

Formulación Semianalítica para el Análisis de Estabilidad de las Soluciones Coexistentes en Sistemas de Osciladores Acoplados

Ana Collado⁽¹⁾, Almudena Suárez⁽¹⁾, Sergio Sancho⁽¹⁾.

ana@dicom.unican.es, suarez@unican.es, sanchosm@unican.es.

⁽¹⁾ Dpto. de Ingeniería de Comunicaciones. Universidad de Cantabria. 39005 Santander.

Abstract- Coupled oscillator systems with constant phase-shift between elements, are of great interest in beam steering applications. The objective of this work is to study the stability of the multiple solutions coexisting with the constant phase-shift one. A semi-analytic formulation, based in a perturbed model of the single oscillator, has been developed to study these systems in a more efficient way. The stability of the solutions is obtained from a linearization of the perturbed system associated to the semi-analytic formulation. The presented techniques allow a global understanding of the phenomena that delimit the maximum constant phase-shift range in these systems. The technique has been applied to the synthesis of a FET-based three element array at 5 GHz.

I. INTRODUCCIÓN

Los sistemas de osciladores acoplados han demostrado su utilidad en aplicaciones de combinación de potencia o para variar la dirección de apuntamiento del haz en *phased-arrays* [1-3]. El control del apuntamiento del haz, puede conseguirse sintetizando una distribución de desfases constantes entre los distintos elementos osciladores que forman el sistema. La dirección del haz se modifica variando la distribución de desfase constante entre los distintos elementos [1,2]. En arrays unidimensionales esta variación se consigue desintonizando la frecuencia de oscilación libre de los osciladores en los extremos de la cadena en direcciones opuestas mediante algún elemento de sintonía. Sin embargo la solución de desfase constante sintetizada para un determinado valor de los elementos de sintonía, no es la única [2]. Coexistiendo con ella existen otras 2^{N-1} soluciones donde N es el número de elementos del array unidimensional.

Ya en trabajos anteriores [3] se han presentado análisis de estos sistemas basados en simulaciones de balance armónico (BA). En estos trabajos, solo se consideraba la solución de desfase constante y se realizaba un estudio sobre como evolucionaba esta solución en función de los elementos de sintonía. Sin embargo, al realizar los análisis de estabilidad, se observó que en los extremos de la banda de funcionamiento, la solución de desfase constante dejaba de ser estable y el sistema evolucionaba hacia una solución estable en la que los desfases entre elementos no eran constantes. Con las técnicas utilizadas no era posible determinar si estas nuevas soluciones coexistían con la de desfase constante, antes de su pérdida de estabilidad.

El objetivo de este trabajo, es obtener las distintas soluciones coexistentes en estos sistemas y estudiar su estabilidad. Con este estudio se pretende obtener una explicación a los fenómenos que limitan el rango máximo de desfases constantes que pueden sintetizarse, y analizar como afectan el resto de soluciones coexistentes a esta solución. El objetivo final será asegurar que la solución de desfase constante es la única solución estable en el rango de valores de los elementos de sintonía que se va a utilizar.

En arrays de osciladores acoplados con un número alto de elementos, las simulaciones de BA requieren de tiempos de simulación muy altos, por lo tanto se ha desarrollado una formulación semianalítica que permite obtener las distintas soluciones coexistentes de una manera más eficiente. Esta formulación se basa en la utilización de un modelo perturbado del elemento oscilador antes de conectarlo a la cadena obtenida mediante una simulación de BA. Para el estudio de la estabilidad, se realiza un análisis de perturbaciones en el sistema no lineal de orden reducido. A continuación se linealiza el sistema en torno a cada una de las soluciones de estado estacionario obtenidas. La técnica propuesta se ha aplicado al diseño de un array de 3 elementos osciladores basados en FET a 5GHz.

II. OBTENCIÓN DE LAS MÚLTIPLES SOLUCIONES

La formulación semianalítica propuesta para obtener las múltiples soluciones coexistentes en un array unidimensional de N osciladores (Fig.1), esta basada en un modelo perturbado de cada elemento del array. En un caso de acoplo débil, los osciladores que forman la cadena pueden ser modelados mediante un desarrollo en serie de Taylor de primer orden de la admitancia Y en torno a la solución libre del oscilador. Esta admitancia Y, se define como la relación entre la corriente y la tensión en el nodo a través del cual el elemento oscilador se conecta al sistema. Al conectarse los distintos elementos osciladores mediante la red de acoplo, y debido a la mutua influencia entre ellos, se puede escribir la función admitancia Y de la manera presentada en (1), donde el índice 0 indica el valor de las variables del oscilador para el caso de oscilación libre. Para los elementos en los extremos del array, aparece una derivada adicional con respecto al voltaje de sintonía VT. En la formulación semianalítica la red

de acoplo se representa mediante una matriz de admitancias Y_C , con N puertos.

$$Y_1(V_1, \omega) = Y_{V_0} \Delta V_1 + Y_{\omega_0} \Delta \omega + Y_{V_{T_0}} \Delta V_{T_0}$$

$$Y_2(V_2, \omega) = Y_{V_0} \Delta V_2 + Y_{\omega_0} \Delta \omega \quad (1)$$

⋮

$$Y_N(V_N, \omega) = Y_{V_0} \Delta V_N + Y_{\omega_0} \Delta \omega + Y_{V_{T_0}} \Delta V_{T_0}$$

Si se aplican las leyes de Kirchoff, al sistema de osciladores acoplados, se obtiene el siguiente sistema no-lineal de segundo orden, que modela el comportamiento del array:

$$\bar{H}(\bar{V}, \bar{\phi}, \omega) = \begin{pmatrix} Y_V & 0 & \dots & 0 & Y_{\omega} V_1 e^{j\phi_1} \\ 0 & Y_V & & & Y_{\omega} V_2 e^{j\phi_2} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & Y_V & Y_{\omega} V_N e^{j\phi_N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 e^{j\phi_1} (V_1 - V_1^0) \\ \vdots \\ V_N e^{j\phi_N} (V_N - V_N^0) \\ \omega - \omega_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y_{V_T} & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & Y_{V_T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 e^{j\phi_1} \Delta V_{T_1} \\ \vdots \\ V_N e^{j\phi_N} \Delta V_{T_N} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y_{C11}(\omega) & \dots & Y_{C1N}(\omega) \\ \vdots & & \vdots \\ Y_{CN1}(\omega) & \dots & Y_{CNN}(\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 e^{j\phi_1} \\ V_2 e^{j\phi_2} \\ \vdots \\ V_N e^{j\phi_N} \end{pmatrix} = \bar{0} \quad (2)$$

donde la fase ϕ_1 del primer oscilador se puede fijar arbitrariamente a un valor 0, debido a la autonomía del sistema. Las variables del sistema que se calculan son las amplitudes de salida de los osciladores \bar{V} , las fases $\bar{\phi}$ y la frecuencia del sistema ω . La variables se calculan para cumplir $\bar{H}(\bar{V}, \bar{\phi}, \omega) = 0$.

Las derivadas necesarias para modelar el elemento oscilador, se obtienen utilizando diferencia finitas. Para ello se conecta un GA en el nodo de salida del oscilador libre. Este GA tiene que cumplir la condición de no-perturbación $Y(V_{\omega_0}, \omega_0, V_{T_0}) = 0$ a la frecuencia de oscilación libre. A continuación se consideran incrementos en V , ω y V_T y se obtienen las derivadas Y_V, Y_{ω} y Y_{V_T} mediante simulaciones de BA.

Debido a los términos con $\cos()$ y $\sin()$ en (2), para cada par de valores de las tensiones de sintonía V_{T_1}, V_{T_N} coexisten 2^{N-1} soluciones de estado estacionario. El conjunto de pares de valores V_{T_1}, V_{T_N} que proporcionan un desfase constante $\Delta\phi(V_{T_1}, V_{T_N})$ se obtiene imponiendo en el sistema $\Delta\phi_{n+1,n} = \phi_{n+1} - \phi_n = \Delta\phi$ con $n=1, \dots, N-1$ y resolviendo (2) en función de \bar{V} , ω , V_{T_1} y V_{T_N} . A este conjunto de pares de valores lo llamaremos \mathcal{V}_T , y forma una curva cerrada en el plano (V_{T_1}, V_{T_N}) , debido a la periodicidad de (2) con el valor de los desfases constantes $\Delta\phi$.

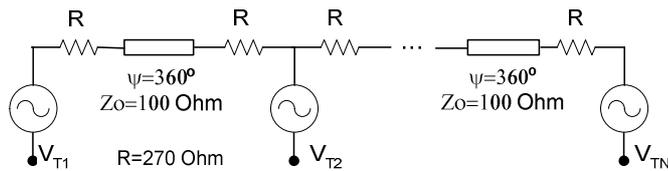


Fig. 1 Array unidimensional de N osciladores acoplados. La variación del desfase constante entre elementos se consigue variando V_{T_1} y V_{T_N} .

La técnica se ha utilizado para el estudio de las soluciones en un array de tres osciladores acoplados basados en FET a

5GHz. El transistor utilizado es el NE3210S01 y como elementos de sintonía se han utilizado diodos varactores MACOM MA46H070. La red de acoplo del sistema esta formada por una línea microstrip cargada con dos resistencias (Fig.1).

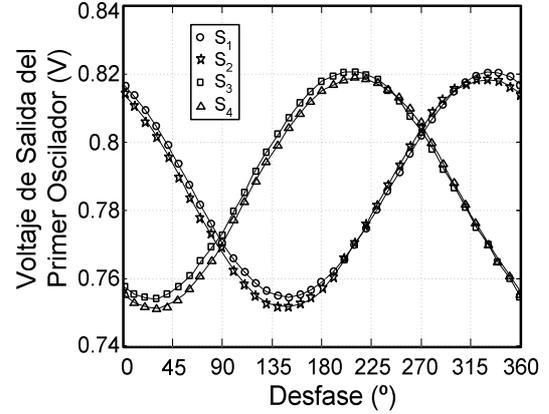


Fig. 2 Evolución de las 4 soluciones coexistentes en un array de 3 elementos, en función del desfase constante $\Delta\phi(V_{T_1}, V_{T_3})$.

En Fig.2 se ha representado la solución correspondiente al primer oscilador (S_1) en función del desfase constante. Para cada par de valores $(V_{T_1}, V_{T_N}) \in \mathcal{V}_T$ existen otras $2^{N-1}-1$ soluciones periódicas $S_k, k \neq 1$, que presentan un desfase no constante entre los elementos del array. Para poder obtener todas estas soluciones ya sea con BA o con el modelo del sistema (2), es necesario proporcionar al Newton-Raphson un vector de valores iniciales diferente para cada una de estas soluciones.

El proceso que se ha seguido para poder obtener todas las soluciones es el siguiente. En primer lugar se impone la solución de desfase constante $\Delta\phi=0^\circ$, y se obtiene el par de valores de tensiones de sintonía $(V_{T_{10}}, V_{T_{N0}})$ que proporcionan este desfase. A continuación se resuelven 2^{N-1} Newton-Raphson de (2) en función de las variables $(\bar{V}, \bar{\phi}, \omega)$ manteniendo fijos el par $(V_{T_{10}}, V_{T_{N0}})$ y utilizando 2^{N-1} vectores de condiciones iniciales. Para el par de valores $(V_{T_{10}}, V_{T_{N0}})$ inicial los vectores de valores iniciales en términos de la fase de los distintos osciladores de la cadena mantienen una relación que viene dada por las 2^{N-1} combinaciones binarias de 0 y π rad.

$$\begin{aligned} k=1, & \quad \bar{\phi}^1 = 0, \dots, 0, 0, \\ k=2, & \quad \bar{\phi}^2 = 0, \dots, 0, \pi, \dots \\ k=2^{N-1}, & \quad \bar{\phi}^{2^{N-1}} = \pi, \dots, \pi, \pi \end{aligned} \quad (3)$$

Debido a la simetría del sistema, el valor de las fases de los osciladores para las distintas 2^{N-1} soluciones está cercano a (3) en el punto de oscilación en fase $\Delta\phi=0^\circ$. Una vez que se han obtenido las 2^{N-1} soluciones para el par de valores de tensiones de sintonía inicial $(V_{T_{10}}, V_{T_{N0}})$, se incrementa el valor del desfase constante y se calcula el nuevo par de valores $(V_{T_1}, V_{T_N}) \in \mathcal{V}_T$ necesarios para sintetizarlo resolviendo (2) en términos de $\bar{V}, \omega, V_{T_1}, V_{T_N}$. Las otras $2^{N-1}-1$ soluciones que coexisten con esta, se inicializan independientemente utilizando como vector de condiciones iniciales los valores de las variables obtenidas en el paso anterior $S_k(\Delta\phi=0^\circ)$. Este proceso se repite para todos los valores de $\Delta\phi$ siguiendo una técnica de continuación.

El estudio sobre la multiplicidad de las soluciones se ha realizado sobre el sistema de tres osciladores acoplados, mencionado anteriormente. En Fig.2 se puede ver la evolución de las 4 soluciones que coexisten en el array en función de $\Delta\phi(\mathcal{V}_T) \equiv \Delta\phi(V_{T1}, V_{T3} \in \mathcal{V}_T)$. Para poder obtener las 4 soluciones en el simulador de BA, ha sido necesario proporcionar como valor inicial de las variables el valor obtenido con el método propuesto.

Para entender mejor la evolución de las distintas soluciones S_k , se ha realizado un análisis de las soluciones del sistema en función de un solo parámetro. Para ello se ha fijado V_{T1} a distintos valores y se ha analizado la evolución de las soluciones en función de V_{T3} . Al realizar este análisis sobre el sistema de 3 osciladores acoplados, obtenemos dos curvas cerradas C_1 y C_2 , para cada valor de V_{T1} . En Fig.3 se ha representado la amplitud del oscilador central V_2 en función de V_{T3} para tres valores distintos de V_{T1} .

Primero se obtuvieron las curvas C_1 y C_2 , correspondientes a $V_{T1}=0.5V$. En estas curvas solo hay un punto de desfase constante $\Delta\phi$, que corresponde a $\Delta\phi(V_{T1}=0.5, V_{T3}=0.5)=0^\circ$. Está situado en la parte superior de la curva C_1 y para el par de valores $(V_{T1}=0.5, V_{T3}=0.5)$ que llevan a este desfase constante, coexisten otras tres soluciones, una en la sección inferior de C_1 y las otras dos en las secciones superior e inferior de C_2 . Para estas otras tres soluciones el desfase entre osciladores no es constante.

El punto correspondiente a $\Delta\phi=60^\circ$ se obtiene para el par $V_{T1}=0.39V$ y $V_{T3}=0.61V$. Si representamos las curvas C_1 y C_2 que se obtienen fijando $V_{T1}=0.39V$ y realizando el análisis en función de V_{T3} , puede verse (Fig.3) que el punto correspondiente a $\Delta\phi=60^\circ$, sigue estando en la parte superior de C_1 , aunque se ha desplazado hacia la derecha. El mismo análisis se ha realizado para $\Delta\phi=-60^\circ$. Si representamos la curva correspondiente a los puntos de desfase constante $\Delta\phi=(0, 2\pi)$ podemos ver que no es más que la envolvente de los puntos que se van desplazando a lo largo de C_1 y C_2 .

III. ESTABILIDAD DE LAS SOLUCIONES COEXISTENTES

Para realizar el análisis de estabilidad, se introduce una pequeña perturbación en las variables del sistema (2). Este sistema perturbado se linealiza en torno a cada una de las soluciones a estudiar S_k . Para obtener las ecuaciones en (2), cada oscilador se ha modelado a partir de sus derivadas Y_V y Y_ω . Esta aproximación, limita la detección de inestabilidades a variaciones pequeñas en la frecuencia. En el análisis de estabilidad, se consideran los siguientes incrementos en las variables $\Delta V_1(t), \dots, \Delta V_N(t), \Delta \phi_1(t), \dots, \Delta \phi_N(t)$. La perturbación en frecuencia es compleja y se puede expresar: $\Delta \omega = -j\Delta \dot{V}_n / V_n + \Delta \dot{\phi}_n$ [6]. Esto nos lleva a (4) que es un sistema Lineal Invariante con el Tiempo (LTI) y su estabilidad se comprueba obteniendo los valores propios de la matriz de perturbación JH asociada al sistema.

El estudio de la estabilidad se ha realizado a lo largo de las curvas C_1 y C_2 para el valor $V_{T1}=0.45V$, que corresponde a las curvas que contienen $\Delta\phi=20^\circ$. En Fig.4 se puede ver la variación de los valores propios dominantes. Para C_1 se ha representado un valor propio dominante y para C_2 se han representado dos. La curva C_2 para este caso en concreto, es inestable en todas sus secciones. En el caso de la curva C_1 ,

solo su sección superior es estable. Esta sección estable esta limitada por los dos puntos de retorno (PR) en C_1 , donde se cumple (5).

$$H_\omega^{kl}(\Delta \dot{\phi}_l(t) - j\Delta \dot{V}_l(t)/V_l) + \sum_{i=1}^N H_{V_i}^{kl} \Delta V_i(t) + H_{\phi_i}^{kl} \Delta \phi_i(t) = 0, \dots,$$

$$H_\omega^{kN}(\Delta \dot{\phi}_1(t) - j\Delta \dot{V}_N(t)/V_N) + \sum_{i=1}^N H_{V_i}^{kN} \Delta V_i(t) + H_{\phi_i}^{kN} \Delta \phi_i(t) = 0 \quad (4)$$

$$\det\{JH_{C1}(\bar{V}, \bar{\phi}, \omega, V_{T1}, V_{T3})\} = 0 \quad (5)$$

Estos puntos de retorno en la curva C_1 corresponden a bifurcaciones locales/globales. A partir de estos puntos, el sistema pierde la sincronía. Para valores de V_{T3} fuera del rango correspondiente a estos puntos, el sistema funciona en un régimen quasiperiódico.

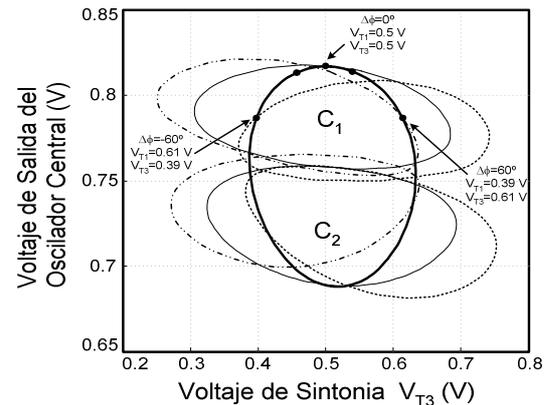


Fig. 3 Array de 3 elementos osciladores basados en FET. Evolución de las 4 soluciones coexistentes en función de V_{T3} , para distintos valores de V_{T1} . La envolvente de todos los puntos de desfase constante esta representada en negrita.

A continuación nos centramos en la solución de desfase constante entre osciladores. Para cambiar este desfase constante es necesaria la variación simultánea de V_{T1} y V_{T3} , lo que implica que estamos en el caso de un sistema con dos parámetros. En Fig.3 la solución de desfase constante $\Delta\phi$ corresponde a una familia de puntos, cada uno de ellos perteneciente a una curva C_1 (y por lo tanto a un valor de V_{T1}) distinta. El punto correspondiente a la solución de desfase constante, se va desplazando en las curvas C_1 hasta coincidir con el PR. El siguiente valor de desfase constante $\Delta\phi$, pertenecerá a la sección inferior de C_2 . Las soluciones que pertenecen a esta sección, son inestables, es decir, para el par de valores V_{T1}, V_{T3} donde aparece el PR, la solución de desfase constante $\Delta\phi$ pasa a ser inestable. Este punto indica el desfase constante máximo $\Delta\phi_{max}$ que puede conseguirse. Para los pares de valores V_{T1}, V_{T3} , para los que existe una solución matemática con valores de $\Delta\phi$ mayores que el máximo estable $\Delta\phi_{max}$, la solución estable esta situada en la sección superior de C_1 , que corresponde a una solución de desfase no constante. Como puede verse, en la curva $\Delta\phi(\mathcal{V}_T)$ en la que se mueven los dos parámetros V_{T1}, V_{T3} , el punto donde se pierde la estabilidad de la solución de desfase constante, no corresponde a un PR. Sin embargo en las curvas en las que solo se mueve un parámetro V_{T3} , como son C_1 y C_2 , el punto de retorno si corresponde a una pérdida de estabilidad.

En Fig.5 puede verse una explicación gráfica de lo que sucede. La curva $\Delta\phi(\mathcal{V}_T)$, esta representada con una línea continua. En la misma figura, se ha representado las curvas C_1

y C_2 correspondientes a $V_{T1}=0.38V$ ($\Delta\phi=90^\circ$) y la curvas C_1 y C_2 correspondientes a $V_{T1}=0.39V$ ($\Delta\phi=100^\circ$). La solución de desfase constante $\Delta\phi=90^\circ$, corresponde al PR derecho de la curva C_1 . En este punto la curva $\Delta\phi(\%T)$ pasa a ser inestable, sin que presente ningún PR, debido a que nos encontramos ante un sistema de dos parámetros.

A partir de $\Delta\phi_{max}=90^\circ$ los puntos correspondientes a la solución de desfase constante, caen en la sección inferior de C_2 . Este es el caso de $\Delta\phi=100^\circ$, representado en Fig.5. Ahora la solución estable no corresponde a $\Delta\phi=100^\circ$ en $C_2(V_{T1}=0.39V)$, sino que pertenece siempre a la sección superior de $C_1(V_{T1}=0.39V)$. Esta nueva solución estable no presenta desfase constante entre los osciladores de la cadena.

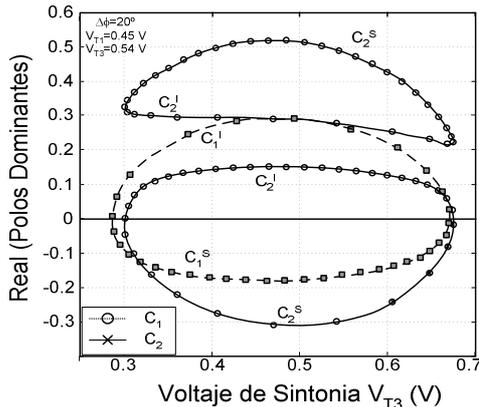


Fig. 4 Análisis de estabilidad a lo largo de las curvas C_1 y C_2 para un valor $V_{T1}=0.45V$.

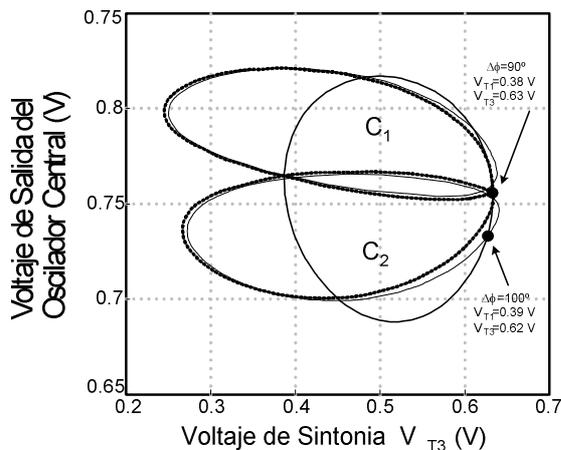


Fig. 5 Evolución de la solución de desfase constante en función de V_{T3} . También están representadas las curvas C_1 y C_2 que contienen los puntos de desfase constante $\Delta\phi=90^\circ$ y $\Delta\phi=100^\circ$.

Para verificar los resultados obtenidos en simulación, se implementó el array a 5GHz. En Fig.6 puede verse la comparación entre simulaciones (línea continua) y medidas (línea discontinua) en el plano (V_{T1}, V_{T3}) . El rango máximo de desfases constantes obtenido en medida ha sido $[-78.2^\circ, 70^\circ]$. En la misma figura se pueden ver la curva $\Delta\phi(\%T)$ obtenida en simulación. Solo las soluciones pertenecientes a la sección superior de esta curva son estables y por lo tanto observables.

En Fig.6 podemos ver también el lugar de PR de C_1 obtenido en simulación mediante la resolución de (5). Los dos puntos en los que el lugar de PR y $\Delta\phi(\%T)$ se unen corresponden a -90° y $+90^\circ$, que son los últimos valores de desfase constante estables. El lugar de puntos de retorno de C_1 , también se ha medido. Para ello se han fijado distintos

valores de V_{T1} , y se ha variado V_{T3} hasta llegar a los dos extremos de la banda de sincronía, donde el sistema entra en un régimen quasiperiódico. Estos extremos de la banda corresponden a los PR de la familia de curvas C_1 . El rango máximo de desfases constantes, estaría limitado por los dos puntos en los que las curvas correspondientes a los puntos de retorno de C_1 y la curva de desfases constantes $\Delta\phi(\%T)$ se cruzan.

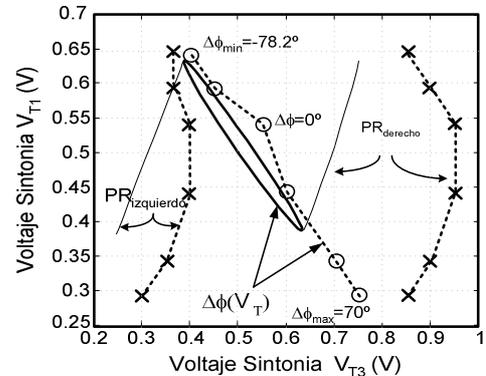


Fig.6. Simulación y medida de los voltajes de sintonía a lo largo de la solución de desfase constante. Lugar de los puntos de retorno de C_1 que limitan el rango de valores para los que existe sincronización.

IV. CONCLUSIONES

Se ha presentado un estudio sobre la coexistencia de soluciones en arrays de osciladores acoplados. Para ello se ha desarrollado una formulación semi-analítica que permite obtener estas soluciones de una manera eficiente independientemente del número de elementos del sistema. Un estudio de la estabilidad de estas soluciones ha permitido entender los fenómenos que limitan los rangos máximos de funcionamiento estables. La técnica se ha verificado implementando un array de 3 elementos osciladores basados en FET a 5 GHz.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado por el proyecto TEC2005-08377-C03-01/TCM.

REFERENCIAS

- [1] P. Liao, R.A. York, "A Six-Element Beam-Scanning Array", *IEEE Microwave and Guided Wave Letters.*, vol. 4, no. 1, pp. 20-22, January 1994.
- [2] R.A. York, "Nonlinear Analysis of Phase Relationships in Quasi-Optical Oscillator Arrays", *IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques*, vol. 41, no. 10 pp. 1799-1809, October 1993.
- [3] A. Georgiadis, A. Collado, A. Suarez, "New Techniques for the Analysis and Design of Coupled-Oscillator Systems", *IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques*, vol. 54, no. 11 pp. 3854-3877, November 2006.
- [4] S. Nogi, J. Lin, T. Itoh, "Mode Analysis and Stabilization of a Spatial Power Combining Array with Strongly Coupled Oscillators", *IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques*, vol. 41, no. 10 pp. 1827-1837, October 1993.
- [5] A. Suárez and R. Quéré, *Stability Analysis of Nonlinear Microwave Circuits*, Norwood MA: Artech House, 2003.
- [6] K. Kurokawa, "Some basic characteristics of broadband resistance oscillator circuits," *Bell System Technical Journal*, pp. 1937-1955, Jul.-Aug. 1969.