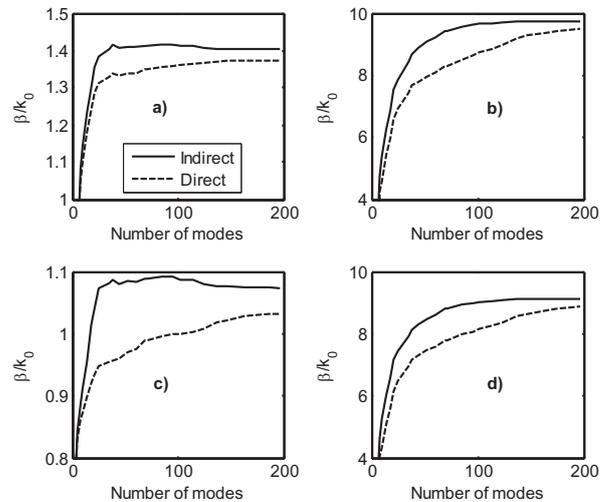


Fig. 2. Constante de propagación del modo fundamental normalizada al número de onda del vacío. $\epsilon_\infty=6$, $\xi_c=0.001$ mho y $\mu_r=1.2$, (a) y c) y $\epsilon_\infty=15$, $\xi_c=0.005$ mho y $\mu_r=2$, (b) y d). Magnetización del plasma según y (a) y b) y según z (c) y d). $f_p=1.5$ GHz, $f_g=10$ GHz en todos los casos. Las posiciones son $x_s=35.18$ mm, $y_s=0$, $a_s=16$ mm, $b_s=30$ mm.

A continuación, se representan los parámetros S de toda la estructura, respecto de la frecuencia, entre 2 y 3 GHz. Los resultados se han obtenido usando 120 modos base. En Fig. 3, se comparan las formulaciones directa e indirecta para el caso de parámetros constitutivos bajos y magnetización estática en z . Como es de esperar, los resultados son similares para ambas formulaciones, ya que, en Fig. 2, se ve que la discrepancia es pequeña para este caso y este número de modos.

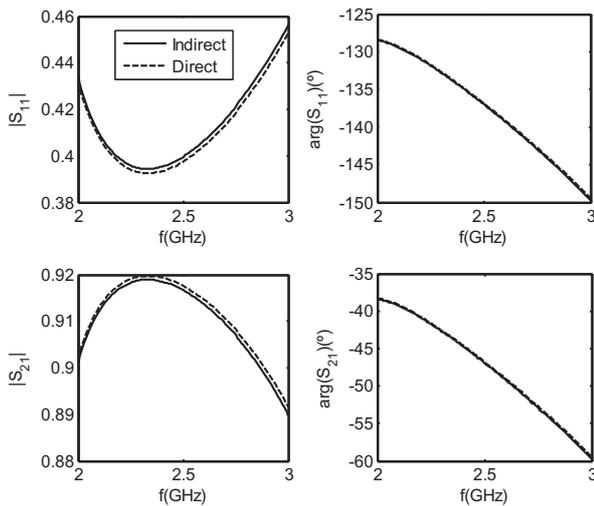


Fig. 3. Parámetros S_{11} y S_{21} entre 2 y 3 GHz de una guía de onda parcialmente rellena con un plasma quiral de $\epsilon_c=6$, $\xi_c=0.001$ mho y $\mu_z=1.2$. $f_p=1.5$ GHz, $f_g=10$ GHz, magnetización en z . Las posiciones son $x_s=35.18$ mm, $y_s=0$, $a_s=16$ mm, $b_s=30$ mm, y $c=10$ mm. Los resultados se han obtenido usando 120 modos base.

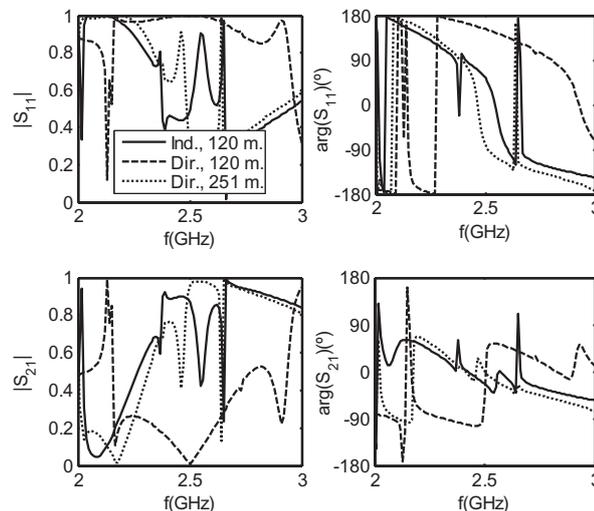


Fig. 4. Parámetros S_{11} y S_{21} entre 2 y 3 GHz de una guía de onda parcialmente rellena con un plasma quiral de $\epsilon_c=15$, $\xi_c=0.005$ mho y $\mu_z=2$. $f_p=1.5$ GHz, $f_g=10$ GHz, magnetización en z . Las posiciones son $x_s=35.18$ mm, $y_s=0$, $a_s=16$ mm, $b_s=30$ mm, y $c=10$ mm.

Posteriormente, en Fig. 4, se representan los parámetros S de toda la estructura, respecto de la frecuencia, entre 2 y 3 GHz, para el caso de parámetros constitutivos altos. Usando 120 modos base, los resultados entre ambas formulaciones difieren bastante esta vez, puesto que la formulación directa

no ha llegado a la convergencia con este número de modos. Por ello, se vuelve a simular la estructura empleando la formulación directa, pero usando esta vez 251 modos. En este último caso, los resultados son similares a los obtenidos con la formulación indirecta, con el perjuicio de la mayor carga computacional requerida.

IV. CONCLUSIONES

Se ha desarrollado la formulación indirecta del CMM para el caso más general de guías bianisótropas. Se ha realizado un análisis de convergencia para el caso de un plasma quiral en guía rectangular parcialmente rellena y se ha comprobado que los resultados de mejor convergencia de la formulación indirecta para materiales más sencillos se vuelven a obtener en este caso. Por tanto, a pesar de que, en principio, la formulación indirecta es computacionalmente más costosa, puesto que hay que invertir dos matrices más, en el fondo es mucho más eficiente, puesto que es necesario emplear un número de modos mucho menor para obtener una precisión dada. Se comprueba que el hecho de tener parámetros constitutivos grandes hace necesario un número mayor de modos para alcanzar la convergencia, siendo este hecho mucho más desfavorable en el caso de la formulación directa.

Se han obtenido resultados de parámetros S de una guía vacía con un tramo de guía parcialmente rellena de plasma quiral. Para el caso de parámetros constitutivos bajos, se puede comprobar la semejanza de los resultados obtenidos con ambas formulaciones, mientras que para el caso de parámetros constitutivos altos, los resultados difieren, puesto que aún no se ha alcanzado la convergencia en el caso de la formulación directa para el número de modos empleados.

REFERENCIAS

- [1] E.O. Kamenetskii, "Nonreciprocal microwave bianisotropic materials: reciprocity theorem and network reciprocity," *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, vol. 49, pp. 361–366, Mar 2001.
- [2] D. Pissort, F. Olyslager, "Study of eigenmodes in periodic waveguides using the Lorentz reciprocity theorem," *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. MTT52, pp. 542–553, Feb. 2004.
- [3] Ming Zang; K.K. Tamma, "Curvilinear lattice in chiral carbon nanotubes," *IEEE Trans. Nanotechnology*, vol. 3, pp. 425–431, Dec 2004.
- [4] J.D. Adam, L.E. Davis, G.F. Dionne, E.F. Schloemann, S.N. Stitzer, "Ferrite devices and materials," *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. MTT50, pp. 721–737, Mar. 2002.
- [5] N. Engheta, D.L. Jaggard, M.W. Kowarz, "Electromagnetic waves in Faraday chiral media," *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, vol. 40, pp. 367–374, April 1992.
- [6] S. A. Schelkunoff, "Generalized Telegraphist's equations for waveguides," *Bell Sys. Tech. J.*, vol. 31, pp. 784–801, July 1952.
- [7] K. Ogusu, "Numerical analysis of the rectangular dielectric waveguide and its modifications," *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 25, pp. 874–885, Nov. 1977.
- [8] Y. Xu and R. G. Bosisio, "An efficient method for study of general bi-anisotropic waveguides," *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 43, pp. 873–879, Apr. 1995.
- [9] J. Pitarch, José M. Catalá-Civera, M. A. Solano and Beatriz García Baños, "Efficient analysis of bianisotropic waveguides," *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, submitted for publication.