GRADO EN ADMINISTRACIÓN Y DIRECCIÓN DE EMPRESAS

2023-2024

TRABAJO FIN DE GRADO

Mención en Dirección General

MÉTODOS MATEMÁTICOS DE OPTIMIZACIÓN. MÉTODO SIMPLEX

MATHEMATICAL METHODS OF OPTIMIZATION. THE SIMPLEX METHOD

AUTORA:

ESTHER DIEGO DE LA FUENTE

DIRECTORA:

PATRICIA GÓMEZ GARCÍA

Octubre 2023

ÍNDICE

RESUMEN

El objetivo de este trabajo es analizar y comprender el Método Simplex. Para ello se parte de la Investigación Operativa para posteriormente pasar a la Programación Lineal.

Lo primero que haremos será ponernos en contexto. Para ello comenzamos con una breve introducción sobre la Investigación Operativa y su historia. Seguidamente, hablaremos de las fases de aplicación de la investigación de operaciones, desde la definición del problema hasta la implantación y establecimiento de controles sobre la solución. Dentro de estas fases está la resolución a través de un modelo, tema principal de este trabajo. Se pueden aplicar diferentes métodos para alcanzar la solución óptima a un problema, veremos cuáles son sus limitaciones y alcances.

A continuación, desarrollaremos el método Simplex de forma teórica. La estandarización nos permite posteriormente hacer la tabla sobre la cual se trabaja para obtener los resultados. Cada tabla arroja una solución que mejora la anterior, hasta que se llegue al punto óptimo.

Tras haber visto la teoría de la Investigación de Operaciones y del método Simplex, pasamos a desarrollar varios ejemplos para ver la importancia de su aplicación. Primero, comentaremos brevemente unos casos reales donde se utiliza la Investigación de Operaciones para comprender la gran relevancia que tiene esta herramienta, sobre todo en el ámbito empresarial. Asimismo, seguiremos con ejemplos prácticos que nos permitirán entender mejor los diferentes métodos para obtener soluciones óptimas a los problemas planteados.

Comenzaremos con el método gráfico, el más sencillo, al poderse utilizar cuando hay dos variables. Para superar esta limitación veremos el método Simplex, que permite trabajar con más de dos variables. Primero, lo veremos solo con restricciones del tipo menor o igual y, posteriormente, con restricciones del tipo mayor o igual, donde se incorporan las variables artificiales. Aunque el Simplex supera muchos obstáculos, presenta la limitación del tiempo, que demora resolver problemas con muchas variables y restricciones, por lo que, por último, veremos la herramienta Solver de Excel, que nos permite en pocos minutos obtener el resultado óptimo de la situación dada.

Para finalizar, veremos unos casos especiales: sin solución o con infinitas soluciones.

ABSTRACT

The objective of this work is to analyze and understand the Simplex Method. For this, we start from Operations Research and then move on to Linear Programming.

First, we will set the context. For that, we begin with a brief introduction about Operations Research and its history. Next, we will discuss the phases of operations research application, from problem definition to the implementation and establishment of controls over the solution. Within these phases is the resolution through a model, the main theme of this work. Different methods can be applied to achieve the optimal solution to a problem, and we will explore their limitations and scopes.

Following this, we will develop the Simplex Method theoretically. The standardization later allows us to create the table on which we work to obtain the results. Each table yields a solution that improves the previous one, until the optimal point is reached.

Having seen the theory of Operations Research and the Simplex Method, we move on to develop several examples to see the importance of its application. First, we will briefly discuss some real cases where Operations Research is utilized to understand the great relevance this tool has, especially in the business realm. Likewise, we will continue with practical examples that will allow us to better understand the different methods to obtain optimal solutions to the posed problems.

We will start with the graphical method, the simplest, as it can be used when there are two variables. To overcome this limitation, we will look into the Simplex Method, which allows working with more than two variables. First, we will see it only with constraints of the less than or equal to type, and later, with constraints of the greater than or equal to type, where artificial variables are incorporated. Although the Simplex overcomes many obstacles, it presents the limitation of time, as it takes a while to solve problems with many variables and constraints, hence, finally, we will look into the Solver tool of Excel, which allows us to obtain the optimal result of the given situation in just a few minutes.

To conclude, we will look at some special cases: without solution or with infinite solutions.

1. INTRODUCCIÓN

A lo largo de la historia las personas se han encontrado en distintas situaciones en las cuales se pretendía escoger la mejor decisión. En todos los casos, la mejor solución implica ser la óptima. Así, en el mundo empresarial, se tienen que tomar muchas decisiones respecto a la asignación de los recursos de los que se dispone, para así conseguir minimizar costes o, de lo contrario, maximizar el beneficio. Para dar respuesta a este tipo de necesidades se utiliza la Investigación Operativa.

Dentro de la Investigación de Operaciones podemos encontrar diversas herramientas que tienen como finalidad encontrar la solución óptima. Para ello, se basan en modelos matemáticos y estadísticos. En este trabajo nos vamos a centrar en la Programación Lineal, que es una de las técnicas más aplicadas en el ámbito empresarial.

Dentro de la Programación Lineal, encontramos diferentes métodos de resolución, siendo el más sencillo la resolución gráfica, pero el que más limitaciones presenta. Será el primero que veamos. Iremos analizando varios modelos más que van superando las limitaciones que presentan los anteriores, para llegar a la última herramienta, Solver, que nos permite resolver problemas con mayor número de variables y restricciones en poco tiempo. Esta última herramienta utiliza el Método Simplex, el cual vamos a desarrollar a lo largo de todo este trabajo. La principal característica de este método es que no trabaja en el interior de una región de puntos factibles, sino que lo hace en los puntos externos de la región, y cada solución es mejor que la anterior, ya que funciona desplazándose por las aristas de un poliedro, por ello, se reduce el tiempo para encontrar la solución óptima frente a otros métodos.

Si bien es verdad que para ver cómo funcionan estos métodos vamos a trabajar sobre casos prácticos, aplicables a la vida real, terminaremos viendo situaciones especiales donde no encontraremos una solución óptima. En su defecto, habrá infinitas soluciones o ninguna.

2. INVESTIGACIÓN OPERATIVA

La Investigación Operativa, también conocida como Investigación de Operaciones, es un campo académico multidisciplinar que se centra en la aplicación de métodos analíticos avanzados para resolver problemas complejos en las organizaciones y empresas. Esta disciplina combina conocimientos y herramientas de áreas como las matemáticas, la estadística, la ingeniería, la economía y las ciencias de la computación con el fin de proporcionar a los encargados de la toma de decisiones las herramientas necesarias para mejorar la eficiencia y optimizar los procesos y recursos en diferentes áreas de una empresa.

La Investigación Operativa se basa en el uso de enfoques científicos y analíticos para abordar problemas empresariales. A través de la recopilación y análisis de datos relevantes, el desarrollo de modelos matemáticos y de simulación, y el uso de técnicas estadísticas y herramientas de optimización, se busca encontrar la mejor solución posible para un problema específico, teniendo en cuenta las restricciones y objetivos establecidos. Su aplicación es posible en diversos sectores y áreas empresariales, como la gestión de la cadena de suministro, la logística, la producción, la planificación de proyectos, el transporte, el marketing y las finanzas. Al proporcionar métodos rigurosos cuantificables y herramientas especializadas, esta disciplina contribuye a mejorar la toma de decisiones estratégicas y operativas, optimizando el uso de recursos, reduciendo costos, aumentado eficiencia y mejorando la satisfacción del cliente.

Esta disciplina proporciona las herramientas necesarias para tomar decisiones informadas y fundamentadas, considerando múltiples factores y escenarios. Al utilizar métodos cuantitativos y técnicas analíticas avanzadas, la Investigación Operativa permite evaluar diferentes alternativas y seleccionar la óptima en función de los objetivos y restricciones particulares de una organización.

- Uno de los pilares de la Investigación Operativa es el uso de la probabilidad y la estadística. La probabilidad se utiliza para modelar y comprender la incertidumbre asociada a eventos futuros. Por ejemplo, en la gestión de inventarios, se pueden utilizar técnicas probabilísticas para predecir la demanda y determinar los niveles de stock óptimos. La estadística permite el análisis de datos, lo que proporciona información valiosa para tomar decisiones basadas en evidencia. Los análisis estadísticos pueden revelar patrones, tendencias y relaciones entre variables, lo que contribuye a una mejor comprensión de los problemas y a la toma de decisiones fundamentadas.

- Otro componente esencial de la Investigación Operativa es la optimización. Este enfoque se centra en encontrar la mejor solución posible entre una serie de opciones disponibles, teniendo en cuenta las restricciones y los objetivos deseados. Los problemas de optimización pueden ser complejos y abarcar múltiples variables y restricciones. Por ejemplo, en la planificación de la producción, se pueden emplear técnicas de programación lineal para determinar la combinación óptima de productos a fabricar, considerando las limitaciones de recursos como la capacidad de producción y las restricciones de tiempo.

- La simulación es una herramienta poderosa utilizada en la Investigación Operativa para estudiar el comportamiento de sistemas complejos. Consiste en construir modelos computacionales que imitan el funcionamiento de un sistema real y permiten realizar experimentos virtuales para evaluar diferentes estrategias y alternativas. La simulación es especialmente útil cuando los sistemas son difíciles de modelar matemáticamente o cuando se necesita evaluar el impacto de cambios a largo plazo. Por ejemplo, en la gestión de la cadena de suministro, se pueden realizar simulaciones para analizar el flujo de materiales y los tiempos de entrega en diferentes escenarios, lo que ayuda a identificar posibles cuellos de botella y optimizar los procesos.

La Investigación Operativa encuentra aplicaciones en una amplia gama de sectores y áreas dentro de una organización. Se utiliza en la gestión de la cadena de suministro para mejorar la planificación y distribución de productos, en la logística para optimizar rutas y reducir costos de transporte, en la producción para maximizar la eficiencia y minimizar los tiempos de espera, en la planificación de proyectos para optimizar los recursos y tiempos, en el marketing para segmentar y dirigir estratégicamente a los clientes, y en las finanzas para gestionar de manera eficiente los recursos monetarios y los riesgos asociados.

En resumen, la Investigación Operativa es una disciplina que se basa en el método científico y utiliza enfoques analíticos y matemáticos para resolver problemas complejos y tomar decisiones informadas en las organizaciones. La integración de la probabilidad y la estadística, la optimización y la simulación proporciona herramientas poderosas para analizar los sistemas y encontrar soluciones óptimas.

2.1. CONTEXTO HISTÓRICO

En las décadas posteriores a las dos guerras mundiales, las herramientas de la Investigación de Operaciones se aplicaron ampliamente a los problemas en los negocios, la industria y la sociedad. Fue en este período cuando la Investigación Operativa se consolidó como un campo académico y se expandió su aplicación en diversas industrias, desde productos petroquímicos hasta líneas aéreas, finanzas, logística y gobierno. La Investigación Operativa se centraba en el desarrollo de modelos matemáticos para analizar y optimizar sistemas complejos, y se convirtió en un área de investigación activa tanto en el ámbito académico como en el industrial.

Los orígenes históricos de la Investigación Operativa se remontan al siglo XVII, cuando matemáticos como Christiaan Huygens y Blaise Pascal comenzaron a utilizar el cálculo de probabilidades para abordar problemas de decisiones complejas. A lo largo de los siglos XVIII y XIX, otros matemáticos abordaron problemas similares mediante la combinatoria. En el siglo XX, el estudio de la gestión de inventarios, con el concepto de cantidad económica de pedido desarrollado por Ford W. Harris en 1913, puede considerarse como el origen de la investigación operativa moderna.

Durante la Primera Guerra Mundial, los planificadores militares utilizaron la teoría de convoy y las Leyes de Lanchester para abordar problemas de logística y estrategia. La Investigación Operativa también se expandió al campo de la física en la década de 1920, gracias al trabajo de Percy Williams Bridgman, quien intentó aplicar los principios de la Investigación Operativa a las ciencias sociales.

Sin embargo, fue durante la Segunda Guerra Mundial cuando la Investigación Operativa experimentó un desarrollo significativo. En ese período, se definía como un método científico para proporcionar a los departamentos ejecutivos una base cuantitativa para la toma de decisiones sobre las operaciones bajo su control. Se aplicó en diferentes contextos, como el análisis de la eficacia de los sistemas de radar y comunicación, la optimización de las rutas de convoy, el análisis del comportamiento de los aviones en combate y la planificación estratégica de los bombardeos.

En el Reino Unido, el Establecimiento de Investigación de Bawdsey desempeñó un papel crucial en el desarrollo de la Investigación Operativa. Fue allí donde se utilizó por primera vez el término "investigación operativa" para describir el enfoque analítico aplicado al sistema de alerta temprana de radar del Reino Unido. Se analizó el funcionamiento del equipo de radar, las redes de comunicación y el comportamiento del personal operativo, lo que permitió identificar limitaciones y tomar medidas correctivas.

Durante la guerra, la Investigación Operativa se aplicó en diversos campos, como la estrategia militar, la logística, la planificación de convoyes y los bombardeos. Se utilizaron técnicas estadísticas y matemáticas para analizar datos y tomar decisiones basadas en evidencia. La Investigación Operativa contribuyó a mejorar la eficacia y la eficiencia de las operaciones militares, y se consideró una herramienta clave para la toma de decisiones estratégicas.

Después de la Segunda Guerra Mundial, se expandió aún más y se aplicó en una amplia gama de sectores y áreas. Con el desarrollo del algoritmo Símplex propuesto por George Dantzig para resolver un problema de programación lineal en 1947 y el avance de la computación en las décadas siguientes, la Investigación Operativa se fortaleció y se convirtió en una disciplina cada vez más relevante en el ámbito civil. Su aplicación se extendió a la adquisición de equipos, la capacitación, la logística y la infraestructura, entre otros campos.

En resumen, la historia de la Investigación Operativa se encuentra estrechamente ligada a los acontecimientos de las dos guerras mundiales. A medida que se enfrentaban a desafíos complejos, los investigadores y planificadores militares utilizaron enfoques científicos y analíticos para tomar decisiones fundamentadas y mejorar la eficiencia de las operaciones. Estos avances sentaron las bases para el desarrollo de la Investigación Operativa como disciplina académica y su aplicación en una amplia variedad de sectores y áreas.

2.2. FASES DE APLICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

2.2.1. Definición del problema

Primeramente, empezamos con la definición del problema, lo cual incluye determinar los objetivos apropiados, así como las restricciones que queremos que se cumplan. Este proceso de definición del problema afectará de forma significativa a las conclusiones del estudio. Un mal planteamiento supone un mal resultado, aunque la implementación de los resultados obtenidos en el estudio del caso sea adecuada.

2.2.2. Modelización

A continuación, nos encontramos con la formulación de un modelo matemático, es decir, con la modelización del problema. El objetivo es crear un modelo que suponga una aproximación abstracta de la realidad consiguiendo que sea menos complejo que el problema real, de tal forma que sea más manejable y permita evaluar de forma eficiente las distintas alternativas de solución.

Esta modelización de un problema real en un modelo matemático puede resultar extremadamente compleja, ya que para obtener resultados válidos es imprescindible conocer las variables que intervienen en dicho problema, así como su relevancia en los resultados. La no inclusión de alguna variable de relevancia puede generar que los resultados a los que se llega no representen de manera fiel los que se obtendrán en el mundo real, generando por tanto un estudio inútil.

La modelización de problemas reales es un ámbito de estudio que ha sido ampliamente desarrollado y estudiado por diversos académicos a lo largo de la historia, aunque uno de los procedimientos más aceptados es el presentado por Ríos Insua (1995), el cual establece una serie de cinco pasos que permiten la formulación matemática de un modelo a partir de un problema real. De esta manera, los pasos son:

1. Determinar las variables y parámetros del modelo. Es toda aquella información que permita no tan solo su variación para estudiar su impacto sobre el resultado, sino también variables de control que permitan el monitoreo del buen funcionamiento del modelo.

2. Determinar la estructura del modelo, esto incluye las relaciones entre todas las variables del modelo, expresadas de forma matemática.

3. Determinar un principio, será la forma de obtener los resultados finales en el modelo. Esto se puede hacer de varias formas, optimización, donde se busca la solución óptima, o bien la satisfacción de un requisito. La elección de este principio de elección dependerá tanto del problema real que se esté modelando como de las necesidades de estudio.

4. Contemplar alternativas o decisiones, y plasmar sus efectos en las predicciones y resultados del modelo.

5. Determinar que suposiciones se asumen en el modelo.

Aunque el modelo busque simplificar la realidad, debe contar con los detalles suficientes como para que el resultado sea satisfactorio, consistente con los datos y pueda ser analizado. Por tanto, hay que encontrar un punto de equilibrio entre la situación real, la cual es compleja, y la simplicidad. Incluir muchos detalles puede suponer no encontrar una falla en el caso de que tenga algún error el modelo, y la escasez de detalles, no tener en cuenta detalles importantes.

2.2.3. Solución a partir del modelo

Llegados a este punto, el objetivo es, usando el modelo, encontrar los valores de las variables dependientes que optimicen el resultado de la función objetivo.

Para solucionar el modelo se debe utilizar el método más adecuado de acuerdo con las características del problema. Dentro de los diferentes modelos encontramos tres tipos diferentes:

- Analíticos: utilizan procesos de deducción matemática
- Numéricos: funcionan mediante operaciones de prueba y error
- Simulación: utilizan métodos que imitan o emulan el sistema real según un modelo

2.2.4. Prueba del modelo

Antes de utilizar el modelo es preferible realizar una prueba exhaustiva para encontrar las posibles fallas. Como mencionamos anteriormente, un planteamiento incorrecto supone obtener un mal resultado, lo mismo pasa si el modelo no es correcto.

2.2.5. Validación del modelo

Esta fase es en la que se asegura y se verifica que el modelo produce resultados similares a los que cabría esperar en la situación real, es decir, permite asegurar que el modelo desarrollado cumple su función. La no adecuación a los requisitos supondrá la modificación de este hasta que se consiga que cumpla con las necesidades establecidas. Esto por tanto genera un proceso iterativo que tendrá que repetirse tantas veces como sea necesario.

2.2.6. Implantación y establecimiento de controles sobre la solución

Cuando se lleva a cabo la implantación de la solución obtenida, es importante llevar un control, para ello se establecen unos rangos de variación de los parámetros dentro de los cuales no cambia la solución del problema.

En este caso, es necesario obtener información adicional sobre el comportamiento de la solución debido a los cambios que se hayan producido en el valor de las variables. Por regla general, se denomina Análisis de Sensibilidad. En el caso de Excel lo encontramos como Informe de Sensibilidad.

3. METODO SIMPLEX

Dentro de la Investigación de Operaciones nos encontramos con el método Simplex, que consiste en un procedimiento iterativo que permite resolver problemas de programación lineal. La finalidad de esta herramienta es encontrar la solución óptima de la función objetivo logrando que cumpla con una serie de restricciones.

La solución óptima se encuentra dentro de un conjunto de soluciones, conocido como el espacio de búsqueda. Debemos distinguir dos situaciones diferentes: por un lado, cuando nos encontramos con problemas con dos variables, trabajaremos sobre el plano real y las restricciones limitarán un área llamada región factible o conjunto de soluciones factibles. Por otro lado, si estamos trabajando con más de dos variables, en vez de formarse una región sobre un plano será sobre un poliedro convexo. La solución óptima y finita, se encontrará en un vértice de dicho poliedro, el cual es una representación del problema. En el caso de dos variables, la solución también se halla en al menos un vértice de la región.

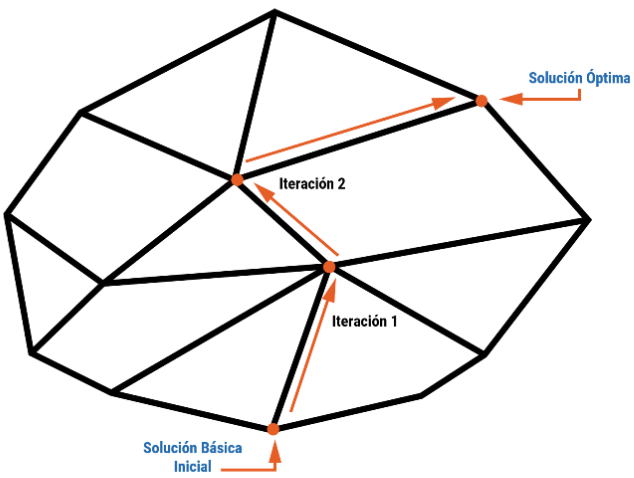

FIGURA 3.1 | FUENTE: plandemejora.com

En ambos casos, los vértices de la región de los puntos factibles representan las posibles soluciones óptimas dentro del conjunto factible. Cada esquina otorga un valor específico para cada variable de decisión del problema haciendo cumplir todas las restricciones dadas.

Para decidir cuál es la solución óptima, se debe ir evaluando el objetivo. Para ello, se utiliza el poliedro del método Simplex, siendo este una representación geométrica de todas las soluciones factibles del problema dado. Se trata de un poliedro convexo en un espacio de *n* dimensiones, donde *n* es el número de variables que toma el problema. Cada restricción define un plano, de tal forma que las intersecciones de las restricciones forman la región de soluciones factibles.

Observando la figura 3.1, podemos ver la representación del recorrido que se realiza en el poliedro para encontrar la solución óptima. Se parte desde un vértice del poliedro, y se va recorriendo el mismo por las aristas hasta llegar a otro vértice. El objetivo es ir mejorando gradualmente el valor de la función hasta alcanzar la que sería la solución óptima del problema.

3.1. ESTANDARIZACIÓN DE UN PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN

Los problemas se formulan con una función objetivo, la cual deberemos maximizar o minimizar, y una serie de restricciones. De forma genérica se vería de la siguiente forma:

Función objetivo (max. o min.):

$$z = c_1x_1 + \ cx_2 + \cdots + \ c_nx_n$$

Restricciones:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq (\geq, =) b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq (\geq, =) b_2$$

$$\dots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq (\geq, =) b_m$$

Las variables $x_1, \ x_2, \ \dots\dots \ , x_n$ las proporciona el enunciado y serán diferentes para cada situación. Podrán ser tanto positivas como negativas, en caso de ser negativas luego en la forma estándar haremos el cambio.

Antes de abordar el problema, el primer paso es formularlo en la forma estándar. Por un lado, hay que transformar las restricciones en igualdades. Para ello se deben incorporar nuevas variables, las llamadas variables de holgura:

- Si la desigualdad es del tipo ≤, se sumará una variable de holgura positiva (S_i)
  Ejemplo: 2X – 3Y ≤ 30 → 2X – 3Y + S1 = 30

- Si la desigualdad es del tipo ≥, se incorpora una variable de exceso (S_i) restando.
  Ejemplo: 2X + 5Y ≥ 20 → 2X + 5Y – S1 = 20

En la estandarización también hay que modificar la función objetivo: si hay que maximizarla, se minimiza la opuesta. Para ello, debemos cambiar los signos de los coeficientes de las variables de la función objetivo como veremos más adelante en un ejemplo. Por otro lado, si la función a optimizar es z = $c_1x_1 + \ c_2x_2 + \cdots + \ c_nx_n + a$, el mínimo que buscamos será el mismo que para la función z = $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$, siendo la a una constante.

Los valores del lado derecho, b_1 , b_2 , …. , b_n deben ser no negativos. En el caso de que alguno de ellos sea negativo, deberemos transformar la desigualdad correspondiente, multiplicándola por -1.

Si alguna de las variables del problema toma valores negativos, se puede expresar como diferencia de dos no negativas.

3.2. TABLA BÁSICA INCIAL DEL MÉTODO SIMPLEX

La tabla básica inicial en el Método Simplex nos sirve como punto de partida para resolver los problemas de programación lineal. Proporciona una representación estructurada de las variables, las restricciones y la propia función objetivo. Como punto de partida, las variables de decisión y las de holgura o exceso toman valores iniciales que cumplen todas las restricciones. Se trata de una solución factible pero no óptima.

Asimismo, la tabla nos permite identificar las llamadas variables básicas. Aquellas variables que toman un valor nulo, es decir, cero, son las denominadas variables no básicas. Por el contrario, si toman valor no nulo, se denominan variables básicas. Mas adelante veremos su utilidad.

Existen diferentes formas de plantear las tablas. Vamos a trabajar sobre la que propone Cobo Ortega (1995).

Las tablas del método Simplex surgen como una forma de simplificar el planteamiento a problemas con un número elevado de variables y/o restricciones. Con estas tablas se consigue organizar los cálculos y que se puedan realizar de un modo sistemático utilizando una forma tabular.

Si bien es verdad que las tablas en el método Simplex son de gran utilidad, en problemas más complejos se recurre al uso de programas informáticos como veremos más adelante.

Antes de comenzar con la primera tabla, formulamos nuestro problema en la forma estándar:

Función Objetivo:

$$(\text{min})\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

Restricciones:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\ldots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

Condición de no negatividad:

$$x_1 \geq 0\ , x_2 \geq 0\ ,\ldots, x_n \geq 0$$

Suponemos que todos los b_i son mayores o iguales a cero, es decir $b_i \geq 0$.

Según la forma que nos propone Cobo Ortega (1995), la primera tabla nos quedaría de la siguiente forma:

C_1	C_2	C_3	c_1	$\dots$	c_n	F_1
C_{B_1}	X_{B_1}	b_1	a_{11}	$\dots$	a_{1n}	F_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		a_{ij}		
C_{B_m}	X_{B_m}	b_m	a_{m1}	$\dots$	a_{mn}	F_{m+1}
		$C_1 \cdot C_3$	$C_1 \cdot A_1$	$\dots$	$C_1 \cdot A_n$	F_{m+2}
			z_1	$\dots$	z_n	$F_1 - F_{m+2}$

F_1: fila de coeficientes de la función objetivo.

C_1: columna con coeficientes de las variables básicas de la función objetivo.

C_2: columna con las variables básicas iniciales.

C_3: columna con los términos independientes de las restricciones

$A_1 \dots A_n$: columnas de la matriz A = (a_{ij})

$C_1 \cdot C_3$: es el producto escalar de las dos columnas correspondientes $C_{B_1} \cdot b_1 + \dots + C_{B_m} \cdot b_m$

$C_1 \cdot A_1$ ... $C_1 \cdot A_n$: son los productos escalares correspondientes.

$z_1 \dots. z_n$: son el resultado de restar los elementos correspondientes de la fila F_1 y F_{m+2}

Las variables iniciales de la columna C_2 deben tener asociadas en la matriz (a_{ij}) columnas que formen la matriz identidad.

Cada tabla que construyamos está asociada a una solución básica factible, que se corresponde con un vértice de la región factible. Debemos saber cómo construir la siguiente tabla. El proceso termina cuando todos los elementos de la última fila sean mayores o iguales a cero, habremos alcanzado así la solución óptima. Mientras esto no ocurra debemos construir una nueva tabla. Para ello, seguimos los pasos que establece Cobo Ortega (1995).

1. De la última fila se selecciona el valor negativo más alto en valor absoluto. La variable correspondiente al índice de z_i pasará a ser básica.

2. Dicha variable sustituirá a una variable básica inicial. Para saber a cuál, se deben dividir los valores de la columna C_3 entre los valores positivos de la columna de A seleccionada. Se selecciona el mínimo de todos los cocientes calculados. El elemento de la matriz A empleado en el cociente será el que se utilice como elemento pivote, y la variable de la columna C_2 en la posición del pivote dejará de ser básica. En caso de que no haya valores positivos, el problema no tendrá un óptimo finito.

3. Una vez seleccionado el elemento pivote, debemos transformarlo en 1 y anular el resto de los valores de su columna. Para realizar las trasformaciones hay que tener en cuenta que únicamente está permitido:
   - Multiplicar por constante la fila donde se ubica el elemento pivote.
   - Sumar o restar a una fila un múltiplo de la fila que contiene el elemento pivote.

4. Posteriormente, debemos cambiar las variables básicas de la columna C_2 a la vez que su correspondiente coeficiente en la columna C_1

5. Por último, debemos calcular de nuevo los valores de las dos últimas filas de la tabla.

Si los valores de la última fila de la tabla final asociados a las variables no básicas son estrictamente positivos, la solución es el único óptimo.

4. INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES APLICADA EN CASOS REALES

Hemos insistido en la importancia que tiene una herramienta que permita optimizar los recursos que son escasos. Sin embargo, la mejor forma de ver la gran utilidad de la Investigación de Operaciones es con ejemplos concretos. A continuación, enumeramos brevemente algunos en los que, gracias a la optimización, se consiguió el ahorro de grandes sumas de dinero:

- The Netherlands Rijkswaterstaat (1985): el desarrollo de una política de administración del agua permitió el ahorro anual de 15 millones de dólares
- Electrobras / CEPAL Brasil (1986): su aplicación fue para la asignación óptima de los recursos hidráulicos y térmicos de generación de energía. El ahorro anual ascendió a 43 millones de dólares anuales
- United Airlines (1986) consiguió realizar una organización de turnos de trabajo en oficinas de reservas y aeropuertos para cubrir las necesidades de los clientes a un coste mínimo. El ahorro fue de 6 millones de dólares por año
- Texaco, Inc (1989): optimización de la mezcla de los ingredientes disponibles para que los combustibles obtenidos cumpliesen con los requerimientos mínimos de calidad. El ahorro llegó a ser de 30 millones de dólares
- New Health Dep. (1993), diseñó de un programa que fuese realmente efectivo para el cambio de agujas para combatir el contagio del SIDA. En este caso no se trata de un ahorro monetario, sino en una disminución del 33% de los contagios
- AT&T (1993): se desarrolló un sistema informático para el centro de llamadas que permitiera guiar a los clientes del negocio. El ahorro en este caso ascendió a la cifra de 750 millones de dólares anuales
- China (1997): para el desarrollo masivo que permitiese cubrir las necesidades futuras de energía del país utilizaron la Investigación de Operaciones para seleccionar y programar los proyectos óptimos. El ahorro fue de 425 millones de dólares

Con estos ejemplos podemos ver como la aplicación de la Investigación de Operaciones es muy versátil, pudiendo utilizarse en empresas u organizaciones de distintos ámbitos y con el objetivo de optimizar recursos de diferentes naturalezas.

Si nos vamos a un ejemplo de actualidad nos encontramos con Atenea de Amphora Logistics. Cuando pensamos en los almacenes de tiendas como Amazon o Zalando, que se dedican exclusivamente a venta online, o cualquiera de las tiendas Inditex de Amancio Ortega, se nos vienen a la cabeza grandes espacios repletos de estanterías con un montón de cajas y sus respectivas etiquetas. Sin un software adecuado, gestionar este tipo de almacenes es impensable, se tendría que dedicar mucho tiempo a la preparación de cada pedido.

Por ello, Amphora Logistics ha diseñado un software denominado Atenea que permite a los negocios tener la posibilidad de digitalizar sus almacenes y llevar a cabo una gestión eficiente de los pedidos, así como visualizar en tiempo real el estado del almacén. Gracias a Atenea los almacenes pueden llegar a preparar los pedidos el triple de rápido, reduciendo los costes operativos en un 50%, además de reducir el margen de error en los procesos de selección a un 1%.

5. CASOS PRÁCTICOS

Para entender mejor cómo funcionan los diferentes métodos de resolución de problemas con restricciones vamos a trabajar sobre una serie de casos prácticos, comenzando por los más sencillos. La primera situación, sería con dos variables y restricciones del tipo menor o igual. El trabajar con dos variables nos permite poder aplicar el método gráfico, el cual a partir de tres o más variables es imposible. Las restricciones de menor o igual nos van a permitir utilizar variables básicas en el método de tabulación. En el caso de que hubiese restricciones de mayor o igual habría que trabajar con variables ficticias, como veremos posteriormente.

5.1. MÉTODO GRÁFICO

Así, empezamos con el siguiente problema:

Una floristería va a vender, para el día de la madre, dos tamaños de ramos, siendo el precio del ramo grande de 42€ y del pequeño de 24€. Para hacer los ramos grandes usa doce flores y para los pequeños seis. En total tiene una disponibilidad de 120 flores. Por otro lado, incluye en los ramos unas ramas decorativas: en ambos casos incluye seis por ramo, contando con un total de 108.

Lo primero de todo es definir las variables, en este caso hemos decidido que sea:

- x = nº de ramos grandes
- y = nº de ramos pequeños

Al saber los precios de cada ramo, nuestra función objetivo va a ser maximizar los ingresos, por tanto, la función sería:

- $z = 42x + 24y$

Las restricciones vienen dadas por la disponibilidad de flores y de ramas, por lo que nos quedan las siguientes desigualdades:

- $12x + 6y \leq 120$
- $6x + 6y \leq 108$

Una vez que ya tenemos planteado el problema, al ser de dos variables, podemos aplicar el método gráfico.

La siguiente tabla muestra los puntos que nos permiten dibujar las rectas de ambas restricciones:

12X + 6Y = 120		6X + 6Y =108	
X	Y	X	Y
0	20	18	0
10	0	0	18

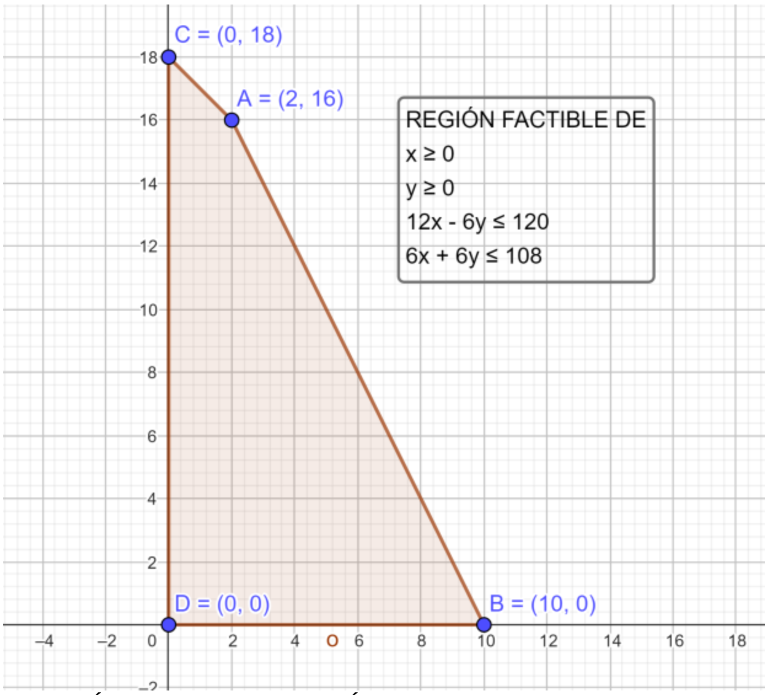

GRÁFICO 5.1. | CREACIÓN PROPIA CON GEOGEBRA

Al tratarse de restricciones de menor o igual, las soluciones factibles son todas aquellas que se encuentren por debajo de cada recta. Asimismo, como queremos que se cumplan ambas restricciones, las posibles soluciones son aquellas donde se superponen las áreas de cumplimiento de cada una de las restricciones.

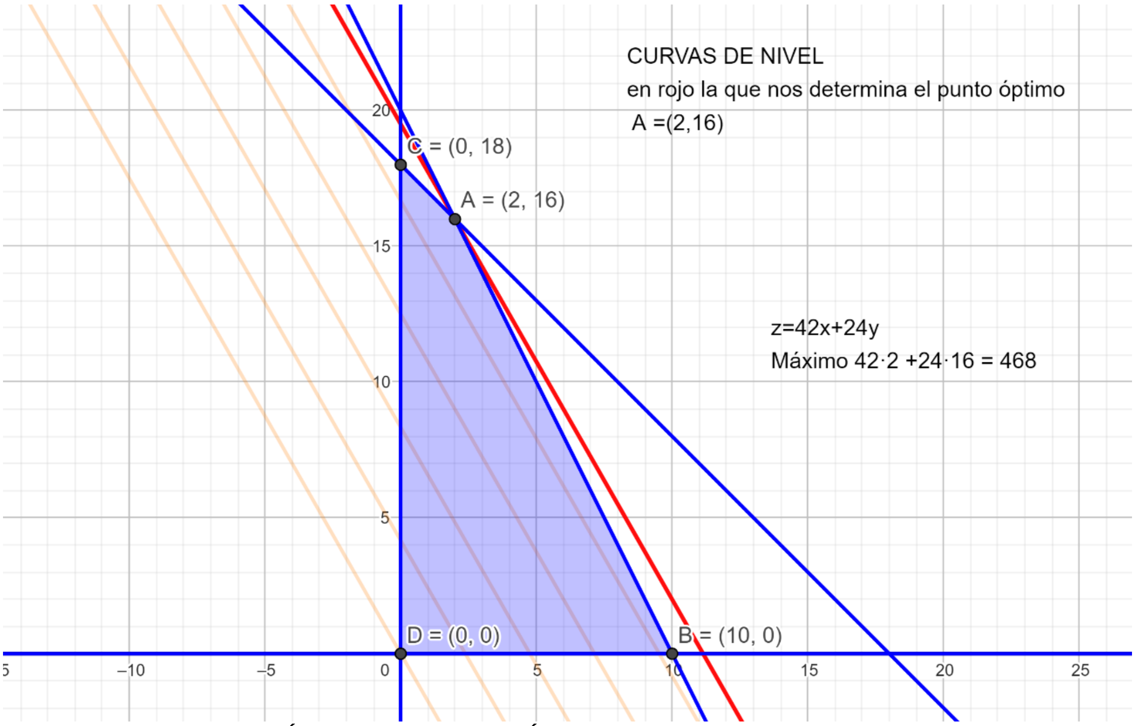

GRÁFICO 5.2| CREACIÓN PROPIA CON GEOGEBRA

A la solución se llega trazando las curvas de nivel 42x + 24y=k. Para encontrar la solución óptima nos desplazamos por ellas. En este caso, como el objetivo es maximizar los beneficios, nos desplazamos en la dirección del vector gradiente de la función. De lo contrario, si el objetivo fuese minimizar, nos desplazaríamos en la dirección contraria. Obtenemos la última curva de nivel que tiene algún punto en común con la región factible. Ahí tenemos las soluciones del problema.

Una vez que hemos sacado el punto de intersección y tenemos los valores que toman las variables, sustituimos las incógnitas en la función objetivo y obtenemos el valor final:

- z = 42x + 24y → 42 (2) + 24 (16) = 468

5.2. MÉTODO SIMPLEX

Un almacenista tiene en su almacén 150 kg de pintura blanca y 180 kg de pintura azul. Decide venderlos haciendo dos mezclas A y B. La A está formada por la mitad de pintura de cada clase y la vende a 4 €/kg, y la otra contiene la tercera parte de pintura blanca y el resto de pintura azul, vendiéndola a 3 €/kg.
¿Cuántos kilos de cada mezcla deberá preparar para maximizar sus ingresos?

	Mezcla A (x_1 kg)	Mezcla B(x_2 kg)	Total
Blanca	$x_1/2$	$x_2/3$	150
Azul	$x_1/2$	$2x_2/3$	180
venta	4€/kg	3€/kg	

La función objetivo sería:

$$\text{Maximizar } 4x_1 + 3x_2$$

Sujeto a las siguientes restricciones:

$$1/2x_1 + 1/3x_2 \leq 150$$

$$1/2x_1 + 2/3x_2 \leq 180$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

Minimizamos la función opuesta e incorporaremos las nuevas variables de holgura:

$$\text{Minimizar } z = -4x_1 - 3x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

Sujeto a:

$$1/2x_1 + 1/3x_2 + 1x_3 + 0x_4 = 150$$

$$1/2x_1 + 2/3x_2 + 0x_3 + 1x_4 = 180$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0$$

Rellenamos la tabla siguiendo los criterios mencionados anteriormente establecidos por Cobo Ortega (1995):

- C_b, 1º columna, coeficientes de las variables básicas en la función objetivo
- Base, 2ª columna, variables básicas iniciales
- b, 3ª columna, términos independientes de las ecuaciones
- 1ª fila, coeficientes de las variables de la función objetivo
- Matriz A = $(a_1\ \ a_2\ \ a_3\ \ a_4)$, donde la columna a_i son los coeficientes de x_i en las restricciones.
- La cuarta fila se calcula como producto escalar indicado en la celda
- La última fila se obtiene restando la primera fila menos la cuarta

La tabla nos quedaría:

C_b	Base	b	-4	-3	0	0
0	x_3	150	1/2	1/3	1	0
0	x_4	180	1/2	2/3	0	1
		C_b·b= =0·150 +0·180 =0	$C_b \cdot a_1$= 0·1/2+0·1/2= =0	$C_b \cdot a_2$= =0·1/3+0·2/3= =0	$C_b \cdot a_3$= =0·1+0·0= =0	$C_b \cdot a_4$= =0·0+0·1= =0
			-4-0=-4	-3-0=-3	0-0=0	0-0=0

Como en la última fila aparecen números negativos, no estamos en el punto óptimo. Debemos seleccionar de los negativos el que toma mayor valor en términos absolutos, es decir -4. Además, esta será la columna pivote. Por tanto, la variable x_1 entra y pasa a ser una variable básica. Para saber cuál sale en su lugar, dividimos los elementos de la columna *b* entre los elementos positivos de la columna pivote, 150:1/2= 300, 180:1/2=360, y seleccionamos el menor cociente. Por tanto, deja de ser variable básica x_3. En la siguiente tabla, ingresa x_1 como variable básica, sale de la base x_3, y el elemento pivote es ½, el divisor del cociente elegido.

Para construir la tabla siguiente debemos operar para que el elemento pivote pase a tener el valor 1 y el otro elemento de la columna pase a tener el valor 0.

Dividimos la segunda fila por 1/2, y a la tercera fila la restamos la nueva segunda fila multiplicada por 1/2. Sustituiremos en la columna de las variables de la base, x_3 por x_1.

En la columna C_b pondremos los coeficientes correspondientes de la nueva base en la función objetivo.

C_b	Base	b	-4	-3	0	0
-4	x_1	300	1	2/3	2	0
0	x_4	30	0	1/3	-1	1
		C_b·b= =-1200	$C_b \cdot a_1$= -4	$C_b \cdot a_2$= -8/3	$C_b \cdot a_3$= -8	$C_b \cdot a_4$= 0
			-4-(-4) = =0	-3-(-8/3)= =-1/3	0-(-8)= =8	0-0= =0

Nos encontramos en la misma situación que antes: en la última fila seguimos encontrando valores negativos, por lo que aún no hemos alcanzado la solución óptima. Repetimos los mismos pasos, de tal forma que, ingresa la variable x_2, en su lugar sale de la base la variable x_4, y el elemento pivote es 1/3.

Construimos la nueva tabla:

C_b	Base	b	-4	-3	0	0
-4	x_1	240	1	0	4	-2
-3	x_2	90	0	1	-3	3
		C_b·b= =-1230	$C_b \cdot a_1$= -4	$C_b \cdot a_2$= -3	$C_b \cdot a_3$= -7	$C_b \cdot a_4$= -1
			-4-(-4) = =0	-3-(-3)= =0	0-(-7)= =7	0-(-1)= =1

Como en la última fila todos los elementos son positivos hemos terminado alcanzado un óptimo.

x_1=240, x_2=90, x_3 = 0, x_4 = 0

El problema inicial tiene como solución óptima el punto (x_1 , x_2) = (240,90) y como valor óptimo:

z = -4·x_1 - 3x_2 = -4·240 – 3·90= -1230

Como el problema original nos pedía maximizar, debemos cambiar el signo, por lo que la solución seguiría siendo el mismo punto, (240,90) y como valor óptimo 1230. Es decir, vender 240Kg de la mezcla A y 90Kg de la mezcla B, genera un ingreso de 1230€.

5.3. MÉTODO SIMPLEX CON VARIABLES ARTIFICIALES

No siempre se obtiene la matriz identidad en la tabla inicial de Simplex. Esto ocurre cuando incorporamos restricciones del tipo mayor o igual. Para superar este problema, se deben incorporar variables artificiales a las restricciones.

Estas nuevas variables que introducimos no queremos que afecten a la solución del problema, por lo que deben tomar un coeficiente muy alto positivo, M, de tal forma que dejen de ser básicas lo antes posible y de esta forma se anulen. A través de las iteraciones del método Simplex las variables artificiales dejarán de ser básicas y se podrá prescindir de ellas.

Una vez que incorporamos las variables artificiales se opera de la misma forma que veíamos previamente. Vamos a trabajar sobre un ejemplo:

Función objetivo:

$$\text{Maximizar } 2x_1 + 2x_2$$

Restricciones:

$$-3x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$3x_1 + x_2 \geq 3$$

$$x_1 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0$$

De forma estándar nos quedaría de la siguiente manera.

Función objetivo:

$$\text{Minimizar } -2x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + Mx_6$$

Restricciones:

$$-3x_1 + 2x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 6$$

$$3x_1 + x_2 + 0x_3 - x_4 + 0x_5 + x_6 = 3$$

$$x_1 + 0x_3 + 0x_4 + x_5 = 3$$

$$x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0,\ \ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0,\ x_6 \geq 0$$

Las variables básicas son aquellas cuyas columnas en la matriz A forman una matriz identidad:

C_b	Base	b	-2	-2	0	0	0	M
0	x_3	6	-3	2	1	0	0	0
M	x_6	3	3	1	0	-1	0	1
0	x_5	3	1	0	0	0	1	0
		C_b·b= 0·6+M·3+ 0·3= 3M	C_b·a_1= 0*(-3)+M*3 +0*1 = 3M	C_b·a_2= =0·2+M·1 +0·0 =M	C_b·a_3= =1·0+0·M+ 0·0= 0	C_b·a_4= =0·0+ M·(-1)+0·0 = -M	C_b·a_5= 0·0+M·0+0 ·1=0	C_b·a_6= 0·0+M·1 +0·0 =M
			-2-3M	-2-M	0	M	0	0

Para saber cuál es la variable que pasará a ser básica escogemos de la última el elemento negativo de mayor valor absoluto, en este caso -2-3M que corresponde a x_1. Por otro lado, para saber cuál sale, debemos dividir los elementos de la columna b por los correspondientes de la columna a_1, salvo que tome valor nulo o negativo. Por tanto, la fila de la variable x_3 no la operamos, y nos quedarían x_6 y x_5: 3/3=1 y 3/1=3. De estas operaciones, escogemos la que toma menor valor. Es decir x_6, dejará de ser variable básica y en su lugar pasará a serlo x_1.

El elemento pivote es 3. Como hemos mencionado antes, a través de transformaciones elementales debemos conseguir que tome valor 1 y anular el resto de los elementos de su columna. Seguidamente se calculan los nuevos valores para el resto de las filas como veíamos en el ejemplo anterior.

Construimos la nueva tabla:

C_b	Base	b	-2	-2	0	0	0	M
0	x_3	9	0	3	1	-1	0	1
-2	x_1	1	1	1/3	0	-1/3	0	1/3
0	x_5	2	0	-1/3	0	1/3	1	-1/3
		C_b·b= 0·9+(-2) ·1+0·2 = -2	C_b·a_1= 0·0+(-2) ·1+0·0 =-2	C_b·a_2= 0·3-2·1/3 +0·(-1/3) =-2/3	C_b·a_3= 0·1- 2·0+0·0 =0	C_b·a_4= 0·(-1)-2·(-1/3) +0·1/3 =2/3	C_b·a_5= 0·0-2·0 +0·1 =0	C_b·a_6= 0·1+(-2)·1/3 +0·(-1/3) =-2/3
			0	-4/3	0	-2/3	0	M+2/3

De nuevo repetiremos los mismos pasos, quedándonos la tabla de la siguiente forma:

C_b	Base	b	-2	-2	0	0	0	M
-2	x_2	3	0	1	1/3	-1/3	0	1/3
-2	x_1	0	1	0	-1/9	-2/9	0	2/9
0	x_5	3	0	0	1/9	2/9	1	-2/9
		C_b·b= -2·3 -2·0+0·3 =-6	C_b·a_1= -2·0 -2·1+0·0 =-2	C_b·a_2= -2·1 -2·0+0·0 =-2	C_b·a_3= -2·1/3-2· (-1/9)+0·1/9 =-4/9	C_b·a_4= -2·(-1/3) + (-2)·(-2/9) +0·2/9 =10/9	C_b·a_5= -2·0 -2·0+0·1 =0	C_b·a_6= -2·1/3-2 ·2/9+0 ·(-2/9) =-10/9
			0	0	4/9	-10/9	0	M+10/9

Como en la última fila sigue habiendo un elemento negativo, aún no hemos terminado. De nuevo repetimos el proceso y calculamos la tabla:

C_b	Base	b	-2	-2	0	0	0	M
-2	x_2	15/2	0	1	1/2	0	3/2	0
-2	x_1	3	1	0	0	0	1	0
0	x_4	27/2	0	0	1/2	1	9/2	-1
		C_b·b= -2·15/2- 2·3+0·27/2 =-21	C_b·a_1= -2·0- 2·1+0·0 =-2	C_b·a_2= -2·1 -2·0+0·0 =-2	C_b·a_3= -2·1/2 -2·0+0·1/2 =-1	C_b·a_4= -2·0+ (-2)·0+0·1 =0	C_b·a_5= -2·3/2-2·1 +0·9/2 =-5	C_b·a_6= -2·0-2·0 +0·(-1) =0
			0	0	1	0	5	M

5.4. SOLVER - EXCEL

Las decisiones en el mundo empresarial, y en cualquier otro ámbito, por lo general van a implicar más de dos variables de decisión y numerosas restricciones. Alcanzan una magnitud que hace que las personas busquen alternativas más eficientes para resolver los problemas, es por ello por lo que suelen recurrir a al uso de aplicaciones informáticas.

El método gráfico solo lo podemos aplicar cuando tenemos dos variables, en caso de haber tres o más deberemos buscar otra alternativa. En su lugar, el método Simplex nos va a permitir encontrar soluciones óptimas a problemas con más de dos variables, sin embargo, su aplicación en problemas con muchas variables y restricciones puedes ser tedioso, al tener que repetir numerosas veces las tablas hasta alcanzar el resultado óptimo.

Vistas las limitaciones de aplicación, nos encontramos con el tiempo que puede demorar resolver problemas de cierta complejidad con estas herramientas. No obstante, actualmente, los programas informáticos pueden resolver los problemas con esos mismos procedimientos, pero de una forma mucho más rápida que si lo hiciéramos nosotros mismos paso a paso. Por ello, podemos encontrar lenguajes de programación como Python que se encargan de encontrar la solución óptima a un problema dado. Sin embargo, hay herramientas más sencillas que nos permiten igualmente llegar a la solución óptima de un problema. En este caso, nosotros vamos a trabajar con Excel, y su herramienta Solver, que nos permite introducir tantas variables como queramos al igual que restricciones. Además, las restricciones pueden ser de los diferentes tipos, es decir, trabaja indistintamente las restricciones de menor o igual, mayor o igual y de igualdad.

Una vez más, y para facilitar el entendimiento, vamos a trabajar sobre un problema.

En este caso vamos a plantearnos la situación de una empresa de alquiler de vehículos que desea maximizar sus beneficios, y para ello quiere saber cuál es el número óptimo de cada tipo de vehículo a tener en su flota. Las variables, por tanto, van a ser los diferentes tipos de vehículos. En este caso encontramos coches económicos (x), coches familiares (y), SUV (z) y furgonetas (s), (las furgonetas serán de pasajeros). La flota total de coches no puede ser superior a 250 vehículos. El beneficio es el siguiente: para los coches económicos, 50€; para los coches familiares y SUV, 75€. Por último, para las furgonetas, 150€. Se quiere cubrir una demanda mínima para cada tipo de vehículo: de forma respectiva, 60, 25, 40 y 15. Asimismo, se ha establecido un límite en cuanto a mantenimiento mensual: no se quiere superar la cifra de 7.000€. Los costes en los que se incurre para cada tipo de vehículo son los siguientes: coches económicos, 25€; coches familiares, 40€; vehículos SUV, 60€. Por último, las furgonetas, 80€.

Al igual que en todos los problemas, debemos definir la función objetivo y decidir si queremos maximizar o minimizar. Por tanto:

La función objetivo, que en este caso queremos maximizar, es la siguiente:

- maximizar: $50x + 75y + 75z + 150s$

Por otro lado, las restricciones que se deben de cumplir son las planteadas a continuación

- Flota máxima: $x + y + z + s \leq 250$
- Demanda mínima para cada tipo de vehículos: $x \geq 60$; $y \geq 25$; $z \geq 40$; $s \geq 15$
- Coste máximo de mantenimiento: $25x + 40y + 60z + 80s \leq 7.000$

Una vez planteado el problema, debemos trasladar los datos a Excel. Por un lado, tendremos una primera tabla para los valores de las variables y los coeficientes de la función objetivo. Los valores finales de las variables aparecerán en las celdas indicadas en Solver para ese propósito.

Seguidamente, como podemos ver en la tabla de Excel adjunta, indicamos la casilla que Solver debe maximizar. En esta celda, calculamos el valor final de la función objetivo. Para que Excel pueda calcularlo, debemos aplicar la fórmula *SUMAPRODUCTO* a las filas de las variables y de los coeficientes. A este valor lo denominamos z.

VARIABLES	X	Y	Z	S			
VALORES							
						z	
FUNCION OBJETIVO max	50	75	75	150			
RESTRICCIONES							
flota maxima	1	1	1	1		<=	250
demanda minima economicos	1					>=	60
demanda minima familiares		1				>=	25
demanda minima SUV			1			>=	40
demanda minima furgonetas				1		>=	15
coste maximo de mantenimiento	25	40	60	80		<=	7000

FIGURA 5.1 | CREACIÓN PROPIA CON SOLVER

La siguiente tabla que vamos a realizar es la que incluye las restricciones. En ella debemos indicar los coeficientes de cada restricción. El valor de la desigualdad que viene dado por el enunciado lo estableceremos en la columna de la derecha, poniendo a su izquierda el signo que debe cumplir, esto nos permite introducir con más facilidad las desigualdades en Solver. Por último, en la columna restante, la que está a la izquierda de los signos de las restricciones, usaremos una vez más la fórmula *SUMAPRODUCTO*, aplicada a cada fila de la tabla y a la fila de las variables.

Hechas las tablas, podemos utilizar la herramienta Solver de Excel. Desde Solver podemos indicar la celda a optimizar, señalando si lo que deseamos es obtener un máximo o un mínimo, y las celdas correspondientes a las variables. Finalmente, introducimos las restricciones. De igual forma, debemos seleccionar que no queremos variables negativas y el método a utilizar, en nuestro caso será el Simplex LP.

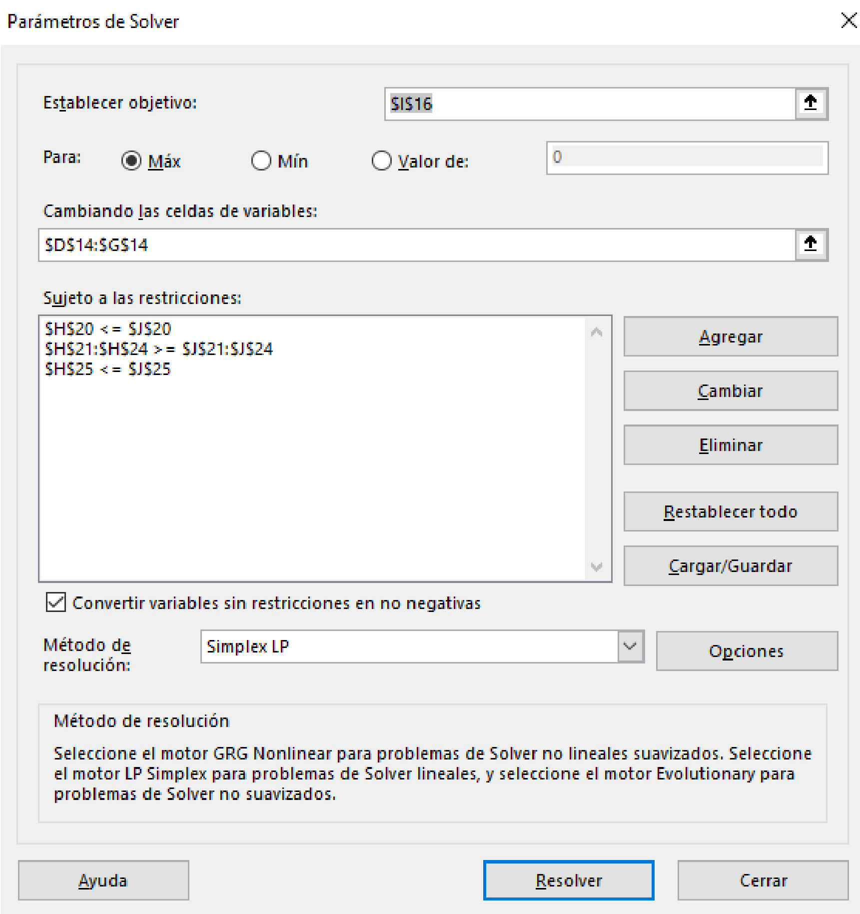

FIGURA 5.2 | CREACIÓN PROPIA CON SOLVER

Como podemos ver en la hoja de cálculo que hemos adjuntado debajo, las celdas amarillas son las que ha calculado Solver para dar el máximo beneficio, que es 11.925€. Por último, podemos ver que se ha calculado la flota utilizada, al igual que la demanda que se va a cubrir para cada tipo de vehículo y el coste de mantenimiento total. Este último es el máximo disponible. Las demandas de las furgonetas, SUVs y familiares corresponden exactamente al mínimo requerido. Sin embargo, en el caso de los coches económicos se cuenta con 36 unidades más del mínimo establecido: este valor sería lo que llamamos holgura. Respecto al número total de la flota, el máximo posible es de 250 y nos basta con 176.

VARIABLES	X	Y	Z	S			
VALORES	96	25	40	15			
					z		
FUNCION OBJETIVO max	50	75	75	150	11925		
RESTRICCIONES							
flota maxima	1	1	1	1	176	<=	250
demanda minima economicos	1				96	>=	60
demanda minima familiares		1			25	>=	25
demanda minima SUV			1		40	>=	40
demanda minima furgonetas				1	15	>=	15
coste maximo de mantenimiento	25	40	60	80	7000	<=	7000

FIGURA 5.3 | CREACIÓN PROPIA CON SOLVER

Visto este ejemplo, es muy fácil observar que este tipo de herramientas nos permite trabajar de una forma mucho más rápida y en situaciones más complejas, ya sea por el número de variables a tener en consideración como por el número de restricciones.

Este mismo problema con el método de la tabulación implicaría seis interacciones. Si bien es verdad que existen herramientas calculadoras que elaboran las tablas, se han desarrollado otras que nos sirven de alternativa y que son más sencillas a simple vista. La ventaja de esta simplicidad es, que en caso de que haya algún error, es factible encontrarlo. Es el caso de la herramienta Solver de Excel o de otros lenguajes de programación que tienen mayor capacidad de operación, ya no solo en complejidad, sino en tiempo de realización.

6. OTRAS POSIBLES SOLUCIONES EN EL MÉTODO SIMPLEX

Todos los casos prácticos que hemos desarrollado con el método Simplex tenían una característica en común: la solución óptima era única. Esto ocurre cuando los elementos de la última fila de la tabla final correspondientes a las posiciones no básicas son todos mayores que 0. Sin embargo, existen otras situaciones en las que puede no haber solución óptima o infinitas soluciones. Vamos a explicar los tres posibles casos que nos podemos encontrar:

6.1. INFINITAS SOLUCIONES DETERMINADAS

En este ejercicio resuelto veremos un problema que admite infinitas soluciones para el valor óptimo. En la tabla simplex se identificará porque habremos alcanzado un óptimo y en la última fila hay un elemento cero correspondiente a una variable no básica

Función Objetivo:

$$\text{Minimizar } z = -x_1 - x_2$$

Sujeto a:

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0$$

Expresamos el problema en la forma estándar añadiendo las variables de holgura para obtener igualdades.

Función Objetivo:

$$\text{Minimizar } z = -x_1 - x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

Sujeto a:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

$$-x_1 + x_2 + x_4 = 1$$

$$x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0,\ \ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0$$

C_b	Base	b	-1	-1	0	0
0	x_3	4	1	1	1	0
0	x_4	1	-1	1	0	1
		0	0	0	0	0
			-1	-1	0	0

Como en la última fila hay dos valores negativos no estamos en el óptimo. Al haber dos valores negativos en la última fila, hay dos posibilidades. Ingresaremos por ejemplo la variable x_1, 4:1=4, y sale x_3. Elemento pivote 1.

C_b	Base	B	-1	-1	0	0
-1	x_1	4	1	1	1	0
0	x_4	5	0	2	1	1
		-4	-1	-1	-1	0
			0	0	1	0

Como en la última fila todos los elementos son positivos hemos terminado alcanzado un óptimo. Como en la última fila hay un cero correspondiente a una variable no básica x_2, existirán múltiples valores que permiten obtener el valor óptimo -4, los cuales están contenidos en el segmento de la recta $-x_1$-x_2=-4

Una de las soluciones es x_1=4, x_2=0, x_3=0, x_4=5

El problema inicial tiene como una solución óptima el punto (x_1 , x_2) = (4,0)

El valor óptimo z=-x_1-x_2+0·x_3+0·x_4=-4-0+0·0+0·5=-4

Si hubiéramos tomado en la tabla inicial la otra variable de entrada x_2 y de salida x_4:

C_b	Base	b	-1	-1	0	0
0	x_3	4	1	1	1	0
0	x_4	1	-1	1	0	1
		0	0	0	0	0
			--1	-1	0	0

C_b	Base	b	-1	-1	0	0
0	x_3	3	2	0	1	-1
-1	x_2	1	-1	1	0	1
		-1	1	-1	0	-1
			-2	0	0	1

C_b	Base	b	-1	-1	0	0
-1	x_1	3/2	1	0	1/2	-1/2
-1	x_2	5/2	0	1	1/2	1/2
		-4	-1	-1	-1	0
			0	0	1	0

Vemos que hemos terminado la optimización y estamos en el mismo caso de antes, infinitas soluciones.

Una de ellas es x_1=3/2, x_2=5/2, x_3=0, x_4=0

Una solución del problema inicial estaría en el punto (3/2,5/2)

Siendo el valor óptimo $-x_1$-x_2=-3/2-5/2= -4

Con la herramienta de GeoGebra podemos representar la situación gráficamente. Si nos fijamos en el gráfico 6.1, el segmento en rojo son todos los puntos que son solución, es decir, tiene infinitas soluciones.

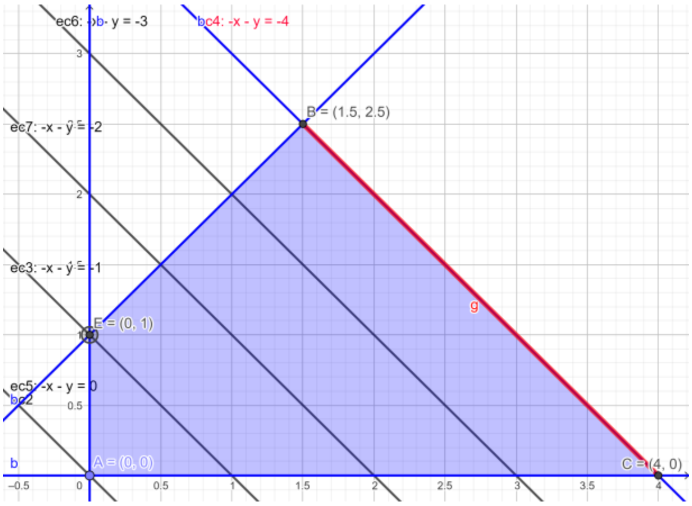

GRÁFICO 6.1 | CREACIÓN PROPIA CON GEOGEBRA

6.2. FUNCIÓN OBJETIVO NO ACOTADA (REGIÓN FACTIBLE ABIERTA)

Se reconoce cuando se llega a una tabla en la que hay variables que quieren entrar en la base, pero ninguna puede salir, ya que al dividir los elementos de la columna *b* entre los correspondientes de la columna de la variable que quiere entrar, todos los posibles pivotes son cero o negativos, por lo que ninguna variable puede salir. Consideremos el siguiente ejemplo para entenderlo mejor, veremos como la función decrece indefinidamente:

Función Objetivo:

$$\text{Minimizar } z=-2\,x_1 - 3\,x_2$$

Sujeto a:

$$-x_1+x_2 \leq 2$$

$$x_2 \leq 5$$

$$x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0$$

Expresamos el problema en la forma estándar añadiendo las variables de holgura para obtener igualdades.

Función Objetivo:

$$\text{Minimizar } z= -2x_1 - 3x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

Sujeto a:

$$-x_1+x_2+x_3=2$$

$$x_2+x_4=5$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0$$

C_b	Base	b	-2	-3	0	0
0	X_3	2	-1	1	1	0
0	X_4	5	0	1	0	1
		0	0	0	0	0
			-2	-3	0	0

2:1, 5:1: el pivote será 1 que da el cociente de menor valor, entra x_2 en la base y sale de la base x_3:

C_b	Base	b	-2	-3	0	0
-3	X_2	2	-1	1	1	0
0	X_4	3	1	0	-1	1
		-6	3	-3	-3	0
			-5	0	3	0

Entra en la base x_1, y sale x_4:

C_b	Base	b	-2	-3	0	0
-3	X_2	5	0	1	0	1
-2	X_1	3	1	0	-1	1
		-21	-2	-3	2	-5
			0	0	-2	5

Vemos que el -2 nos indica que entraría en la base x_3, pero al buscar el elemento pivote nos encontramos con que no hay divisor positivo. No se cumple la condición para que salga alguna variable de la base.

El problema no tiene una solución óptima, hay puntos que cumplen todas las restricciones, pero no obtenemos uno que optimice la función. Si nos fijamos en el gráfico 6.2 podemos ver mejor la situación: a medida que las rectas de nivel se desplazan a la derecha, el valor de la función se reduce cada vez más, pero la región factible no está acotada en la dirección de decrecimiento, por lo que el mínimo no se alcanza nunca.

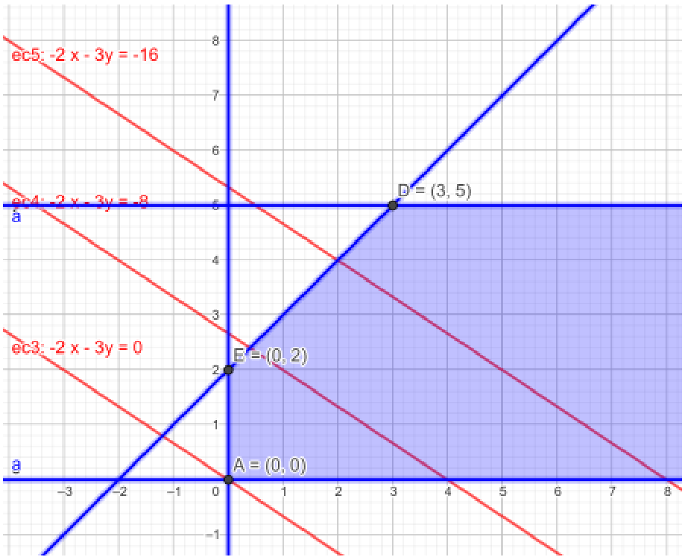

GRÁFICO 6.2 | CREACIÓN PROPIA CON GEOGEBRA

6.3. NO HAY SOLUCIONES FACTIBLES (NO SE FORMA REGIÓN FACTIBLE)

En las tablas del Simplex se reconoce un problema de incompatibilidad porque se llega a una tabla que parece óptima, todos los elementos de la última fila son positivos, pero, sin embargo, aún queda alguna variable artificial en la base. Veámoslo con un ejemplo:

Función Objetivo:

$$\text{Minimizar } z = x_1 - 2x_2$$

Sujeto a:

$$x_1 + x_2 \geq 3$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 2$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

Expresamos el problema en la forma estándar añadiendo las variables de holgura y la artificial x_5 para obtener las igualdades.

Función Objetivo:

$$\text{Minimizar } z = x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + Mx_5$$

Sujeto a:

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 2$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0$$

C_b	Base	b	1	-2	0	0	M
M	X_5	3	1	1	-1	0	1
0	X_4	2	1	2	0	1	0
		3M	M	M	-M	0	M
			1-M	-2-M	M	0	0

El termino más negativo de la última fila es -2-M, entra en la base x_2.

Dividimos los elementos de la columna b entre los posibles pivotes 3:1, 2:2, el menor cociente es el último, obtenemos que el pivote es 2, sale de la base x_4:

C_b	Base	b	1	-2	0	0	M
M	X_5	2	½	0	-1	-½	1
-2	X_2	1	½	1	0	½	0
		2M-2	M/2-1	-2	-M	-M/2-1	M
			-M/2+2	0	M	M/2+1	0

Ingresa en la base x1, hacemos las divisiones para ver quién es el elemento pivote, 2:1/2=4, 1:1/2=2, luego ½ es el pivote, sale de la base x_2:

C_b	Base	b	1	-2	0	0	M
M	X_5	1	0	-1	-1	-1	1
1	X_1	2	1	2	0	1	0
		M+2	1	-M+2	-M	-M+1	M
			0	M-4	M	M-1	0

Todos los términos de la última fila son positivos, hemos terminado y existe una variable artificial en la base con valor positivo 1 por lo que el problema no tiene solución, es infactible.

Como se ve en el gráfico 6.3, las dos zonas de color no tienen ningún punto en la intersección, no hay puntos en la región factible.

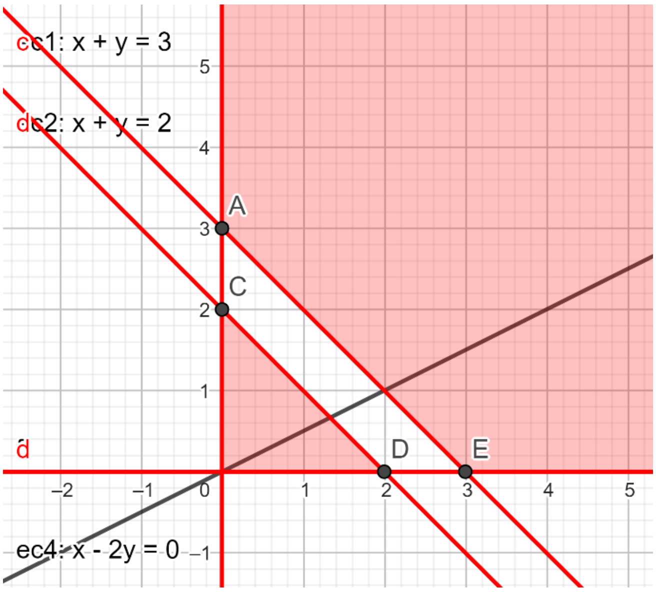

GRÁFICO 6.3 | CREACION PROPIA USANDO GEOGEBRA

7. CONCLUSIÓN

Para finalizar este trabajo, cabe destacar la importancia que ha tenido la Investigaciones de Operaciones en la historia, especialmente el desarrollo de la herramienta del método Simplex, que ha permitido en muy diversos ámbitos la distribución óptima de los recursos. En el mundo empresarial su utilización es altamente beneficiosa, permite distribuir los recursos, humanos y no humanos, de la forma más acertada para lograr mejores resultados, obteniendo el máximo beneficio o incurriendo en el menor coste posible.

A lo largo de la historia se han ido desarrollando diferentes métodos, los cuales buscan el óptimo, pero cada cual tiene sus características que les hace ser más acertados para diferentes tipos de situaciones. Así, por ejemplo, el método gráfico es el más rápido y visual. Sin embargo, solo se puede utilizar cuando el problema presenta dos variables, lo cual en la vida real no suele ser muy frecuente. Es por este tipo de limitaciones que se iban encontrando, que se fueron desarrollando nuevos métodos más complejos que permitieran superar esos obstáculos.

El método Simplex permite encontrar la solución óptima, siempre y cuando exista, en problemas con dos o más variables sin necesidad de calcular todos los puntos factibles, debido a que el algoritmo opera con un subconjunto de ellos, lo que supone una gran ventaja frente a otros métodos, ya que reduce el tiempo de operación.

No debemos olvidar que el avance de la computación se ha dado a la vez que el desarrollo de la Investigación de Operaciones, por lo que en la actualidad nos encontramos con herramientas informáticas que basándose en el método Simplex nos arrojan la solución con únicamente introducir los datos, lo que significa que en cuestiones de pocos minutos podemos obtener la solución óptima a problemas con complejidad.

8. BIBLIOGRAFÍA

Cobo Ortega, A. (1995) *Optimización matemática*. Santander: Copisan.

Hillier, F. S. y Lieberman, G. J. (1995) *Introducción a la Investigación de Operaciones*. México: MCGraw Hill

Ríos Insua, S. (1995*) Modelización*. Madrid: Alianza

Carrasco, D. (2023) *Así es Atenea, el software de gestión de almacén todo en uno de Amphora para optimizar la operativa logística*, *Marketing 4 Ecommerce*. Disponible en: https://marketing4ecommerce.net/asi-es-atenea-el-software-de-gestion-de-almacen-de-amphora-para-optimizar-la-operativa-logistica/ [Consultado: el 4 de julio de 2023].

Mendez, A. (2020) *Método Simplex Paso a Paso: Ejemplos de Maximizar y Minimizar*, *Plan de Mejora*. Disponible en: https://www.plandemejora.com/metodo-simplex-paso-a-paso-ejemplos-maximizar-minimizar/ [Consultado: el 2 de mayo de 2023].

Montoya, L. (2017) *Historia y biografía de George Dantzig*, *Historia y biografía de*. Historia-biografia.com. Disponible en: https://historia-biografia.com/george-bernard-dantzig/ [Consultado: el 10 de octubre de 2023].

PHPSimplex (2019) *Phpsimplex.com*. Disponible en: http://www.phpsimplex.com/index.htm [Consultado: el 8 de octubre de 2023].