

Expresiones analíticas de capacidad de sistemas MIMO-OSFBC

Jesús Pérez, Jesús Ibáñez, Luis Vielva, Ignacio Santamaría
jperez@gas.dicom.unican.es

Dpto. de Ingeniería de Comunicaciones. Universidad de Cantabria. Avda. de los Castros s/n, 39005-Santander.

Abstract- Orthogonal frequency-division multiplexing (OFDM) combined with orthogonal space-frequency block coding (OSFBC) has been shown to be a simple and efficient means to exploit the inherent spatial diversity of multiple-input-multiple-output (MIMO) configurations in frequency-selective channels. In this paper we derive simple analytical closed-form expressions for the ergodic and outage capacity of OSFBC-OFDM systems assuming that the channel is unknown at the transmitter. The resulting expressions are simple functions of the spatial correlation matrices at the channel taps. They clearly reveal the dependence of the capacity on the channel and system parameters. Numerical results show the excellent accuracy of the derived expressions.

I. INTRODUCCIÓN

Una forma simple y eficiente de explotar la diversidad inherente a los sistemas MIMO-OFDM consiste en utilizar codificaciones ortogonales por bloques sobre las antenas transmisoras y los tonos OFDM. Estas codificaciones ortogonales se conocen como OSFBC. En [1] se proponen una codificaciones OSFBC que ofrecen máxima diversidad espacial (igual al producto entre el número de antenas transmisoras y el de antenas receptoras) con tasa máxima de transmisión (igual a la del código ortogonal utilizado), aunque incapaces de proporcionar diversidad frecuencial. Por otro lado, en [2] se proponen codificaciones OSFBC capaces de explotar la diversidad en frecuencia del canal, pero a costa de una disminución en la tasa de transmisión (menor que la del código ortogonal utilizado) [2]. En este trabajo nos centramos en códigos OSFBC de tasa máxima, por lo que estas últimas codificaciones no son consideradas aquí. Una ventaja inherente a las codificaciones espacio-frecuenciales ortogonales frente a las no ortogonales es su sencillez en la decodificación y en la detección. De hecho OSFBC permite una detección de máxima verosimilitud (ML) símbolo a símbolo. Por otro lado, las codificaciones no ortogonales pueden explotar la diversidad espacio-frecuencial del canal, con tasa máxima de transmisión, pero a costa de una mayor complejidad en la decodificación y en la detección [3], [4].

En el caso de codificaciones espacio-temporales ortogonales (asumiendo canales no selectivos en frecuencia) se han propuesto diferentes expresiones analíticas de capacidad ergódica y outage [5], [6], [7], [8] [9]. Sin embargo, a día de hoy, no se conocen expresiones cerradas de capacidad ergódica y outage para OSFBC. En este trabajo se derivan expresiones cerradas de capacidad ergódica y outage para sistemas MIMO-OSFBC cuando el canal es desconocido en el transmisor y conocido en el receptor. Estas expresiones muestran claramente la dependencia de la capacidad de OSFBC con los parámetros del canal y del sistema.

II. MODELO DE CANAL

Consideramos un modelo discreto de canal MIMO con n_T antenas transmisoras y n_R antenas receptoras. La respuesta del canal a las frecuencias de las subportadoras OFDM viene dada por

$$\mathbf{H}_k = \sum_{n=0}^{L-1} \mathbf{F}_n \exp(-j2\pi nk/K), \quad k = 0, 1, \dots, K, \quad (1)$$

donde K es el número de subportadoras OFDM y L es la longitud de la respuesta discreta del canal. Las matrices \mathbf{F}_n representan la respuesta impulsiva discreta del canal para los diferentes taps. Los elementos de las matrices \mathbf{F}_n son realizaciones de variables aleatorias Gaussianas complejas de media cero. Suponemos que las matrices \mathbf{F}_n de diferentes taps son incorreladas: $E[\text{vec}(\mathbf{F}_n) \text{vec}^H(\mathbf{F}_m)] = \mathbf{0}$. Dentro de cada matriz \mathbf{F}_n los términos están correlados de acuerdo a la matriz de correlación espacial $\mathbf{R}_n = E[\text{vec}(\mathbf{F}_n) \text{vec}^H(\mathbf{F}_n)]$. Por tanto los términos de las matrices \mathbf{R}_n vendrán dados por

$$\rho_n^{ij,ks} = E[f_n^{ij} (f_n^{ks})^*], \quad i, k = 1, \dots, n_R, \quad j, s = 1, \dots, n_T \quad (2)$$

donde f_n^{ij} es el elemento de \mathbf{F}_n correspondiente a la antena transmisora j -ésima y a la antena receptora i -ésima. Notese que los términos diagonales de las matrices \mathbf{R}_n determinan los perfiles de retardo de potencia del canal (PDP) para las distintas parejas de antenas transmisoras y receptoras. Así, el término n -ésimo del PDP para la antena transmisora j -ésima y para la antena receptora i -ésima será $p_n^{ij} = \rho_n^{ij,ij}$. Nótese que si el canal es balanceado espacialmente, existirá un PDP común para cualquier pareja de antenas transmisora-receptora. Se supone, sin pérdida de generalidad, que el canal está normalizado de forma que, en promedio, la suma de los términos de cada PDP es igual a uno.

$$\sum_{i=1}^{n_R} \sum_{j=1}^{n_T} \sum_{n=0}^{L-1} p_n^{ij} = \sum_{n=0}^{L-1} \text{Tr}(\mathbf{R}_n) = n_R n_T. \quad (3)$$

Sea γ_k la norma Frobenius al cuadrado de la respuesta del canal para la subportadora k -ésima: $\gamma_k = \|\mathbf{H}_k\|_F^2$. Debido a la naturaleza aleatoria del canal, los γ_k serán variables aleatorias. Se puede demostrar que las γ_k 's son idénticamente distribuidas, siendo su media, varianza y covarianza

$$\mu_\gamma = \sum_{n=0}^{L-1} \text{Tr}(\mathbf{R}_n), \quad (4)$$

$$\sigma_\gamma^2 = \text{var}[\gamma_k] = \sum_{n=0}^{L-1} \sum_{m=0}^{L-1} \text{Tr}(\mathbf{R}_n \mathbf{R}_m) = \|\mathbf{R}_S\|_F^2, \quad (5)$$

$$\sigma_\gamma^{k,s} = \sum_{n=0}^{L-1} \sum_{m=0}^{L-1} \text{Tr}(\mathbf{R}_n \mathbf{R}_m^H) e^{-j2\pi(k-s)(n-m)/K}, \quad (6)$$

donde \mathbf{R}_S es la suma de las matrices de correlación espacial.

III. CODIFICACIÓN OSFBC

En OSFBC, cada palabra de código (de tamaño $n_T \times K$) comprende un número $N = K/L_C$ de bloques ortogonales de tamaño $n_T \times L_C$, donde L_C es el número de portadoras OFDM comprendidas en el bloque [1]. Por ejemplo, en el caso de codificación de Alamouti las palabras código serían de esta forma

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} s_1 & -s_2^* & s_3 & -s_4^* & \cdots & s_{2N-1} & -s_{2N}^* \\ s_2 & s_1^* & s_4 & s_3^* & \cdots & s_{2N} & s_{2N-1}^* \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Nótese que la tasa del código OSFBC coincide con la tasa de la codificación ortogonal utilizada (tasa máxima): $R = n_S/L_C$, donde n_S es el número de símbolos en cada bloque ortogonal. Por ejemplo, en el caso de (7) $n_S = L_C = 2$, por tanto $R = 1$. OSFBC requiere que el número de subportadoras sea suficientemente grande (respecto al ancho de banda de coherencia del canal) para que la respuesta del canal en las L_C subportadoras de cada bloque ortogonal sea aproximadamente la misma [1]. Bajo esta suposición $\gamma_k = \gamma_{k+1} = \dots = \gamma_{k+L_C}$.

Debido a la codificación OSFBC, el canal MIMO-OFDM se puede ver como un conjunto de N canales equivalentes desacoplados con relación señal-a-ruido (SNR) efectiva dada por

$$SNR_n = \frac{\rho}{Rn_T} \gamma_{(n-1)L_C+1} = \dots = \frac{\rho}{Rn_T} \gamma_{(n-1)L_C+L_C}. \quad (8)$$

IV. CAPACIDAD DE SISTEMAS MIMO-OSFBC

Por cada canal OSFBC equivalente se transmiten n_S símbolos. Como en total se utilizan K subportadoras, la capacidad instantánea (para una realización dada del canal) será

$$C = \frac{1}{K} \sum_{n=1}^N n_S \log_2(1 + SNR_n). \quad (9)$$

Teniendo en cuenta (8), (9) se puede escribir así

$$C = \sum_{k=0}^{K-1} C_k = \frac{R}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \log_2 \left(1 + \rho \frac{\gamma_k}{n_T R} \right). \quad (10)$$

De acuerdo a (10), la capacidad instantánea es una función no lineal de los γ_k . Como el canal es aleatorio la capacidad instantánea también será aleatoria. La media y la varianza de C se puede aproximar en función de la media, varianza y covarianza de las γ_k 's [10]. Así, teniendo en cuenta (4), (5)

y (6), resultan las siguientes expresiones para la media y la varianza de C

$$\mu_C \approx R \log_2 \left(1 + \frac{\rho n_R}{R} \right) - \frac{R \rho^2 \log_2 e}{2n_T^2 (R + \rho n_R)^2} \|\mathbf{R}_S\|_F^2. \quad (11)$$

$$\sigma_C^2 \approx \left(\frac{R \rho \log_2 e}{n_T (R + \rho n_R)} \right)^2 \sum_{n=0}^{L-1} \|\mathbf{R}_n\|_F^2. \quad (12)$$

A. Capacidad ergódica

Si el canal es ergódico, la capacidad es el valor promedio de la capacidad instantánea sobre las realizaciones del canal [11]. Por lo tanto la capacidad ergódica vendrá dada por (11). Según esta expresión la capacidad ergódica es independiente del número de tonos OFDM. En $\|\mathbf{R}_S\|_F^2$ podemos distinguir dos contribuciones. La primera es la contribución debida a los términos de la diagonal que siempre es igual a $n_R n_T$ (por la normalización del canal de (3)). Por lo tanto, los PDP's no influyen en la capacidad ergódica. En otras palabras, la capacidad ergódica es independiente de la selectividad es frecuencia del canal. La segunda contribución en $\|\mathbf{R}_S\|_F^2$ es debida a los términos de fuera de la diagonal de las matrices \mathbf{R}_n . Esta contribución será cero si el canal es incorrelado espacialmente y llevará a valores altos de μ_C . Pero también se pueden dar situaciones particulares en que habiendo alta correlación espacial los términos de \mathbf{R}_S fuera de la diagonal principal sean muy pequeños. En estos casos la capacidad ergódica será similar a la del canal espacialmente incorrelado. Por lo tanto, alta correlación espacial no siempre produce baja capacidad ergódica. En el caso $L = 1$ el canal es plano en frecuencia y (11) se reduce a la expresión obtenida en [9].

B. Capacidad Outage

Si el canal es cuasi-estático (no ergódico) se utiliza la capacidad outage como métrica [11]. Para obtener una expresión para la capacidad outage, aproximamos la función de probabilidad de C por la de una Gaussiana. Entonces la capacidad outage para un $q\%$ de las realizaciones del canal será

$$C_q \approx \mu_C + \sigma_C \sqrt{2} \text{erfc}^{-1} \left(2 - \frac{q}{50} \right), \quad (13)$$

donde $\text{erfc}(x)$ es la función de error complementaria. Ver que cuanto mayor es σ_C menor es la capacidad outage. Según estas aproximaciones la capacidad outage tampoco depende del número de subportadoras OFDM (K).

En el caso particular de canales balanceados espacialmente y con una matriz de correlación común, se cumple que $\mathbf{R}_n = p_n \mathbf{R}$, donde \mathbf{R} es la matriz de correlación común, con 1's en la diagonal principal. Este canal es típico cuando las antenas están muy juntas en sus respectivos arrays y estos están rodeados por dispersores locales. En este caso

$$\|\mathbf{R}_S\|_F^2 = \|\mathbf{R}\|_F^2, \quad \sum_{n=0}^{L-1} \|\mathbf{R}_n\|_F^2 = \|\mathbf{R}\|_F^2 \sum_{n=0}^{L-1} p_n^2. \quad (14)$$

Por lo tanto, la capacidad outage depende de los valores específicos del PDP, pero no de los retardos asociados a los valores del PDP. Por ejemplo, en canales de dos rayos la

capacidad outage siempre será la misma independientemente del retardo entre los dos rayos. En consecuencia, la capacidad no depende de la selectividad en frecuencia del canal, sino de la variabilidad de los valores del PDP, independientemente de su retardo.

En el caso $L = 1$ el canal es plano en frecuencia y la expresión de la capacidad outage se reduce a la obtenida en [8].

V. RESULTADOS

En las gráficas siguientes se comparan las predicciones analíticas de capacidad outage obtenidas con (13) con resultados obtenidos mediante simulaciones de Monte Carlo (con 20000 simulaciones independientes para cada valor de capacidad), para diferentes canales y configuraciones MIMO. En todos los casos los resultados analíticos están representados por marcadores y los resultados de las simulaciones de Monte Carlo por líneas continuas. Teniendo en cuenta que la capacidad outage depende fuertemente de μ_C (ver 13), una buena aproximación de la capacidad outage implica una buena aproximación de la capacidad ergódica.

La figura 1 muestra la capacidad outage (para una probabilidad outage del 5%), en función de la longitud del canal, para diferentes configuraciones MIMO y diferentes tasas de código. En todos los casos se supone un canal de dos rayos con igual potencia. Las diferentes longitudes del canal corresponden a diferentes retardos entre los dos rayos. El canal se supone espacialmente incorrelado. La SNR promedio en el receptor es $\rho = 10$ dB en todos los casos. Para las simulaciones de Monte Carlo se supuso que el número de tonos OFDM es $K = 512$. Se puede observar que la capacidad es prácticamente constante, independientemente de la longitud del canal lo que demuestra que la selectividad en frecuencia del canal no influye en la capacidad. La gráfica muestra que la aproximación analítica se ajusta muy bien a los valores de capacidad, siendo el error relativo menor de 2.5% en todos los casos.

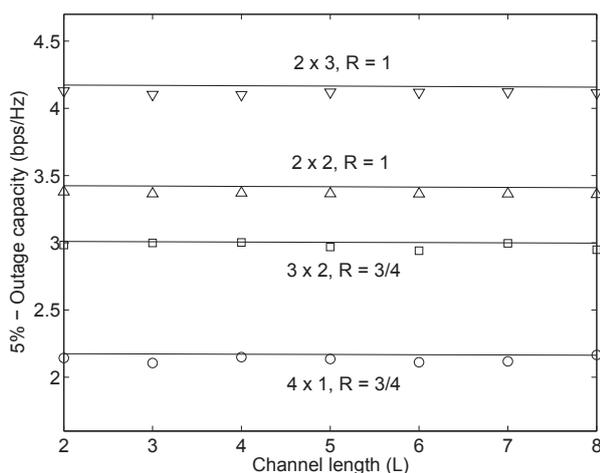


Fig. 1. Capacidad Outage en función de la longitud del canal para diferentes configuraciones MIMO

La figura 2 muestra resultados de capacidad outage frente a probabilidad outage para un canal MIMO 3×3 y una tasa de código $R = 3/4$. El número de tonos OFDM se supuso

$K = 64$. Las diferentes curvas corresponden a canales de diferentes longitudes. Se suponen PDP's uniformes. Además se supone que la SNR promedio es $\rho = 10$ dB en todos los casos. El canal es espacialmente correlado con la misma matriz de correlación (\mathbf{R}) para todos los taps. Esta matriz de correlación fue obtenida según el modelo de correlación de Jakes [12], suponiendo arrays lineales con separación entre las antenas igual a $\lambda/5$, tanto en el transmisor como en el receptor. La figura muestra que la aproximación analítica funciona muy bien en todos los casos. Los máximos errores relativos son 2.8%, 1.1% and 0.24% para los casos $L = 2$, $L = 4$ y $L = 8$, respectivamente.

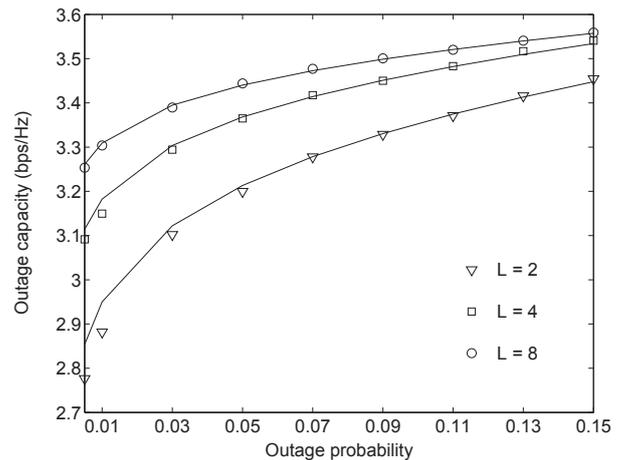


Fig. 2. Capacidad Outage de un canal MIMO 3×3 , en función de la probabilidad outage, para un canal de dos rayos.

En los siguientes resultados se considera un canal correlado espacialmente en recepción e incorrelado en transmisión, con matrices de correlación espacial diferentes para los distintos taps. Estas matrices de correlación fueron obtenidas con el modelo de canal de [13] [14]. Este modelo supone un canal MIMO espacialmente balanceado con arrays lineales en el transmisor y el receptor. El modelo supone que cada tap del canal es debido a un conjunto de ondas que llegan al receptor con un mismo retardo. En cada tap, la dirección de llegada de las ondas (respecto el eje del array) sigue una distribución Gaussiana alrededor de un valor promedio ($\bar{\theta}_n$) con una desviación estándar σ_n^θ .

La figura 3 muestra resultados de capacidad outage (para probabilidad outage del 1%) en función de la separación entre las antenas receptoras para diferentes configuraciones MIMO. En este caso la codificación OSFBC utiliza el código de Alamouti, luego $R = 1$. El número de tonos OFDM es $K = 128$ y la SNR promedio es $\rho = 15$ dB. Se considera un canal con $L = 6$ y $\bar{\theta}_n = (n + 6)\pi/16$, $n = 0, \dots, L - 1$. Es decir, los valores medios de los ángulos de llegada están distribuidos uniformemente en un arco de $5\pi/16$ radianes. Se supone un PDP uniforme y la misma desviación estándar en las direcciones de llegada para todos los taps: $\sigma_n^\theta = (\pi/36)$. Una vez más los resultados analíticos se ajustan muy bien a las simulaciones de Monte Carlo, siendo el máximo error relativo igual a 2.8%.

Utilizando el modelo de canal anterior, la figura 4 muestra la capacidad outage (para probabilidad outage del 2%) frente a la

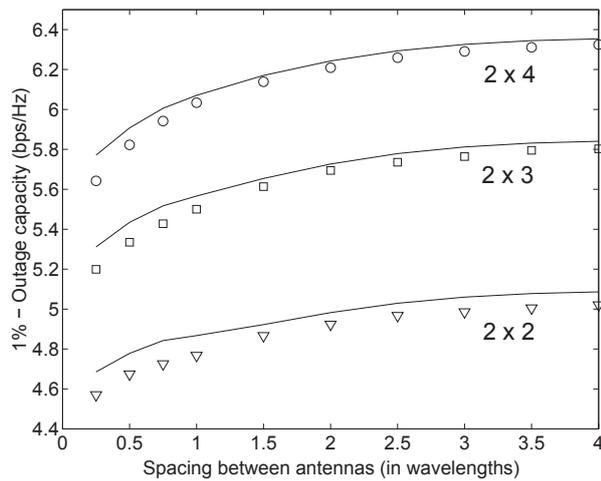


Fig. 3. Capacidad Outage (para 1% de probabilidad outage), de diferentes configuraciones MIMO, en función de la separación entre antenas receptoras.

SNR promedio, suponiendo que la separación entre las antenas receptoras es una longitud de onda. El resto de parámetros del canal y del sistema son iguales que en el caso anterior (figura 3). En este caso el error relativo máximo fue del 2.7%.

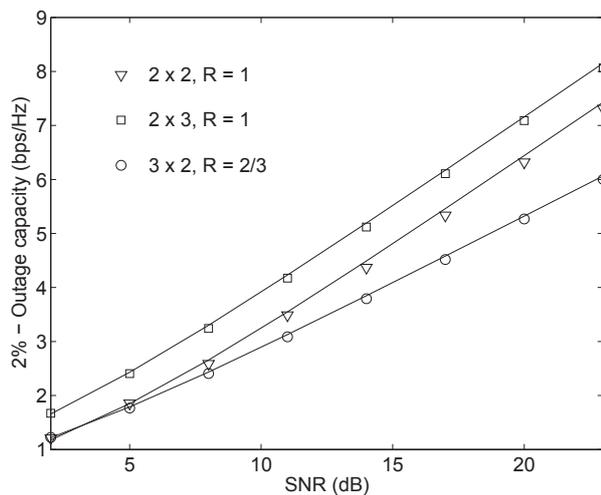


Fig. 4. Capacidad Outage (para 2% de probabilidad outage) en función de la SNR promedio en el receptor.

VI. CONCLUSIONES

En este trabajo se proponen expresiones analíticas muy precisas para la capacidad ergódica y outage de sistemas MIMO que utilizan codificación OSFBC. Las expresiones propuestas son funciones sencillas de las matrices de correlación espacial del canal y muestran claramente la dependencia de la capacidad con los parámetros del canal y del sistema MIMO. Se demuestra que, en canales espacialmente balanceados, la capacidad outage está determinada por los valores específicos del PDP, independiente de su retardo. La capacidad ergódica es totalmente independiente del PDP del canal. Por tanto, se puede concluir que la capacidad no depende de la selectividad en frecuencia del canal. También se demuestra que canales espacialmente correlados pueden tener una capacidad ergódica similar a los correspondientes canales incorrelados. Por otro

lado, la selectividad espacial siempre mejora la capacidad outage.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado por el Ministerio de Educación y Ciencia bajo el proyecto TEC2004-06451-C05-02.

REFERENCIAS

- [1] K. F. Lee and D. B. Williams, "A space-frequency transmitter diversity technique for ofdm systems," in *Proc. IEEE GLOBECOM'00*, vol. 3, San Francisco, Cal., USA, November 2000, pp. 1473-1477.
- [2] W. Su, Z. Safar, M. Olfat, and K. J. R. Liu, "Obtaining full-diversity space-frequency codes from space-time codes via mapping," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 51, pp. 2905-2916, November 2003.
- [3] W. Su, Z. Safar, and K. J. R. Liu, "Full-rate full-diversity space-frequency codes with optimum coding advantage," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 51, pp. 229-249, January 2005.
- [4] L. Shao and S. Roy, "Rate-one space-frequency block codes with maximum diversity for mimo-ofdm," *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 4, pp. 1674-1687, July 2005.
- [5] R. U. Nabar, H. Bölcskei, and A. J. Paulraj, "Outage properties of space-time block codes in correlated rayleigh or rician fading environments," in *Proc. IEEE ICASSP 2002*, Orlando, FL, May 2002, pp. 2381-2384.
- [6] L. Musavian, M. Dohler, M. R. Nakhai, and A. H. Aghvami, "Closed-form capacity expressions of orthogonalized correlated mimo channels," *IEEE Communications Letters*, vol. 8, pp. 365-367, June 2004.
- [7] M. Dohler and H. Aghvami, "Information outage probability of distributed stbcs over nakagami fading channels," *IEEE Communications Letters*, vol. 8, pp. 437-439, July 2004.
- [8] J. Pérez, J. Ibáñez, L. Vielva, and I. Santamaria, "Closed-form approximation for the outage capacity of orthogonal stbc," *IEEE Communications Letters*, vol. 9, pp. 961-963, November 2005.
- [9] J. Pérez, J. Ibáñez, L. Vielva, D. J. Pérez-Blanco, and I. Santamaria, "Tight closed-form approximation for the ergodic capacity of orthogonal stbc," *To be published in IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2006.
- [10] K. S. Shanmugan and A. M. Breipohl, *Random Signals*. John Wiley and Sons, 1988.
- [11] E. Biglieri, J. Proakis, and S. Shamai, "Fading channels: Information-theoretic and communications aspects," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 44(6), pp. 2619-2692, October 1998.
- [12] W. C. Jakes, *Microwave Mobile Communications*. New York: Wiley, 1974.
- [13] H. Bölcskei, D. Gesbert, and A. J. Paulraj, "On the capacity of ofdm-based spatial multiplexing systems," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 50, pp. 225-234, February 2002.
- [14] H. Bölcskei, M. Borgmann, and A. J. Paulraj, "Impact of the propagation environment on the performance of space-frequency coded mimo-ofdm," *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 21, pp. 427-439, April 2003.