FACULTAD
DE
CIENCIAS

Integración simbólica

Symbolic Integration

Trabajo de fin de Grado
para acceder al

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autor: Lucio Valcarce Palacio

Director: Luis Felipe Tabera Alonso

Febrero - 2024

Resumen

En esta memoria tratamos el problema de determinar cuando una función tiene una primitiva que pueda ser expresada en términos de funciones elementales desde un punto de vista algebraico. Además, comentamos una serie de algoritmos que calculan la primitiva de una función racional y sientan las bases de un algoritmo general (el de Risch). Finalmente, aparece la función de distribución normal e^{-x^2}, como ejemplo de que algunas funciones elementales no tienen primitiva elemental.

Palabras Clave: Integración simbólica, Teorema de Liouville, Función elemental, Función de distribución normal.

Abstract

In this report, we study the problem of determining whether a function has an antiderivative that can be written in terms of elementary functions. Additionally, we discuss a collection of algorithms that find the antiderivative of a rational function and lay the groundwork for a general algorithm (the Risch's algorithm). Finally, the normal distribution function e^{-x^2} appears as an example of function that does not have an elementary antiderivative.

Keywords: Symbolic integration, Liouville's Theorem, Elementary function, Normal distribution function.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

La evolución del cálculo de primitivas a lo largo del tiempo ha sido un proceso que abarca varios siglos y ha involucrado a numerosos matemáticos destacados. En la antigüedad, los matemáticos griegos, como Arquímedes, trabajaron en el cálculo de áreas y volúmenes, sentando las primeras bases del cálculo integral. Sin embargo, el concepto moderno de primitivas y derivadas no se desarrolló hasta el Renacimiento, cuando matemáticos como Fermat y Barrow comenzaron a explorar las ideas de tangentes y áreas bajo curvas. Ya en el siglo XVIII es cuando surge el primer algoritmo para calcular una primitiva, eso sí, de una función racional. Este primer algoritmo, pese a sus limitaciones, supuso una fuente de inspiración para diferentes matemáticos de la época, y fue a raíz de ese momento que comenzó a aparecer una serie de algoritmos, cada cual más complejo y a la vez más perfeccionado y menos limitado que el anterior.

Pese a ello, no fue hasta entrado el siglo XX, con el avance de la computación, que se desarrollaron algoritmos algebraicos, como el algoritmo de Risch (Robert Risch), para abordar la cuestión de calcular primitivas de manera algorítmica. El algoritmo de Risch se desarrolla en un contexto histórico donde destaca el desarrollo de la teoría de Galois, la teoría de la integración y el cálculo simbólico, y tiene como objetivo responder a la pregunta de si una función dada tiene una primitiva elemental, es decir, si su integral indefinida puede expresarse en términos de funciones elementales. El algoritmo se basa en una combinación de técnicas de álgebra diferencial y teoría de números algebraicos.

Aunque el algoritmo de Risch en toda su extensión no pertenece al contenido de este trabajo, principalmente por su elevada extensión y complejidad, los resultados mostrados a lo largo de este proyecto podrían considerarse como una introducción al algoritmo de Risch. No obstante, Es importante destacar que, aunque el algoritmo de Risch es un método poderoso y general, existen funciones para las cuales no puede encontrar una primitiva elemental. De hecho, se ha demostrado que la cuestión de la integrabilidad elemental es, en general, algorítmicamente irresoluble. El problema de determinar cuando una función admite una primitiva elemental y cuando no se trata en el Capítulo 3, y el resultado principal se conoce como Teorema de Liouville.

Además, cuando no es posible encontrar primitivas de manera exacta, se recurre a métodos numéricos para obtener aproximaciones precisas de las integrales.

Capítulo 2

Integración de funciones racionales

En este capítulo describiremos algunos algoritmos para integrar funciones racionales. Este caso, que es el más sencillo pues las funciones racionales siempre tienen integrales elementales, es importante porque los algoritmos para integrar funciones más complejas son básicamente generalizaciones de las técnicas usadas para integrar funciones racionales. Los algoritmos descritos en este capítulo son al fin y al cabo casos específicos del algoritmo de Risch. En lo que sigue durante este capítulo, K será un cuerpo de característica 0, x una variable sobre K y con $'$ nos referiremos a la derivada d/dx en $K(x)$, así que x será la variable de integración.

2.1. Definiciones preliminares

Antes de entrar a comentar los distintos algoritmos que aparecen posteriormente, vamos a añadir una serie de definiciones en las que precisamos el contexto algebraico en el que planteamos la existencia de soluciones, así como algunos resultados que se utilizan o sirven como referencia a lo largo de este capítulo.

Definición 2.1. *Un cuerpo es una tupla* $(D, 0, 1, +, *)$ *donde* D *es un conjunto,* $0, 1$ *son elementos de* D *y* $+$, $*$ *son operaciones binarias internas de manera que:*

1. $(D, 0, +)$ *es un grupo conmutativo.*

2. *El producto $*$ es asociativo, conmutativo, con elemento neutro* 1*. Además, todo elemento $x \neq 0$ tiene inverso para el producto.*

3. *Se cumple la propiedad distributiva $a * (b + c) = a * b + a * c$.*

4. $0 \neq 1$.

Definición 2.2. *Un cuerpo diferencial es un par $(D, \frac{d}{dz})$ tal que D es un cuerpo y una aplicación $\frac{d}{dz} : D \longrightarrow D$ llamada derivación que cumple:*

1. $\frac{d}{dz}(a+b) = \frac{d}{dz}(a) + \frac{d}{dz}(b)$

2. $\frac{d}{dz}(ab) = \frac{d}{dz}(a)b + a\frac{d}{dz}(b)$

Llamamos derivada de f a $\frac{d}{dz}(f)$, la denotaremos también por $\frac{df}{dz}$ o por f'. Asumiremos siempre que la característica del cuerpo es 0.

Ejemplo 2.3. *El conocido cuerpo de funciones racionales $\mathbb{R}(X)$ con la derivada usual de funciones racionales es un cuerpo diferencial.*

Por otra parte, también se puede comprobar que si $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ es un dominio (abierto conexo no vacío de $\mathbb{C}$), el conjunto de funciones meromorfas es igualmente un cuerpo diferencial con la derivada usual.

Si D es cualquier cuerpo, la función constante $d : D \longrightarrow D$ dada por $d(f) = 0_D$ es claramente una derivación. La derivación trivial.

Definición 2.4. *Dado un cuerpo diferencial D, llamamos el conjunto de constantes a $K = \{a \in D : \frac{d}{dz}(a) = 0\}$.*

Lema 2.5. *El subconjunto K de constantes de D es un subcuerpo de D.*

Demostración. Por definición, sabemos que $K \subseteq D$. Veamos primero que $0_D \in K$. Para ello, debemos comprobar que $\frac{d}{dz}(0_D) = 0_D$: Sea $a \in D$, entonces

$$(a)' = (a + 0_D)' = (a)' + (0_D)'$$

por lo que $(0_D)' = 0_D$ y $0_D \in K$.

1. K es cerrado para las operaciones: Sean $a, b \in K$, entonces $(a + b)' = a' + b' = 0 + 0 = 0$ luego $(a + b) \in K$. Analogamente, $(ab)' = a'b + ab' = 0b + a0 = 0$ luego $(ab) \in K$. Así, hemos probado que K es cerrado para la suma y el producto.

2. Veamos que 1_D también es un elemento de K. $1'_D = (1_D * 1_D)' = 1'_D * 1_D + 1_D * 1'_D = 1'_D + 1'_D$, luego $1'_D = 0$ y $1_D \in K$.

3. Elemento opuesto e inverso: Veamos que para todo $a \in K, a \neq 0$, se tiene que $(-a)$ y $a^{-1} \in K$.

$$0 = 0' = (a - a)' = (a + (-a))' = a' + (-a)' = (-a)',$$

luego $(-a) \in K$. Por otro lado

$$0 = 1' = (a(a^{-1}))' = a'a^{-1} + a(a^{-1})' = a(a^{-1})',$$

y como $a \neq 0$, $(a^{-1})' = 0$ y $a^{-1} \in K$.

$\square$

Ejemplo 2.6. *Volvamos al Ejemplo 2.3 y veamos cual es en cada caso el cuerpo de constantes. En el caso de $\mathbb{R}(X)$, el cuerpo de constantes K lo formarían todas las funciones constantes (que no dependen de la variable X).*

Para el cuerpo de funciones meromorfas en Ω, el cuerpo de constantes lo formarán todas las funciones definidas en Ω cuya derivada sea idénticamente 0 en Ω. Es decir, de nuevo, las funciones constantes.

Además, si en cualquiera de estos ejemplos considerásemos la derivada trivial (aquella que manda cualquier elemento a 0), el cuerpo de constantes sería igual al cuerpo inicial.

Veamos ahora, algunas de las propiedades conocidas de la derivada para cualquier derivación.

Lema 2.7. *Sea $f \in D$, entonces $(f^n)' = nf^{n-1}f'$.*

Demostración. Probemos el resultado por inducción: En el caso base $n = 1$: $f' = 1f'$. Supongamos, por tanto, el resultado cierto para $n-1$. De ese modo, $(f^{n-1})' = (n-1)f^{n-2}f'$. Veamos que el resultado es cierto para el caso n:

$$(f^n)' = (f^{n-1}f)' = (f^{n-1})'f + f^{n-1}f'$$

y usando la hipótesis de inducción tenemos que

$$(f^{n-1})'f + f^{n-1}f' = (n-1)f^{n-2}f'f + f^{n-1}f' = nf^{n-1}f'.$$

Por lo que queda demostrada la propiedad por inducción. $\square$

Lema 2.8. *Sea D un cuerpo diferencial y $f, g \in D$, con $g \neq 0$ entonces $(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$.*

Demostración. Sea $f \in D$, tomando $g \in D$ se tiene que $f = f\frac{g}{g}$, luego $f' = (f\frac{g}{g})' = (\frac{f}{g})'g + \frac{f}{g}g'$, donde se ha utilizado la defininción de derivada. Así, despejando,

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' - \frac{f}{g}g'}{g} = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

□

Proposición 2.9. *D es un espacio vectorial sobre K y $\frac{d}{dz} : D \longrightarrow D$ es una aplicación K-lineal.*

Demostración. Como K es un subcuerpo de D, D es un K-espacio vectorial.

Por otra parte, para probar que $\frac{d}{dz} : D \longrightarrow D$ es una aplicación K-lineal, basta comprobar que es lineal respecto a la suma de vectores y la multiplicación por escalares. No obstante, ambas popiedades son consecuencias directas de la definición de derivada, pues:

1. para todo $a, b \in D$, $\frac{d}{dz}(a + b) = \frac{d}{dz}(a) + \frac{d}{dz}(b)$.
2. para todo $\alpha \in K, u \in D$, se tiene que $\frac{d}{dz}(\alpha u) = \frac{d}{dz}(\alpha)u + \alpha\frac{d}{dz}(u) = \alpha\frac{d}{dz}(u)$.

□

Nuestro objetivo a lo largo de este trabajo es tratar de averiguar qué condiciones debe cumplir una función para que su primitiva pueda expresarse a partir de funciones elementales. En un primer lugar consideramos como funciones elementales los logaritmos y exponenciales (aunque más adelante se prueba que existen otras funciones que también lo son, como las trigonométricas). Por este motivo, vamos a introducir la noción de logaritmo y exponencial.

La necesidad de introducir logaritmos aparece de manera natural como respuesta a la integración de funciones racionales. Si no utilizáramos los logaritmos, bastaría tomar cualquier elemento $z \in D$ trascendente sobre K de manera que $z' = 1$ para ver que $1/z \in D$ no tiene una primitiva en $K(z)$.

Definición 2.10. *Sea D un cuerpo diferencial y $\theta \in D$, decimos que θ es un logaritmo si existe un elemento $f \in D$ tal que $\theta' = f'/f$.*

En caso de existir, escribiremos $\theta = \log(f)$.

Ejemplo 2.11. *Veamos que el logaritmo de una constante también es una constante. Sea $c \in K$, $c \neq 0$, entonces se tiene que $c' = 0$. Si tomamos el logaritmo de c, $(\log(c))' = c'/c = 0$, luego $\log(c) \in K$.*

Además, dada una constante cualquiera a siempre podemos considerarla como un logaritmo, pues basta tomar cualquier elemento $f \neq 0$ del cuerpo de constantes para probar que $a' = f'/f$.

Teorema 2.12. *Sean θ, α dos logaritmos en un cuerpo diferencial D, entonces $\theta + \alpha$ es también un logaritmo en D.*

Demostración. θ es un logaritmo en D, entonces existe $f \in D$ tal que $\theta' = f'/f$. De manera análoga, existe $g \in D$ tal que $\alpha' = g'/g$. Veamos qué forma tiene $(\theta + \alpha)'$:

$$(\theta + \alpha)' = \theta' + \alpha' = f'/f + g'/g = (f'g + fg')/fg$$

y considerando $h = fg \in D$, tenemos que $(\theta + \alpha)' = h'/h$, con $h \in D$, luego $(\theta + \alpha)$ es también un logaritmo en D. □

Definición 2.13. *Sea D un cuerpo diferencial y $\alpha \in D$, decimos que α es una exponencial si existe $g \in D$ tal que $\alpha' = \alpha g'$*

En caso de existir, escribiremos $\theta = exp(f)$ o $\theta = e^f$, indistintamente.

Ejemplo 2.14. *Veamos que la exponencial de una constante también es una constante. Sea $c \in K$, entonces $c' = 0$. Tomamos la exponencial de c, $(exp(c))' = exp(c)c' = 0$, luego $exp(c) \in K$.*

Teorema 2.15. *Sean θ, α dos exponenciales en un cuerpo diferencial D, entonces $\theta\alpha$ es también una exponencial en D.*

Demostración. θ es una exponencial en D, entonces existe $f \in D$ tal que $\theta' = \theta f'$. De manera análoga, existe $g \in D$ tal que $\alpha' = \alpha g'$. Veamos qué forma tiene $(\theta\alpha)'$:

$$(\theta\alpha)' = \theta'\alpha + \theta\alpha' = f'\theta\alpha + g'\theta\alpha = (f' + g')\theta\alpha = (f + g)'\theta\alpha.$$

Así, basta considerar $h = g + f \in D$ para ver que $(\theta\alpha)' = h'(\theta\alpha)$ con $h \in D$, luego $\alpha\theta$ es una exponencial en D. □

Definición 2.16. *Sea D un cuerpo diferencial con una operación $\frac{d}{dz}$, decimos que un cuerpo F es una extensión diferencial de D si (F, d) es un cuerpo diferencial, D es un subcuerpo de F y d extiende $\frac{d}{dz}$. Es decir, para todo $f \in D$, $d(f) = \frac{d}{dz}(d)$.*

Teorema 2.17. *Sea D un cuerpo diferenciable, F una extensión diferencial de D. Si $\theta \in F$ es algebraico sobre K, entonces θ es constante.*

Demostración. Sea $\theta \in F$ algebraico sobre K, entonces existe un polinomio $P(x) \in K[X]$ tal que $P(\theta) = 0$. Como $P(\theta) = 0$, $(P(\theta))' = 0$. Tomemos como $P(x)$ el polinomio mínimo de θ, mónico e irreducible: $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, con $a_n = 1$. Así, $0 = (P(\theta))' = \sum_{i=0}^{n}(a_i'\theta^i + a_i i\theta^{i-1}\theta') = \sum_{i=0}^{n} a_i'\theta^i + (\sum_{i=1}^{n} a_i i\theta^{i-1})\theta'$. Ahora, los coeficientes de $\sum_{i=0}^{n} a_i'\theta^i$ son todos nulos, pues $P(x) \in K[X]$, lo que significa que los a_i son constantes. Así, tenemos que $(\sum_{i=1}^{n} a_i i\theta^{i-1})\theta' = 0$ y como $\sum_{i=1}^{n} a_i i\theta^{i-1}$ es un polinomio no nulo de grado $n-1$ (el término de mayor grado es $a_n n$ y K tiene característica 0), entonces $\theta' = 0$, lo que prueba que θ es constante. □

Teorema 2.18. *Sea θ algebraico sobre un cuerpo D, entonces θ' es también algebraico sobre D.*

Demostración. Sea θ algebraico sobre D. Tomemos el polinomio mínimo de θ con coeficientes en D, que es mónico e irreducible: $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, con $a_n = 1$. Por definición de $P(X)$, sabemos que $P(\theta) = 0$, luego $(P(\theta))' = 0$. Veamos qué forma tiene $(P(\theta))'$:

$$0 = (P(\theta))' = \sum_{i=0}^{n}(a_i'\theta^i + a_i i\theta^{i-1}\theta') = \sum_{i=0}^{n} a_i'\theta^i + \left(\sum_{i=1}^{n} a_i i\theta^{i-1}\right)\theta'.$$

Como el polinomio es mónico, tenemos que la primera parte de la expresión anterior, $\sum_{i=0}^{n} a_i'\theta^i$, es de grado menor que n. Distingamos ahora dos casos, que dicha expresión sea nula o que no lo sea.

Caso 1: $\sum_{i=0}^{n} a_i'\theta^i = 0$. Entonces $\sum_{i=1}^{n}(a_i i\theta^{i-1})\theta' = 0$ y como P es mónico, el término de mayor grado de $\sum_{i=1}^{n} a_i i\theta^{i-1}$ es igual a n. Este es un polinomio de grado $n-1$, menor que grade del polinomio mínimo. Así $\sum_{i=1}^{n} a_i i\theta^{i-1} \neq 0$. De esa manera, θ' debe ser 0 para que se cumpla la igualdad, luego es algebraico.

Caso 2: $\sum_{i=0}^{n} a_i'\theta^i \neq 0$. Como tenemos que $\sum_{i=0}^{n} a_i'\theta^i + \sum_{i=0}^{n} a_i i\theta^{i-1}\theta' = \sum_{i=0}^{n} a_i' x^i + (\sum_{i=0}^{n} a_i i\theta^{i-1})\theta' = 0$, despejando de esta ecuación θ' se tiene que $\theta' = -\sum_{i=0}^{n} a_i i\theta^{i-1}/\sum_{i=0}^{n} a_i' x^i \in D(\theta)$. Así, podemos afirmar que θ' es algebraico sobre D, pues θ lo es. □

Teorema 2.19. *Si g y h son logaritmos de f, entonces existe $c \in K$ con $h = g + c$.*

Demostración. Sean g, h dos logaritmos de f, entonces se tiene que $g' = f'/f$ y $h' = f'/f$. Veamos qué forma tiene $(h-g)'$. $(h-g)' = h'-g' = f'/f - f'/f = 0$. Es decir, que $(h-g) \in K$ y por tanto, $\exists c \in K$ tal que $h - g = c$ y $h = g + c$. $\square$

Teorema 2.20. *Si g y h son exponenciales de f, entonces existe $c \in K$ tal que $h = cg$.*

Demostración. Sean g, h dos exponenciales de f, entonces se tiene que $g' = gf'$ y $h' = hf'$. Veamos qué forma tiene $(h/g)'$. $(h/g)' = (h'g - hg')/g^2 = (hf'g - hgf')/g^2 = 0$. Es decir, que $h/g \in K$ y por tanto $\exists c \in K$ tal que $h/g = c$ y $h = gc$. $\square$

Finalmente, probaremos dos teoremas que se son de gran importancia, pues serán utilizados posteriormente por los algoritmos que vamos a comentar.

Teorema 2.21. *Sea θ trascendente sobre un cuerpo D. $P, Q \in D[\theta]$ tales que Q sea un polinomio no constante. Sea $Q = Q_1^{i_1} \cdots Q_r^{i_r}$ la descomposición en factores irreducibles de Q. Entonces todo elemento $P/Q \in D(\theta)$ se puede escribir de forma única como:*

$$\frac{P}{Q} = P_0 + \sum_{j=1}^{r} \frac{P_j}{Q_j^{i_j}}.$$

donde $\deg(P_j) < \deg(Q_j^{i_j})$ *para cada* $j \in \{1, \ldots, r\}$.

Demostración. Para demostrar el resultado dividiremos la demostración en dos partes, primero probaremos que efectivamente se puede escribir de la forma que indica el enunciado y posteriormente veremos que dicha expresión es única. Observamos que P_0 es el cociente entre P y Q, que es único, por lo que podemos suponer que $\deg(P) < \deg(Q)$.

Para demostrar la existencia razonemos por inducción sobre r. El caso $r = 1$ es trivial. Veamos el caso $r = 2$: $Q = Q_1^{i_1} Q_2^{i_2}$. Así, podemos escribir P/Q como $P/Q_1^{i_1} Q_2^{i_2}$ y debemos probar que esta expresión se puede separar como una suma $P_1/Q_1^{i_1} + P_2/Q_2^{i_2}$, donde P_1 y P_2 deben satisfacer $P_1 Q_2^{i_2} + P_2 Q_1^{i_1} = P$. Como la descomposición de Q es en factores irreducibles, se tiene que $mcd(Q_1^{i_1}, Q_2^{i_2}) = 1$, luego por la Identidad de Bezout, sabemos que existen a, b tales que $aQ_1^{i1} + bQ_2^{i2} = 1$. Así, multiplicando por P a ambos lados, se obtiene la ecuación deseada.

Ahora supongamos cierto el caso $r-1$. Es decir, sea $Q = Q_1^{i_1} \cdots Q_{r-1}^{i_{r-1}}$, entonces P/Q se puede escribir como $\sum_{j=1}^{r-1} \frac{P_j}{Q_j^{i_j}}$. Veamos que se cumple para el caso r: Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\deg(P) < \deg(Q)$. $Q = Q_1^{i_1} \cdots Q_r^{i_r} = (Q_1^{i_1} \cdots Q_{r-1}^{i_{r-1}})Q_r^{i_r}$. LLamando R a $Q_1^{i_1} \cdots Q_{r-1}^{i_{r-1}}$, entonces tenemos que $Q = RQ_r^{i_r}$, con lo que hemos reducido el problema al caso $r = 2$ y podemos separar P/Q como suma de 2 fracciones: $P = P_m/R + P_r/Q_r^{i_r}$. Ahora, la primera parte de esta expresión, P_m/R es de nuevo el caso $r-1$, luego puede escribirse como $\sum_{j=1}^{r-1} \frac{P_j}{Q_j^{i_j}}$ por hipótesis, quedando

$$\frac{P}{Q} = \sum_{j=1}^{r-1} \frac{P_j}{Q_j^{i_j}} + \frac{P_r}{Q_r^{i_r}} = \sum_{j=1}^{r} \frac{P_j}{Q_j^{i_j}}.$$

Acabamos de probar que efectivamente existen polinomios $P_1, \ldots, P_r$ que cumplen que $P/Q = \sum_{j=1}^{r} P_j/Q_j^{i_j}$. Veamos ahora cómo transformar esta expresión en otra en la que se cumpla que $\deg(P_j) < \deg(Q_j^{i_j})$ para cada $j \in \{1, \ldots, r\}$.

Si Q es un polinomio de un único factor, entonces por la división de polinomios tenemos que $P/Q = P_0 + R/Q$, con $\deg(R) < \deg(Q)$ y ambos coeficientes son únicos. Supongamos ahora que Q puede expresarse como producto de dos factores únicos $Q = AB$. Sea P/AB con $\deg(P) < \deg(AB)$. Entonces $P/AB = R_1/A + R_2/B$ donde $\deg(R_1) < \deg(A)$ y $\deg(R_2) < \deg(B)$. Además, también existen T_1, T_2 tal que $P = T_1B + T_2A$ donde $\deg(P) < \deg(A) + \deg(B)$. Dividiendo ahora T_1 entre A, se tiene que $T_1 = AS + R_1$ y sustituyendo esta expresión en P: $P = T_1B + T_2A = (AS + R_1)B + T_2A$. Reordenando, $R_1B + (T_2 + BS)A = P$ y como $\deg(R_1B) < \deg(A) + \deg(B)$ y $\deg(P) < \deg(A) + \deg(B)$, entonces $\deg(T_2 + BS) < \deg(B)$ y podemos llamar $(T_2 + BS) = R_2$. Luego hemos visto que P puede escribirse de manera que los grados de sus coeficientes cumplan las condiciones requeridas.

Veamos ahora que dicha descomposición es única. Supongamos que existen R_1, R_2, T_1, T_2 tales que $P = R_1B + R_2A = T_1B + T_2A$ donde

$$\deg(R_1), \deg(T_1) < \deg(A) \text{ y } \deg(R_2), \deg(T_2) < \deg(B).$$

Operando, $(R_1 - T_1)B = (T_2 - R_2)A$. Así, tenemos que $B \mid (T_2 - R_2)A$, pero A, B son primos y $\deg(T_2 - R_2) < \deg(Q)$, luego la única posibilidad es que $T_2 - R_2 = 0$ y $T_2 = R_2$. Análogamente, $T_1 - R_1 = 0$ y $T_1 = R_1$, luego la expresión es única.

Para el caso genérico, tenemos que Q puede expresarse como producto de n factores primos $Q = A_1 A_2 \dots A_n$. Así, $P/Q = R_1/A_1 + \cdots + R_{n-1}/A_{n-1} + R_n/A_n$. Agrupando, se tiene que

$$\frac{P}{Q} = \frac{R_1(A_2 \dots A_{n-1}) + \cdots + R_{n-1}(A_1 \dots A_{n-2})}{A_1 \dots A_{n-1}} + \frac{R_n}{A_n},$$

donde ambos denominadores son primos entre sí (por serlo todos los A_i) y se puede aplicar de nuevo el razonamiento del caso $n = 2$.

Un apunte importante sobre esta demostración es que solo tiene sentido en el caso en que θ es algebraico sobre D, pues estamos utilizando propiedades de los DFU. $\square$

Teorema 2.22. *Sea θ transcendente sobre D. $\frac{P}{Q^i} \in D(\theta)$ con Q mónico e irreducible. Entonces existe unos únicos polinomios $P_0, \dots, P_i$, con $\deg(P_j) < \deg(Q)$ si $1 \leq j \leq i$ tales que:*

$$\frac{P}{Q^i} = P_0 + \frac{P_1}{Q} + \frac{P_2}{Q^2} + \cdots + \frac{P_i}{Q^i}$$

Demostración. La demostración se divide en dos partes, primero probaremos la existencia y acto seguido la unicidad. Probemos la existencia por inducción sobre i:

Para el caso $i = 1$, realizando la división de P entre Q, tenemos $P = P_1 Q + R_1$, con $\deg(R_1) < \deg(Q)$. Entonces, $\frac{P}{Q} = P_1 + \frac{R_1}{Q}$, donde $\deg(R_1) < \deg(Q)$.

Supongamos el resultado cierto para $i = n - 1$. Así, $\frac{P}{Q^{n-1}} = P_0 + \frac{P_1}{Q} + \cdots + \frac{P_{n-1}}{Q^{n-1}}$, donde $\deg(P_j) < \deg(Q)$ para $1 \leq j \leq n - 1$.

Ahora veamos que se cumple para $i = n$:

$$\frac{P}{Q^n} = \frac{1}{Q}\frac{P}{Q^{n-1}} = \frac{1}{Q}\left(P_0 + \frac{P_1}{Q} + \cdots + \frac{P_{n-1}}{Q^{n-1}}\right)$$

y realizando la división, tenemos

$$\frac{P}{Q^n} = \frac{P_0}{Q} + \frac{P_1}{Q^2} + \cdots + \frac{P_{n-1}}{Q^n}$$

donde $\frac{P_0}{Q}$ vuelve a ser el caso $i = 1$, por lo que es igual a $T_0 + \frac{R_0}{Q}$ y con ello hemos demostrado la existencia.

Ahora veamos la unicidad:
Supongamos que existen $P_0, P_1, \ldots, P_n$ y $T_0, T_1, ..., T_n$ con las características requeridas tales que

$$P_0 + \frac{P_1}{Q} + \cdots + \frac{P_n}{Q^n} = \frac{P}{Q^n} = T_0 + \frac{T_1}{Q} + \cdots + \frac{T_n}{Q^n} = \frac{P}{Q^n}.$$

Restando ambas expresiones se tiene que $(P_0 - T_0) + \frac{P_1 - T_1}{Q} + \cdots + \frac{P_n - T_n}{Q^n} = 0$. Ahora, multiplicando por Q^n tenemos el polinomio

$$(P_0 - T_0)Q^n + (P_1 - T_1)Q^{n-1} + \cdots + (P_n - T_n) = 0 \tag{2.1}$$

donde $Q, Q^2, \ldots, Q^n$ son mónicos. Despejando, se obtiene que

$$(T_n - P_n) = (P_0 - T_0)Q^n + (P_1 - T_1)Q^{n-1} + \cdots + (P_{n-1} - T_{n-1})Q,$$

de donde se puede concluir que $(T_n - P_n)$ es un múltiplo de Q. Sin embargo, sabemos que $\deg(P_n), \deg(T_n) < \deg(Q)$, luego $\deg(T_n - P_n) < \deg(Q)$ por lo que la única forma de que $(T_n - P_n)$ sea múltiplo de Q es que $T_n - P_n = 0$ y por tanto $P_n = T_n$. Volvamos ahora a la expresión 2.1 y restemos $P_n/Q^n = T_n/Q^n$. El exponente máximo de Q ahora es $n-1$. Repitamos el mismo proceso para probar que $P_{n-1} = T_{n-1}$ y así sucesivamente hasta demostrar que $P_i = T_i$ para todo i, lo que prueba la unicidad. □

Ahora sí podemos introducir los distintos algoritmos de integración. Como bien indica el título de este capítulo, todos estos algoritmos proporcionan la primitiva de una función racional.

El problema de integrar funciones racionales parece ser tan antiguo como el de la derivación. Según Ostrogradsky [5], Tanto Newton como Leibniz trataron de obtener la integral de una función racional, aunque no lograron diseñar un algoritmo completo. La idea de Leibniz se basaba en calcular una factorización irreducible del denominador sobre los reales, posteriormente una descomposición parcial en fracciones donde cada denominador tenga grado 1 o 2 en x, y una vez ahí integrar cada sumando separadamente. Sin embargo, no fue capaz de resolver totalmente el caso de un denominador cuadrático. A principios del siglo XVIII, Johan Bernoulli perfeccionó el método de la descomposición parcial en fracciones, completando así el método de Leibniz. Este es hasta el momento el algoritmo de integración más antiguo que conocemos [4]. Pese a ser el más antiguo de todos, este sigue siendo el método que encontramos habitualmente hoy en día en libros de texto, y que se enseña en los institutos e incluso en las asignaturas de introducción al cálculo de la universidad. El principal problema que presenta dicho método reside en la dificultad de calcular la factorización completa de un polinomio sobre los reales. Este problema fue objeto de investigación a lo largo del siglo XIX y, ya en 1845, el matemático ruso M. W. Ostrogradsky [5] presentó un algoritmo que permite calcular la parte racional de la integral sin necesidad de factorizar. Aunque este método se enseñó a los estudiantes rusos, y aparece en algunos libros rusos de análisis, no fue enseñado de manera global en el resto del mundo, donde se descubrieron algoritmos similares de manera independiente. Ese fue el caso de Charles Hermite [3], quien publicó en 1872 un algoritmo distinto al de Ostrogradsky pero que lograba el mismo objetivo, calcular la parte racional de la integral sin necesidad de factorizar. El problema de calcular la parte trascendental de la integral siguió pendiente durante más de un siglo, y ha sido resuelto finalmente en publicaciones recientes. Los diferentes algoritmos, así como sus respectivos códigos se encuentran en [1].

2.2. El Algoritmo de Bernoulli

Este algoritmo, el más simple y antiguo de todos, no es muy utilizado en la práctica por el ya comentado coste de factorizar en $\mathbb{R}[x]$. No obstante, es importante pues contiene los fundamentos en los que se basan el resto de algoritmos. Sea $f \in \mathbb{R}[x]$ nuestro integrando, escribamos $f = P + A/D$, donde $P, A, D \in \mathbb{R}[x]$, $mcd(A, D) = 1$ y $\deg(A) < \deg(D)$. Sea

$$D = c\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)^{e_i}\prod_{j=1}^{m}(x^2+b_jx+c_j)^{f_j}$$

la factorización irreducible de D sobre $\mathbb{R}$, donde $c, a_i, b_j, c_j \in \mathbb{R}$ y los e_i, f_j son enteros positivos. Calculando la descomposición parcial de f tenemos

$$f = P + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{e_i}\frac{A_{ik}}{(x-a_i)^k} + \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{f_j}\frac{B_{jk}x+C_{jk}}{(x^2+b_jx+c_j)^k}$$

donde $A_{ik}, B_{jk}, C_{jk} \in \mathbb{R}$. Consecuentemente,

$$\int f = \int P + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{e_i}\int\frac{A_{ik}}{(x-a_i)^k} + \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{f_j}\int\frac{B_{jk}x+C_{jk}}{(x^2+b_jx+c_j)^k}$$

Calcular $\int P$ no supone ningún problema por ser P en este caso un polinomio en $\mathbb{R}[x]$ y para el resto de términos nos encontramos

$$\int \frac{A_{ik}}{(x-a_i)^k} = \begin{cases} A_{ik}\frac{(x-a_i)^{1-k}}{(1-k)} & \text{if } k>1 \\ \\ A_{i1}\log(x-a_i) & \text{if } k=1 \end{cases} \tag{2.2}$$

y ahora, teniendo en cuenta que $b_j^2 - 4c_j < 0$ por ser $x^2 + b_jx + c_j$ irreducible en $\mathbb{R}[x]$,

$$\begin{aligned}\int \frac{B_{j1}x + C_{j1}}{(x^2 + b_jx + c_j)} =& \frac{B_{j1}}{2}\log\left(x^2 + b_jx + c_j\right) \\ &+ \frac{2C_{j1} - b_jB_{j1}}{\sqrt{4c_j - b_j^2}}\arctan\left(\frac{2x + b_j}{\sqrt{4c_j - b_j^2}}\right)\end{aligned}$$

y para $k > 1$

$$\begin{aligned}\int \frac{B_{jk}x + C_{jk}}{(x^2 + b_jx + c_j)^k} =& \frac{(2C_{jk} - b_jB_{jk})\,x + b_jC_{jk} - 2c_jB_{jk}}{(k-1)\left(4c_j - b_j^2\right)(x^2 + b_jx + c_j)^{k-1}} \\ &+ \int \frac{(2k-3)\,(2C_{jk} - b_jB_{jk})}{(k-1)\left(4c_j - b_j^2\right)(x^2 + b_jx + c_j)^{k-1}}.\end{aligned}$$

Esta última fórmula se puede usar de manera recursiva hasta llegar al caso $k = 1$, consiguiendo así la integral completa.

Ejemplo 2.23. *Tomemos $f = 1/(x^3 + x) \in \mathbb{Q}[x]$. El denominador de f factoriza sobre $\mathbb{R}$ como $x^3 + x = x(x^2 + 1)$, y la descomposición parcial de f es*

$$\frac{1}{x^3 + x} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1}$$

Con lo cual, simplemente aplicando las fórmulas anteriores podemos obtener

$$\int \frac{dx}{x^3 + x} = \log(x) - \frac{1}{2}\log(x^2 + 1). \tag{2.3}$$

Ejemplo 2.24. *Sea $f = 1/x^3 + x^2 + x - 3 \in \mathbb{Q}[x]$. El denominador de f factoriza en $\mathbb{R}$ como $(x-1)(x^2 + 2x + 3)$ y la descomposición parcial de f es*

$$\frac{1/6}{x-1} - \frac{1/6(x+3)}{x^2 + 2x + 3}.$$

Ahora, utlizando de nuevo las fórmulas y tomando para la primera parte de la expresión $k = 1$, tenemos

$$\int \frac{1/6}{x-1} dx = 1/6 \log(x-1).$$

De nuevo, para la segunda parte de la integral, tomando $j = 1$, $k = 1$, $b_1 = 2$, $c_1 = 3$, $B_{11} = 1/6$ y $C_{11} = 1/2$, tenemos que

$$\int \frac{1/6(x+3)}{x^2+2x+3} = \frac{1}{12} \log(x^2+2x+3) + \frac{2/3}{\sqrt{8}} \arctan\left(\frac{2x+2}{\sqrt{8}}\right).$$

Finalmente, juntando ambas partes se tiene que

$$\int \frac{dx}{x^3+x^2+x-3} = \frac{\log(x-1)}{6} - \frac{\log(x^2+2x+3)}{12} - \frac{2/3}{\sqrt{8}} \arctan\left(\frac{2x+2}{\sqrt{8}}\right).$$

Una variante del algoritmo de Bernoulli que funciona en un cuerpo arbitrario K de característica nula, consiste en factorizar D linealmente en la clausura algebraica de K, $D = \prod_{i=1}^{q}(x-\alpha_i)^{e_i}$ para posteriormente usar (2.2) en cada término de la siguiente descomposición parcial de f:

$$f = P + \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{e_i} \frac{A_{ij}}{(x-a_i)^j}. \tag{2.4}$$

Ejemplo 2.25. *Sea $f = 1/(x^3+x) \in \mathbb{Q}[x]$. El denominador de f factoriza en $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ como $x^3+x = x(x+\sqrt{-1})(x-\sqrt{-1})$ y la descomposición parcial de f es*

$$\frac{1}{x^3+x} = \frac{1}{x} - \frac{1/2}{x+\sqrt{-1}} - \frac{1/2}{x-\sqrt{-1}}.$$

Así, una integral de f es la siguiente

$$\int \frac{dx}{x^3+x} = \log(x) - \frac{1}{2}\log(x+\sqrt{-1}) - \frac{1}{2}\log(x-\sqrt{-1}).$$

Nótese que existe una integral de f que se puede escribir sin necesidad de $\sqrt{-1}$, como aparece en (2.3).

El mayor problema de este algoritmo reside en la necesidad de utilizar algunos elementos algebraicos sobre K que no aparecen en la integral. Este es el caso del último ejemplo, donde el algoritmo opera en $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$, aunque existe una integral con coeficientes únicamente en $\mathbb{Q}$. Por otra parte, existen algunas integrales que no pueden expresarse sin utilizar algunos elementos algebraicos. Este es el caso por ejemplo de $\int \frac{1}{x^2-2}dx$, que no puede escribirse, en una extensión elemental, sin utilizar $\sqrt{2}$, véase [6]. Así, de manera genérica, deberemos incluir una extensión algebraica de K en algún momento.

2.3. El Algoritmo de Hermite

De la variante del algoritmo de Bernoulli que acabamos de ver podemos concluir que dada cualquier $f \in K(x)$, una primitiva de f es de la forma

$$\int f = v + \sum_{i=1}^{m} c_i \log(u_i) \tag{2.5}$$

donde $v, u_1, \ldots, u_m \in \overline{K}(x)$ y $c_1, \ldots, c_m \in \overline{K}$. v es denominado como la parte racional de la integral, y la suma de logaritmos se denomina la parte trascendental de la integral. Este resultado se genralizará en el Capítulo 3 con el Teorema de Liouville.

Definición 2.26. *Un algoritmo que no recurre a extensiones algebraicas innecesarias y no calcula factorizaciones irreducibles sobre K será llamado racional.*

Hermite [3] proporcionó un algoritmo racional para calcular v: Escribamos el integrando $f = A/D$, donde $A, D \in K[x]$ y mcd(A, D)=1. Sea $D = D_1 D_2^2 \ldots D_n^n$ una factorización de D libre de cuadrados. Utilizando una descomposición parcial de f con respecto a $D_1, D_2^2, \ldots, D_n^n$, escribamos

$$f = P + \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{D_k^k}$$

donde $P, A_k \in K[x]$ y tenemos que o bien $A_k = 0$ o bien $\deg(A_k) < \deg(D_k^k)$ para cada k. Así,

$$\int f = \int P + \sum_{k=1}^{n} \int \frac{A_k}{D_k^k}$$

luego el problema ha quedado reducido a integrar una fracción de la forma Q/V^k donde $\deg(Q) < \deg(V^k)$ y V es libre de cuadrados, lo que implica que mcd(V, V')=1. Consecuentemente, podemos usar el algoritmo de Euclides extendido para encontrar $B, C \in K[x]$ de manera que

$$\frac{Q}{1-k} = BV' + CV$$

y $\deg(B) < \deg(V)$. Esto implica que $\deg(BV') < \deg(V^2) \leq \deg(V^k)$, por lo tanto $\deg(C) < \deg(V^{k-1})$. Multiplicando ambos lados por $(1-k)/V^k$,se tiene que

$$\frac{Q}{V^k} = -\frac{(k-1)BV'}{V^k} + \frac{(1-k)C}{V^{k-1}}.$$

Sumando y restando B'/V^{k-1} a la expresión de la derecha tenemos

$$\frac{Q}{V^k} = \left(\frac{B'}{V^{k-1}} - \frac{(k-1)BV'}{V^k}\right) + \frac{(1-k)C - B'}{V^{k-1}}.$$

E integrando ahora ambos lados

$$\int \frac{Q}{V^k} = \frac{B}{V^{k-1}} + \int \frac{(1-k)C - B'}{V^{k-1}}$$

Como $\deg((1-k)C - B') < \deg(V^{k-1})$, la integral ha quedado reducida a una con denominador de menor grado, luego repitiendo el proceso hasta llegar a $k = 1$, tendremos $y \in K[x]$ y $E \in K[x]$ tal que $\deg(E) < \deg(V)$ y $Q/V^k = y' + E/V$. Haciendo esto para cada término A_i/D_i^i, tendremos $g, h \in K(x)$ tal que $f = g' + P + h$ donde P es un polinomio y h se corresponde con la parte trascendente de la integral, por lo que $\int h$ es una combinación de logaritmos acompañados de coeficientes constantes. La v de (2.5) es simplemente $g + \int P$. Esta es la versión original del Algoritmo de Hermite:

Hermite(A, D) (* Reducción de Hermite - versión original *)
Dado un cuerpo K y A, $D \in K[x]$ con D distinto de 0 y coprimo con A, devuelve $g, h \in K(x)$ tales que $\frac{A}{D} = \frac{dg}{dx} + h$ y el denominador de h es libre de cuadrados.

$(D_1, \ldots, D_n) \leftarrow$ **SquareFree**(D)
$(P, A_1, A_2, \ldots, A_n) \leftarrow$ **PartialFraction** $(A, D_1, D_2^2, \ldots, D_n^n)$
$g \leftarrow 0$
$h \leftarrow P + A_1/D_1$
for $k \leftarrow 2$ **to** n such that $\deg(D_k) > 0$ **do**
  $V \leftarrow D_k$
  for $j \leftarrow k-1$ **to** 1 **step** -1 **do**
    $(B, C) \leftarrow$ **ExtendedEuclidean** $\left(\frac{dV}{dx}, V, -A_k/j\right)$
    $g \leftarrow g + B/V^j$
    $A_k \leftarrow -jC - \frac{dB}{dx}$
  $h \leftarrow h + A_k/V$
return(g, h)

Ejemplo 2.27. *Veamos como aplicar el algoritmo de Hermite a*

$$f = \frac{x^7 - 24x^4 - 4x^2 + 8x - 8}{x^8 + 6x^6 + 12x^4 + 8x^2} \in \mathbb{Q}[x].$$

Una descomposición libre de cuadrados del denominador es

$$x^8 + 6x^6 + 12x^4 + 8x^2 = x^2(x^2+2)^3 = D_2^2 D_3^3$$

y la descomposición parcial en fracciones de f es

$$f = \frac{x-1}{x^2} + \frac{x^4 - 6x^3 - 18x^2 - 12x + 8}{(x^2+2)^3}.$$

Ahora, para el resto del algoritmo de Hermite se tiene

$$\frac{x-1}{x^2} \longrightarrow i = 2, V = x, j = 1, A_2 = x - 1, B = 1, C = -1$$

luego

$$\int \frac{x-1}{x^2} dx = \frac{1}{x} + \int \frac{dx}{x}.$$

Para la segunda parte de la descompisición, tenemos que

$$\frac{x^4-6x^3-18x^2-12x+8}{(x^2+2)^3} \longrightarrow i=3, V=x^2+2, j=2,$$

$$A_3=x^4-6x^3-18x^2-12x+8, B=6x, C=-\frac{x}{2}+3x-2.$$

luego

$$\int \frac{x^4-6x^3-18x^2-12x+8}{(x^2+2)^3}dx=\frac{6x}{(x^2+2)^2}+\int \frac{\frac{x^2}{2}-3x+2}{(x^2+2)^2}.$$

y repitiendo ahora el proceso para

$$\frac{x^2-6x-2}{(x^2+2)^2} \longrightarrow i=3, V=x^2+2, j=1, A_3=x^2-6x-2$$

$$B=-x+3, C=1$$

y así

$$\int \frac{x^2-6x-2}{(x^2+2)^2}=\frac{3-x}{x^2+2}+\int \frac{0}{x^2+2}.$$

Finalmente, si juntamos todos los resultados tenemos que la integral es:

$$\int \frac{x^7-24x^4-4x^2+8x-8}{x^8+6x^6+12x^4+8x^2}dx=\frac{1}{x}+\frac{6x}{\left(x^2+2\right)^2}+\frac{3-x}{x^2+2}+\int \frac{dx}{x}.$$

Vamos a comentar también una variante del algoritmo de Hermite que no requiere una descomposición parcial de f: Sea $D=D_1D_2^2\ldots D_m^m$ una factorización de D libre de cuadrados y supongamos que $m \geq 2$ (en caso contrario D ya es libre de cuadrados). Definamos entonces $V=D^m$ y $U=D/V^m$. Como mcd(UV',V)=1, podemos usar el algoritmo de Euclides extendido para encontrar $B, C \in K[x]$ de manera que

$$\frac{A}{1-m}=BUV'+CV$$

y deg$(B) <$ deg(V). Multiplicando ambos lados por $(1-m)/(UV^m)$ se tiene

$$\frac{A}{UV^m}=\frac{(1-m)BV'}{V^m}+\frac{(1-m)C}{UV^{m-1}}.$$

Ahora, sumando y restando B'/V^{m-1} en el lado de la derecha tenemos

$$\frac{A}{UV^m} = \left(\frac{B'}{V^{m-1}} - \frac{(1-m)BV'}{V^m}\right) + \frac{(1-m)C - UB'}{UV^{m-1}}$$

e integrando ambos lados se obtiene

$$\int \frac{A}{UV^m} = \frac{B}{V^{m-1}} + \int \frac{(1-m)C - UB'}{UV^{m-1}}.$$

Así, la integral ha quedado reducida a otra donde el grado de V en el denominador es menor. Este proceso puede repetirse hasta que el denominador sea un polinomio libre de cuadrados. Como el grado de uno de los factores libres de cuadrados se reduce en 1 por cada paso, el número de pasos será, en el peor de los casos, $1 + 2 + \cdots + (m-1)$, que es del orden de $\mathcal{O}(m^2)$ así que llamaremos a esta variante Algoritmo Cuadrático de Hermite.

Hermite(A, D) (* Reducción de Hermite - versión cuadrática *)
Dado un cuerpo K y $A, D \in K[x]$ con D distinto de 0 y coprimo con A, devuelve $g, h \in K(x)$ tales que $\frac{A}{D} = \frac{dg}{dx} + h$ y el denominador de h es libre de cuadrados.

```
g ← 0, (D_1, ..., D_n) ← SquareFree(D)
for i ← 2 to m such that deg(D_i) > 0 do
   V ← D_i, U ← D/V^i
   for j ← i − 1 to 1 step −1 do
      (B, C) ← ExtendedEuclidean(U dV/dx, V, −A/j)
      g ← g + B/V^j, A ← −jC − U dB/dx
   D ← UV
return(g, A/D)
```

Ejemplo 2.28. *Dada la misma integral que en el ejemplo 2.27, el algoritmo cuadrático de Hermite sigue los siguientes pasos, donde $D_3 = x^2 + 2$*

i	V	U	j	B	C	A
2	x	D_3^3	1	1	$-x^6-x^5+18x^3-8x-8$	$x^6+x^5-18x^3+8x+8$
3	D_3	x	2	$6x$	$-\frac{x^4}{2}-\frac{x^3}{2}+x^2-2x-2$	$x^4+x^3-2x^2-2x+4$
3	D_3	x	1	$-x+3$	$-x^2+x-2$	x^2+2

Así,

$$\int \frac{x^7 - 24x^4 - 4x^2 + 8x - 8}{x^8 + 6x^6 + 12x^4 + 8x^2} dx = \frac{1}{x} + \frac{6x}{(x^2+2)^2} - \frac{x-3}{x^2+2} + \int \frac{dx}{x}.$$

como en el ejemplo 2.27, pero no ha sido necesario calcular ninguna descomposición parcial.

Capítulo 3

Liouville

Dado un cuerpo diferencial K y una función $f \in K$, si se consigue encontrar una primitiva elemental de f, entonces puede probarse fácilmente que efectivamente se trata de una primitiva a través de la derivación. De hecho, normalmente existen varios métodos para encontrar una primitiva cuando se sabe de su existencia. Sin embargo, probar que f no tiene una primitiva elemental es un problema bastante más complejo, pues necesitamos una serie de resultados que relacionen la existencia de primitiva elemental con una determinada forma de la función integrada. El primero de estos resultados es el principio de Laplace, que determina que podemos simplificar el problema de la integración admitiendo solo la adición de nuevos logaritmos de manera lineal en la primitiva, pero que el resto de funciones deben estar ya presentes en la propia función f. Liouville fue el primero que dotó de rigor a estas observaciones, enunciando y probando un teorema primeramente para el caso de funciones algebraicas y posteriormente para todo tipo de funciones. Este teorema se ha convertido en la herramienta más usada a la hora de probar que una función no admite una primitiva elemental. Además, este teorema no solo sirve para determinar cuando una función admite o no una primitiva elemental, sino que sienta las bases de un algoritmo de integración.

Aunque Liouville utilizó argumentos analíticos para probar sus resultados, ahora es posible demostrarlo algebraicamente en el contexto de cuerpos diferenciales. La primera prueba completa del teorema de Liouville desde un punto de vista algebraico fue publicada por Rosenlicht [7].

Antes de ver el Teorema de Liouville, vamos a estudiar la diferenciablidad de algunos elementos de cuerpos de extensión monomial.

Definición 3.1. *Sea D un cuerpo, U una extensión diferencial de D. Dado*

*$\theta \in U$, decimos que θ y $D(\theta)$ son **simple elementales** sobre D si se cumple alguna de las siguientes condiciones:*

1. *θ es algebraico sobre D*
2. *Hay una $f \in D$, $f \neq 0$, tal que $f' = f\theta'$. Es decir, $\theta = \log(f)$*
3. *Hay una $f \in D$ tal que $\theta' = \theta f'$. Es decir, $\theta = exp(f)$*

Definición 3.2. *Bajo las mismas condiciones de la definición anterior, decimos que θ es un **monomio** sobre D si $\theta = \log(f)$ o $\theta = exp(f)$, con $f \in D$ y al mismo tiempo θ es trascendente sobre D.*

Lema 3.3. *Sea D un cuerpo diferencial, θ un monomio sobre D y $P \in D[\theta]$, $P = a_n\theta^n + a_{n-1}\theta^{n-1} + ... + a_1\theta + a_0$. Si θ es un logaritmo, entonces la derivada de P es de grado n (si a_n no es constante) o $n-1$ (si a_n es constante).*

Demostración. $\theta = \log(f)$, luego

$$P' = a_n'\theta^n + a_n n\theta^{n-1}\theta' + a_{n-1}'\theta^{n-1} + a_{n-1}(n-1)\theta^{n-2}\theta' + ... + a_1'\theta + a_1\theta' + a_0',$$

que agrupando términos y teniendo en cuenta que $\theta' = f'/f$ resulta:

$$P' = a_n\theta^n + (a_{n-1}' + (n-1)a_n(f'/f))\theta^{n-1} + ... + (a_0' + a_1(f'/f))$$

Ahora, si $a_n' = 0$, entonces $a_{n-1}' + na_n(f'/f) \neq 0$, pues si lo fuera, eso significaría que $a_{n-1} + na_n\theta = C$, siendo C una constante en D, lo que probaría que θ no es un monomio sobre D. Acabamos de ver entonces que la derivada de un polinomio de grado n (siendo $\theta = \log(f)$) es un polinomio de grado $n-1$ si el coeficiente a_n es constante, y es un polinomio de grado n en caso contrario. $\square$

Lema 3.4. *Sea D un cuerpo diferencial, θ un monomio sobre D y $P \in D[\theta]$, $P = a_n\theta^n + a_{n-1}\theta^{n-1} + ... + a_1\theta + a_0$. Si θ es una exponencial, entonces la derivada de P es de grado n.*

Demostración. $\theta = exp(f)$. Teniendo en cuenta que la derivada de θ es igual a $\theta f'$, se tiene que la derivada de P es de la forma

$$P' = (a_n' + nf'a_n)\theta^n + (a_{n-1}' + (n-1)f'a_{n-1})\theta^{n-1} + ... + (a_1' + f'a_1)\theta + a_0'$$

De nuevo, $a_n' + nf'a_n \neq 0$, pues si lo fuera, entonces tendríamos que $\theta^{-n} = Ca_n$, con C una constante en D, lo que probaría que θ no es un monomio sobre D. Así, la derivada de P es un polinomio del mismo grado que P. $\square$

Lema 3.5. *Sea θ un logaritmo en D; $P, Q \in D[\theta]$, Q mónico e irreducible en θ, con $\deg(P) = p<q = \deg(Q)$. Entonces $(P/Q^n)' = -nPQ'/Q^{n+1} + P'/Q^n$, donde $nPQ' \neq 0$.*

Demostración. $\theta = \log(f)$. Por el Lema 3.3, al ser Q mónico, se tiene que $\deg(Q') = q - 1$. Entonces, $Q \nmid -nPQ'$, pues si lo hiciera, tendríamos que $Q \mid Q'$ o $Q \mid P$. Así, $(P/Q^n)'$ es de la forma $(P'Q^n - PnQ^{n-1}Q')/Q^{2n} = P'/Q^n - nPQ'/Q^{n+1}$. □

Lema 3.6. *Sea θ una exponencial en D; $P, Q \in D[\theta]$, Q mónico e irreducible en θ, con $\deg(P) = p<q = \deg(Q)$. Entonces, si $Q \neq \theta$,*

$$(P/Q^n)' = -nPQ'/Q^{n+1} + P'/Q^n,$$

donde $nPQ' \neq 0$; mientras que si $Q = \theta$,

$$(P/Q^n)' = (P' - nf'P)/Q^n,$$

con $P' - nf'P \neq 0$.

Demostración. $\theta = exp(f)$. Supongamos $Q \mid -nPQ'$. Como $Q \nmid P$, tenemos que $Q \mid Q'$. $Q = \theta^q + ...$, luego $Q' = qf'\theta^q + ...$ así que $Q' = qf'Q$. Por lo tanto, $Q = (e^f)^q = \theta^q$ y como Q es irreducible, $q = 1$ y $P \in D$. Así, razonando como en el caso 1, acabamos de ver que la descomposición de $(P/Q^n)'$ es de la forma $P'/Q^n - nPQ'/Q^{n+1}$, a menos que $Q = \theta$. En este último caso será de la forma $(P' - nf'P)/Q^n$, con $P' - nf'P \neq 0$. □

Lema 3.7. *Sea $P \in D[\theta]$, mónico con $\deg(P) = p$. Entonces, si θ es un logaritmo, se tiene que $(\log(P))' = P'/P$ con $\deg(P') = p - 1$.*

Demostración. Directo por la definición de logaritmo y el Lema 3.3. □

Lema 3.8. *Sea $P \in D[\theta]$, mónico con $\deg(P) = p$. Entonces, si θ es una exponencial, se tiene que $(\log(P))' = P'/P = N/P + pf'$, donde $N = P' - pf'P$. Además, $N = 0$ si $P = \theta$ y N es un polinomio de grado menor que p en caso contrario.*

Demostración. De nuevo, la demostración es directa por la construcción de N y el Lema 3.4 □

Teorema 3.9. *Sea D un cuerpo diferencial. Entonces existe una extensión universal U de D. Es decir, una extensión diferencial de D que es algebraicamente cerrado y todo elemento $f \in U$ no nulo tiene una exponencial y un logaritmo en U.*

Definición 3.10. *Sea D un cuerpo de característica 0, $D(\theta)$ una extensión algebraica y U la extensión universal de D, algebraicamente cerrada. Definimos la Traza como:*

$$\begin{array}{rccc} Tr: & D(\theta) & \longrightarrow & D \\ & g(\theta) & \mapsto & \sum_{i=1}^{s} g(\theta_i) \end{array}$$

donde $\theta_1, \ldots, \theta_s$ son los elementos conjugados de θ, que se encuentran en U.

Veamos algunas obervaciones:

1. *Si $g(\theta) \in D$, entonces $Tr(g(\theta)) = sg(\theta)$*
2. *$Tr(g(\theta) + f(\theta)) = Tr(g(\theta)) + Tr(f(\theta))$*
3. *$(Tr(g(\theta)))' = (\sum_{i=1}^{s} g(\theta_i))' = \sum_{i=1}^{s} g(\theta_i)'$*

Definición 3.11. *Sea D un cuerpo de característica 0, $D(\theta)$ una extensión algebraica y U la extensión universal de D, algebraicamente cerrada. Definimos la Norma como:*

$$\begin{array}{rccc} Norma: & D(\theta) & \longrightarrow & D \\ & g(\theta) & \mapsto & \prod_{i=1}^{s} g(\theta_i) \end{array}$$

donde $\theta_1, \ldots, \theta_s$ son los elementos conjugados de θ, que se encuentran en U.

Veamos algunas observaciones:

1. Si $g(\theta) \in D$, entonces $Norma(g(\theta)) = g^s(\theta)$
2. $Norma(g(\theta)f(\theta)) = Norma(g(\theta))Norma(f(\theta))$

3.1. Teorema de Liouville

El Teorema de Liouville es un resultado fundamental en el ámbito de las integrales indefinidas. Este teorema, enunciado por Joseph Liouville, proporciona criterios para determinar si una función tiene una primitiva expresable en términos de funciones elementales. La utilidad práctica del Teorema de Liouville radica en proporcionar un marco teórico para determinar la existencia de primitivas elementales, lo que es esencial en el ámbito de la integración simbólica. Sin embargo, también es importante destacar que no todas las funciones cumplen las condiciones del Teorema de Liouville, y algunas primitivas pueden no tener una expresión cerrada en términos de funciones elementales.

Teorema 3.12 (de Liouville)**.** *Sea D un cuerpo diferencial, F elemental sobre D. Supongamos que D y F comparten el mismo campo de constantes K. Sea $g \in F$, $f \in D$ tal que $g' = f$, entonces $g = v_o + \sum_{i=1}^{k} c_i \log(v_i)$, donde $v_0, v_i \in D$ y $c_i \in K$.*

Demostración. F es elemental sobre D, lo que significa que

$$F = D(\theta_1, \dots, \theta_n),$$

donde cada θ_i es o bien un monomio o bien algebraico sobre $D(\theta_1, \dots, \theta_{i-1})$. Distingamos ahora tres casos: Sea θ un monomio donde θ es un logaritmo, sea θ un monomio donde θ es una exponencial y sea θ algebraico sobre D. Probaremos el resultado por inducción. El caso $n = 0$ es común para todos los casos, pues $F = D$ y $g = v_0$, con $v_0 \in D$. De ahora en adelante separaremos el problema en tres casos.

1. θ es un logaritmo.

Para el caso $n = 1$, tenemos que $F = D(\theta)$, donde θ es un monomio (logaritmo) en D. Como $g \in F = D(\theta)$, g puede escribirse como $\frac{P(\theta)}{Q(\theta)}$, lo que a su vez, por el Teorema 2.21, puede expresarse de la forma $\sum_{j=1}^{r} \frac{P_j}{Q_j^{i_j}}$. Ahora, aplicando el Teorema 2.22, podemos reescribir cada uno de los $\frac{P_j}{Q_j^{i_j}}$ como $P_0 + \frac{P_1}{Q} + \frac{P_2}{Q^2} + \cdots + \frac{P_i}{Q^i}$, donde hemos visto que los P_i son únicos. Tomemos ahora para cada uno de los sumandos $\frac{P_j}{Q_j^{i_j}}$ el término con denominador de mayor grado según su expresión por el Teorema 2.22, es decir, $\frac{P_i}{Q^i}$. Derivando, tenemos que g' tendrá, por el Lema 3.5, una expresión del tipo $-nPQ'/Q^{i+1} + P'/Q^i$. Como $g' = f \in D$, Q es irreducible y $\deg(P), \deg(Q') < \deg(Q)$ (esto último por ser θ logaritmo y por el Lema 3.3), se tiene que para que $-nPQ'/Q^{i+1}$ pertenezca a D, Q' debe ser 0, pues de los contrario aparecería θ en el denominador. Por lo tanto, Q es una constante en D. Finalmente, P' debe pertenecer a D, lo que implica (de nuevo por el Lema 3.3) que P debe ser un polinomio de grado 0, o de grado 1 si su coeficiente principal es constante. Así, $g = P(\theta)/Q(\theta) = a + b\theta$ donde $a \in D$, θ es un logaritmo y b una constante en D.

Supongamos ahora cierto el resultado para el caso $n - 1$. Así, $g = w_0 + \sum_{i=1}^{k} d_i \log(w_i)$, donde $w_0, w_i \in D(\theta)$ y $d_i \in K$. Veamos el caso n:

Tomemos como Q_i todos los factores que aparecen en el numerador y denominador de los w_0, w_i. Así, podemos escribir

$$\begin{aligned} g = \quad & P + \sum_{j=1}^{k_1} \frac{P_{1,j}}{Q_1^j} + a_1 \log Q_1 + \sum_{j=1}^{k_2} \frac{P_{2,j}}{Q_2^j} + a_2 \log Q_2 + \dots \\ & \dots + \sum_{j=1}^{k_r} \frac{P_{r,j}}{Q_r^j} + a_r \log Q_r + \sum_{i=1}^{m} b_1 \log h_i \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde $P, P_{i,j}, Q_i \in D(\theta), a_i, b_i \in K, h_i \in D, \deg(P_{i,j}) < \deg(Q_i)$ y los Q_i son mónicos e irreducibles.

Ahora, razonando de la misma manera que en el caso $n = 1$, tenemos que cada $P_{i,j}$ debe ser nulo, pues en caso contrario al derivar g nos encontraríamos con elementos de la forma $-k_i P_{i,k_i} Q_i'/Q_i^{k_i+1}$ y como $\deg(P_{i,k_i}), deg(Q_i') < \deg(Q_i)$ dicha expresión no pertenece a D. De esa manera, g queda de la forma $g = P + \sum_{j=1}^{r} a_j \log Q_j + \sum_{i=1}^{m} b_i \log(h_i)$. Sin embargo, de nuevo podemos razonar que los a_i también deben ser nulos, pues en caso contrario en g' aparecerían términos Q_j'/Q_j que no pueden estar en D, pues $\deg(Q_j') < \deg(Q_j)$. Finalmente, $g = P + \sum_{i=1}^{m} b_i \log(h_i)$, donde $P \in D(\theta)$, luego ya hemos visto que P será de la forma $a + b\theta = a + b\log(f_1)$, con $f_1 \in D$. Hemos probado que g tiene la forma deseada: $g = a + b\log(f_1) + \sum_{i=1}^{m} b_i \log(h_i)$.

2. θ es una exponencial.

Para el caso $n = 1$, procedemos igual que si θ fuera un logaritmo. De ese modo, $g \in F = D(\theta)$ admite una descomposición según el Teorema 2.21, cada uno de los términos a su vez se puede reescribir como en el Teorema 2.22. Así, tomando de nuevo el término con denominador de mayor grado (P_i/Q^i) y derivando g, tenemos por el Lema 3.6 uno de los dos siguientes casos:

Si $Q \neq \theta$ entonces g' tendrá una expresión del tipo $-iP_iQ'/Q^{i+1} + P_i'/Q^i$. No obstante, de nuevo Q' tendrá que ser nulo puesto que $\deg(P_i) < \deg(Q)$ y hemos visto en el Lema 3.6 que para que $Q \mid Q'$, Q debe ser θ. Luego de nuevo tenemos que Q es constante y P_i' pertenece a D, lo que implica por el Lema 3.4 que P_i es también un elemento de D.

Por otra parte, si $Q = \theta$, entonces $(P/Q^i)' = (P' - if'P)Q^i$ y nuevamente Q debe ser constante, pues $(P' - if'P) \neq 0$ (si lo fuera, $P' = if'P$ lo que implica que $P = (exp(f))^i$ y como $Q = \theta$, entonces $\deg(Q) < \deg(P)$, lo que no es posible), y $P \in D$. De esa manera, $g = P/Q = a \in D$ y queda probado el caso $n = 1$.

Supongamos ahora cierto el resultado para el caso $n - 1$. Así, $g = w_0 + \sum_{i=1}^{k} d_i \log(w_i)$, donde $w_0, w_i \in D(\theta)$ y $d_i \in K$. Veamos el caso n:

Procediendo igual que en el caso logarítmico, podemos expresar g de la forma dada en (3.1). Ahora, por el mismo razonamiento, tenemos que cada $P_{i,j}$ debe ser nulo, pues basta tomar en cada sumatorio el término con denominador de mayor grado y aplicar lo expuesto en el caso $n = 1$. Además, veamos que los a_i también deben ser nulos, o en caso contrario $Q_i = \theta$: Por el lema 1.23, $(\log(Q))' = Q'/Q = N/Q + qf'$, donde $N = 0$ si $Q = \theta$ y $N = Q' - qf'Q$, con $\deg(N) < \deg(Q)$ en caso contrario. Así, si $Q_i \neq \theta$, entonces en la derivada de g aparecen términos N/Q_i donde $\deg(N) < \deg(Q)$, luego cada a_i debe ser 0. Por otra parte, si $Q_i = \theta = exp(f)$ entonces $a_i \log(Q_i) = a_i \log(exp(f)) = a_i f$, donde los a_i son constantes y f pertenece a D.

Finalmente, g tiene la forma $P + \sum_{i=1}^{r} a_i f + \sum_{i=1}^{m} b_i \log(h_i)$, y como hemos visto por el caso $n = 1$ que P tiene grado 0, $g = a + \sum_{i=1}^{r} a_i f + \sum_{i=1}^{m} b_i \log(h_i)$, con $a, f, h_i \in D$, $a_i, b_i \in K$

3. θ es algebraico sobre D. Para el caso $n = 1$, tenemos que $F = D(\theta)$, luego de nuevo $g = \frac{P(\theta)}{Q(\theta)}$. Como g es algebraico, consideramos su polinomio mínimo $R(t) = \sum_{i=0}^{m} a_i t^i$, donde $\sum_{i=0}^{m} a_i r^i = 0$, luego $(\sum_{i=0}^{m} a_i r^i)' = 0$. Derivando,

$$\left(\sum_{i=0}^{m} a_i r^i\right)' = \sum_{i=0}^{m} a_i' r^i + \left(\sum_{i=1}^{m} a_i i r^{i-1}\right) r' = \sum_{i=0}^{m-1} (a_i' + a_{i+1}(i+1)r') r^i = 0.$$

Así, tomando el término de mayor grado se tiene que $a_{m-1}' + a_m m r' = 0$, y como $a_m = 1$ por ser el polinomio mónico, despejando r' tenemos que $r' = \frac{-1}{m} a_{m-1}'$, luego $r = \frac{-1}{m} a_{m-1} + c$ que pertenece a D por ser c una constante.

Veamos ahora que el resultado es cierto para el caso n. Supongamos la hipótesis cierta para el caso $n - 1$, luego $g = w_0 + \sum_{i=1}^{k} d_i \log(w_i)$, donde $w_0, w_i \in D$, $d_i \in K$. Así, derivando, tenemos que f será de la forma $(w_o)' + \sum_{i=1}^{k} d_i \frac{w_i'}{w_i}$. Añadiendo ahora todos los conjugados de θ, se tiene que w_0 pasa a ser $Tr(w_0)$ y por otra parte, como

$$\begin{aligned} Tr(d_i \log(w_i(\theta))) &= d_i \textstyle\sum_{i=1}^{s} \log(w_i(\theta)) = d_i \log(\prod_{i=1}^{s} w_i(\theta)) \\ &= d_i \log(Norma(w_i)), \end{aligned}$$

entonces $mf = (Traza(w_0))' + \sum_{i=1}^{k} d_i (Norma(w_i))'/Norma(w_i)$.

Finalmente, integrando se tiene que g también es de la forma deseada. □

Ejemplo 3.13. *Veamos que las funciones* sen, cos, arc sen *y* arc cos *pueden escribirse en función de logaritmos y exponenciales, y son, por tanto, elementales.*

Para demostrar que tanto el seno como el coseno pueden escribirse en función de exponenciales, vamos a comenzar por considerar el desarrollo en *serie de taylor para la función exponencial* e^z*. Sabemos que* $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$*. Sustituyamos ahora* z *por* ix *en dicha expresión:* $e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty}(ix)^n/n! = \sum_{n=0}^{\infty} i^n x^n/n!$*. Como* i^n *será* i *o* $-i$ *cuando* n *sea impar, y será* 1 *o* -1 *cuando* n *sea par, podemos separar la expresión en dos términos:*

$$e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} i + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

De la misma manera, podemos calcular

$$e^{-ix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}(-i) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

Ahora, restando ambas expresiones, se tiene que

$$e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

y dividiendo en ambos lados entre $2i$ *tenemos que*

$$\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

donde esta última expresión se corresponde con el desarrollo de Taylor de la función $\operatorname{sen}(x)$*. Utilizando un procedimiento similar se puede hacer lo mismo para la función* $\cos(x)$*, resultando:*

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Veamos ahora que las funciones $\operatorname{arc\,sen}$ *y* $\arccos$ *también pueden escribirse en función de exponenciales y logaritmos.*

Probaremos la propiedad para el $\operatorname{arc\,sen}$*, siendo análoga para el caso del* $\arccos$*. Hemos visto anteriormente que* $\operatorname{sen}(x) = (e^{ix} - e^{-ix})/2i$*. Si llamamos* z *a sen*(x) *y multiplicamos por* $2i$ *a ambos lados, tenemos* $2iz = e^{ix} - e^{-ix}$*. Ahora, multiplicando por* e^{ix}*, se tiene que* $2ize^{ix} = e^{2ix} - 1$*, y reordenando los términos,* $(e^{ix})^2 - 2iz(e^{ix}) - 1 = 0$*.*

Resolviendo la ecuación de segundo grado:

$$e^{ix} = \frac{2iz \pm \sqrt{-4z^2+4}}{2} = iz \pm \sqrt{1-z^2}$$

Por último, utilizando logaritmos y dividiendo entre i*, podemos expresar*

$$x = \frac{\log(iz \pm \sqrt{1-z^2})}{i}$$

Como ya ocurría con el sen *y el* cos*, mediante un desarrollo similar se obtiene para el* arc cos*:*

$$x = \frac{\log(z \pm \sqrt{z^2-1})}{i}$$

3.2. La función e^{-x^2}

Como hemos comentado anteriormente en este trabajo, y pese a que el Teorema de Liouville presenta una serie de condiciones que debe cumplir una función para tener una primitiva elemental, la realidad es que no todas las funciones cumplen con las condiciones de Liouville. Entre aquellas funciones cuya primitiva no puede expresarse a partir de funciones elementales destaca la función e^{-x^2}, pues está intrínsecamente relacionada con la distribución normal o gaussiana, que es una de las distribuciones de probabilidad más importantes en la estadística y probabilidad.

La función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria continua con distribución normal estándar ($\mu = 0$, $\sigma = 1$) está dada por

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} e^{\frac{-x^2}{2}}.$$

Aquí, $\frac{1}{2\pi} e^{\frac{-x^2}{2}}$ es una forma de la función e^{-x^2}. La distribución normal describe la forma en que se distribuyen muchas cantidades en la naturaleza, como errores de medición, puntuaciones en pruebas estandarizadas y otros fenómenos aleatorios.

Pues bien, a continuación veremos que la función e^{-x^2} no tiene una primitiva que pueda expresarse en términos de funciones elementales. Sin embargo, aunque no se pueda expresar en términos de funciones elementales, se ha desarrollado una función especial llamada función error, denotada por erf(x), que se utiliza para expresar la integral definida de e^{-x^2} y aparece en varias disciplinas, incluyendo estadísticas y teoría de probabilidad.

Consideremos el problema de encontrar una primitiva de la función $f = e^{-x^2}$, que pertenece al cuerpo $D = \mathbb{C}(x, e^{-x^2})$. Por el Teorema de Liouville, una primitiva de f debe ser de la forma $v_0 + \sum_{i=1}^{k} c_i \log(v_i)$, donde $v_0, v_i \in \mathbb{C}(x, e^{-x^2})$, $c_i \in \mathbb{C}$. No parece obvio demostrar que no existen v_i que cumplan las condiciones requeridas, sin embargo a continuación veremos la prueba de ello.

Para probar que la función e^{-x^2}, y no solo esta función sino ciertas funciones de la forma $f(x)e^{g(x)}$, no tiene una primitiva elemental vamos a utilizar el Teorema 3.15 [2]. No obstante, primero de todo debemos demostrar el siguiente Lema, que será de utilidad posteriormente.

Lema 3.14. *Sea $g(X) \in \mathbb{C}(X)$ no constante, si $H_1, H_2 \in \mathbb{C}[X, Y]$ cumplen que $H_1(x, e^{g(x)}) = H_2(x, e^{g(x)})$ como funciones de x en un intervalo no vacío I de $\mathbb{R}$, entonces $H_1 = H_2$ en $\mathbb{C}[X, Y]$*

Demostración. Considerando $H = H_1 - H_2$, el problema se reduce a probar que si $H \in \mathbb{C}[X, Y]$ cumple que $H(x, e^{g(x)}) = 0$ para $x \in I$ entonces $H = 0$ en todo $\mathbb{C}[X, Y]$. Supongamos $H \neq 0$. Claramente, H debe depender de Y, pues en caso contrario $H(X, 0) = H(X, Y)$ es un polinomio no nulo en X y la condición de que $H(x, 0) = H(x, e^{g(x)}) = 0$ afirma que el polinomio $H \neq 0$ se anula en infinitos puntos de I, lo que es absurdo. Tomando H como un elemento de $\mathbb{C}[X, Y] \subseteq \mathbb{C}(X)[Y]$ y dividiendo entre el coeficiente de $\mathbb{C}(X)$ para el monomio de mayor grado en Y que aparece en H, tenemos una ecuación de la forma

$$e^{ng(x)} + a_{n-1}(x)e^{(n-1)g(x)} + \cdots + a_1(x)e^{g(x)} + a_0(x) = 0 \tag{3.2}$$

para todo x en un intervalo abierto no vacío, con $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}(X)$ y $n > 0$. Consideremos esa relación para el mínimo $n \geq 0$. Obviamente, tenemos $n \geq 1$ y algunos $a_i \in \mathbb{C}(X)$ deben ser no nulos.

Derivando (3.2) y reordenando los términos tenemos

$$ng'(x)e^{ng(x)} + (a'_{n-1}(x) + (n-1)g'(x)a_{n-1}(x))e^{(n-1)g(x)} + \ldots$$

$$+(a'_1(x) + g'(x)a_1(x))e^{g(x)} + a'_0(x) = 0$$

Ahora, $ng'(X) \in \mathbb{C}(X)$ es no nulo (pues $g(X) \notin \mathbb{C}$). Así, dividiendo por $ng'(x)$ se tiene

$$e^{ng(x)} + \sum_{i=1^{n-1}} \frac{a'_i(x) + ig'(x)a_i(x)}{ng'(x)} e^{jg(x)} + \frac{a'_0(x)}{ng'(x)} = 0 \tag{3.3}$$

para x en un intervalo abierto no vacío de $\mathbb{R}$, donde (3.2) también se cumple. Tenemos ahora dos ecuaciones de grado n (3.2) y (3.3) para e^g con coeficientes en $\mathbb{C}(X)$ y mismo término de grado n e^{ng}, así que restando ambas expresiones tendremos una ecuación de grado $\leq\ n-1$ en e^g con coeficientes en $\mathbb{C}(X)$.Por ser n mínimo, tenemos que todos los coeficientes en $\mathbb{C}(X)$ de la ecuación resultante deben ser nulos, pues en caso contrario podríamos dividir entre el coeficiente correspondiente al término de mayor grado en e^g para obtener una nueva ecuación de grado $< n$ en e^g con coeficientes en $\mathbb{C}(X)$, lo que es imposible porque n fue elegido como el mínimo. Así, para cada $0 \leq i \leq n-1$ tenemos que $a_i' + ig'a_i = ng'a_i$ en $\mathbb{C}(X)$. Consecuentemente, $a_i' = (n-i)g'a_i$ en $\mathbb{C}(X)$ para todo $0 \leq i \leq n-1$.

Sabemos que existe algún i_0 tal que $a_{i_0} \neq 0$ en $\mathbb{C}(X)$, y para dicho i_0 se tiene que

$$(n-i_0)g'(X) = \frac{a_{i_0}'(X)}{a_{i_0}(X)}$$

en $\mathbb{C}(X)$. Por el Teorema Fundamental del Algebra, $a_{i_0}(X) = c\prod(X-\rho_k)^{e_k}$ para algún $c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$, $e_k \neq 0$ y $\rho_k \in \mathbb{C}$ distintos dos a dos. Entonces,

$$(n-i_0)g'(X) = \frac{a_{i_0}'(X)}{a_{i_0}(X)} = \sum \frac{e_k}{X-\rho_k}.$$

Como g es no constante y $(n-i_0 \neq 0)$, $(n-i_0)g'(X) \neq 0$ y deben existir ciertos ρ_k por lo que $g'(x)$ se comporta como una constante no nula múltiplo de $1/|x-\rho_1|$ cuando $x \to \rho_1$. Sin embargo, este crecimiento inversamente lineal para la derivada de una función racional no constante no es posible: podemos escribir $g(X) = (X-\rho_1)^{\mu}G(X)$ en $\mathbb{C}(X)$, donde $\mu \in \mathbb{Z}$ y $G(X) \in \mathbb{C}(X)$ no nulo cuyo numerador y denominador no se anulan en ρ_1, y analizando los casos $\mu < 0$, $\mu = 0$ y $\mu > 0$ nunca se obtiene un crecimiento inversamente lineal para $|g'(x)|$ cuando $x \to \rho_1$. Esta es una contradicción. $\square$

Enunciemos ahora el Teorema que vamos a aplicar a la función e^{-x^2}.

Teorema 3.15. *Sean $f, g \in D(X)$, con $f \neq 0$ y g no constante. La función $f(x)e^{g(x)}$ tiene una primitiva elemental si y solo si existe una función racional $R \in D(X)$ tal que $R'(X) + g'(X)R(X) = f(X)$ en $D[X]$.*

La clave de este Teorema no reside en que la ecuación diferencial $R'(x) + g'(x)R(x) = f(x)$ tenga una solución en forma de función diferenciable en x (pues siempre podemos encontrar una solución utilizando la técnica de factor integrante), sino en que dicha solución sea una función racional. En algunos casos, como es el de la función e^{-x^2}, se puede probar que no existe una función racional que sea solución de la ecuación mencionada, probando así que esta función no admite una primitiva elemental.

Sin embargo, para aplicar el resultado a nuestro caso particular, primero debemos ver la demostración del Teorema 3.15

Demostración. Veremos la demotración del Teorema a partir del Teorema de Liouville. Para comenzar la demostración veamos que la condición de que exista una función racional $R(X)$ tal que $R(X)+g'R(X) = f(X)$ es suficiente. Supongamos que existe una función racional $R(X)$ tal que $R(X)+g'R(X) = f(X)$, entonces basta tomar $R(x)e^{g(x)}$ para comprobar que

$$(R(x)e^{g(x)})' = R'(x)e^{g(x)} + R(x)g'(x)e^{g(x)}$$

y sacando factor común a $e^{g(x)}$ se tiene que

$$(R(x)e^{g(x)})' = e^{g(x)}(R'(x) + R(x)g'(x) = e^{g(x)}f(x)$$

luego $R(x)e^{g(x)}$ es la primitiva de la función $f(x)e^{g(x)}$, y es elemental por serlo tanto R como e^g. Ahora, para terminar de demostrar el Teorema, debemos probar la segunda implicación, que afirma que si la función $f(x)e^{g(x)}$ tiene una primitiva elemental, entonces existe una solución en forma de función racional $R(X)$ de la ecuación $R(X) + g'R(X) = f(X)$. Asumiendo que fe^g admite una primitiva elemental, tenemos que encontrar $R \in D[X]$ de manera que $R'(x) + g'(x)R(x) = f(x)$. El Teorema de Liouville, tomando $D = \mathbb{C}(x, e^g)$ implica que

$$f(x)e^{g(x)} \quad = \quad v_0' + \quad \sum c_i \frac{v_i'}{v_i} \tag{3.4}$$

con $v_0, v_i \in \mathbb{C}(x, e^g)$, $c_i \in \mathbb{C}$. Debemos manipular un poco dicha expresión de manera que nos sea más útil. Nótese que podemos suponer que cada v_i sea no constante, pues en caso contrario $v_i' = 0$ y v_i'/v_i no aporta nada al sumatorio.

Elijamos $p_i, q_i \in \mathbb{C}[x, e^g]$, $p_i, q_i \neq 0$ tal que $v_i(x) = p_i(x, e^{g(x)})/q_i(x, e^{g(x)})$. Como

$$\frac{g_i'(x)}{g_i(x)} = \frac{p_i(x, e^{g(x)})'}{p_i(x, e^{g(x)})} - \frac{q_i(x, e^{g(x)})'}{q_i(x, e^{g(x)})}$$

tenemos que

$$\sum c_i \frac{g_i'(x)}{g_i(x)} = \sum c_i \frac{p_i(x, e^{g(x)})'}{p_i(x, e^{g(x)})} + \sum -c_i \frac{q_i(x, e^{g(x)})'}{q_i(x, e^{g(x)})}$$

Ahora que tenemos estos sumatorios podemos reducir el problema al caso en que cada g_i tiene la forma $p_i(x, e^{g(x)}) \in \mathbb{C}[x, e^{g(x)}]$. Podemos asumir también que cada p_i es no constante, pues en caso contrario $p_i(x, e^{g(x)})' = 0$ y no aporta valor alguno al sumatorio. Considerando ahora $p_i(X, Y)$ como un elemento no constante en $\mathbb{C}(X)[Y]$, podemos factorizar p_i como un producto $\prod_k r_{ki}(X, Y)$ de polinomios mónicos e irreducibles en $\mathbb{C}(X)[Y]$ y (posiblemente) un elemento no constante de $\mathbb{C}(X)$. Ahora, teniendo en cuenta que para funciones meromorfas se tiene que $(\prod h_k)'/\prod h_k = \sum h_k'/h_k$ tenemos que

$$\frac{p_i(x, e^{g(x)})'}{p_i(x, e^{g(x)})} = \sum_k \frac{r_{kj}(x, e^{g(x)})'}{r_{kj}(x, e^{g(x)})}.$$

De nuevo renombrando los índices y términos, podemos suponer que cada p_i perteneciente a $\mathbb{C}(X)[Y]$ es un polinomio mónico e irreducible sobre $\mathbb{C}(X)[Y]$ o pertenece a $\mathbb{C}(X)$. Del mismo modo, también podemos suponer que los p_i son distintos dos a dos en $\mathbb{C}(X)[Y]$ agrupando aquellos términos que sean iguales y multiplicando cada c_i por el número de veces que se repite dicho término.

Escribiendo $h(x) = p(x, e^{g(x)})/q(x, e^{g(x)})$ donde p, q primos en $\mathbb{C}(X)[Y]$, y el coeficiente principal de q como polinomio en Y con coeficientes en $\mathbb{C}(X)$ es igual a 1. Así, por (3.4)

$$f(x)e^{g(x)} = \sum c_i \frac{p_i(x, e^{g(x)})'}{p_i(x, e^{g(x)})} + \left(\frac{p(x, e^{g(x)})}{q(x, e^{g(x)})}\right)' \tag{3.5}$$

$$= \sum c_i \frac{p_i(x, e^{g(x)})'}{p_i(x, e^{g(x)})} + \frac{p(x, e^{g(x)})'q(x, e^{g(x)}) - p(x, e^{g(x)})q(x, e^{g(x)})'}{q(x, e^{g(x)})^2}$$

Recordemos que nuestro objetivo es encontrar $R \in \mathbb{C}(X)$ de manera que $R(X) + g'(X)R(X) = f(X)$ en $\mathbb{C}(X)$ y una de las claves para continuar reside en expresar (3.5) en más términos algebraicos. De gran ayuda será para ello y demostrado con anterioridad Lema 3.14. Por el Lema 3.14, si $H \in \mathbb{C}[X, Y]$ es no nulo, entonces $1/H(x, e^{g(x)})$ tiene sentido como función meromorfa. Así, para una función racional $F = G(X, Y)/H(X, Y)$, con $G, H \in \mathbb{C}[X, Y]$ y $H \neq 0$, tenemos una función meromorfa bien definida $F(x, e^{g(x)}) = G(x, e^{g(x)})/H(x, e^{g(x)})$ para x en un intervalo abierto no vacío de $\mathbb{R}$. Ahora, vamos a utlizar este resultado para reeescribir (3.5) en términos más algebraicos eliminando los términos exponenciales como sigue. Veamos que $(e^{g(x)})' = g'(x)e^{g(x)}$, y de forma más genérica, para cualquier

$h(X,Y) \in \mathbb{C}(X)[Y]$ se tiene $h(x, e^{g(x)})' = (\partial h)(x, e^{g(x)})$, donde ∂ es el operador:

$$\begin{array}{rccc} \partial : & \mathbb{C}(X)[Y] & \longrightarrow & \mathbb{C}(X)[Y] \\ & \sum_i r_i(X)Y^i & \mapsto & \sum (r_i'(X) + ig'(X)r_i(X))Y^i \end{array}$$

Esto nos lleva a poder reformular (3.5) de la siguiente manera:

Lema 3.16. *La expresión*

$$f(X)Y = \sum_i c_i \frac{\partial(p_i(X,Y))}{p_i(X,Y)} + \frac{q(X,Y)\partial(p(X,Y)) - p(X,Y)\partial(q(X,Y))}{q(X,Y)^2} \tag{3.6}$$

pertenece al cuerpo de funciones racionales en dos variables $\mathbb{C}(X,Y)$.

Demostración. Convirtiendo ambos lados de la expresión en funciones de x (reemplazando Y por $e^{g(x)}$) llegamos a la expresión (3.5), pues $(\partial h)(x, e^{g(x)}) = h(x, e^{g(x)})'$ para cualquier $h(X,Y) \in \mathbb{C}(X)[Y]$. Así, tras multiplicar a ambos lados por un denominador común, podemos usar el Lema 3.14 para completar la prueba. □

Nuestro objetvo es usar la igualdad (3.6) para encontrar $R \in \mathbb{C}(X)$ tal que $f(X) = R'(X) + g'(X)R(X)$ en $\mathbb{C}(X)$. Como (3.6) es una expresión algebraica que no involucra exponenciales, se trata de un problema puramente algebraico. La idea para resolver dicho problema se basa en analizar como los términos de la derecha en (3.6) pueden cancelarse en los denominadores de manera que la expresión del lado derecho sea igual a la del lado izquierdo, cuyo denominador está en $\mathbb{C}(X)$ (No involucra Y). Una vez que encontremos como puede ocurrir dicha cancelación, comparando los coeficientes de Y en ambos lados conseguiremos la igualdad $f(X) = R'(X) + g'(X)R(X)$ para un $R \in \mathbb{C}(X)$.

Comencemos ahora por observar los denominadores en el lado de la derecha de la igualdad (3.6). El término i-ésimo en el sumatorio contribuye a un posible denominador $p_i(X,Y)$, donde $p_i(X,Y)$ es mónico irreducible en $\mathbb{C}(X)[Y]$. (Recordemos que cada $p_i(X,Y)$ es irreducible en $\mathbb{C}(X)[Y]$, lo que significa que es mónico en Y o un elemento no constante de $\mathbb{C}(X)$). El motivo por el que hablamos de "posible"denominador es que tener en cuenta que cada $p_i(X,Y)$ podría dividir a $\partial(p_i(X,Y))$ en $\mathbb{C}(X)[Y]$. Supongamos de hecho esto ocurre para algún i_0. Escribiendo $p_{i_0} = Y^m + r_{m-1}(X)Y^{m-1} + \cdots + r_0(X)$ con $r_k(X) \in \mathbb{C}(X)$ y $m > 0$. Operando,

$$\partial(p_{i_0}) = mg'Y^m + (r_{m-1}' + (m-1)g'r_{m-1})Y^{m-1} + \cdots + (r_1' + g'r_1)Y + r_0'$$

y ahora, considerando los términos de diferentes grados en Y y teniendo en cuenta que $g' \in \mathbb{C}(X)$ y m no se anulan, esto implica que p_{i_0} divide a $\partial(p_{i_0})$ si y solo si $\partial(p_{i_0}) = mg'p_{i_0}$. esto implica que $mg'r_k = (r'_k + kg'r_k)$ para todo $0 \leq k < m$, o en otras palabras $r'_k = (m-k)g'r_k$ para cada k. Como vimos en la demostración del Lema 3.14, como $g \in \mathbb{C}(X)$ es no constante y $m > 0$, una condición como la descrita para cada $r_k \in \mathbb{C}(X)$ solo puede cumplirse si $r_k = 0$ para todo $k < m$, lo que equivale a decir que $p_{i_0} \in \mathbb{C}(X)[Y]$ es igual a Y.

Recapitulando, para cada i_0 tal que $p_{i_0} \in \mathbb{C}(X)[Y]$ es mónico irreducible y distinto de Y, en el sumatorio de índice i a la derecha en la expresión (3.6) aparece un término p_{i_0} en el denominador. No existe un término semejante en el lado izquierdo de (3.6), por lo que en caso de que aparezca un factor p_{i_0} este debe cancelarse con algún factor del denominador de q en la suma final de (3.6). Sin embargo, si alguno de estos factores aparece en q con multiplicidad $\mu \geq 1$ entonces en la expresión $-p\partial(q)/q^2$ dicho factor aparecerá con multiplicidad $\mu + 1$ (pues hemos visto que p_{i_0} no divide a $\partial(p_{i_0})$ para cada i_0 y el operador ∂ satisface la Regla de Leibniz). Este factor de multiplicidad $\mu+1$ no se cancela en el lado derecho de (3.6) y esto contradice la ausencia de dicho término en el denominador del lado izquierdo de (3.6). Así, acabamos de probar dos cosas:

1. Existe a lo sumo un p_i en el sumatorio sobre i del lado derecho de (3.6) que no está en $\mathbb{C}(X)$, y en caso de existir, será igual a Y.

2. El polinomio mónico $q \in \mathbb{C}(X)[Y]$ no puede tener ningún factor irreducible aparte de Y. Así, $q = a(X)Y^n$, con $n \geq 0$ y $a(X) \in \mathbb{C}(X)$ no nulo.

Podemos concluir que $h = p/q = \sum_k s_k Y^k$ con $s_k \in \mathbb{C}(X)$ y k en un conjunto finito de valores enteros (que pueden ser negativos). Entre los términos p_i que aparecen, aquellos que pertenecen a $\mathbb{C}(X)$ no contribuyen a ningún término en Y, y como el único otro término posible $p_i = Y$ cumple que $c_i\partial(p_i)/p_i = c_i g'(X)$ tampoco contribuye a ningún término en Y. Consecuentemente, el lado izquierdo de la expresión (3.6), $f(X)Y$ debe coincidir con el término lineal en Y en $\partial(h) = \sum_k (s'_k + kg's_k)Y^k$, lo que equivale a decir que $f(X)Y = (s'_1 + g's_1)Y$ en $\mathbb{C}(X)[Y]$.

De aquí se obtiene que $s'_1 + g's_1 = f$ con $s_1 \in \mathbb{C}(X)$, luego tomando $R(X) = s_1(X) \in \mathbb{C}(X)$ tenemos que $R'(X) + g'R(X) = f(X)$. $\square$

Ahora, una vez terminada la demostración, veamos como apliacar el Teorema 3.15 para probar que nuestro caso particular (la función $f = e^{-x^2}$) no tiene una primitiva. Tomando $f = 1$ y $g = -x^2$, debemos demostrar que la ecuación $R'(X) - 2XR(X) = 1$ en $\mathbb{C}(X)$ no tiene solución. El método de factor integrante nos da una fórmula para la solución final, que llamamos $R_c(x) = -e^{x^2}(\int e^{x^2}dx + c)$ con $c \in \mathbb{C}$, pero no podemos mostrar que esta expresión no es una función racional puesto que ni siquiera conocemos $\int e^{x^2}dx$.

Para probar la no existencia de soluciones de $R'(X) - 2XR(X) = 1$ en $\mathbb{C}(X)$, debemos razonar por contradicción. Si $R \in \mathbb{C}(X)$ es una solución, entonces claramente $R(X)$ no es constante y además podemos afirmar que no es un polinomio, pues si R de un polinomio de grado $n > 0$ entonces $R' - 2XR$ es un polinomio de grado $n + 1 > 1$.

Así, podemos escribir $R(X) = p(X)/q(X)$ para $p(X)$, $q(X) \in \mathbb{C}[X]$, no nulos, con $q(X)$ no constante y primos entre sí.

Como $q(X)$ es no constante, por el Teorema Fundamental del Álgebra, tiene una raíz $z_0 \in \mathbb{C}$. Que $p(X)$ y $q(X)$ sean coprimos implica que $p(z_0) \neq 0$. Así, si z_0 es una raíz de $q(X)$ con multiplicidad $\mu \geq 1$.

Toda función racional se puede escribir de la forma $(X - z_0)^\alpha h(X)$, con $\alpha \in \mathbb{Z}$, $h(X) \in \mathbb{C}(X)$ y tal que z_0 no anula ni al numerador ni al denominador de $h(X)$. En nuestro caso $p(X)/q(X) = (X - z_0)^{-\mu} h(X)$.

Derivando se tiene

$$\left(\frac{p(X)}{q(X)}\right)' = \left(\frac{h(X)}{(X - z_0)^\mu}\right)' = \frac{-\mu h(X)}{(X - z_0)^{\mu+1}} + \frac{h'(X)}{(X - z_0)^\mu}$$

Pero entonces:

$$\frac{-\mu h(X)}{(X - z_0)^{\mu+1}} + \frac{h'(X)}{(X - z_0)^\mu} - \frac{2Xh(X)}{(X - z_0)^\mu} = 1.$$

Multiplicando por $(X - z_0)^{\mu+1}$

$$-\mu h(X) + (X - z_0)(h'(X) - 2Xh(X)) = (X - z_0)^{\mu+1}.$$

Evaluando en z_0 obtenemos $h(z_0) = 0$, lo que es una contradicción. (Nótese que como z_0 no es una raíz del denominador de $h(X)$, tiene sentido evaluar $h'(z_0)$.)

Ejemplo 3.17. *El Teorema 3.15 también puede demostrar que no existe una primitiva elemental para la función logarítmica* $1/\log(t)$.

Como hemos comentado anteriormente, el Teorema 3.15 no sirve únicamente para aplicarse a la función e^{-x^2}. *Tanto es así que puede demostrarse que la función* $1/\log(t)$ *no tiene una primitiva elemental pese a que esta función no parece ser de la forma* fe^g. *Para ello, debemos utilizar un cambio de variable. En nuestra exposición no aparece de manera explícita la composición de funciones ni el teorema de cambio de variable, pero si podemos transformar mediante las reglas del cálculo una función elemental* f *en otra función* g, *también elemental (y el cambio de variable y su inverso viene dado por funciones elementales) entonces, aplicando el cambio de variable a una primitiva, vemos que* f *tiene primitiva elemental si y solo si* g *lo tiene. En nuestro caso, el cambio de variable será que en este caso será* $\log(t) = x$. *Así,* $t = e^x$ *y* $dt = e^x dx$ *por lo que*

$$\int \frac{dt}{\log(t)} = \int \frac{e^x dx}{x}.$$

Ahora sí basta tomar $f = 1/x$, $g = x$ *en el Teorema 3.15 y ver que la ecuación diferencial* $R'(X) + R(X) = 1/X$ *no tiene solución en* $\mathbb{C}(X)$. *Para ello, razonemos por reducción al absurdo y supongamos que existe* $R(X) \in \mathbb{C}(X)$ *tal que* $R'(X) + R(X) = 1/X$. *Claramente,* R *no puede ser un polinomio, luego podemos escribir* $R(X) = p(X)/q(X)$ *con* $q(X)$ *un polinomio no constante y* $p(X), q(X)$ *primos entre sí. Por el Teorema Fundamental del Álgebra,* $q(X)$ *tiene una raíz con multiplicidad* $\mu \geq 1$ *en algún* $z_0 \in \mathbb{C}$ *y de nuevo por ser coprimos,* $p(z_0) \neq 0$. *Ahora podemos escribir, como en el caso de* e^{-x^2}, $R(X) = p(X)/q(X) = (X - z_0)^{-\mu} h(X)$, *y la igualdad* $R'(X) + R(X) = 1/X$ *quedará como*

$$\frac{-\mu h(X)}{(X - z_0)^{\mu+1}} + \frac{h'(X)}{(X - z_0)^{\mu}} + \frac{h(X)}{(X - z_0)^{\mu}} = \frac{1}{X}.$$

De nuevo, multiplicando por $(X - z_0)^{\mu+1}$

$$-\mu h(X) + (X - z_0)(h'(X) + h(X)) = \frac{(X - z_0)^{\mu+1}}{X}$$

y evaluando en z_0 *se tiene que* $h(z_0) = 0$. *Esto sin embargo no será válido en el caso en que* $z_0 = 0$, *pues el denominador se anula. Sin embargo, en este caso tenemos que*

$$-\mu h(X) + X(h'(X) + h(X)) = \frac{X^{\mu+1}}{X} = X^{\mu}.$$

Ahora sí, tomando $X = z_0 = 0$*, se tiene que* $h(0) = 0$*, con lo que queda probada la contradicción.*

Bibliografía

[1] M. Bronstein, *Symbolic integration. I: Transcendental functions*, vol. 1 of Algorithms Comput. Math., Berlin: Springer, 1997.

[2] B. Conrad, *Impossibility theorems for elementary integration*, 2005.

[3] C. Hermite, *On the integration of rational fractions.*, Ann. de l'Éc. Norm. (2), 1 (1872), pp. 145–148.

[4] J. Lützen, *Joseph Liouville, 1809–1882: master of pure and applied mathematics*, vol. 15 of Stud. Hist. Math. Phys. Sci., New York etc.: Springer-Verlag, 1990.

[5] M. Ostrogradsky, *De l'intégration des fractions rationnelles*, Bulletin de la classe physico-mathématique de l'Académie Impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg, 4 (1845), pp. 145–167.

[6] R. H. Risch, *The problem of integration in finite terms*, Trans. Am. Math. Soc., 139 (1969), pp. 167–189.

[7] M. Rosenlicht, *Liouville's theorem on functions with elementary integrals*, Pac. J. Math., 24 (1968), pp. 153–161.