

# Geometría Tórica

Diego Ruiz Antolín

Trabajo Dirigido en Matemática Fundamental  
por  
Nuria Corral Pérez

Universidad de Cantabria  
Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Construcción de variedades tóricas</b>	<b>3</b>
1.1. Conos . . . . .	3
1.2. Caras . . . . .	9
1.3. Monoides . . . . .	16
<b>2. Variedades afines tóricas</b>	<b>21</b>
2.1. Polinomios de Laurent . . . . .	21
2.2. Algunos resultados básicos de geometría algebraica . . . . .	22
2.3. Variedades afines tóricas . . . . .	26
<b>3. Variedades Tóricas</b>	<b>37</b>
3.1. Variedades algebraicas proyectivas . . . . .	37
3.2. Abanicos . . . . .	39
3.3. Ejemplos de variedades tóricas . . . . .	41
<b>4. Subvariedades tóricas invariantes</b>	<b>47</b>
4.1. Construcción de una subvariedad tórica invariante . . . . .	47
4.2. Abanicos cociente . . . . .	48
<b>5. La acción tórica y sus órbitas</b>	<b>55</b>
5.1. La acción tórica . . . . .	55
<b>Bibliografía</b>	<b>61</b>

## ÍNDICE GENERAL

# Introducción

Una variedad tórica afín es una variedad algebraica  $X$  que contiene un toro algebraico  $\mathbb{T} = (\mathbb{C}^*)^n$  como un abierto de Zariski denso y verifica que la acción del toro  $\mathbb{T}$  sobre si mismo se extiende a una acción del toro  $\mathbb{T}$  sobre  $X$ .

Así,  $(\mathbb{C}^*)^n$  y  $\mathbb{C}^n$  son ejemplos de variedades tóricas afines. Otros ejemplos son la curva plana  $C = V(y^2 - x^3) \subseteq \mathbb{C}^2$  (cúspide) que es una variedad tórica afín con toro

$$C \setminus \{0\} = C \cap (\mathbb{C}^*)^2 = \{(t^2, t^3) : t \in \mathbb{C}^*\} \cong \mathbb{C}^*$$

o bien la variedad  $V = V(xy - zw) \subseteq \mathbb{C}^4$  que contiene al toro

$$V \cap (\mathbb{C}^*)^4 = \{(t_1, t_2, t_3, t_1 t_2 t_3^{-1}) : t_i \in \mathbb{C}^*\} \cong (\mathbb{C}^*)^3$$

Como variedad algebraica, una variedad tórica afín está definida por los ceros de un ideal en  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  generado por binomios de la forma

$$x^\mu - x^\nu$$

donde  $x^\mu = x_1^{\mu_1} \cdots x_n^{\mu_n}$ ,  $x^\nu = x_1^{\nu_1} \cdots x_n^{\nu_n}$  y los vectores  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$  y  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$  están en  $(\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$ .

A lo largo de la historia, las variedades tóricas han recibido diversos nombres y definiciones, desde la primera definición formal dada por Demazure en [Dem], hasta publicaciones más recientes como [Ful] o [Ewa] (más próximas al concepto que planteamos en este trabajo).

La geometría tórica supone un buen mecanismo para introducir al interesado en el mundo de la geometría algebraica. Permite comprobar cómo funcionan resultados de la teoría de variedades algebraicas de forma más elemental y sobre conocidos ejemplos de variedades tóricas sencillas, como es el caso de  $\mathbb{C}^n$ ,  $\mathbb{P}^n$ ,  $\mathbb{P}^1 \times \dots \times \mathbb{P}^1$  y las superficies de Hirzebruch  $\mathcal{H}_g$ . Como dice Fulton en su libro [Ful], “las variedades tóricas han proporcionado un destacable campo de pruebas para teorías generales”.

Para construir una variedad tórica afín asociamos sucesivamente a un cono  $\sigma$  en el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$ , su cono dual  $\check{\sigma}$  en  $(\mathbb{R}^n)^*$  que nos permite construir un monoide  $S_\sigma = \check{\sigma} \cap M$  con  $M$  un retículo en  $(\mathbb{R}^n)^*$ . El ideal  $I_\sigma$ , que define la variedad algebraica  $X_\sigma$ , se obtiene a partir de un sistema de generadores del monoide  $S_\sigma$ . En los capítulos 1 y 2, describiremos el proceso de construcción de variedades tóricas desde la elección de un cono  $\sigma$ , hasta su variedad tórica afín asociada  $X_\sigma$ .

En el capítulo 3, veremos cómo pegar variedades tóricas afines para obtener variedades tóricas proyectivas y como ejemplo, veremos cómo se pueden definir los ejemplos clásicos que hemos mencionado antes, como  $\mathbb{P}^n$ , mediante este proceso de pegado de variedades.

En los capítulos 4 y 5, describiremos la acción del toro  $(\mathbb{C}^*)^n$  sobre variedades tóricas. Veremos que está embebido en dicha variedad como una órbita densa (lo cual da el apelativo de “tórica” a la variedad tórica) y, por último, daremos una caracterización de la variedad tórica como unión disjunta de las órbitas de la acción del toro. De esta forma, veremos que las variedades tóricas están relacionadas con la teoría algebraica de grupos, ya que de hecho, así es como las consideró Demazure al principio.

Para que el lector se haga una idea de la relevancia que tienen las variedades tóricas en la actualidad, en el apéndice A del libro [Cox] se menciona que “desde 1991, las variedades tóricas tienen su propio número de clasificación 14M25 (en la MathSciNet database)”. Del mismo modo, se han observado aplicaciones de las variedades tóricas en la programación entera, la resolución de sistemas de ecuaciones polinomiales, la teoría de códigos, el modelado geométrico o la combinatoria.

# Capítulo 1

## Construcción de variedades tóricas

Como ya hemos mencionado en la introducción, el proceso de construcción de variedades tóricas (afines) asocia sucesivamente a un cono  $\sigma$  en el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$ , su cono dual  $\check{\sigma}$  en  $(\mathbb{R}^n)^*$ , un monoide  $S_\sigma$ , una  $\mathbb{C}$ -álgebra  $R_\sigma$  finitamente generada y, finalmente, una variedad algebraica  $X_\sigma$ . Es decir, seguimos el esquema:

$$\sigma \longmapsto \check{\sigma} \longmapsto S_\sigma \longmapsto R_\sigma \longmapsto X_\sigma$$

En este primer capítulo, vamos a introducir la definición de cono y cono dual; probaremos algunas propiedades que luego necesitaremos para la construcción de una variedad tórica afín que se hará en el capítulo 2. Terminaremos el capítulo 1 con la definición de un monoide asociado a un cono y sus propiedades.

### 1.1. Conos

**Definición 1.1.1.** Sea  $A = \{v_1, \dots, v_r\}$  un conjunto finito de vectores en  $\mathbb{R}^n$ , el conjunto:

$$\sigma = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r, \lambda_i \in \mathbb{R}^n, \lambda_i \geq 0\}$$

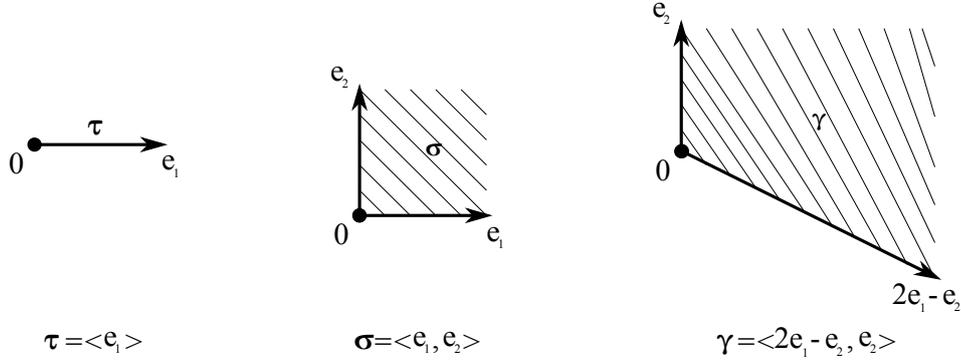
se llama *cono poliédrico convexo* (en adelante, sólo diremos *cono*). Los vectores  $v_1, \dots, v_r$  son los *generadores* de  $\sigma$  y lo denotaremos por  $\sigma = \langle v_1, \dots, v_r \rangle$ .

Si  $A = \emptyset$ , entonces  $\sigma = \{0\}$  y lo llamamos el *cono nulo*.

Sean  $\sigma_1$  el cono generado por  $\{v_1, \dots, v_r\}$  y  $\sigma_2$  el cono generado por  $\{w_1, \dots, w_s\}$ , denotaremos por  $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$  al cono generado por  $\{v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_s\}$ .

La *dimensión de  $\sigma$*  se denota por  $\dim(\sigma)$  y es la dimensión del menor espacio vectorial que contiene a  $\sigma$  o, dicho de otro modo, es la dimensión del subespacio vectorial  $\mathbb{R} \cdot \sigma = \sigma + (-\sigma)$ .

**Ejemplo 1.1.2.** Veamos algunos ejemplos de conos en  $\mathbb{R}^2$ , donde  $\{e_1, e_2\}$  es la base canónica.



**Observación 1.1.3.** Un cono poliédrico convexo  $\sigma$  es un cono porque si un punto  $x$  está en  $\sigma$ , entonces todo punto  $\lambda x$  con  $\lambda$  real positivo (en adelante  $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ) está en  $\sigma$ .

Además, un cono  $\sigma$  es un conjunto convexo porque para todo par de puntos  $x, y$  en  $\sigma$ , cualquier combinación convexa de ellos  $\lambda x + (1 - \lambda)y$ ,  $\lambda \in [0, 1]$  está en  $\sigma$ .

En adelante, denotaremos por  $N$  a un retículo isomorfo a  $\mathbb{Z}^n$ .

**Definición 1.1.4.** Un cono  $\sigma$  es un *cono racional* si todos los generadores de dicho cono pertenecen a  $N$ . Un cono  $\sigma$  es *fuertemente convexo* si no contiene ninguna recta que pase por el origen, es decir,  $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$ .

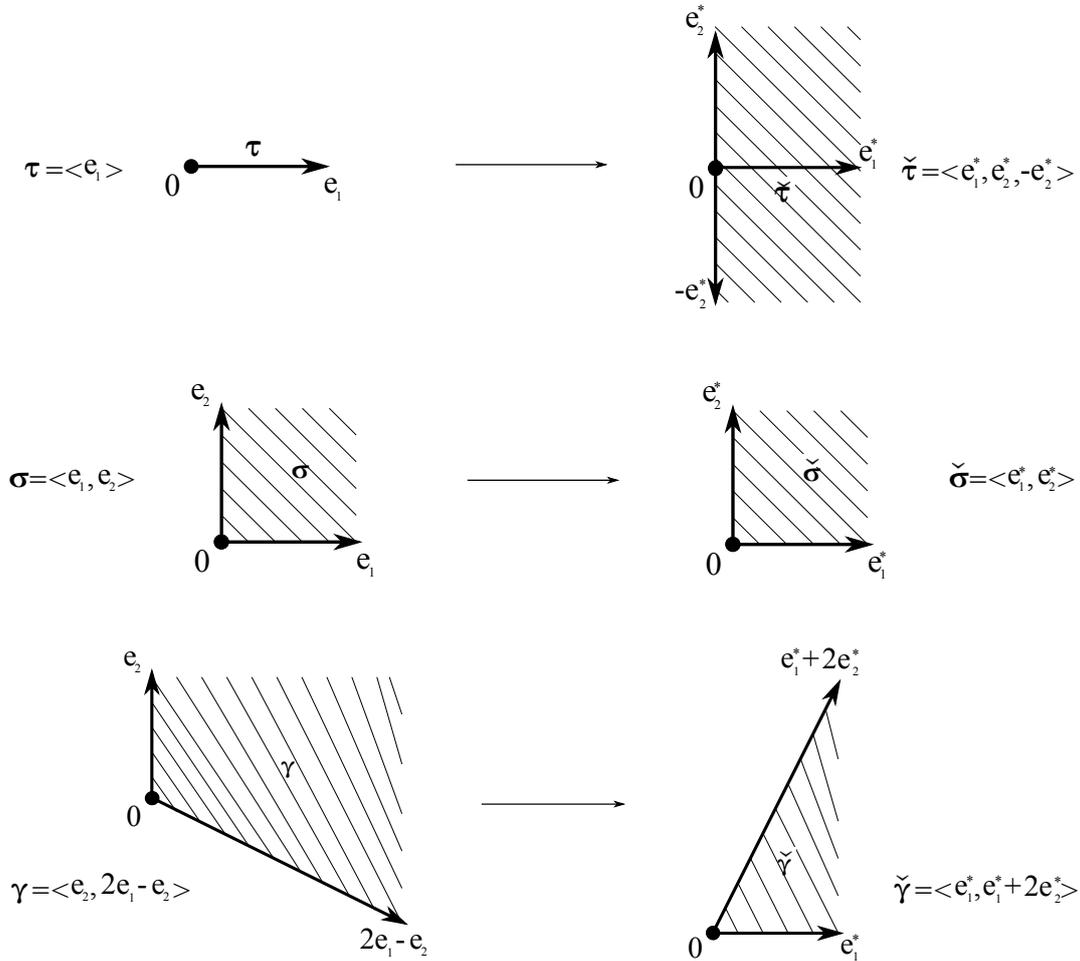
**Definición 1.1.5.** Sea  $(\mathbb{R}^n)^* = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  el espacio dual de  $\mathbb{R}^n$  y  $\langle, \rangle$  la aplicación bilineal

$$\begin{aligned} \langle, \rangle : (\mathbb{R}^n)^* \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto \langle u, v \rangle = u(v) \end{aligned}$$

A cada cono  $\sigma$  podemos asociarle su *cono dual*  $\check{\sigma}$ :

$$\check{\sigma} = \{u \in (\mathbb{R}^n)^* : \langle u, v \rangle \geq 0, \forall v \in \sigma\}$$

**Ejemplo 1.1.6.** Veamos cuales son los conos duales de los conos del Ejemplo 1.1.2. Denotemos por  $\{e_1^*, e_2^*\}$  la base dual de la base canónica de  $\mathbb{R}^2$ .



**Definición 1.1.7.** Llamaremos *ortogonal* del cono  $\sigma$  (o directamente *cono ortogonal*) al conjunto definido por:

$$\sigma^\perp = \{u \in \check{\sigma} : \langle u, v \rangle = 0 \text{ para todo } v \in \sigma\}$$

**Observación 1.1.8.** Se cumple que  $\sigma^\perp = \check{\sigma} \cap (-\check{\sigma})$ .

*Demostración.* Tenemos que  $\check{\sigma} \cap (-\check{\sigma}) = \{u \in (\mathbb{R}^n)^* : \langle u, v \rangle \geq 0, \langle u, v \rangle \leq 0, \forall v \in \sigma\} = \{u \in (\mathbb{R}^n)^* : \langle u, v \rangle = 0\} = \sigma^\perp$ .  $\square$

**Lema 1.1.9.** Todo cono  $\sigma$  se puede definir como una intersección de semiespacios. Cada elemento  $u \in (\mathbb{R}^n)^*$  define un semiespacio  $H_u = \{v \in \mathbb{R}^n : \langle u, v \rangle \geq 0\}$ . De este modo, si  $\{u_i\}_{i=1}^t$  es un conjunto de generadores de  $\check{\sigma}$ , entonces:

$$\sigma = \bigcap_{i=1}^t H_{u_i} = \{v \in \mathbb{R}^n : \langle u_i, v \rangle \geq 0 \quad \forall u_i\}$$

*Demostración.* Comprobamos la igualdad:

- $\subseteq$ ) Sea  $v \in \sigma$ , entonces  $\langle u_i, v \rangle \geq 0$  para todo  $u_i$  por definición de  $\check{\sigma}$ .
- $\supseteq$ ) Sea  $v \in \mathbb{R}^n$  con  $\langle u_i, v \rangle \geq 0$  para  $i=1, \dots, t$ . Tenemos que  $\langle \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_t u_t, v \rangle \geq 0$  para todo  $\lambda_i \geq 0$ , luego concluimos que  $v \in \sigma$ . □

Ahora nos preguntamos qué pasa si volvemos a calcular el dual de un cono dual, es decir, dado  $\sigma$  cono en  $\mathbb{R}^n$ , nos preguntamos qué forma tiene  $\check{\check{\sigma}}$ .

**Observación 1.1.10.** *Recordemos que existe un isomorfismo canónico entre  $\mathbb{R}^n$  y  $(\mathbb{R}^n)^{**}$  dado por:*

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{R}^n &\longrightarrow (\mathbb{R}^n)^{**} \\ v &\longmapsto \Psi(v) : (\mathbb{R}^n)^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \Psi(v)(u) = u(v) \end{aligned}$$

**Proposición 1.1.11.** *Dado un cono  $\sigma$ , entonces se tiene que  $\check{\check{\sigma}} = \sigma$ .*

*Demostración.* Comprobaremos que  $\sigma$  y  $\check{\check{\sigma}}$  se contienen mutuamente.

- Debido al isomorfismo canónico existente entre  $\mathbb{R}^n$  y  $(\mathbb{R}^n)^{**}$ , podemos escribir

$$\check{\check{\sigma}} = \{v \in \mathbb{R}^n : \langle u, v \rangle \geq 0 \text{ para todo } u \in \check{\sigma}\}.$$

Luego, si  $v \in \sigma$ , entonces  $\langle u, v \rangle \geq 0$  para todo  $u \in \check{\sigma}$  por definición de  $\check{\sigma}$  y así,  $\sigma \subseteq \check{\check{\sigma}}$ .

- Sea  $v \in \check{\check{\sigma}}$ . Veamos que si  $v \notin \sigma$ , entonces existe  $u \in \check{\sigma}$  tal que  $\langle u, v \rangle < 0$ . Por el Lema 1.1.9, tenemos que  $\sigma = \bigcap_{i=1}^t H_{u_i}$  con  $\check{\sigma} = \langle u_1, \dots, u_t \rangle$ . Si  $v \notin \sigma$ , entonces existe  $u_i$  tal que  $v \notin H_{u_i}$ , es decir, que  $\langle u_i, v \rangle < 0$  y ya hemos encontrado el  $u = u_i$  que buscábamos. Debido al isomorfismo canónico existente entre  $\mathbb{R}^n$  y  $(\mathbb{R}^n)^{**}$ , tenemos que  $\langle u_i, v \rangle < 0$  implica que  $v \notin \check{\sigma}$ , luego  $\check{\check{\sigma}} \subseteq \sigma$ . □

Dado un retículo  $N \subset \mathbb{R}^n$ , podemos definir su retículo dual  $M = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N; \mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}^n)^* \subset (\mathbb{R}^n)^*$  y se verifica la propiedad siguiente:

**Teorema 1.1.12** (Teorema de Farkas). *Si  $\sigma$  es un cono racional, entonces  $\check{\sigma}$  es un cono racional (respecto al retículo  $M$ ).*

*Demostración.* Si  $\sigma = \{0\}$ , entonces  $\check{\sigma} = (\mathbb{R}^n)^*$  que es cono racional generado por la base canónica  $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ . Si  $\sigma \neq \{0\}$ , podemos suponer que existen generadores de  $\sigma$ ,  $v_i$  no nulos, tal que  $v_i \in N$ ,  $1 \leq i \leq r$  (ya que hemos supuesto que es racional).

Sea  $H_i$  el hiperplano  $\{u \in (\mathbb{R}^n)^* : \langle u, v_i \rangle = 0\}$  y sea  $H_i^+$  el semiespacio  $\{u \in (\mathbb{R}^n)^* : \langle u, v_i \rangle \geq 0\}$ . Tenemos que  $\check{\sigma} = \bigcap_{1 \leq i \leq r} H_i^+$  por el Lema 1.1.9.

Demostraremos que existe una familia finita  $\{u_j : 1 \leq j \leq t\} \subset M$  tal que  $\check{\sigma} = \langle u_1, \dots, u_t \rangle$  por inducción sobre la dimensión  $n$  del espacio vectorial ambiente.

- Para  $n=1$  es directo, porque podemos distinguir tres casos:
  - $\sigma$  está generado por vectores de la forma  $v_i \in N \cap \mathbb{R}_{>0}$ . Dado que todos los generadores serán proporcionales respecto de un factor estrictamente positivo, podemos elegir uno sólo de ellos como generador del cono, llamémoslo  $v_1$ . De esta forma,  $\check{\sigma} = \{u \in \mathbb{R}^* : \langle u, v_1 \rangle \geq 0\} = H_1^+$ , luego es cono racional generado por  $e_1^*$ .
  - De igual modo, si  $\sigma$  está generado por vectores de la forma  $v_i \in N \cap \mathbb{R}_{<0}$ , podemos concluir que  $\check{\sigma}$  es cono racional generado por  $-e_1^*$ .
  - Si  $\sigma$  está generado por al menos un vector  $v_1 \in N \cap \mathbb{R}_{>0}$  y al menos un vector  $v_2 \in N \cap \mathbb{R}_{<0}$ , entonces  $\sigma = \mathbb{R}$  y tendremos  $\check{\sigma} = \{0\}$  que es cono racional.
- Vamos a probarlo para el caso general de dimensión  $n$ , suponiendo que es cierto para el caso de dimensión  $n - 1$ . Sea  $\tau_k = H_k \cap (\bigcap_{j \neq k} H_j^+)$ ,  $1 \leq k \leq r$ , tenemos que  $\tau_k$  es cono en un espacio vectorial de dimensión  $n - 1$ . Por hipótesis de inducción, existe una familia finita de elementos  $\{u_j^k\}_{j=1}^{s_k} \subset M$  que generan  $\tau_k$ .

Veamos ahora que  $\check{\sigma}$  está generado por  $\{u_j^k\}_{j,k} \subset M$ , es decir,

$$\check{\sigma} = \left\{ \sum_{j,k} \mu_j^k u_j^k : \mu_j^k \geq 0 \right\} = \langle (u_j^k)_{j,k} \rangle$$

- $\subseteq$ ) Sea  $u \in \check{\sigma}$ , entonces  $\langle u, v \rangle \geq 0$  para todo  $v \in \sigma$ . Aquí distinguimos dos casos:

- Si existe  $v \in \sigma, v \neq 0$ , tal que  $\langle u, v \rangle = 0$ , entonces existe un conjunto de índices  $I \subseteq \{1, \dots, r\}$  tal que  $\langle u, v_i \rangle = 0$  para todo  $i \in I$  y  $\langle u, v_j \rangle > 0$  para  $j \in \{1, \dots, r\} \setminus I$ . Luego  $u \in H_i$  para todo  $i \in I$  y  $u \in H_j^+$  para  $j \in \{1, \dots, r\} \setminus I$ . Por lo tanto, existe  $k \in I$  tal que  $u \in \tau_k$ , es decir,  $u = \mu_1^k u_1^k + \dots + \mu_{s_k}^k u_{s_k}^k$  con  $\mu_i^k \geq 0$ . Así que, finalmente,  $u \in \langle (u_j^k)_{j,k} \rangle$ .
- Si  $\langle u, v \rangle > 0$  para todo  $v \in \sigma, v \neq 0$  Entonces existe,  $k$  tal que  $\langle u, v_k \rangle > 0$ . Podemos escribir  $u = u_1 + u_2$  donde:

$$\begin{cases} \langle u_1, v_j \rangle = \langle u, v_j \rangle & \text{si } j \neq k \\ \langle u_1, v_k \rangle = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \langle u_2, v_j \rangle = 0 & \text{si } j \neq k \\ \langle u_2, v_k \rangle = \langle u, v_k \rangle \end{cases}$$

Así tenemos,  $u_1 \in H_k$ ,  $u_2 \in H_j$  para  $j \neq k$  y  $u_1, u_2 \in H_i^+$  para todo  $i = 1, \dots, r$ . Luego  $u_1 \in \tau_k$  y  $u_2 \in \tau_j$  con  $j \neq k$ . Es decir, que  $u$  se puede expresar como combinación lineal convexa de los generadores de  $\tau_k$  y  $\tau_j$  para algún  $j \neq k$ .

- $\supseteq$ ) Sea  $u \in \langle (u_j^k)_{j,k} \rangle$ , entonces  $u = \sum_{j,k} \mu_j^k u_j^k$  con  $\mu_j^k \geq 0$ . Luego,  $\langle u, v \rangle = \sum_{j,k} \mu_j^k \langle u_j^k, v \rangle \geq 0$  para todo  $v \in \sigma$  (dado que  $u_j^k \in \tau_k$ ), así que  $u \in \check{\sigma}$ .

□

**Observación 1.1.13.** Sin embargo, no se cumple que dado un cono  $\sigma$  fuertemente convexo, su dual es también fuertemente convexo. Por ejemplo, sea  $\sigma = \langle e_1 \rangle$  en  $\mathbb{R}^2$ , tenemos que  $\check{\sigma} = \langle e_1^*, e_2^*, -e_2^* \rangle$  y  $\check{\sigma} \cap (-\check{\sigma}) = \langle e_2^*, -e_2^* \rangle$ .

También podemos escribir el dual de un cono como una intersección de forma similar a la dada en el Lema 1.1.9.

**Lema 1.1.14.** Sea  $\sigma$  un cono racional generado por los vectores  $\{v_1, \dots, v_r\}$ , entonces  $\check{\sigma} = \bigcap \check{\tau}_i$  donde  $\tau_i = \{\lambda v_i : \lambda \geq 0\}$  es la semirrecta generada por el vector  $v_i$ .

*Demostración.* Observemos que  $\check{\tau}_i = \{u \in (\mathbb{R}^n)^* : \langle u, v \rangle \geq 0, \text{ para todo } v \in \tau_i\} = \{u \in (\mathbb{R}^n)^* : \langle u, \lambda v_i \rangle \geq 0, \text{ para todo } \lambda \geq 0\} = \{u \in (\mathbb{R}^n)^* : \langle u, v_i \rangle \geq 0\}$ . A partir de esta observación, es fácil comprobar la igualdad:

- $\supseteq$ ) Sea  $u \in \bigcap_{i=1}^r \check{\tau}_i$ , esto equivale a decir que  $\langle u, v_i \rangle \geq 0$  para  $i = 1, \dots, r$ . Así que para toda combinación lineal con coeficientes positivos de los  $v_i$  tenemos  $\langle u, \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r \rangle \geq 0$  si  $\lambda_i \geq 0$ . Concluimos que,  $u \in \check{\sigma}$ .

- $\subseteq$ ) Sea  $u \in \check{\sigma}$ , por definición tenemos que  $\langle u, \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r \rangle \geq 0$  para todo  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r \in \sigma$ . En particular, tomando  $\lambda_i = 1$  y  $\lambda_j = 0$  para todo  $j \neq i$ , tenemos que  $\langle u, v_i \rangle \geq 0$ . Repitiendo el mismo argumento para cada  $i$ , obtenemos lo que queremos. □

## 1.2. Caras

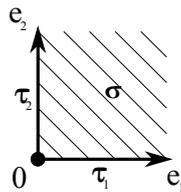
En esta sección introducimos la definición de cara de un cono y algunas de sus propiedades. Una cara de un cono se obtiene haciendo la intersección del cono con un hiperplano de la forma siguiente:

**Definición 1.2.1.** Sea  $\sigma$  un cono y  $\lambda \in \check{\sigma}$ , entonces:

$$\tau = \sigma \cap \lambda^\perp = \{v \in \sigma : \langle \lambda, v \rangle = 0\}$$

es una *cara* de  $\sigma$ . Escribiremos  $\tau < \sigma$ . A las caras de dimensión uno las llamaremos *aristas*. Observemos que el propio cono es cara de si mismo, basta tomar  $\lambda = 0 \in (\mathbb{R}^n)^*$ . Igualmente, el vector 0 constituye una cara de cualquier cono ya que está generada por el elemento  $\lambda = \sum_{i=1}^r u_i \in \check{\sigma}$  con  $\check{\sigma} = \langle u_1, \dots, u_r \rangle$ . A todas las caras que no son  $\sigma$  se las denomina *caras propias* del cono.

**Ejemplo 1.2.2.** Sea el cono  $\sigma = \langle e_1, e_2 \rangle$ , podemos determinar sus caras  $\tau_1 = \langle e_1 \rangle = \sigma \cap (e_2^*)^\perp$ ,  $\tau_2 = \langle e_2 \rangle = \sigma \cap (e_1^*)^\perp$  y sus caras no propias  $\sigma$  y  $\{0\}$ .



Veamos algunas propiedades de las caras de un cono:

**Proposición 1.2.3.** Sea  $\sigma$  un cono racional, entonces:

- i) Toda cara de  $\sigma$  es un cono racional.
- ii) Toda intersección de caras de  $\sigma$  es una cara de  $\sigma$ .
- iii) Toda cara de una cara de  $\sigma$  es una cara de  $\sigma$ .

*Demostración.* Sea  $\sigma$  un cono racional:

- i) Sean  $\{v_1, \dots, v_m\}$  generadores de  $\sigma$  en  $N$  y sea  $\lambda \in \check{\sigma}$ . Consideramos la cara  $\tau = \sigma \cap \lambda^\perp = \{v \in \sigma : \langle \lambda, v \rangle = 0\}$ . Dado  $v \in \tau$ , tenemos que  $v = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_m v_m$  con  $\mu_i \geq 0$ , luego  $\langle \lambda, v \rangle = \mu_1 \langle \lambda, v_1 \rangle + \dots + \mu_m \langle \lambda, v_m \rangle = 0$  y dado que  $\langle \lambda, v_i \rangle \geq 0$ , se cumplirá que para cada  $i \in \{1, \dots, m\}$  o bien  $\mu_i = 0$ , o bien  $\langle \lambda, v_i \rangle = 0$ . Es decir, existe  $I \subseteq \{1, \dots, m\}$  tal que:

$$\begin{cases} \langle \lambda, v_i \rangle = 0, \mu_i \geq 0 & \text{si } i \in I \\ \langle \lambda, v_i \rangle \neq 0, \mu_i = 0 & \text{si } i \notin I \end{cases}$$

Así, tenemos que si  $v \in \tau$ , entonces  $v = \sum_{i \in I} \mu_i v_i$  con  $\mu_i \geq 0$ . Es decir, que  $\tau$  está generado por  $\{v_i : i \in I\}$ , y por lo tanto, es un cono racional.

- ii) El resultado es consecuencia de la siguiente igualdad que probamos a continuación:

$$\bigcap_{i=1}^k (\sigma \cap \lambda_i^\perp) = \sigma \cap \left( \sum_{i=1}^k \lambda_i \right)^\perp$$

- $\subseteq$ ) Sea  $v \in \bigcap_{i=1}^k (\sigma \cap \lambda_i^\perp)$ , tenemos que  $v \in \sigma$  y  $v \in \lambda_i^\perp$  para todo  $i$ , es decir, que  $\langle \lambda_i, v \rangle = 0$ . Dado que la aplicación  $\langle, \rangle$  es bilineal, tenemos que  $\langle \lambda_1 + \dots + \lambda_k, v \rangle = 0$ , luego  $v \in \sigma \cap \left( \sum_{i=1}^k \lambda_i \right)^\perp$  como queríamos ver.

- $\supseteq$ ) Sea  $v \in \sigma \cap \left( \sum_{i=1}^k \lambda_i \right)^\perp$ , tenemos que  $v \in \sigma$  y  $v \in \left( \sum_{i=1}^k \lambda_i \right)^\perp$ , es decir,

que  $\langle \sum_{i=1}^k \lambda_i, v \rangle = 0$  y por la bilinealidad de la aplicación  $\langle, \rangle$ , tenemos que

$\sum_{i=1}^k \langle \lambda_i, v \rangle = 0$ . Dado que  $v \in \sigma$  y  $\lambda_i \in \check{\sigma}$ , tenemos que  $\langle \lambda_i, v \rangle \geq 0$  luego

debe ser  $\langle \lambda_i, v \rangle = 0$  y así tenemos que  $v \in \sigma$  y  $v \in \lambda_i^\perp$  para todo  $i$ , es

decir, que  $v \in \bigcap_{i=1}^k (\sigma \cap \lambda_i^\perp)$ .

- iii) Sean  $\tau = \sigma \cap \lambda^\perp$  y  $\gamma = \tau \cap \lambda'^\perp$  con  $\lambda \in \check{\sigma}$  y  $\lambda' \in \check{\tau}$ . Dividimos la demostración en dos pasos:

- En primer lugar, probamos que existe un número real positivo  $p$  suficientemente grande, tal que  $\lambda' + p\lambda \in \check{\sigma}$ . Supongamos, por reducción al absurdo, que  $\lambda' + p\lambda \notin \check{\sigma}$  para todo  $p \in \mathbb{R}_{>0}$ . Entonces,  $\langle \lambda' + p\lambda, v \rangle = \langle \lambda', v \rangle + p\langle \lambda, v \rangle < 0$  para algún  $v \in \sigma$ .
  - Si  $\langle \lambda, v \rangle \neq 0$ , entonces existe  $p > 0$  tal que  $p\langle \lambda, v \rangle > |\langle \lambda', v \rangle|$ , esto implica que  $\langle \lambda' + p\lambda, v \rangle \geq 0$ , lo que va en contra de la hipótesis.
  - Si  $\langle \lambda, v \rangle = 0$ , tenemos que  $\langle \lambda', v \rangle < 0$  y que  $v \in \sigma \cap \lambda^\perp = \tau$ , es decir,  $\langle \lambda', v \rangle \geq 0$ , que no es posible.
- Para concluir, veamos que  $\gamma = \sigma \cap (\lambda' + p\lambda)^\perp$ 
  - $\subseteq$ ) Sea  $v \in \gamma$ , por definición vemos que  $\gamma = \tau \cap \lambda'^\perp = \sigma \cap \lambda^\perp \cap \lambda'^\perp$ , luego  $v \in \sigma$ ,  $\langle \lambda, v \rangle = 0$  y  $\langle \lambda', v \rangle = 0$ . Por tanto,  $\langle \lambda', v \rangle + p\langle \lambda, v \rangle = \langle \lambda' + p\lambda, v \rangle = 0$  y concluimos que  $v \in \sigma \cap (\lambda' + p\lambda)^\perp$ .
  - $\supseteq$ ) Sean  $\{v_1, \dots, v_m\}$  los generadores de  $\sigma$  ordenados de forma que los  $s$  primeros sean generadores de  $\tau$  y los  $r$  primeros sean generadores de  $\gamma$  ( $r \leq s$ ), tenemos que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \lambda, v_i \rangle = 0 \quad si \quad \forall i \leq s \\ \langle \lambda, v_i \rangle > 0 \quad si \quad \forall i > s \\ \langle \lambda', v_j \rangle = 0 \quad si \quad \forall j \leq r \\ \langle \lambda', v_j \rangle > 0 \quad si \quad \forall j > r \end{array} \right.$$

Sea  $v \in \sigma \cap (\lambda' + p\lambda)^\perp$ , tenemos que  $v \in \sigma$ , luego  $v = \sum_{i=1}^m \mu_i v_i$  con  $\mu_i \geq 0$ . Como  $v \in (\lambda' + p\lambda)^\perp$ , vemos que  $\langle \lambda' + p\lambda, v \rangle = 0$  y desarrollando esta desigualdad,  $\langle \lambda' + p\lambda, v \rangle = \mu_1 \langle \lambda', v_1 \rangle + \dots + \mu_m \langle \lambda', v_m \rangle + p\mu_1 \langle \lambda, v_1 \rangle + \dots + p\mu_m \langle \lambda, v_m \rangle = \mu_{r+1} \langle \lambda', v_{r+1} \rangle + \dots + \mu_m \langle \lambda', v_m \rangle + p\mu_{s+1} \langle \lambda, v_{s+1} \rangle + \dots + \mu_m \langle \lambda, v_m \rangle = 0$ . Llegamos a que  $\mu_i = 0$  para  $i \in \{r+1, \dots, s, s+1, \dots, m\}$ . Por tanto,  $\langle \lambda, v \rangle = 0$  y  $\langle \lambda', v \rangle = 0$ , así que  $v \in \lambda^\perp$  y  $v \in \lambda'^\perp$ . Con esto ya podemos concluir que  $v \in (\sigma \cap \lambda^\perp) \cap \lambda'^\perp = \tau \cap \lambda'^\perp = \gamma$ .

Esto prueba que  $\gamma$  es una cara de  $\sigma$ . □

**Observación 1.2.4.** *Notemos que de la demostración del punto i) de la Proposición 1.2.3, hemos deducido que dados los generadores  $\{v_1, \dots, v_m\}$  de un cono  $\sigma$ , los generadores de cualquier cara  $\tau = \sigma \cap \lambda^\perp$ ,  $\lambda \in \check{\sigma}$ , de  $\sigma$  serán aquellos  $v_i$  tales que  $\langle \lambda, v_i \rangle = 0$ .*

Si  $\tau$  es una cara de  $\sigma$ , al considerar los conos duales obtenemos

**Proposición 1.2.5.** *Si  $\tau < \sigma$ , entonces  $\check{\sigma} \subset \check{\tau}$ .*

*Demostración.* Sea  $u \in \check{\sigma}$ , por definición  $\langle u, v \rangle \geq 0$  para todo  $v \in \sigma$ , luego  $\langle u, w \rangle \geq 0$  para todo  $w \in \tau < \sigma$ , es decir,  $u \in \check{\tau}$ .  $\square$

**Observación 1.2.6.** *Sin embargo, no siempre es cierto que si  $\tau < \sigma$ , entonces  $\check{\sigma} < \check{\tau}$ . Si consideramos en  $\mathbb{R}^2$  la cara  $\tau = \langle e_1 \rangle$  del cono  $\sigma = \langle e_1, e_2 \rangle$ . Efectivamente,  $\check{\sigma} = \langle e_1^*, e_2^* \rangle$  está contenido en  $\check{\tau} = \langle e_1^*, e_2^*, -e_2^* \rangle$ , pero  $\check{\sigma}$  no es cara de  $\check{\tau}$  porque no existe  $\lambda \in \check{\tau} = \tau$  tal que  $\check{\sigma} = \lambda \cap \check{\tau}$ .*

Vamos a enunciar ahora una serie de resultados que usaremos para demostrar, al final de esta sección, un resultado que establece una biyección entre las caras de un cono  $\sigma$  y las caras de su dual  $\check{\sigma}$ .

**Observación 1.2.7.** *Si  $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ , entonces  $\check{\sigma} = \check{\sigma}_1 \cap \check{\sigma}_2$ .*

*Demostración.* Sean  $\{v_1, \dots, v_r\}$  y  $\{w_1, \dots, w_s\}$  generadores de los conos  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  respectivamente. Consideramos  $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$  y tenemos que  $\check{\sigma} = \{u \in (\mathbb{R}^n)^* : \langle u, v \rangle \geq 0 \ \forall v \in \sigma\}$ . Sean  $\tau_i = \{\lambda v_i : \lambda \geq 0\}$  y  $\gamma_j = \{\lambda w_j : \lambda \geq 0\}$ , en virtud del Lema 1.1.14, tenemos que  $\check{\sigma} = \bigcap_{i=1}^r \check{\tau}_i \cap \bigcap_{j=1}^s \check{\gamma}_j = \check{\sigma}_1 \cap \check{\sigma}_2$ .  $\square$

**Observación 1.2.8.** *Si  $\sigma = \sigma_1 \cap \sigma_2$ , entonces  $\check{\sigma} = \check{\sigma}_1 + \check{\sigma}_2$*

*Demostración.* En la observación anterior, hemos visto que  $(\sigma_1 + \sigma_2)^\vee = \check{\sigma}_1 \cap \check{\sigma}_2$ . Basta sustituir  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  por  $\check{\sigma}_1$  y  $\check{\sigma}_2$  en la igualdad respectivamente para obtener la demostración.  $\square$

Gracias a estas observaciones, ahora podemos dar el siguiente resultado sobre el cálculo de la dimensión del dual de un cono  $\sigma$  dado.

**Proposición 1.2.9.** *Sea  $\sigma$  un cono en  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $\dim(\check{\sigma}) = \text{codim}(\sigma \cap (-\sigma))$ .*

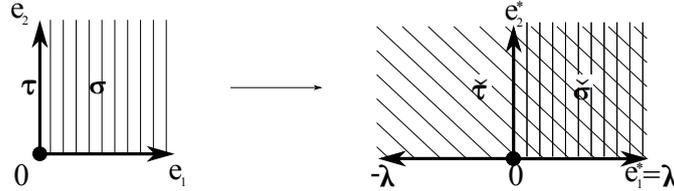
*Demostración.* Por definición,  $\dim(\check{\sigma}) = \dim(\check{\sigma} + (-\check{\sigma}))$ . En virtud de la observación anterior,  $\check{\sigma} + (-\check{\sigma}) = (\sigma \cap (-\sigma))^\sim$ . Ahora bien, tenemos que  $(\sigma \cap (-\sigma))^\sim = (\sigma \cap (-\sigma))^\perp$  ya que  $v \in \sigma \cap (-\sigma)$  implica que  $-v \in \sigma \cap (-\sigma)$ , luego cualquier elemento  $u \in (\sigma \cap (-\sigma))^\sim$  cumple que  $\langle u, v \rangle \geq 0$  y  $\langle u, -v \rangle \geq 0$ , es decir,  $\langle u, v \rangle = 0$ , luego  $u \in (\sigma \cap (-\sigma))^\perp$ . Así finalmente,  $\dim(\check{\sigma}) = \dim((\sigma \cap (-\sigma))^\perp) = \text{codim}(\sigma \cap (-\sigma))$ , como queríamos ver.  $\square$

**Proposición 1.2.10.** Si  $\tau = \sigma \cap \lambda^\perp$ , con  $\lambda \in \check{\sigma}$ , es una cara de  $\sigma$ , entonces:

$$\check{\tau} = \check{\sigma} + \mathbb{R}_{\geq 0}(-\lambda)$$

*Demostración.* Dado que ambos miembros de la igualdad son conos, bastará probar que sus duales coinciden. Por un lado, tenemos que  $\check{\check{\tau}} = \tau$  y por el otro  $(\check{\sigma} + \langle -\lambda \rangle)^\sim = \sigma \cap \langle -\lambda \rangle^\sim = \sigma \cap \lambda^\perp = \tau$ . Vamos a concretar algunos detalles de la segunda igualdad. Si  $v \in \sigma \cap \langle -\lambda \rangle^\sim$ , entonces  $\langle -\lambda, v \rangle \geq 0$  porque  $v \in \langle -\lambda \rangle^\sim$  y, dado que  $\langle \lambda, v \rangle \geq 0$  porque  $v \in \sigma$ , debe ser  $\langle \lambda, v \rangle = 0$ . Por otro lado, si  $v \in \sigma \cap \lambda^\perp$  entonces  $\langle \lambda, v \rangle = 0$  que también implica  $\langle -\lambda, v \rangle = 0$  luego  $v \in \sigma \cap \langle -\lambda \rangle^\sim$ .  $\square$

**Ejemplo 1.2.11.** Consideramos el cono  $\sigma = \langle e_1, e_2 \rangle$  y queremos calcular el dual de la cara  $\tau = \langle e_2 \rangle = \sigma \cap (e_1^*)^\perp$ . Por la proposición anterior, tenemos que  $\check{\tau} = \check{\sigma} + \langle -e_1^* \rangle = \langle e_1^*, -e_1^*, e_2^* \rangle$ .



Vamos a definir la noción de interior relativo de un cono y algunos resultados relacionados con esta definición que también nos serán útiles en la prueba del Teorema 1.2.17

**Definición 1.2.12.** El *interior relativo*  $\overset{\circ}{\sigma}$  de un cono  $\sigma$  es el conjunto de elementos de  $\sigma$  que no pertenecen a ninguna cara estricta de  $\sigma$ , es decir,

$$\overset{\circ}{\sigma} = \{v \in \sigma : \langle \lambda, v \rangle > 0 \text{ para todo } \lambda \in \check{\sigma} \setminus \sigma^\perp\}.$$

Este conjunto es siempre no vacío. En particular, el cono  $\{0\}$  es igual a su interior relativo.

**Observación 1.2.13.** *El interior relativo  $\overset{\circ}{\sigma}$  de un cono  $\sigma$  coincide con el interior topológico de  $\sigma$  para la topología usual del subespacio vectorial que genera.*

*Demostración.* Esto es consecuencia de que sabemos que si  $\check{\sigma} = \langle u_1, \dots, u_t \rangle$ , entonces  $\sigma = \bigcap_{i=1}^t H_{u_i} = \bigcap_{i=1}^t \{v \in \mathbb{R}^n : \langle u_i, v \rangle \geq 0\}$ . La frontera topológica de  $\sigma$  con la topología usual es la intersección de los hiperplanos  $H_i = \{v \in \mathbb{R}^n : \langle u_i, v \rangle = 0\}$ , lo que nos lleva a que el interior topológico de  $\sigma$  con la topología usual coincide con el interior relativo.  $\square$

**Definición 1.2.14.** La unión de las caras estrictas de  $\sigma$ ,  $\sigma \setminus \overset{\circ}{\sigma}$ , se denomina *borde relativo* de  $\sigma$ .

**Proposición 1.2.15.** *Dado un cono  $\sigma$ , se tiene que un elemento  $v \in \sigma$  está en su interior relativo  $\overset{\circ}{\sigma}$  si, y sólo si,  $\check{\sigma} \cap v^\perp = \sigma^\perp$ .*

*Demostración.* Dados  $v \in \sigma$  y  $u \in \check{\sigma}$ , la igualdad  $\langle u, v \rangle = 0$  implica que  $u \in \sigma^\perp$  si, y sólo si,  $v \in \overset{\circ}{\sigma}$ , ya que si  $v \in \overset{\circ}{\sigma}$ , entonces  $\langle u, v \rangle > 0$  para todo  $w \in \check{\sigma} \setminus \sigma^\perp$ , luego si  $\langle u, v \rangle = 0$ , entonces  $u \in \sigma^\perp$ . Recíprocamente, si  $u \in \sigma^\perp$ , entonces  $\langle u, x \rangle = 0$  para todo  $x \in \sigma$ . Tenemos, por hipótesis, que  $\langle u, v \rangle = 0$  ya que  $u \in \sigma^\perp$ , luego  $\langle w, v \rangle > 0$  si  $w \in \check{\sigma} \setminus \sigma^\perp$ , así que  $v \in \overset{\circ}{\sigma}$ .

Veamos ahora que dado  $v \in \sigma$ , se cumple que  $v \in \overset{\circ}{\sigma}$  si, y solo si,  $\check{\sigma} \cap v^\perp = \sigma^\perp$ . Para la implicación directa, sabemos que para todo  $v \in \sigma$  siempre se verifica que  $\sigma^\perp \subseteq \check{\sigma} \cap v^\perp$ . Veamos que si  $v \in \overset{\circ}{\sigma}$ , entonces se tiene la otra contención. Si  $u \in \check{\sigma} \cap v^\perp$ , entonces  $\langle u, v \rangle = 0$ , luego  $u \in \sigma^\perp$  por la observación anterior. Para la implicación recíproca, consideramos  $w \in \check{\sigma} \setminus \sigma^\perp$  y tenemos que  $\langle w, v \rangle > 0$  porque  $w \notin v^\perp$ , luego  $v \in \overset{\circ}{\sigma}$ .  $\square$

Incluimos a continuación un resultado auxiliar que vamos a necesitar para dar la prueba del Teorema 1.2.17.

**Lema 1.2.16.** *Sea  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación suprayectiva y sean  $g, h : Y \rightarrow Z$  tales que  $g \circ f = h \circ f$ . Entonces  $g = h$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $g \neq h$ , entonces existe  $y \in Y$  tal que  $g(y) \neq h(y)$ . Como  $f$  es suprayectiva, existe  $x \in X$  tal que  $f(x) = y$ . Luego  $g(y) = g \circ f(x) \neq h \circ f(x) = h(y)$  y, por tanto,  $g \circ f \neq h \circ f$ .  $\square$

Finalmente, podemos probar la existencia de una biyección entre las caras de un cono y las caras de su cono dual.

**Teorema 1.2.17.** *Si  $\tau < \sigma$ , entonces  $\check{\sigma} \cap \tau^\perp$  es una cara de  $\check{\sigma}$  con  $\dim(\tau) + \dim(\check{\sigma} \cap \tau^\perp) = n$ . Esto nos da una biyección (con inversión de orden) entre las caras de  $\sigma$  y las caras de  $\check{\sigma}$ .*

*Demostración.* Vamos a hacer la demostración por pasos:

- Primero demostramos que si  $\tau < \sigma$ , entonces  $\check{\sigma} \cap \tau^\perp < \check{\sigma}$   
Las caras de  $\check{\sigma}$  son conos de la forma  $\check{\sigma} \cap v^\perp$  con  $v \in \check{\sigma} \cap N = \sigma \cap N$ . Sea  $v$  contenido en el interior relativo de  $\tau$ , tenemos que:

$$\check{\sigma} \cap v^\perp = \check{\sigma} \cap \check{\tau} \cap v^\perp = \check{\sigma} \cap \tau^\perp$$

Estas igualdades se deben al hecho de que  $\tau < \sigma$  entonces  $\check{\sigma} \subset \check{\tau}$  (por la Observación 1.2.5) y como  $v \in \overset{\circ}{\tau}$ , entonces  $\check{\tau} \cap v^\perp = \tau^\perp$  (por la Proposición 1.2.15). Esto prueba que  $\check{\sigma} \cap \tau^\perp$  es una cara de  $\check{\sigma}$ .

- Probemos que se verifica la siguiente igualdad para las dimensiones,  $\dim(\tau) + \dim(\check{\sigma} \cap \tau^\perp) = n$ 
  - Consideramos  $\dim(\sigma) = p \leq n$  y  $\dim(\tau) = q \leq p$ .
  - Tenemos que si  $\tau^\perp = \check{\tau} \cap (-\check{\tau})$ , entonces  $\check{\sigma} \cap \tau^\perp = \check{\sigma} \cap \check{\tau} \cap (-\check{\tau}) = \check{\sigma} \cap (-\check{\tau})$ .
  - Así, podemos hacer la siguiente sustitución  $\dim(\check{\sigma} \cap \tau^\perp) = \dim(\check{\sigma} \cap (-\check{\tau})) = \dim((\sigma + (-\tau)))$  por la Observación 1.2.7.
  - Finalmente, en virtud de la Proposición 1.2.9,  $\dim((\sigma + (-\tau))) = \text{codim}((\sigma + (-\tau)) \cap ((-\sigma) + \tau)) = \text{codim}(\tau + (-\tau)) = n - q$ , tal como queríamos ver.
- Esta construcción nos da una biyección (con inversión de orden) entre las caras de  $\sigma$  y las caras de  $\check{\sigma}$ . Vamos a denotar por  $H$  a dicha biyección, de forma que  $H$  es la aplicación:

$$\begin{aligned} H : \{\text{Caras de } \sigma\} &\longrightarrow \{\text{Caras de } \check{\sigma}\} \\ \tau &\longmapsto \tau^* = \check{\sigma} \cap \tau^\perp \end{aligned}$$

Sean  $\tau$  y  $\gamma$  caras de  $\sigma$  con  $\gamma < \tau$ , veamos que  $H$  invierte el orden, es decir,  $\tau^* < \gamma^*$ . Dado que  $\gamma < \tau$ , tenemos que  $\tau^\perp \subset \gamma^\perp$ , luego  $\tau^* = \check{\sigma} \cap \tau^\perp \subset \check{\sigma} \cap \gamma^\perp = \gamma^*$ . Vamos a ver ahora que  $H$  es biyectiva. Ya hemos visto que es suprayectiva,

pues dada una cara  $\check{\sigma}$ , esta será de la forma  $\check{\sigma} \cap v^\perp$  con  $v \in \sigma$  y existe una cara  $\tau < \sigma$ , tal que  $v$  está en el interior relativo de  $\tau$ , con  $\check{\sigma} \cap v^\perp = \check{\sigma} \cap \tau^\perp$  como hemos probado antes. Veamos que es inyectiva. Vamos a probar primero que  $\tau \subset \tau^{**}$ . Tenemos que  $\tau^{**} = (\check{\sigma} \cap \tau^\perp)^* = \sigma \cap (\check{\sigma} \cap \tau^\perp)^\perp$

- $\tau < \sigma \implies \tau \subseteq \sigma$
- $\check{\sigma} \cap \tau^\perp \subset \tau^\perp \implies \tau \subseteq \tau^{\perp\perp} \subseteq (\check{\sigma} \cap \tau^\perp)^\perp$

Una vez demostrado que  $\tau \subseteq \tau^{**}$ , podemos afirmar que  $\tau^* \supseteq \tau^{***}$  porque  $H$  invierte el orden y que  $\tau^* \subseteq \tau^{***}$  porque  $\check{\sigma}$  también es un cono y podemos considerar  $\tilde{H}$  la aplicación con dominio en el conjunto de caras de  $\check{\sigma}$ . Luego  $\tau^* = \tau^{***}$ . Ahora, consideramos la aplicación  $G$  definida por  $G(\tau^*) = H(\tilde{H}(\tau^*)) = \tau^{***}$  y de la igualdad  $\tau^* = \tau^{***}$ , deducimos que  $Id \circ H = G \circ H$ . Dado que  $H$  es suprayectiva y en virtud del Lema 1.2.16, tenemos que  $G=Id$ . Dado que  $G = H \circ \tilde{H}$ , tenemos que  $\tilde{H}$  es inyectiva.

Por último, basta probar que  $\tilde{H} \circ H = Id$  para ver que  $H$  es inyectiva y concluir que  $H$  es biyectiva. Supongamos que  $\tilde{H} \circ H \neq Id$ , es decir, que existe una cara  $\tau$  de  $\sigma$  tal que  $\tilde{H} \circ H(\tau) = \gamma \neq \tau$ . Dado que  $\tilde{H}$  es suprayectiva (se puede comprobar repitiendo el proceso que hicimos para comprobar que  $H$  es suprayectiva), tenemos que existe una cara  $\alpha$  de  $\check{\sigma}$  tal que  $\tilde{H}(\alpha) = \tau$ . Es decir, que  $\tilde{H}(H(\tilde{H}(\alpha))) = \gamma$ . Sin embargo,  $H(\tilde{H}(\alpha)) = \alpha$ , luego  $\tilde{H}(H(\tilde{H}(\alpha))) = \tilde{H}(\alpha) = \gamma$ , pero teníamos que  $\tilde{H}(\alpha) = \tau \neq \gamma$ , luego llegamos a una contradicción.

□

### 1.3. Monoïdes

Uno de los pasos en la construcción de variedades tóricas es obtener un monoïde a partir del dual de un cono. En esta sección, definiremos el concepto de monoïde y una serie de resultados para poder realizar el paso mencionado.

**Definición 1.3.1.** Un semigrupo (es decir, un conjunto no vacío  $S$  con una operación interna asociativa  $+$ ) se llama *monoïde* si es conmutativo, posee elemento neutro  $0$  y cumple la ley de simplificación:

$$s + t = s' + t \implies s = s' \text{ para } s, s', t \in S$$

**Lema 1.3.2.** *Si  $\sigma$  es un cono, entonces  $\sigma \cap N$  es un monoide.*

*Demostración.* Es directo que la suma de elementos del conjunto  $\sigma \cap N$  es asociativa, conmutativa y posee elemento neutro  $(0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$  puesto que la operación hereda las propiedades de su homóloga en el espacio vectorial  $\mathbb{R}^n$ . En cuanto a la ley de simplificación, dados dos elementos  $(x_1, \dots, x_n)$  y  $(y_1, \dots, y_n)$  en  $\sigma \cap N$ , para cualquier elemento  $(z_1, \dots, z_n) \in \sigma \cap N$  que cumpla  $(x_1 + z_1, \dots, x_n + z_n) = (y_1 + z_1, \dots, y_n + z_n)$ , tenemos que  $x_i = y_i$  para  $i = 1, \dots, n$ . Luego efectivamente, también se cumple la ley de simplificación.  $\square$

**Definición 1.3.3.** Un monoide  $S$  está *finitamente generado* si existen elementos  $a_1, \dots, a_k \in S$  tales que:

$$\text{para todo } s \in S \text{ se tiene que } s = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k \text{ con } \lambda_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Los elementos  $a_1, \dots, a_k$  se llaman *generadores del monoide*. Un sistema de generadores es *mínimo* si ninguno de sus elementos está generado por el resto de elementos del sistema.

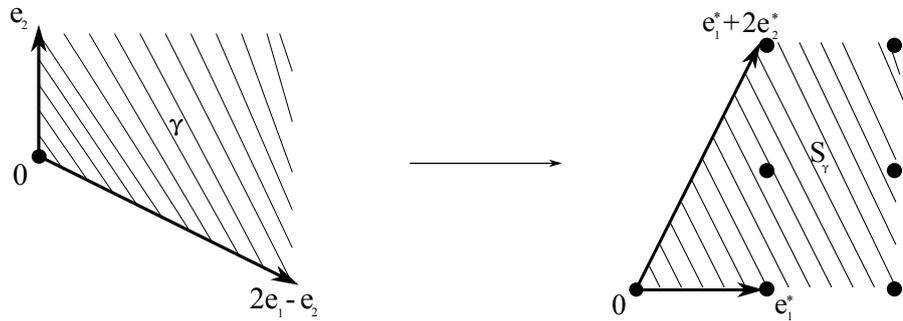
**Lema 1.3.4** (Lema de Gordan). *Si  $\sigma$  es un cono racional, entonces  $\sigma \cap N$  es un monoide finitamente generado.*

*Demostración.* Sea  $\sigma$  un cono racional y  $A = \{v_1, \dots, v_k\}$  un conjunto de generadores de  $\sigma$ , con  $v_i \in \sigma \cap N$ . Consideramos el conjunto  $K = \left\{ \sum_{i=1}^k t_i v_i, 0 \leq t_i \leq 1 \right\}$  que es compacto y, dado que  $N$  es discreto, tenemos que  $K \cap N$  es finito. Veamos que  $K \cap N$  genera  $\sigma \cap N$ . Sea  $v \in \sigma \cap N$ , entonces  $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = (n_1 + r_1)v_1 + \dots + (n_k + r_k)v_k = n_1 v_1 + \dots + n_k v_k + 1 \cdot \sum_{i=1}^k r_i v_i$  con  $n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  y  $0 \leq r_i < 1$ . Dado que  $v_i \in K \cap N$  y que  $\sum_{i=1}^k r_i v_i \in K \cap N$ , ya tenemos lo que queríamos.  $\square$

**Notación 1.3.5.** *A partir de ahora, denotaremos  $S_\sigma = \check{\sigma} \cap M$ .*

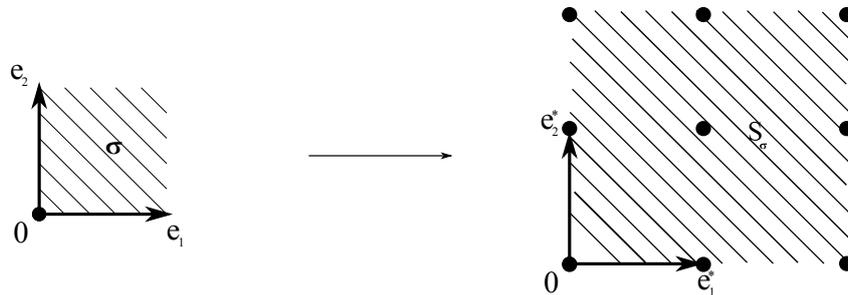
Vamos a dar ahora una serie de ejemplos de monoides obtenidos a partir de los conos del Ejemplo 1.1.6.

**Ejemplo 1.3.6.** *En  $\mathbb{R}^2$  consideramos el cono  $\gamma = \langle 2e_1 - e_2, e_2 \rangle$  y hallamos  $S_\gamma$*



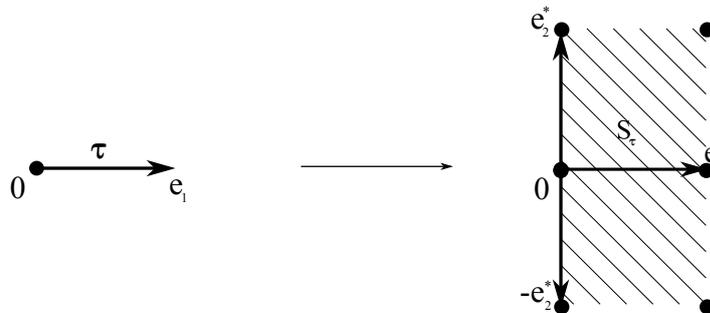
En este ejemplo  $S_\gamma$ , marcado con los puntos grandes, no está generado por los vectores que generan  $\tilde{\gamma} = \langle e_1^*, e_1^* + 2e_2^* \rangle$  sino que hay que añadir el vector  $e_1^* + e_2^*$  al conjunto de generadores de  $S_\gamma$ . Sin embargo, el lema de Gordan garantiza que el conjunto de generadores es finito y, si seguimos la demostración del lema de Gordan, basta con elegirlos de entre los vectores contenidos en el conjunto  $K$  definido en la demostración.

**Ejemplo 1.3.7.** En  $\mathbb{R}^2$  consideramos el cono  $\sigma = \langle e_1, e_2 \rangle$  y hallamos  $S_\sigma$



Vemos en este caso que  $S_\sigma$  sí que está generado por los vectores que generan  $\check{\sigma} = \langle e_1^*, e_2^* \rangle$ .

**Ejemplo 1.3.8.** En  $\mathbb{R}^2$  consideramos el cono  $\tau = \langle e_1 \rangle$  y hallamos  $S_\tau$



En este ejemplo  $S_\tau$  también está generado por los vectores que generan  $\tilde{\tau} = \langle e_1^*, e_2^*, -e_2^* \rangle$ .

**Proposición 1.3.9.** *Sea  $\sigma$  un cono racional y  $\tau = \sigma \cap \lambda^\perp$  una cara de  $\sigma$ , con  $\lambda \in S_\sigma$ , entonces:*

$$S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-\lambda)$$

*Demostración.* Se prueba directamente intersecando ambos miembros de la igualdad de la Proposición 1.2.10 con  $M = (\mathbb{Z}^n)^*$ .  $\square$

Finalmente, vamos a demostrar un resultado que será útil en secciones posteriores:

**Lema 1.3.10.** *Sea  $\sigma$  un cono fuertemente convexo, el monoide  $\sigma \cap \mathbb{Z}^n$  tiene un único sistema mínimo de generadores.*

*Demostración.* Sean  $\{a_1, \dots, a_l\}$  y  $\{b_1, \dots, b_m\}$  dos sistemas mínimos de generadores distintos de  $\sigma \cap N$  y podemos suponer que  $b_1 \notin \{a_1, \dots, a_l\}$ . Entonces, existen combinaciones

$$b_1 = \sum_{j=1}^l \lambda_j a_j \text{ con } \lambda_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

y

$$a_i = \sum_{k=1}^m \mu_{ik} b_k \text{ con } \mu_{ik} \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ para } i = 1, \dots, l.$$

Operando adecuadamente, obtenemos que

$$b_1 = \sum_{k=1}^m \gamma_k b_k \text{ con } \gamma_k = \sum_{j=1}^l \lambda_j \mu_{jk}.$$

Dado que los  $b_k$  forman un sistema mínimo de generadores del monoide, debe ser  $\gamma_1 > 0$  o si no,  $b_1$  sería combinación del resto de  $b_k$  del sistema. Por otro lado, también se cumple que  $\gamma_1 \leq 1$ . De no ser así, podemos obtener  $-b_1$  como combinación de los generadores  $\{b_2, \dots, b_m\}$ , es decir, que  $-b_1 \in \sigma$ , pero eso entra en contradicción con que  $\sigma$  es fuertemente convexo. Luego  $\gamma_1 = 1$  y  $\gamma_k = 0$  para todo  $k \geq 2$ . Como consecuencia,  $\lambda_j \mu_{jk} = 0$  para todo  $j = 1, \dots, l$  y  $k = 2, \dots, m$ .

- Como  $\gamma_1 = \sum_{j=1}^l \lambda_j \mu_{j1} = 1$ , entonces existe  $j_0$  tal que  $\lambda_{j_0} \mu_{j_0 1} = 1$  y  $\lambda_j \mu_{j1} = 0$  para todo  $j \neq j_0$ . Luego  $\lambda_{j_0} = \mu_{j_0 1} = 1$ . Por lo tanto, como  $\mu_{j_0 k} = 0$  para todo  $k = 2, \dots, m$ , tenemos que  $a_{j_0} = \sum_{k=1}^m \mu_{j_0 k} b_k = \mu_{j_0 1} b_1 = b_1$ .

- Si suponemos que existe  $s \neq j_0$  tal que  $\lambda_s \neq 0$ , entonces  $\mu_{sk} = 0$  para todo  $k = 2, \dots, m$ , por lo tanto,  $a_s = \mu_{s1}b_1$ .

Luego,

$$b_1 = a_{j_0} + a_s + \sum_{j \neq j_0, s}^l \lambda_j a_j = b_1 + \mu_{s1}b_1 + \sum_{j \neq j_0, s}^l \lambda_j a_j$$

Simplificando, tenemos que  $\sum_{j \neq j_0, s}^l \lambda_j a_j = -\mu_{s1}b_1$ , es decir, que  $-b_1 \in \sigma$ . Pero esto vuelve a contradecir nuevamente la hipótesis de que  $\sigma$  sea fuertemente convexo. Luego,  $b_1 = \lambda_{j_0}a_{j_0} = a_{j_0}$ , en contradicción con la suposición de que  $b_1 \notin \{a_1, \dots, a_l\}$ .  $\square$

# Capítulo 2

## Variedades afines tóricas

Hasta ahora ya hemos alcanzado el tercer paso en nuestra construcción de variedades tóricas afines. Vamos a construir, a partir de los monoides de la forma  $S_\sigma$  que hemos definido en la sección anterior, álgebras sobre el cuerpo de los números complejos. Finalmente, de estas álgebras y mediante el uso de herramientas propias de la geometría algebraica, llegaremos a dar una definición de variedad tórica afín.

### 2.1. Polinomios de Laurent

Denotemos por  $\mathbb{C}[z, z^{-1}] = \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n, z_1^{-1}, \dots, z_n^{-1}]$  el anillo de polinomios de Laurent. Escribiremos un monomio de Laurent de la forma  $\lambda z^\alpha = \lambda z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}$  con  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  y  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$ . El siguiente paso para definir variedades tóricas está basado en el siguiente isomorfismo entre el grupo aditivo  $\mathbb{Z}^n$  y el grupo multiplicativo de monomios mónicos de Laurent:

$$\begin{aligned} \theta : \mathbb{Z}^n &\longrightarrow \theta(\mathbb{Z}^n) \subseteq \mathbb{C}[z, z^{-1}] \\ \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) &\longmapsto z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n} \end{aligned}$$

Veamos que  $\theta$  es un isomorfismo de  $\mathbb{Z}^n$  en  $\theta(\mathbb{Z}^n)$ .

- $\theta$  es homomorfismo de grupos. Sean  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$  y  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{Z}^n$ , tenemos que:  $\theta(\alpha + \beta) = \theta(\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n) = z^{\alpha_1 + \beta_1} \cdots z^{\alpha_n + \beta_n} = z^\alpha \cdot z^\beta$
- $\theta$  es inyectiva. Directamente, si  $\theta(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n} = z_1^{\beta_1} \cdots z_n^{\beta_n} = \theta(\beta_1, \dots, \beta_n)$  entonces  $\alpha_i = \beta_i, i \in \{1, \dots, n\}$

- $\theta$  es suprayectiva porque el recorrido de la aplicación es la imagen del dominio por  $\theta$ .

**Definición 2.1.1.** El *soporte* de un polinomio de Laurent  $f = \sum_{finita} \lambda_a z^a$  se define por:

$$\text{supp}(f) = \{a \in \mathbb{Z}^n : \lambda_a \neq 0\}$$

**Proposición 2.1.2.** Para un cono racional  $\sigma$ , el anillo

$$R_\sigma = \{f \in \mathbb{C}[z, z^{-1}] : \text{supp}(f) \subset S_\sigma\}$$

es un álgebra monomial finitamente generada (es decir, es una  $\mathbb{C}$ -álgebra generada por monomios de Laurent).

*Demostración.* Para probar que es una  $\mathbb{C}$ -álgebra, basta considerar cómo se comporta el soporte para la suma, producto y producto por escalares de polinomios de Laurent. El soporte de la suma de monomios de Laurent está contenido en la unión de los soportes de ambos sumandos. El soporte del producto de un polinomio por un escalar no nulo permanece constante. El soporte del producto de dos monomios de Laurent es la suma de los soportes de los factores, que está en  $S_\sigma$  porque es un monoide. Veamos que  $R_\sigma$  es finitamente generada. Sabemos que existen  $v_1, \dots, v_n \in S_\sigma$  que generan  $S_\sigma$  (por el lema de Gordan). Dada la biyección  $\theta$  entre  $\mathbb{Z}^n$  y  $\theta(\mathbb{Z}^n)$ , tenemos que dado  $x \in S_\sigma$ ,  $x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ ,  $\lambda_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , entonces  $\theta(x) = z^x = (z^{v_1})^{\lambda_1} \dots (z^{v_n})^{\lambda_n}$ . Es decir, que cualquier monomio  $z^x \in R_\sigma$  está generado por  $z^{v_1}, \dots, z^{v_n}$ .  $\square$

## 2.2. Algunos resultados básicos de geometría algebraica

En esta sección vamos a recordar algunos resultados de geometría algebraica que utilizaremos en la construcción de variedades tóricas. Como referencia principal para esta sección se puede consultar el libro *Algebraic Geometry* de R. Hartshorne [Hart]. Pese a que todos los resultados que vamos a dar ahora se pueden enunciar sobre cualquier cuerpo  $k$ , nosotros elegiremos darlos sobre el cuerpo  $\mathbb{C}$  de los números complejos y denotaremos  $\mathbb{C}[\xi] = \mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_k]$  el anillo de polinomios en  $k$  variables sobre  $\mathbb{C}$ .

**Definición 2.2.1.** Dado un subconjunto  $E \subseteq \mathbb{C}[\xi]$ , el siguiente conjunto

$$V(E) = \{x \in \mathbb{C}^k : f(x) = 0 \text{ para todo } f \in E\}$$

se llama el *conjunto algebraico afín* definido por  $E$ . Sea  $I$  el ideal generado por  $E$ , entonces  $V(I) = V(E)$ . Un subconjunto  $X$  de  $\mathbb{C}^k$  se dice que es un *conjunto algebraico afín* si existe un subconjunto  $E \subseteq \mathbb{C}[\xi]$  tal que  $X = V(E)$ .

**Definición 2.2.2.** Dado un subconjunto  $X \subset \mathbb{C}^k$ , definimos:

$$I(X) = \{f \in \mathbb{C}[\xi] : f|_X = 0\}$$

llamado el *ideal* de  $X$ .

**Observación 2.2.3.** *Por lo tanto, tenemos que la aplicación  $V$  manda subconjuntos de  $\mathbb{C}[\xi]$  en conjuntos algebraicos afines y la aplicación  $I$  manda subconjuntos de  $\mathbb{C}^k$  en ideales. Estas aplicaciones cumplen las propiedades siguientes cuya demostración se puede encontrar en [Hart, Pag. 3]*

1. Si  $E_1 \subseteq E_2$  son subconjuntos de  $\mathbb{C}[\xi]$ , entonces  $V(E_1) \supseteq V(E_2)$ .
2. Si  $X_1 \subset X_2$  son subconjuntos de  $\mathbb{C}^k$ , entonces  $I(X_1) \supseteq I(X_2)$ .
3. Dados dos subconjuntos  $X_1, X_2$  de  $\mathbb{C}^k$ , tenemos que  $I(X_1 \cup X_2) = I(X_1) \cap I(X_2)$ .

**Observación 2.2.4.** *Se puede demostrar que la unión de dos conjuntos algebraicos, la intersección de cualquier familia de conjuntos algebraicos, el conjunto vacío y el conjunto  $\mathbb{C}^k$  son conjuntos algebraicos (ver Proposición 1.1. [Hart, Pag. 2]).*

**Definición 2.2.5.** En base a la observación anterior, podemos definir la *topología de Zariski* sobre el espacio  $\mathbb{C}^k$  tomando como conjuntos abiertos los complementarios de los conjuntos algebraicos en  $\mathbb{C}^k$ .

**Observación 2.2.6.** *Dado que los cerrados de la topología de Zariski en  $\mathbb{C}^k$  se corresponden con los conjuntos de ceros de polinomios en  $\mathbb{C}[\xi]$ , tenemos que la topología de Zariski en  $\mathbb{C}^k$  es menos fina que la topología usual en  $\mathbb{C}^k$ .*

**Definición 2.2.7.** Un subconjunto no vacío  $Y$  de un espacio topológico  $X$  es *irreducible* si no se puede expresar como la unión de dos subconjuntos propios de  $X$ , cada uno de ellos cerrados en  $Y$ . El conjunto vacío no se considera irreducible.

Vamos a dar unos resultados sobre conjuntos irreducibles que nos serán útiles en capítulos posteriores.

**Definición 2.2.8.** Un ideal  $\mathfrak{p}$  en un anillo conmutativo  $R$  se dice que es *primo* si  $\mathfrak{p} \neq R$  y para todo  $a, b \in R$ , se cumple:

$$ab \in \mathfrak{p} \implies a \in \mathfrak{p} \text{ o } b \in \mathfrak{p}$$

**Proposición 2.2.9.** Dado un anillo conmutativo  $R$ , un ideal  $\mathfrak{p} \subset R$  es primo si, y sólo si, el anillo cociente  $R/\mathfrak{p}$  es dominio de integridad.

*Demostración.* Ver [Hung, Pag. 127]. □

**Proposición 2.2.10.** Un conjunto algebraico es irreducible si, y sólo si, el ideal que lo genera es primo.

*Demostración.* Ver [Hart, Pag. 4]. □

**Proposición 2.2.11.** Sean  $X'$  e  $Y'$  espacios topológicos y  $f : X \rightarrow Y$  un homeomorfismo con  $X \subset X'$  e  $Y \subset Y'$ . Se cumple que si  $X$  es irreducible en  $X'$ , entonces  $Y$  es irreducible en  $Y'$ .

*Demostración.* Supongamos, por reducción al absurdo, que  $Y$  no es irreducible en  $Y'$ . Entonces  $Y = Y_1 \cup Y_2$  con  $Y_1, Y_2$  subconjuntos propios de  $Y$  cerrados en  $Y$ . Dado que  $f$  es homeomorfismo, tenemos que  $f^{-1}$  es continua, luego  $f^{-1}(Y_1)$  y  $f^{-1}(Y_2)$  son cerrados en  $X$  y además, como la aplicación  $f$  es biyectiva, tenemos que  $X = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$ , luego  $X$  no es irreducible en  $X'$ . Esto contradice la hipótesis, así que  $Y$  debe ser irreducible en  $Y'$ . □

**Definición 2.2.12.** Una *variedad algebraica afín* (o simplemente *variedad afín*) es un subconjunto cerrado irreducible de  $\mathbb{C}^n$  respecto de la topología de Zariski. Un subconjunto abierto de una variedad afín es una *variedad cuasi-afín*.

Tenemos el siguiente resultado que relaciona un ideal  $\mathfrak{a}$  de  $\mathbb{C}[\xi]$  con el ideal  $I(V(\mathfrak{a}))$ .

**Teorema 2.2.13** (Teorema de los ceros de Hilbert (Nullstellensatz)). Sea  $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{C}[\xi]$  un ideal, entonces se tiene que

$$I(V(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}$$

donde  $\sqrt{\mathfrak{a}}$  es el radical del ideal  $\mathfrak{a}$ .

## 2.2. ALGUNOS RESULTADOS BÁSICOS DE GEOMETRÍA ALGEBRAICA 25

Dado un punto  $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{C}^k$ , denotaremos  $\mathcal{M}_x = (\xi_1 - x_1, \dots, \xi_k - x_k)$ , que es un ideal maximal (ver Ejemplo 1.4.4. [Hart, Pag. 4]). Como consecuencia del resultado anterior, tenemos

**Teorema 2.2.14** (Versión débil del Nullstellensatz). *Todo ideal maximal en  $\mathbb{C}[\xi]$  se puede escribir como  $\mathcal{M}_x$  para un punto  $x \in \mathbb{C}^k$ .*

**Corolario 2.2.15.** *La correspondencia  $x \mapsto \mathcal{M}_x$  es una biyección entre puntos de  $\mathbb{C}^k$  e ideales maximales de  $\mathcal{M}$  de  $\mathbb{C}[\xi]$ .*

$$\mathbb{C}^k \longleftrightarrow \{\mathcal{M} \subset \mathbb{C}[\xi], \mathcal{M} \text{ ideal maximal}\} = \text{Spec}(\mathbb{C}[\xi])$$

Esto nos permite dar la siguiente descripción del conjunto  $V(I)$  para un ideal  $I$ .

**Lema 2.2.16.** *Sea  $I$  un ideal de  $\mathbb{C}[\xi]$ , entonces  $V(I) = \{x \in \mathbb{C}^k : I \subset \mathcal{M}_x\}$ .*

*Demostración.* Lo probaremos por doble contenido:

- $\supseteq$ ) Sea  $x \in \mathbb{C}^k$  con  $I \subset \mathcal{M}_x$ , entonces, para todo  $f \in I$ , tenemos que  $f(\xi) = f_1(\xi)(\xi_1 - x_1) + \dots + f_k(\xi)(\xi_k - x_k)$ , luego  $x \in V(I)$ .
- $\subseteq$ ) Sea  $x \in V(I)$ , entonces  $\mathcal{M}_x = I(\{x\}) \supseteq I(V(I)) = \sqrt{I} \supseteq I$ , como queríamos probar.

□

**Definición 2.2.17.** Denotaremos el ideal de  $V = V(I)$  por  $I_V = I(V(I))$ . Diremos que  $R_V = \mathbb{C}[\xi]/I_V$  es el *anillo coordenado* del conjunto algebraico afín  $V(I)$ . Está generado como  $\mathbb{C}$ -álgebra por las clases  $\bar{\xi}_j$  de las funciones coordenadas  $\xi_j$ .

Teniendo en cuenta la relación entre los ideales maximales de  $\mathbb{C}[\xi]$  y  $\mathbb{C}[\xi]/I_V$  (ver Lema 1.20 [Ewa, Pag. 206]) obtenemos que los puntos de un conjunto algebraico afín  $V = V(I)$  corresponden a los ideales maximales del anillo coordenado como muestra el siguiente resultado.

**Corolario 2.2.18.** *Existe una biyección:*

$$V \longleftrightarrow \{\mathcal{M} \subset R_V : \mathcal{M} \text{ ideal maximal}\} = \text{Spec}(R_V)$$

**Observación 2.2.19.** *Dado un anillo  $R$ , para todo ideal  $\mathfrak{a}$  de  $R$ , denotamos  $V(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{m} \in \text{Spec}(R) : \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}\}$ . Tenemos que se cumplen las siguientes propiedades (ver Lema 2.1. [Hart, Pag. 70])*

1. Si  $\mathfrak{a}$  y  $\mathfrak{b}$  son ideales de  $R$ , entonces  $V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$ .
2. Si  $\{\mathfrak{a}_i\}$  es una familia de ideales de  $R$ , entonces  $V(\sum_i \mathfrak{a}_i) = \bigcap_i V(\mathfrak{a}_i)$ .

**Definición 2.2.20.** En base a la observación anterior y el Lema 2.2.16, podemos definir la *topología de Zariski* sobre el conjunto de ideales maximales de  $R$ ,  $\text{Spec}(R)$ , tomando como conjuntos abiertos los complementarios de los conjuntos  $V(\mathfrak{a})$  donde  $\mathfrak{a}$  es un ideal de  $R$ .

Como consecuencia del Corolario 2.2.18, dada la topología de Zariski en ambos lados de la biyección, tenemos el homeomorfismo:

$$V \cong \text{Spec}(R_V)$$

Cada  $\mathbb{C}$ -álgebra  $R$  determina una variedad compleja afín  $\text{Spec}(R)$ . Si elegimos generadores de  $R$ , la  $\mathbb{C}$ -álgebra  $R$  se puede escribir como  $\mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_k]/I$  donde  $I$  es un ideal. Entonces  $\text{Spec}(R)$  se puede identificar con la subvariedad  $V(I)$  de  $\mathbb{C}^k$ .

## 2.3. Variedades afines tóricas

En esta sección describimos cómo se construye la variedad tórica afín asociada a un cono racional.

**Definición 2.3.1.** La *variedad afín tórica* correspondiente al cono racional  $\sigma$  es  $X_\sigma := \text{Spec}(R_\sigma)$ .

Dado que la definición de variedad tórica es demasiado abstracta para poder manejarla, nos interesa buscar una representación de la misma en un adecuado espacio afín  $\mathbb{C}^k$ . Estas representaciones geométricas se obtienen introduciendo coordenadas, que se corresponden con una elección de generadores de  $S_\sigma$ .

El homeomorfismo  $V \cong \text{Spec}(R_V)$  muestra cómo podemos representar  $R_\sigma$  como un anillo coordinado de varias maneras, según cómo elijamos los generadores de  $S_\sigma$ . Diferentes elecciones dan diferentes representaciones de la variedad afín tórica  $\text{Spec}(R_\sigma)$  en distintos espacios complejos  $\mathbb{C}^k$ . En adelante, denotaremos  $X_\sigma$  a alguna de esas representaciones, ya que todas son homeomorfas. Vamos a ver como se construyen dichas variedades a través de un ejemplo, para luego dar el caso general. Por último, veremos cómo dar la representación que hemos esbozado.

**Ejemplo 2.3.2.** Tomamos el cono  $\sigma = \langle e_2, 2e_1 - e_2 \rangle$ . Sea  $a_1 = e_1^*$ ,  $a_2 = e_1^* + e_2^*$  y  $a_3 = e_1^* + 2e_2^*$  el sistema de generadores de  $S_\sigma$ . Por el isomorfismo  $\theta$ , tienen una correspondencia con los monomios de Laurent  $u_1 = z_1$ ,  $u_2 = z_1 z_2$  y  $u_3 = z_1 z_2^2$ . La  $\mathbb{C}$ -álgebra  $R_\sigma$  se puede representar por:

$$R_\sigma = \mathbb{C}[u_1, u_2, u_3] = \mathbb{C}[\xi_1, \xi_2, \xi_3]/I_\sigma$$

donde la relación  $a_1 + a_3 = 2a_2$  nos proporciona la relación entre coordenadas  $u_1 u_3 = u_2^2$ . El ideal  $I_\sigma$  estará generado por la relación  $\xi_1 \xi_3 = \xi_2^2$  y la variedad tórica correspondiente al cono  $\sigma$  está representada en  $\mathbb{C}^3$  por el cono cuadrático:

$$X_\sigma = V(I_\sigma) = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 : x_1 x_3 = x_2^2\}.$$

**Observación 2.3.3.** En el caso general, el procedimiento es similar. Sean  $\{a_1, \dots, a_k\}$  un sistema de generadores de  $S_\sigma$  cada uno de ellos escritos de la forma  $a_i = (a_i^1, \dots, a_i^n) \in S_\sigma$ . Por el isomorfismo  $\theta$ , obtenemos los monomios de Laurent  $u_i = z^{a_i} = z_1^{a_i^1} \dots z_n^{a_i^n} \in \mathbb{C}[z, z^{-1}]$ . La  $\mathbb{C}$ -álgebra  $R_\sigma = \mathbb{C}[u_1, \dots, u_k]$  se puede representar por:

$$R_\sigma = \mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_k]/I_\sigma$$

para un ideal  $I_\sigma$  que determinamos de la siguiente forma. Expresamos las relaciones entre los generadores de  $S_\sigma$  de la forma:

$$\sum_{j=1}^k \nu_j a_j = \sum_{j=1}^k \mu_j a_j, \text{ con } \mu_j, \nu_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

de donde obtenemos, gracias al isomorfismo  $\theta$ , las relaciones monomiales:

$$(z^{a_1})^{\nu_1} \dots (z^{a_k})^{\nu_k} = (z^{a_1})^{\mu_1} \dots (z^{a_k})^{\mu_k}$$

con  $z^{a_i} = z_1^{a_i^1} \dots z_n^{a_i^n}$ , es decir, las relaciones:

$$u_1^{\nu_1} \dots u_k^{\nu_k} = u_1^{\mu_1} \dots u_k^{\mu_k}$$

entre las coordenadas y finalmente las relaciones binomiales:

$$\xi_1^{\nu_1} \dots \xi_k^{\nu_k} = \xi_1^{\mu_1} \dots \xi_k^{\mu_k} \tag{2.1}$$

que generan  $I_\sigma$ .

Ahora podemos construir representaciones de variedades tóricas como sigue:

**Teorema 2.3.4.** *Sea  $\sigma$  un cono racional en  $\mathbb{R}^n$  y  $A = (a_1, \dots, a_k)$  un sistema de generadores de  $S_\sigma$ , la correspondiente variedad tórica  $X_\sigma$  está representada por la variedad afín  $V(I_\sigma) \subset \mathbb{C}^k$  donde  $I_\sigma$  es un ideal de  $\mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_k]$  generado por un número finito de relaciones binomiales de la forma (2.1) correspondientes a las relaciones entre los generadores de  $S_\sigma$ .*

*Demostración.* Primero demostraremos que el conjunto

$$\text{poslin}(A) = \{(\nu, \mu) \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^k \times (\mathbb{R}_{\geq 0})^k : \sum_{j=1}^k \nu_j a_j = \sum_{j=1}^k \mu_j a_j\}$$

de relaciones lineales positivas entre los generadores de  $S_\sigma$  es un cono racional en  $\mathbb{R}^{2k}$  y, por lo tanto, el conjunto de relaciones lineales enteras y positivas

$$\{(\nu, \mu) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^k \times (\mathbb{Z}_{\geq 0})^k : \sum_{j=1}^k \nu_j a_j = \sum_{j=1}^k \mu_j a_j\}$$

es un monoide finitamente generado por el lema de Gordan. Luego basta probar que todo elemento de  $I_\sigma$  está generado por una colección de relaciones binomiales como describimos en (2.1).

- Dados  $\alpha, \beta \in \text{poslin}(A)$ , tenemos que  $\alpha + \beta \in \text{poslin}(A)$  y  $t\alpha \in \text{poslin}(A)$  para todo  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ , luego  $\text{poslin}(A)$  es un cono en  $\mathbb{R}^{2n}$ .

- Ahora bien, para un polinomio  $f(\xi) = \sum_{\nu \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^k} \lambda_\nu \xi^\nu$ , tenemos que  $f(u) =$

$$\sum_{\nu \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^k} \lambda_\nu u^\nu = \sum_{\nu \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^k} \lambda_\nu z^{\nu \cdot A}, \text{ donde } z^{\nu \cdot A} = (z^{a_1})^{\nu_1} \dots (z^{a_k})^{\nu_k}. \text{ Luego para todo}$$

$a \in S_\sigma$ , el coeficiente  $c_a$  de  $z^a$  es  $\sum_{\{\nu: \nu \cdot A = a\}} \lambda_\nu$ . Tenemos que  $f \in I_\sigma$  si, y sólo

si, todos los  $c_a$  se anulan. Luego, en ese caso, si existe  $\lambda_\nu \neq 0$  para algún  $\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , entonces por ser  $S_\sigma$  un monoide, existe  $\mu \neq \nu$  que cumple que  $\nu \cdot A = \mu \cdot A$  y  $\lambda_\mu \neq 0$ . El correspondiente binomio  $\lambda_\nu(\xi^\nu - \xi^\mu)$  está en  $I_\sigma$  (porque  $u^\nu - u^\mu = z^{\nu \cdot A} - z^{\mu \cdot A} = 0$ ). Restándolo de  $f$ , llegamos a un polinomio en  $I_\sigma$  con estrictamente menos términos que  $f$  ( $f(\xi) = h(\xi) + \lambda_\nu \xi^\nu$ , luego  $f(\xi) - \lambda_\nu \xi^\nu = h(\xi)$  que tiene estrictamente menos términos que  $f$ ). Dado que el número de términos de  $f$  es finito, llegaremos a un punto en que todos los  $c_a = 0$ , luego  $f \in I_\sigma$  y además, está generado por relaciones binomiales de la forma  $(\xi^\nu - \xi^\mu)$  como hemos construido arriba.  $\square$

Veamos ahora que dadas dos representaciones de una variedad tórica, existe un cambio de coordenadas entre ellas que nos permite manejar cualquiera de ellas sin que por ello cambien las propiedades de la variedad.

**Lema 2.3.5.** *Si  $R_\sigma = \mathbb{C}[u_1, \dots, u_k]$  y  $R_\sigma = \mathbb{C}[v_1, \dots, v_l]$  son dos representaciones de  $R_\sigma$ , entonces existe un cambio de coordenadas entre  $(u_1, \dots, u_k)$  y  $(v_1, \dots, v_l)$ .*

*Demostración.* Consideramos los sistemas de generadores  $\{a_1, \dots, a_k\}$  y  $\{b_1, \dots, b_l\}$  del monoide  $S_\sigma$  tales que  $u_i = z^{a_i}$  y  $v_j = z^{b_j}$ . Dado que ambos son sistemas generadores, se puede expresar los elementos de un sistema generador como combinaciones lineales de los elementos del otro. De esta manera,  $b_j = \sum_{i=1}^k \lambda_i^j a_i$  con  $\lambda_i^j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ . Esto conduce, mediante el isomorfismo  $\theta$  a que  $v_j = z^{b_j} = z^{\lambda_1^j a_1} \dots z^{\lambda_k^j a_k} = u_1^{\lambda_1^j} \dots u_k^{\lambda_k^j}$ , es decir, el cambio de coordenadas que buscábamos.  $\square$

**Ejemplo 2.3.6.** *Consideremos el cono  $\sigma = \{0\}$ , el cono dual será  $\check{\sigma} = (\mathbb{R}^n)^*$ . Podemos elegir diferentes sistemas de generadores de  $S_\sigma$ , por ejemplo:*

$$\{e_1^*, \dots, e_n^*, -e_1^*, \dots, -e_n^*\}$$

Tendremos que  $R_\sigma$  será la  $\mathbb{C}$ -álgebra:

$$R_\sigma = \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n, z_1^{-1}, \dots, z_n^{-1}] = \mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_{2n}] / I_\sigma$$

donde

$$I_\sigma = \mathbb{C}[\xi](\xi_1 \xi_{n+1} - 1) + \dots + \mathbb{C}[\xi](\xi_n \xi_{2n} - 1)$$

luego,  $X_\sigma = V(\xi_1 \xi_{n+1} - 1, \dots, \xi_n \xi_{2n} - 1)$ . Para  $n=1$ , la variedad obtenida es una hipérbola compleja con asíntotas en los ejes  $\xi_1 = 0$  y  $\xi_2 = 0$ . Se puede proyectar de forma biyectiva sobre el eje  $\xi_2 = 0$  obteniendo  $\mathbb{C}^*$ . Del mismo modo, para el caso general, tenemos que  $X_\sigma$  es homeomorfa a

$$\mathbb{T} = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : z_i \neq 0, i = 1, \dots, n\} = (\mathbb{C}^*)^n$$

usando la proyección  $\mathbb{C}^{2n} \mapsto \mathbb{C}^n$  en las primeras  $n$  coordenadas.

**Definición 2.3.7.** El conjunto  $\mathbb{T} = (\mathbb{C}^*)^n$  se llama *n-toro algebraico complejo*.

**Observación 2.3.8.** *Tenemos que el n-toro algebraico complejo cumple las siguientes propiedades:*

1.  $\mathbb{T}$  incluye al toro real ya que  $\mathbb{T} \cong (\mathbb{S}^1)^n \times (\mathbb{R}_{>0})^n$ .
2.  $\mathbb{T}$  es cerrado como subconjunto de  $\mathbb{C}^{2n}$ , pero no lo es como subconjunto de  $\mathbb{C}^n$ .

*Demostración.* 1. Basta considerar los puntos  $z \in \mathbb{C}^*$  en sus coordenadas polares  $(\rho, \theta)$ , es decir,  $z = \rho e^{i\theta}$ . Dado que cada elemento en  $\mathbb{C}^*$  está unívocamente determinado por su módulo y argumento, tenemos que la aplicación

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{C}^*)^n &\longrightarrow (\mathbb{R}_{>0})^n \times (\mathbb{S}^1)^n \\ (z_1, \dots, z_n) &\longmapsto (|z_1|, \dots, |z_n|, z_1/|z_1|, \dots, z_n/|z_n|) \end{aligned}$$

es una biyección. Por otro lado, las condiciones de continuidad necesarias para que  $f$  sea un homeomorfismo son fáciles de comprobar respecto de las topologías usuales en cada uno de los conjuntos mencionados. Para ver una prueba más detallada, consultar [Ewa, Pag. 229-230].

2. Dado que la topología usual es más fina que la topología de Zariski, podemos ver que en la topología usual  $\overline{(\mathbb{C}^*)^n} = \mathbb{C}^n$ , luego  $\mathbb{T}$  no es cerrado en  $\mathbb{C}^n$ . Sin embargo,  $\mathbb{T}$  es cerrado en  $\mathbb{C}^{2n}$  porque se define como la subvariedad  $\mathbb{T} = V(\xi_1 \xi_{n+1} - 1, \dots, \xi_n \xi_{2n} - 1) \subset \mathbb{C}^{2n}$ .

□

Vamos a enunciar el siguiente resultado auxiliar sobre topología general para poder probar a continuación un resultado muy importante sobre variedades tóricas, pues es la principal propiedad de las variedades tóricas que las distingue de otras variedades algebraicas.

**Observación 2.3.9.** Sean  $\tau_1$  y  $\tau_2$  dos topologías definidas sobre  $X$  tales que  $\tau_1 \subseteq \tau_2$ , entonces para cualquier  $A \subset X$  se cumple que  $\overline{A}^{\tau_2} \subseteq \overline{A}^{\tau_1}$ .

*Demostración.* Sea  $x \in \overline{A}^{\tau_2}$ , entonces  $x \in U$  para todo  $U \in \tau_2$  tal que  $U \cap A \neq \emptyset$ , pero como  $U \in \tau_2 \subseteq \tau_1$ , tenemos que  $x \in U$  para todo  $U \in \tau_1$  con  $U \cap A \neq \emptyset$ , luego  $x \in \overline{A}^{\tau_1}$ . □

**Proposición 2.3.10.** Sea  $\sigma$  un cono racional en  $\mathbb{R}^n$ , la variedad tórica afín  $X_\sigma$  contiene al toro  $\mathbb{T} = (\mathbb{C}^*)^n$  como un subconjunto abierto de Zariski denso.

*Demostración.* Sea  $\{a_1, \dots, a_k\}$  el conjunto de generadores del monoide  $S_\sigma$  y sea  $V(I_\sigma) \subset \mathbb{C}^k$  una representación de  $X_\sigma$ . Sean  $a_i = (a_i^1, \dots, a_i^n) \in \mathbb{Z}^n$  y  $t \in \mathbb{T}$  con

$t = (t_1, \dots, t_n) \in (\mathbb{C}^*)^n$ . El embebimiento  $h : \mathbb{T} \hookrightarrow X_\sigma$  está dado por:

$$h : \mathbb{T} \hookrightarrow X_\sigma$$

$$t = (t_1, \dots, t_n) \longmapsto (t^{a_1}, \dots, t^{a_k})$$

donde  $t^{a_i} = t_1^{a_i^1} \cdots t_n^{a_i^n} \in \mathbb{C}^*$ . Probemos que  $h$  es una biyección de  $(\mathbb{C}^*)^n$  en  $X_\sigma \cap (\mathbb{C}^*)^k$ .

- Está bien definida. Sea  $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{T}$ , tenemos que  $t_i \neq 0$  para todo  $i$ , luego  $t_i^{a_i^j} \neq 0$  para todo  $i, j$ . De aquí,  $t_1^{a_1^1} \cdots t_n^{a_1^n} \neq 0$ , luego  $t_1^{a_1^1} \cdots t_n^{a_1^n} \in \mathbb{C}^*$ , así que  $(t^{a_1}, \dots, t^{a_k}) \in (\mathbb{C}^*)^k$  y, dado que  $\{a_1, \dots, a_k\}$  generan  $S_\sigma$ , finalmente obtenemos que  $R_\sigma = \mathbb{C}[z^{a_1}, \dots, z^{a_k}] = \mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_k]/I_\sigma$ , por consiguiente,  $(t^{a_1}, \dots, t^{a_k}) \in V(I_\sigma)$ .
- Es inyectiva. Bastará comprobar que podemos construir la aplicación inversa. Sea  $a \in S_\sigma$  tal que  $a + e_i^* \in S_\sigma$ , con  $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$  base de  $(\mathbb{R}^n)^*$ . Los monomios de Laurent  $z^a = f_0(u)$ ,  $z^{a+e_i^*} = f_i(u)$  están en  $R_\sigma = \mathbb{C}[u] \subset \mathbb{C}[z, z^{-1}]$ . Sea  $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{T}$  con  $h(t) = x \in X_\sigma \cap (\mathbb{C}^*)^k$ , entonces  $f_i(h(t)) = t_i t^a = t_i f_0(h(t))$  luego  $t_i = f_i(h(t))/f_0(h(t)) = f_i(x)/f_0(x)$  (observemos que  $f_0(h(t)) \neq 0$  porque  $t \in \mathbb{T}$ ).
- Es suprayectiva. Sea  $x \in X_\sigma \cap (\mathbb{C}^*)^k$ , existe  $(f_1(x)/f_0(x), \dots, f_n(x)/f_0(x)) : h(f_1(x)/f_0(x), \dots, f_n(x)/f_0(x)) = x$  (tenemos que  $f_0(x) \neq 0$ ,  $f_i(x) \neq 0$  para  $i = 1, \dots, n$ , porque  $x \in (\mathbb{C}^*)^k$ ).

Las condiciones de continuidad para que  $h$  sea un homeomorfismo se cumplen porque la aplicación  $h$  está definida por monomios, así que para probar que  $X_\sigma \cap (\mathbb{C}^*)^k$  es abierto, basta ver que  $(\mathbb{C}^*)^n$  es abierto en  $\mathbb{C}^n$ , lo cual es cierto porque  $(\mathbb{C}^*)^n = \mathbb{C}^n \setminus \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n : x_1 \cdots x_n = 0\} = \mathbb{C}^n \setminus V(x_1 \cdots x_n)$ .

Por otro lado, tenemos que en la topología usual en  $\mathbb{C}^k$ , la adherencia  $\overline{X_\sigma \cap (\mathbb{C}^*)^k}^{\text{usual}} = X_\sigma$  y, dado que la topología usual en  $\mathbb{C}^k$  es más fina que la topología de Zariski en  $\mathbb{C}^k$ , por la Observación 2.3.9 tendremos que  $\overline{X_\sigma \cap (\mathbb{C}^*)^k}^{\text{usual}} \subseteq \overline{X_\sigma \cap (\mathbb{C}^*)^k}^{\text{Zariski}}$ , luego  $\overline{X_\sigma \cap (\mathbb{C}^*)^k}^{\text{Zariski}} = X_\sigma$ , así que  $X_\sigma \cap (\mathbb{C}^*)^k$  es denso en  $X_\sigma$ .  $\square$

**Observación 2.3.11.** *Esta última proposición explica por qué damos el nombre “tórica” a las variedades tóricas.*

Gracias a este último resultado, podemos demostrar que las variedades tóricas son irreducibles, lo que nos permitirá afirmar que las variedades tóricas son variedades afines en  $\mathbb{C}^n$ .

**Proposición 2.3.12.** *Las variedades tóricas son irreducibles.*

*Demostración.* Primero demostraremos que dada una variedad tórica  $X_\sigma$ , entonces  $(\mathbb{C}^*)^n \cap X_\sigma$  es irreducible en  $X_\sigma$ . Por la Proposición 2.2.11, probar que  $(\mathbb{C}^*)^n \cap X_\sigma$  es irreducible en  $X_\sigma$  equivale a probar que  $(\mathbb{C}^*)^n$  es irreducible en  $\mathbb{C}^n$ . Nuevamente, debido a la Proposición 2.2.11 y en base al Ejemplo 2.3.6, probar que  $(\mathbb{C}^*)^n$  es irreducible en  $\mathbb{C}^n$  es lo mismo que probar que  $V(\xi_1\xi_{n+1}-1, \dots, \xi_n\xi_{2n}-1)$  es irreducible en  $\mathbb{C}^{2n}$ . Como ya vimos en el Ejemplo 2.3.6, para el ideal  $I_\sigma = (\xi_1\xi_{n+1}-1, \dots, \xi_n\xi_{2n}-1) \subset \mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_{2n}]$  tenemos que el anillo coordenado  $R_\sigma = \mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_{2n}/I_\sigma$  es de la forma  $R_\sigma = \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n, z_1^{-1}, \dots, z_n^{-1}]$  que es anillo conmutativo y dominio de integridad, luego por la Proposición 2.2.9, tenemos que  $I_\sigma$  es ideal primo y, por la Proposición 2.2.10, tenemos que  $V(\xi_1\xi_{n+1}-1, \dots, \xi_n\xi_{2n}-1)$  es irreducible en  $\mathbb{C}^{2n}$  como queríamos ver.

Ahora vamos a probar que dado cualquier conjunto  $Y$  irreducible, entonces su adherencia  $\bar{Y}$  también es irreducible. Podemos suponer por reducción al absurdo que  $\bar{Y}$ . Entonces  $\bar{Y} = Y_1 \cup Y_2$  con  $Y_1, Y_2$  subconjuntos propios de  $Y$  cerrados en  $Y$ . Tenemos que  $Y \subseteq \bar{Y} = Y_1 \cup Y_2$ , luego  $Y \subseteq Y_1$  o  $Y \subseteq Y_2$ . Sin pérdida de generalidad, suponer que  $Y \subseteq Y_1$ . Tendremos que  $Y \subseteq Y_1 \subseteq \bar{Y}$ , pero aplicando adherencias, tenemos que  $\bar{Y} \subseteq \bar{Y}_1 \subseteq \bar{Y}$ , es decir, que  $Y_1 = \bar{Y}_1 = \bar{Y}$ , lo que contradice que  $Y_1$  sea subconjunto propio, así que  $\bar{Y}$  debe ser irreducible.

Finalmente, dado que  $(\mathbb{C}^*)^n \cap X_\sigma$  es irreducible y su adherencia es  $X_\sigma$ , tenemos que  $X_\sigma$  es irreducible.  $\square$

**Ejemplo 2.3.13.** *Para los conos del Ejemplo 1.1.6, veamos cuales son los embebimientos correspondientes según el Teorema 2.3.10.*

- Para el cono  $\tau$  tenemos que  $S_\tau$  está generado por los vectores  $\{e_1^*, e_2^*, -e_2^*\}$ , luego el embebimiento del toro en  $X_\tau$  está dado por  $(t_1, t_2) \mapsto (t_1, t_2, t_2^{-1})$ .
- Para el cono  $\sigma$  tenemos que  $S_\sigma$  está generado por los vectores  $\{e_1^*, e_2^*\}$ , luego el embebimiento del toro en  $X_\sigma$  está dado por  $(t_1, t_2) \mapsto (t_1, t_2)$ .
- Para el cono  $\gamma$  tenemos que  $S_\gamma$  está generado por los vectores  $\{e_1^*, e_1^* + e_2^*, e_1^* + 2e_2^*\}$ , luego el embebimiento del toro en  $X_\gamma$  está dado por  $(t_1, t_2) \mapsto (t_1, t_1t_2, t_1t_2^2)$ .

Dada la estructura de espacio topológico de una variedad tórica, podemos dar su dimensión. Vamos a recordar primero la definición de dimensión de un espacio topológico:

**Definición 2.3.14.** Sea  $X$  un espacio topológico, definimos la *dimensión* de  $X$  (denotada por  $\dim X$ ) como el supremo de todos los enteros  $n$  tal que existe una cadena  $Z_0 \subset Z_1 \subset \dots \subset Z_n$  de subconjuntos irreducibles cerrados distintos de  $X$ . La *dimensión* de una variedad afín o cuasi-afín es su dimensión como espacio topológico.

Vamos a dar una caracterización de la dimensión de una variedad afín a partir de su anillo coordenado.

**Definición 2.3.15.** Dado un anillo  $R$ , definimos la *dimensión (de Krull)* de  $R$  (denotada por  $\dim R$ ) como el supremo de todos los enteros  $n$  tal que existe una cadena  $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{p}_n$  de ideales primos distintos de  $R$ .

**Lema 2.3.16.** Si  $Y$  es una variedad algebraica afín, entonces la dimensión de  $Y$  es igual a la dimensión de su anillo coordenado  $R_Y$ .

*Demostración.* Ver [Hart, Pag. 6]. □

**Corolario 2.3.17.** La dimensión de  $\mathbb{C}^n$  es  $n$ .

*Demostración.* Dentro del anillo de polinomios  $\mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_n]$  tenemos la siguiente cadena de ideales primos  $(\xi_1) \subset (\xi_1, \xi_2) \subset \dots \subset (\xi_1, \dots, \xi_n) = \mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_n]$ . Luego la dimensión del anillo  $\mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_n]$  es  $n$  y dado que es el anillo coordenado de  $\mathbb{C}^n$ , por el Lema 2.3.16, tenemos que la dimensión de  $\mathbb{C}^n$  es  $n$ . □

Una vez definido el concepto de dimensión de una variedad afín, veamos una serie de resultados sobre dimensión de variedades.

**Proposición 2.3.18.** Si  $Y$  es una variedad cuasi-afín, entonces  $\dim Y = \dim \bar{Y}$ .

*Demostración.* Ver [Hart, Pag. 6]. □

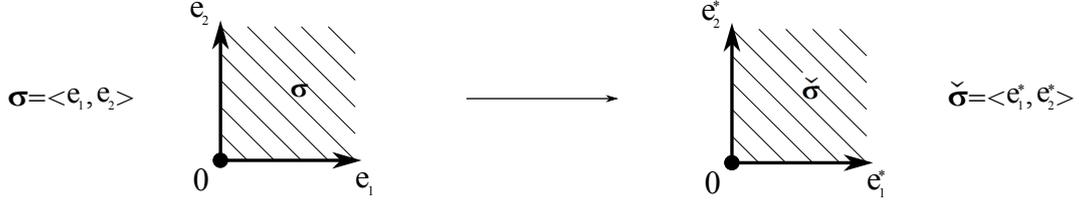
Con estos resultados, finalmente podemos afirmar lo siguiente:

**Corolario 2.3.19.** Si  $\sigma$  es un cono racional en  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $\dim X_\sigma = n$ .

*Demostración.* Para empezar, tenemos que  $(\mathbb{C}^*)^n$  es abierto denso en  $\mathbb{C}^n$  como consecuencia de la Proposición 2.3.10, luego la dimensión de  $(\mathbb{C}^*)^n$  es  $n$  debido a la Proposición 2.3.18. Del mismo modo, dado un cono  $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ , tenemos que  $(\mathbb{C}^*)^n \cap X_\sigma$  es abierto denso en  $X_\sigma$ , luego la dimensión de  $X_\sigma$  es  $n$ . □

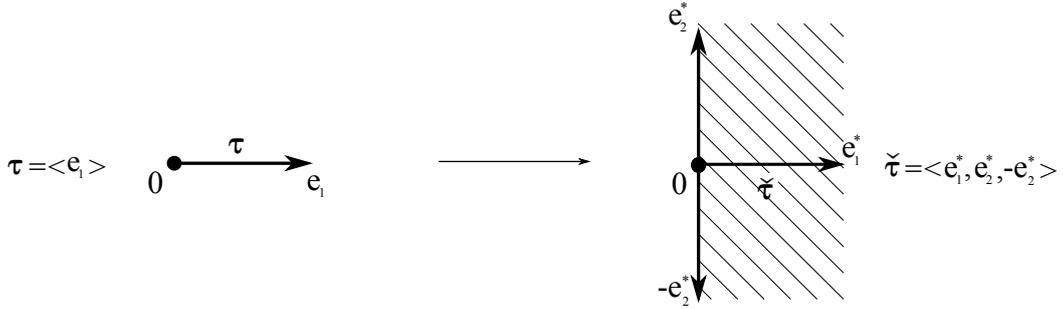
Vamos a ver una serie de ejemplos de construcción de variedades tóricas afines a partir de conos.

**Ejemplo 2.3.20.** Sea  $\sigma \subset \mathbb{R}^2$  el cono siguiente:



Entonces  $S_\sigma$  está generado por  $\{e_1^*, e_2^*\}$ , luego  $R_\sigma = \mathbb{C}[\xi_1, \xi_2]$ . Por lo tanto,  $I_\sigma = \{0\}$  y  $X_\sigma = \mathbb{C}^2$ .

**Ejemplo 2.3.21.** Sea  $\tau \subset \mathbb{R}^2$  el cono siguiente:



Entonces  $S_\tau$  está generado por  $\{e_1^*, e_2^*, -e_2^*\}$ , luego  $R_\tau = \mathbb{C}[u_1, u_2, u_3]$  con  $u_2 = u_3^{-1}$ , es decir,  $R_\tau = \mathbb{C}[\xi_1, \xi_2, \xi_3]/(\xi_2\xi_3 - 1)$ . Por lo tanto,  $I_\tau = (\xi_2\xi_3 - 1)$  y  $X_\tau = \mathbb{C}_{\xi_1} \times \mathbb{C}_{\xi_2}^*$ .

**Ejemplo 2.3.22.** Podemos generalizar los Ejemplos 2.3.20 y 2.3.21 de la siguiente manera. Sea  $\sigma \subset \mathbb{R}^n$  el cono generado por los vectores  $e_1, \dots, e_p$  con  $p \leq n$ . Entonces  $S_\sigma$  está generado por  $\{e_1^*, \dots, e_p^*, e_{p+1}^*, -e_{p+1}^*, \dots, e_n^*, -e_n^*\}$ , luego  $R_\sigma = \mathbb{C}[z_1, \dots, z_p, z_{p+1}, z_{p+1}^{-1}, \dots, z_n, z_n^{-1}]$  y  $X_\sigma = \mathbb{C}^p \times (\mathbb{C}^*)^{n-p}$ .

**Ejemplo 2.3.23.** Consideramos en  $\mathbb{R}^3$  el cono  $\langle e_1, e_2, e_3, e_1 + e_3 - e_2 \rangle$  y tenemos que  $S_\sigma = \langle e_1^*, e_3^*, e_1^* + e_2^*, e_3^* + e_2^* \rangle$ , luego  $R_\sigma = \mathbb{C}[u_1, u_2, u_3, u_4]$  con  $u_1u_4 = u_2u_3$ , es decir,  $R_\sigma = \mathbb{C}[\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4]/(\xi_1\xi_4 - \xi_2\xi_3)$ . De aquí, obtenemos la variedad tórica afín  $X_\sigma = V(\xi_1\xi_4 - \xi_2\xi_3)$ , que por la Proposición 2.3.10, contiene al toro  $(\mathbb{C}^*)^3$  como abierto Zariski denso.

**Ejemplo 2.3.24.** No siempre es necesario partir de un cono  $\sigma$  para construir una variedad tórica. Por ejemplo, sea  $S = \langle 2, 3 \rangle \subset \mathbb{Z}$  el monoide generado por los

elementos 2 y 3, tenemos que la  $\mathbb{C}$ -álgebra que obtenemos a partir de dicho monoide es  $R = \mathbb{C}[u_1, u_2]$  con  $u_1^3 = u_2^2$ , es decir,  $R = \mathbb{C}[\xi_1, \xi_2]/(\xi_1^3 - \xi_2^2)$ . De aquí, obtenemos la variedad tórica afín  $X = V(\xi_1^3 - \xi_2^2)$ , que por la Proposición 2.3.10, contiene al toro  $\mathbb{C}^*$  como abierto Zariski denso.

Antes de acabar esta sección, vamos a definir el concepto de morfismo entre variedades tóricas que usaremos más adelante.

**Definición 2.3.25.** Sea  $\Phi : \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^m$  una aplicación monomial (es decir, toda componente no nula de  $\Phi$  es un monomio con coordenadas en  $\mathbb{C}^k$ ), y sean  $X_\sigma \hookrightarrow \mathbb{C}^k$  y  $X_{\sigma'} \hookrightarrow \mathbb{C}^m$  variedades afines tóricas. Si  $\Phi(X_\sigma) \subset X_{\sigma'}$ , entonces la aplicación  $\phi := \Phi|_{X_\sigma}$  es un morfismo llamado *morfismo tórico (afín)* de  $X_\sigma$  en  $X_{\sigma'}$ . Si  $\phi$  es biyectivo y su aplicación inversa  $\phi^{-1} : X_{\sigma'} \rightarrow X_\sigma$  es también un morfismo tórico, entonces llamamos a  $\phi$  un *isomorfismo (tórico)* y decimos que  $X_\sigma$  y  $X_{\sigma'}$  son isomorfos, escrito  $X_\sigma \cong X_{\sigma'}$ . Si  $\sigma = \sigma'$ , llamaremos a  $\phi$  un *cambio de coordenadas*.



# Capítulo 3

## Variedades Tóricas

Del mismo modo que las variedades algebraicas proyectivas poseen un recubrimiento abierto dado por variedades algebraicas afines, podemos construir variedades tóricas proyectivas que tendrán un recubrimiento abierto dado por variedades tóricas afines.

### 3.1. Variedades algebraicas proyectivas

Antes de dar el proceso de construcción de variedades tóricas proyectivas, vamos a recordar algunos resultados sobre variedades algebraicas proyectivas. Al igual que en la Sección 2.2, todos los resultados los daremos sobre el cuerpo  $\mathbb{C}$  de los números complejos.

Recordemos que el *n-espacio proyectivo sobre  $\mathbb{C}$*  es el conjunto de clases de equivalencia de elementos  $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$  bajo la relación de equivalencia  $(a_0, \dots, a_n) \sim (\lambda a_0, \dots, \lambda a_n)$  con  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ . Lo denotaremos  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ , o simplemente  $\mathbb{P}^n$ .

Los elementos de  $\mathbb{P}^n$  se llaman puntos. Dado un punto  $P \in \mathbb{P}^n$ , llamaremos a cualquier  $(n + 1)$ -tupla  $(a_0, \dots, a_n)$  dentro de la clase de equivalencia  $P$  conjunto de coordenadas homogéneas de  $P$  y denotaremos  $P = [a_0 : \dots : a_n]$ .

Ahora nos gustaría dar una definición similar de conjunto algebraico afín, pero para el caso proyectivo. Dado un polinomio  $f \in \mathbb{C}[\xi_0, \dots, \xi_n] = \mathbb{C}[\xi]$ , para que defina una función sobre  $\mathbb{P}$ , necesitamos que  $f(a_0, \dots, a_n) = f(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n)$  para todo  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ . Es por ello que vamos a dar la siguiente definición:

**Definición 3.1.1.** Sea  $f \in \mathbb{C}[\xi]$ , decimos que  $f = \sum_{finito} a \xi_0^{d_0} + \dots + \xi_n^{d_n}$  es un *polinomio*

homogéneo de grado  $d$  si para cada monomio  $a\xi_0^{d_0} + \dots + \xi_n^{d_n}$  se cumple que  $d_0 + \dots + d_n = d$ .

De esta forma, dado un polinomio homogéneo  $f \in \mathbb{C}[\xi]$ , tenemos que  $f(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) = \lambda^d f(a_0, \dots, a_n)$  y así, la propiedad de que  $f$  se anule depende sólo de la clase de equivalencia de  $(a_0, \dots, a_n)$ . Así,  $f$  puede definir una función de  $\mathbb{P}^n$  en  $\{0, 1\}$  de forma que para cada punto  $P \in \mathbb{P}^n$  con coordenadas homogéneas  $(a_0, \dots, a_n)$ ,  $f(P) = 0$  si  $f(a_0, \dots, a_n) = 0$  y  $f(P) = 1$  si  $f(a_0, \dots, a_n) \neq 0$ . Esto ya nos permite definir el concepto de conjunto algebraico proyectivo:

**Definición 3.1.2.** Sea  $T$  un subconjunto de polinomios homogéneos de  $\mathbb{C}[\xi]$ , el conjunto

$$V(T) = \{P \in \mathbb{P}^n : f(P) = 0 \text{ para todo } f \in T\}$$

se llama el *conjunto algebraico proyectivo* definido por  $T$ . Un subconjunto  $X$  de  $\mathbb{P}^n$  se dice que es un *conjunto algebraico proyectivo* (o simplemente *conjunto algebraico* si se entiende por el contexto) si existe un subconjunto  $T$  de polinomios homogéneos de  $\mathbb{C}[\xi]$  tal que  $X = V(T)$ .

Podemos definir una topología similar a la que dábamos en el caso afín, ya que los conjuntos algebraicos proyectivos cumplen lo siguiente:

**Observación 3.1.3.** *La unión de dos conjuntos algebraicos proyectivos es un conjunto algebraico proyectivo. La intersección de una familia finita de conjuntos algebraicos proyectivos es un conjunto algebraico proyectivo. El conjunto vacío y el conjunto  $\mathbb{P}^n$  son conjuntos algebraicos proyectivos. La prueba de esta observación es similar a la que se da para el caso afín.*

**Definición 3.1.4.** Definimos la topología de Zariski sobre  $\mathbb{P}^n$  tomando como conjuntos abiertos los complementarios de los conjuntos algebraicos en  $\mathbb{P}^n$ .

Ahora que hemos definido una topología sobre conjuntos algebraicos proyectivos, podemos aplicar las definiciones de conjunto irreducible y dimensión de un espacio topológico. De esta forma, podemos definir:

**Definición 3.1.5.** Una *variedad algebraica proyectiva* (o simplemente *variedad proyectiva*) es un subconjunto cerrado irreducible en  $\mathbb{P}^n$  respecto de la topología de Zariski. Un subconjunto abierto de una variedad proyectiva es una *variedad cuasi-proyectiva*. La *dimensión* de una variedad proyectiva o cuasi-proyectiva es su dimensión como espacio topológico.

Ahora veremos cómo podemos dar un recubrimiento abierto de variedades algebraicas proyectivas  $\mathbb{P}^n$  mediante variedades algebraicas afines. Sea el abierto Zariski  $U_i = \{[a_0 : \dots : a_n] \in \mathbb{P}^n : a_i \neq 0\}$ , tenemos que  $\mathbb{P}^n$  está recubierto por los  $U_i$  con  $i = 0, \dots, n$ . Ahora definimos  $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}^n$  tal que  $\phi_i([a_0 : \dots : a_n])$  es el punto  $(a_0/a_i, \dots, a_n/a_i) \in \mathbb{C}^n$ . Notemos que la aplicación  $\phi$  está bien definida porque  $a_i \neq 0$  y  $(\lambda a_j)/(\lambda a_i) = a_j/a_i$  para cualquier  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ .

**Proposición 3.1.6.** *La aplicación  $\phi$  es un homeomorfismo de  $U_i$  con su topología inducida en  $\mathbb{C}^n$  con la topología de Zariski.*

*Demostración.* Ver [Hart, Pag. 10-11]. □

Ahora, para cualquier variedad proyectiva en  $\mathbb{P}^n$ , podemos dar un recubrimiento abierto mediante variedades afines como sigue:

**Corolario 3.1.7.** *Sea  $Y$  una variedad proyectiva en  $\mathbb{P}^n$ , entonces  $Y$  está recubierto por los conjuntos abiertos Zariski  $Y \cap U_i$  con  $i = 0, \dots, n$ , que son homeomorfos a variedades algebraicas afines vía la aplicación  $\phi_i$  que hemos definido antes.*

## 3.2. Abanicos

Vamos a definir el proceso de construcción de variedades tóricas (proyectivas) a partir del pegado de variedades tóricas (afines) mediante cambios de coordenadas adecuados. Para ello, daremos primero el concepto de abanico.

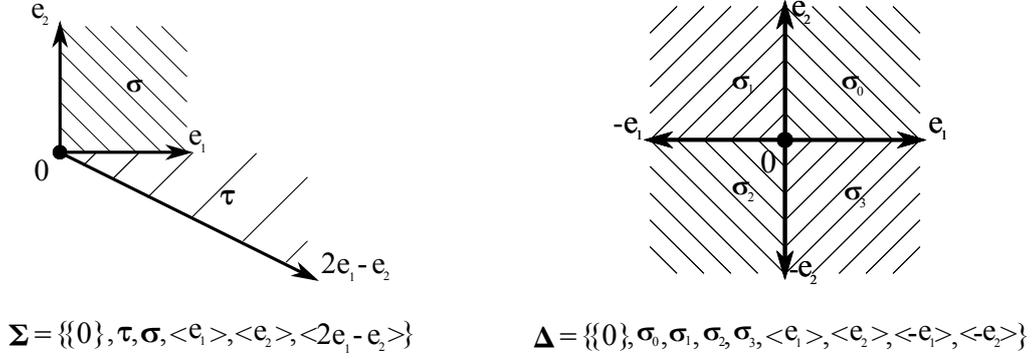
**Definición 3.2.1.** Un *abanico*  $\Sigma$  en el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$  es una unión finita de conos tales que:

1. Todo cono de  $\Sigma$  es fuertemente convexo, poliédrico y racional.
2. Toda cara de un cono de  $\Sigma$  es cono de  $\Sigma$ .
3. Si  $\sigma$  y  $\sigma'$  son conos de  $\Sigma$ , entonces  $\sigma \cap \sigma'$  es una cara común de  $\sigma$  y  $\sigma'$ .

Llamaremos *abanico dual* al conjunto de los duales de los conos de un abanico  $\Sigma$  y lo denotaremos  $\check{\Sigma}$ .

En adelante, salvo que se diga lo contrario, todos los conos que se consideren serán fuertemente convexos, poliédricos y racionales.

**Ejemplo 3.2.2.** *Veamos algunos ejemplos de abanicos en  $\mathbb{R}^2$ , donde  $\{e_1, e_2\}$  es la base canónica.*



Antes de describir el proceso de pegado de variedades tóricas afines, vamos a destacar un isomorfismo natural existente entre la variedad tórica  $X_\tau$  y un subconjunto abierto de  $X_\sigma$ , siendo  $\tau$  cara de  $\sigma$ , que nos permitirá describir la aplicación de pegado.

Sea  $\tau$  una cara de un cono  $\sigma$ , entonces  $S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-\lambda)$  donde  $\lambda \in \check{\sigma} \cap M$  y  $\tau = \sigma \cap \lambda^\perp$  (por la proposición 1.3.9). Es decir, que el monoide  $S_\tau$  se obtiene a partir del monoide  $S_\sigma$  añadiendo el generador  $-\lambda$ .

Como  $\lambda$  puede ser elegido como un elemento de un conjunto de generadores  $\{a_1, \dots, a_k\}$  de  $S_\sigma$ , podemos asumir que  $\lambda = a_k$  y denotamos  $a_{k+1} = -\lambda$ .

Para obtener las relaciones entre los generadores de  $S_\tau$  basta considerar las relaciones entre los generadores de  $S_\sigma$  añadiendo la relación  $a_k + a_{k+1} = 0$ .

Esta última relación se corresponde con la relación multiplicativa  $u_k u_{k+1} = 1$  en  $R_\tau$ . Como los generadores  $u_i$  de  $R_\sigma$  y  $R_\tau$  son precisamente las funciones coordenadas de las variedades tóricas  $X_\sigma$  y  $X_\tau$ , tenemos que la proyección

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{k+1} &\longrightarrow \mathbb{C}^k \\ (x_1, \dots, x_k, x_{k+1}) &\longmapsto (x_1, \dots, x_k) \end{aligned}$$

identifica  $X_\tau$  con el subconjunto abierto de  $X_\sigma$  definido por  $u_k \neq 0$ . Este resultado se puede escribir como:

**Lema 3.2.3.** *Existe una identificación natural  $X_\tau \cong X_\sigma \setminus \{u_k = 0\}$ .*

Ahora podemos construir la aplicación de pegado entre variedades tóricas afines. Supongamos que  $\tau$  es la cara común a dos conos  $\sigma$  y  $\sigma'$  contenidos en el abanico  $\Sigma$ . El Lema 3.2.3 nos permite pegar  $X_\sigma$  y  $X_{\sigma'}$  a lo largo de su parte común  $X_\tau$  de la

siguiente forma:

Sean  $(u_1, \dots, u_k)$  y  $(v_1, \dots, v_l)$  las coordenadas sobre  $X_\sigma$  y  $X_{\sigma'}$  respectivamente. Por el Lema 3.2.3, podemos dar la siguiente cadena de homeomorfismos:

$$\begin{aligned} \psi_{\sigma, \sigma'} : X_\sigma \setminus \{u_k = 0\} &\longrightarrow X_\tau &\longrightarrow X_{\sigma'} \setminus \{v_l = 0\} \\ (u_1, \dots, u_k) &\longmapsto (u_1, \dots, u_k, u_{k+1}) \longmapsto (v_1, \dots, v_l, v_{l+1}) \longmapsto (v_1, \dots, v_l) \end{aligned}$$

Tenemos en cuenta que dentro de  $X_\tau$  es posible hacer el cambio de coordenadas  $z^{b_j} = v_j = u_1^{\lambda_1^j} \dots u_k^{\lambda_k^j} = z^{\lambda_1^j a_1} \dots z^{\lambda_k^j a_k}$  con  $j = 1, \dots, l$ . Finalmente, ya podemos dar la definición de variedad tórica.

**Definición 3.2.4.** Sea  $\Sigma$  un abanico en  $\mathbb{R}^n$ . Consideramos la unión disjunta  $\coprod_{\sigma \in \Sigma} X_\sigma$  donde dos puntos  $x \in X_\sigma$  y  $x' \in X_{\sigma'}$  son identificados si  $\psi_{\sigma, \sigma'}(x) = x'$ . El espacio resultante  $X_\Sigma$  se llama variedad tórica (proyectiva).

**Observación 3.2.5.** El espacio  $X_\Sigma$  de la Definición 3.2.4 es un espacio topológico dotado de un recubrimiento abierto formado por las variedades tóricas afines  $X_\sigma$  con  $\sigma \in \Sigma$ . Esto se debe a que cada variedad tórica afín  $X_\sigma$  con  $\sigma \in \Sigma$  está contenida en  $\mathbb{C}^k \cong \mathbb{P}^k \cap U_i$  (como vimos en la Proposición 3.1.6). Luego, dado que  $X_\Sigma \subseteq \mathbb{P}^k$ , tendremos que  $X_\Sigma \cap U_i = X_\sigma$  será abierto en  $X_\sigma$ . Por esta razón y debido al Corolario 3.1.7, podemos afirmar también que  $X_\Sigma$  es una variedad algebraica proyectiva.

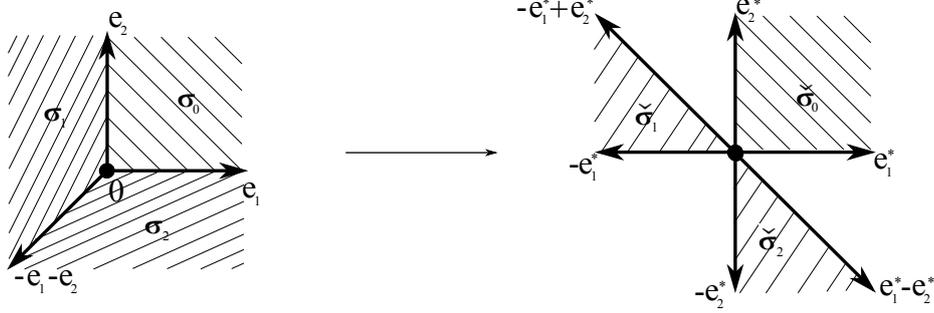
### 3.3. Ejemplos de variedades tóricas

Vamos a ver algunos de los ejemplos más clásicos de variedades tóricas.

**Ejemplo 3.3.1.** Denotaremos por  $[t_0 : t_1 : t_2]$  las coordenadas homogéneas del espacio proyectivo  $\mathbb{P}^2$ . Podemos dar un recubrimiento de dicho espacio por las siguientes cartas:

- $U_0 = \{[t_0 : t_1 : t_2] \in \mathbb{P}^2 : t_0 \neq 0\} \cong \{(t_1/t_0, t_2/t_0) = (z_1, z_2) : t_0 \neq 0\} = \mathbb{C}_{(z_1, z_2)}^2$
- $U_1 = \{[t_0 : t_1 : t_2] \in \mathbb{P}^2 : t_1 \neq 0\} \cong \{(t_0/t_1, t_2/t_1) = (z_1^{-1}, z_1^{-1} z_2) : t_1 \neq 0\} = \mathbb{C}_{(z_1^{-1}, z_1 z_2^{-1})}^2$
- $U_2 = \{[t_0 : t_1 : t_2] \in \mathbb{P}^2 : t_2 \neq 0\} \cong \{(t_0/t_2, t_1/t_2) = (z_2^{-1}, z_1 z_2^{-1}) : t_2 \neq 0\} = \mathbb{C}_{(z_2^{-1}, z_1 z_2^{-1})}^2$

Ahora vamos a considerar en  $\mathbb{R}^2$  el abanico  $\Sigma$  siguiente:



Para cada cono  $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$  del abanico, podemos construir las siguientes variedades tóricas afines:

- $S_{\sigma_0}$  está generado por  $\{e_1^*, e_2^*\}$ , luego  $R_{\sigma_0} = \mathbb{C}[z_1, z_2]$  y  $X_{\sigma_0} = \mathbb{C}_{(z_1, z_2)}^2$ .
- $S_{\sigma_1}$  está generado por  $\{-e_1^*, -e_1^* + e_2^*\}$ , luego  $R_{\sigma_1} = \mathbb{C}[z_1^{-1}, z_1 z_2^{-1}]$  y  $X_{\sigma_1} = \mathbb{C}_{(z_1^{-1}, z_1 z_2^{-1})}^2$ .
- $S_{\sigma_2}$  está generado por  $\{-e_2^*, e_1^* - e_2^*\}$ , luego  $R_{\sigma_2} = \mathbb{C}[z_2^{-1}, z_1 z_2^{-1}]$  y  $X_{\sigma_2} = \mathbb{C}_{(z_2^{-1}, z_1 z_2^{-1})}^2$ .

Veamos cómo pegamos  $X_{\sigma_0}$  con  $X_{\sigma_1}$ . Consideramos la cara común a  $\sigma_0$  y  $\sigma_1$ ,  $\tau = \sigma_0 \cap \sigma_1 = \langle e_2 \rangle$ . Con  $\tau$  considerada como cara de  $\sigma_0$  ( $\tau = \sigma_0 \cap (e_1^*)^\perp$ ), tenemos que  $X_\tau = X_{\sigma_0} \setminus \{z_1 = 0\} = \mathbb{C}_{z_1}^* \times \mathbb{C}_{z_2}$  en  $X_{\sigma_0} = \mathbb{C}_{(z_1, z_2)}^2$  (por el Lema 3.2.3). De la misma forma,  $\tau$  considerada como cara de  $\sigma_1$  ( $\tau = \sigma_1 \cap (-e_1^*)^\perp$ ) da la subvariedad  $X_\tau = X_{\sigma_1} \setminus \{z_1^{-1} = 0\} = \mathbb{C}_{z_1^{-1}}^* \times \mathbb{C}_{z_1^{-1} z_2}$  en  $X_{\sigma_1} = \mathbb{C}_{(z_1^{-1}, z_1 z_2^{-1})}^2$ . De esta forma, contamos con la siguiente aplicación de pegado:

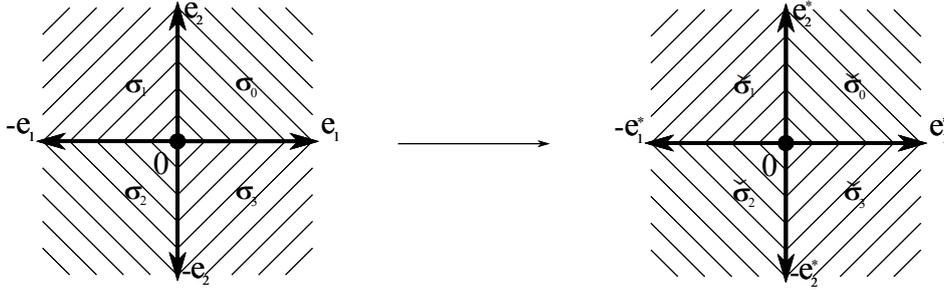
$$\begin{aligned} \psi_{\sigma_0, \sigma_1} : X_{\sigma_0} \setminus \{u_1 = 0\} &\longrightarrow X_\tau &\longrightarrow X_{\sigma_1} \setminus \{v_1 = 0\} \\ (z_1, z_2) &\longmapsto (z_1, z_2, z_1^{-1}) &\longmapsto (z_1^{-1}, z_1^{-1} z_2, z_1) &\longmapsto (z_1^{-1}, z_1^{-1} z_2) \end{aligned}$$

Es decir, que podemos pegar  $X_{\sigma_0}$  con  $X_{\sigma_1}$  y considerar  $X_{\sigma_0} \amalg X_{\sigma_1} = \mathbb{C}_{(z_1, z_2)}^2 \amalg \mathbb{C}_{(z_1^{-1}, z_1 z_2^{-1})}^2 \cong U_0 \cup U_1 = \mathbb{P}^2 \setminus \{[0 : 0 : 1]\}$ . Del mismo modo, dando las aplicaciones de pegado  $\psi_{\sigma_0, \sigma_2}$  y  $\psi_{\sigma_1, \sigma_2}$ , podemos pegar  $X_{\sigma_2}$  a  $\mathbb{P}^2 \setminus \{[0 : 0 : 1]\}$  y obtenemos que  $X_\Sigma = \mathbb{P}^2$ .

**Ejemplo 3.3.2.** El ejemplo para  $\mathbb{P}^2$  se puede generalizar a  $\mathbb{P}^n$ , con  $n$  entero positivo, considerando, en  $\mathbb{R}^n$ , el abanico  $X_\Sigma$  generado por los vectores  $\{e_1, \dots, e_n, -(e_1 + \dots + e_n)\}$ , es decir,  $\sigma_0 = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$  y para cada  $i = 1, \dots, n$ ,

$\sigma_i = \langle e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n, -(e_1 + \dots + e_n) \rangle$ . Tenemos que las variedades tóricas afines  $X_{\sigma_i}$  son copias de  $\mathbb{C}^n$  correspondientes a las cartas  $U_i$  que recubren  $\mathbb{P}^n$  y pegadas juntas permiten obtener  $X_{\Sigma} = \mathbb{P}^n$ .

**Ejemplo 3.3.3.** Consideramos en  $\mathbb{R}^2$  el abanico  $X_{\Sigma}$ :



que da los siguientes monooides:

$$\begin{array}{ccc} S_{\sigma_1} \text{ gen. por } \{-e_1^*, e_2^*\} & \longleftrightarrow & S_{\sigma_0} \text{ gen. por } \{e_1^*, e_2^*\} \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ S_{\sigma_2} \text{ gen. por } \{-e_1^*, -e_2^*\} & \longleftrightarrow & S_{\sigma_3} \text{ gen. por } \{e_1^*, -e_2^*\} \end{array}$$

las consecuentes  $\mathbb{C}$ -álgebras:

$$\begin{array}{ccc} R_{\sigma_1} = \mathbb{C}[z_1^{-1}, z_2] & \longleftrightarrow & R_{\sigma_0} = \mathbb{C}[z_1, z_2] \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ R_{\sigma_2} = \mathbb{C}[z_1^{-1}, z_2^{-1}] & \longleftrightarrow & R_{\sigma_3} = \mathbb{C}[z_1, z_2^{-1}] \end{array}$$

y, por último, las variedades tóricas afines siguientes:

$$\begin{array}{ccc} X_{\sigma_1} = \mathbb{C}_{(z_1^{-1}, z_2)}^2 & \longleftrightarrow & X_{\sigma_0} = \mathbb{C}_{(z_1, z_2)}^2 \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ X_{\sigma_2} = \mathbb{C}_{(z_1^{-1}, z_2^{-1})}^2 & \longleftrightarrow & X_{\sigma_3} = \mathbb{C}_{(z_1, z_2^{-1})}^2 \end{array}$$

El pegado de  $X_{\sigma_0}$  y  $X_{\sigma_1}$  da como resultado  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}$  con coordenadas  $([t_0 : t_1], z_2)$  donde  $z_1 = t_0/t_1$ . El pegado de  $X_{\sigma_2}$  y  $X_{\sigma_3}$  da como resultado  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}$  con coordenadas  $([t_0 : t_1], z_2^{-1})$  donde  $z_1 = t_0/t_1$ . Pegando los dos  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}$  obtenidos, construimos  $X_{\Sigma} = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  con coordenadas  $([t_0 : t_1], [s_0 : s_1])$  donde  $z_2 = s_0/s_1$ .

**Ejemplo 3.3.4.** El ejemplo de  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  se puede generalizar a  $\mathbb{P}^1 \times \cdots \times \mathbb{P}^1$ , con  $n$  entero positivo, considerando, en  $\mathbb{R}^n$ , el abanico  $\Sigma$  generado por los vectores  $\{e_1, \dots, e_n, -e_1, \dots, -e_n\}$ , es decir, cada  $\sigma_i \in \Sigma$  es de la forma  $\sigma_i = \langle (-1)^{u_1} e_1, \dots, (-1)^{u_n} e_n \rangle$  recorriendo cada  $(u_1, \dots, u_n) \in \{0, 1\}^n$ . Tenemos que las variedades tóricas afines  $X_{\sigma_i}$  son conjuntos de la forma  $\mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C} \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}$  y pegados juntos permiten obtener  $X_\Sigma = \mathbb{P}^1 \times \cdots \times \mathbb{P}^1$ .

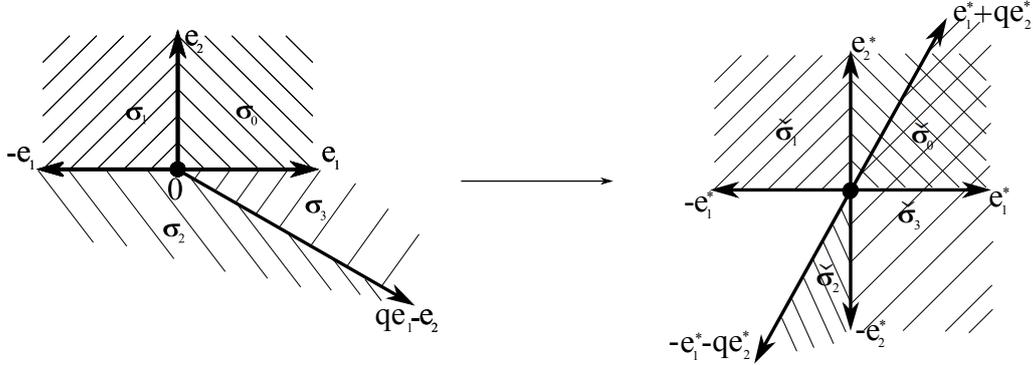
**Ejemplo 3.3.5.** Denotaremos por  $([\lambda_0 : \lambda_1], [\mu_0 : \mu_1 : \mu_2])$  las coordenadas homogéneas del espacio proyectivo  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ . Vamos a considerar la hipersuperficie en  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ , llamada superficie de Hirzebruch, definida por

$$\mathcal{H}_q = \{([\lambda_0 : \lambda_1], [\mu_0 : \mu_1 : \mu_2]) : \lambda_0^q \mu_0 = \lambda_1^q \mu_1\}.$$

Podríamos recubrir la superficie de Hirzebruch con seis cartas de la forma  $\mathcal{H}_q \cap (V_i \times U_j)$  con  $V_i = \{[\lambda_0 : \lambda_1] \in \mathbb{P}^1 : \lambda_i \neq 0\}$  y  $U_j$  las cartas descritas en el Ejemplo 3.3.1 que recubren  $\mathbb{P}^2$ . Sin embargo, la condición  $\lambda_0^q \mu_0 = \lambda_1^q \mu_1$ , que describe la superficie de Hirzebruch, nos permite afinar el recubrimiento, de manera que sólo necesitamos cuatro cartas como vamos a describir a continuación:

- Consideramos el conjunto  $\mathcal{H}_q \cap (V_1 \times \mathbb{P}^2)$ , que podemos desarrollar como el conjunto  $\{([\lambda_0/\lambda_1 : 1], [\mu_0, \mu_1 : \mu_2] : (\lambda_0/\lambda_1)^q \mu_0 = \mu_1, \lambda_1 \neq 0\}$  y, finalmente, como el conjunto  $\{([\lambda_0/\lambda_1 : 1], [\mu_0 : (\lambda_0/\lambda_1)^q \mu_0 : \mu_2] : \lambda_1 \neq 0\}$ . De aquí obtenemos dos de las cuatro cartas que queremos construir:
  - $W_1 = \{([\lambda_0/\lambda_1 : 1], [\mu_0/\mu_2 : (\lambda_0/\lambda_1)^q (\mu_0/\mu_2) : 1]) : \lambda_1, \mu_2 \neq 0\} \cong \{(\mu_0/\mu_2, \lambda_0/\lambda_1) = (z_1, z_2) : \lambda_1, \mu_2 \neq 0\} = \mathbb{C}_{(z_1, z_2)}^2$
  - $W_2 = \{([\lambda_0/\lambda_1 : 1], [1 : (\lambda_0/\lambda_1)^q : \mu_2/\mu_0]) : \lambda_1, \mu_0 \neq 0\} \cong \{(\mu_2/\mu_0, \lambda_0/\lambda_1) = (z_1^{-1}, z_2) : \lambda_1, \mu_0 \neq 0\} = \mathbb{C}_{(z_1^{-1}, z_2)}^2$
- Consideramos el conjunto  $\mathcal{H}_q \cap (V_0 \times \mathbb{P}^2)$ , que podemos desarrollar como el conjunto  $\{([1 : \lambda_1/\lambda_0], [\mu_0, \mu_1 : \mu_2] : \mu_0 = \mu_1 (\lambda_1/\lambda_0)^q, \lambda_0 \neq 0\}$  y, finalmente, como el conjunto  $\{([1 : \lambda_1/\lambda_0], [\mu_1 (\lambda_1/\lambda_0)^q : \mu_1 : \mu_2] : \lambda_0 \neq 0\}$ . De aquí obtenemos las otras dos cartas que queremos construir:
  - $W_3 = \{([1 : \lambda_1/\lambda_0], [(\lambda_1/\lambda_0)^q (\mu_1/\mu_2) : \mu_1/\mu_2 : 1]) : \lambda_0, \mu_2 \neq 0\} \cong \{(\mu_1/\mu_2, \lambda_1/\lambda_0) = (z_1 z_2^q, z_2^{-1}) : \lambda_0, \mu_2 \neq 0\} = \mathbb{C}_{(z_1 z_2^q, z_2^{-1})}^2$
  - $W_4 = \{([1 : \lambda_1/\lambda_0], [(\lambda_1/\lambda_0)^q : 1 : \mu_2/\mu_1]) : \lambda_0, \mu_1 \neq 0\} \cong \{(\mu_2/\mu_1, \lambda_1/\lambda_0) = (z_1^{-1} z_2^{-q}, z_2^{-1}) : \lambda_0, \mu_1 \neq 0\} = \mathbb{C}_{(z_1^{-1} z_2^{-q}, z_2^{-1})}^2$

Ahora vamos a tomar en  $\mathbb{R}^2$  el abanico  $\Sigma$ :



que da los siguientes monoides:

$$\begin{array}{ccc} S_{\sigma_1} \text{ gen. por } \{-e_1^*, e_2^*\} & \longleftrightarrow & S_{\sigma_0} \text{ gen. por } \{e_1^*, e_2^*\} \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ S_{\sigma_2} \text{ gen. por } \{-e_1^* - qe_2^*, -e_2^*\} & \longleftrightarrow & S_{\sigma_3} \text{ gen. por } \{e_1^* + qe_2^*, -e_2^*\} \end{array}$$

las consecuentes  $\mathbb{C}$ -álgebras:

$$\begin{array}{ccc} R_{\sigma_1} = \mathbb{C}[z_1^{-1}, z_2] & \longleftrightarrow & R_{\sigma_0} = \mathbb{C}[z_1, z_2] \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ R_{\sigma_2} = \mathbb{C}[z_1^{-1} z_2^{-q}, z_2^{-1}] & \longleftrightarrow & R_{\sigma_3} = \mathbb{C}[z_1 z_2^q, z_2^{-1}] \end{array}$$

y, por último, las variedades tóricas afines siguientes:

$$\begin{array}{ccc} X_{\sigma_1} = \mathbb{C}_{(z_1^{-1}, z_2)}^2 & \longleftrightarrow & X_{\sigma_0} = \mathbb{C}_{(z_1, z_2)}^2 \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ X_{\sigma_2} = \mathbb{C}_{(z_1^{-1} z_2^{-q}, z_2^{-1})}^2 & \longleftrightarrow & X_{\sigma_3} = \mathbb{C}_{(z_1 z_2^q, z_2^{-1})}^2 \end{array}$$

El pegado de  $X_{\sigma_0}$  con  $X_{\sigma_1}$  da como resultado  $X_{\sigma_0} \amalg X_{\sigma_1} = \mathbb{C}_{(z_1, z_2)}^2 \amalg \mathbb{C}_{(z_1^{-1}, z_2)}^2 \cong W_1 \cup W_2 = \mathcal{H}_q \cap (V_1 \times \mathbb{P}^2)$ . Del mismo modo, pegando  $X_{\sigma_2}$  con  $X_{\sigma_3}$  obtenemos  $X_{\sigma_2} \amalg X_{\sigma_3} \cong \mathcal{H}_q \cap (V_0 \times \mathbb{P}^2)$ . Por último, pegando ambas variedades entre si, obtenemos  $(X_{\sigma_0} \amalg X_{\sigma_1}) \amalg (X_{\sigma_2} \amalg X_{\sigma_3}) \cong \mathcal{H}_q$ , la superficie de Hirzebruch.



# Capítulo 4

## Subvariedades tóricas invariantes

En esta sección vamos a definir el concepto de subvariedad tórica invariante que, combinado con la acción tórica sobre una variedad que definiremos en la siguiente sección, nos dará una caracterización de las variedades tóricas mediante las órbitas de la acción mencionada.

### 4.1. Construcción de una subvariedad tórica invariante

En adelante, a veces construiremos variedades tóricas empezando directamente por un cono  $\sigma$  en cierto espacio dual  $(\mathbb{R}^n)^*$ . Dicha elección no está en contra de el proceso de construcción de variedades tóricas, dado que podemos construir el monoide  $S_\sigma = \sigma \cap M$  y a partir de ahí, la  $\mathbb{C}$ -álgebra  $R_\sigma = \{f \in \mathbb{C}[z, z^{-1}] : \text{supp}(f) \subset S_\sigma\}$  y, por último, la variedad tórica afín  $X_\sigma = \text{Spec}(R_\sigma)$ . Empezamos considerando un cono  $\sigma$  en  $\mathbb{R}^n$  y  $\tau$  una cara propia del cono dual  $\check{\sigma}$  (notar que no siempre  $\check{\tau} \subset \mathbb{R}^n$  contendrá a  $\sigma$  como cara por la Observación 1.2.6). Elegimos un sistema de generadores  $\{a_1, \dots, a_k\}$  del monoide  $S_\tau$  y lo extendemos a un sistema de generadores  $\{a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_q\}$  del monoide  $S_{\check{\sigma}}$ .

Dichos sistemas de generadores producen coordenadas  $(u_1, \dots, u_k)$  y  $(u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_q)$  de las variedades tóricas afines  $X_\tau$  y  $X_{\check{\sigma}}$  respectivamente. Podemos asumir que  $a_{k+1}, \dots, a_q \notin S_\tau$  por la Observación 1.2.4. En ese caso, es fácil ver que ninguna de las funciones coordenadas  $u_{k+1}, \dots, u_q$  son inversibles en

$X_{\check{\sigma}}$ , luego existe una aplicación natural

$$\begin{aligned}\phi : X_{\tau} &\longrightarrow X_{\check{\sigma}} \\ (u_1, \dots, u_k) &\longmapsto (u_1, \dots, u_k, 0, \dots, 0)\end{aligned}$$

Dado que las relaciones lineales entre  $a_1, \dots, a_k$  en  $\check{\sigma}$  se mantienen en  $\tau$  (y viceversa), las ecuaciones que caracterizan  $X_{\tau}$  no varían bajo la aplicación  $\phi$ .

**Lema 4.1.1.**  *$\phi$  es un morfismo tórico inyectivo.*

De esta forma, podemos identificar  $X_{\tau}$  con la subvariedad cerrada  $\phi(X_{\tau}) = X_{\check{\sigma}} \cap \{u_{k+1} = \dots = u_q = 0\}$ .

**Definición 4.1.2.** Una subvariedad cerrada de la variedad tórica afín  $X_{\check{\sigma}}$  se llama *subvariedad tórica (cerrada) invariante* si es de la forma  $\phi(X_{\tau}) = X_{\check{\sigma}} \cap \{u_{k+1} = \dots = u_q = 0\}$  como hemos descrito arriba.

**Ejemplo 4.1.3.** Sea  $\sigma = \langle e_1, e_2 \rangle$  un cono en  $\mathbb{R}^2$  y consideramos la cara  $\tau = \langle e_1^* \rangle$  de  $\check{\sigma}$ . Entonces  $X_{\tau} = \mathbb{C}_{z_1}$  y  $\phi(X_{\tau})$  es una subvariedad tórica invariante correspondiente al eje de coordenadas  $\mathbb{C}_{z_1} \times \{0\}$  del plano afín  $X_{\check{\sigma}} = \mathbb{C}^2$ .

## 4.2. Abanicos cociente

Ahora, dado un cono  $\sigma$  en un abanico  $\Sigma$ , vamos a describir la construcción de una variedad tórica  $X_{\Sigma/\sigma}$  que esté embebida en  $X_{\Sigma}$  como subvariedad tórica invariante. Primero consideramos la *estrella* de  $\sigma$  en  $\Sigma$ , es decir, el conjunto de todos los conos  $\sigma' \in \Sigma$  tales que contienen a  $\sigma$  como cara

$$st(\sigma, \Sigma) = \{\sigma' \in \Sigma : \sigma < \sigma'\}.$$

Para no confundir con la notación  $\sigma^{\perp}$  utilizada anteriormente, en esta sección denotaremos por  $(\mathbb{R} \cdot \sigma)^{\perp}$  al subespacio vectorial  $\{w \in \mathbb{R}^n : w \cdot v = 0 \text{ para todo } v \in \mathbb{R} \cdot \sigma\}$ , donde  $\cdot$  denota el producto escalar en  $\mathbb{R}^n$ . Usando la proyección ortogonal  $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow (\mathbb{R} \cdot \sigma)^{\perp}$  obtenemos la colección de conos

$$\Sigma/\sigma = \{\pi(\sigma') : \sigma' \in st(\sigma, \Sigma)\}.$$

Veamos que efectivamente  $\Sigma/\sigma$  es un abanico, pero antes vamos a probar un resultado auxiliar que utilizaremos más adelante. En adelante, llamaremos  $\Pi$  a la proyección de  $\mathbb{R}^n$  sobre el espacio vectorial  $\mathbb{R} \cdot \sigma$ .

**Observación 4.2.1.** *Se tiene que el espacio vectorial  $(\mathbb{R} \cdot \sigma)^\perp$  es isomorfo al espacio vectorial cociente  $\mathbb{R}^n/(\mathbb{R} \cdot \sigma)$ . Además, se cumple que  $(\mathbb{R}^n/(\mathbb{R} \cdot \sigma))^*$  es isomorfo a  $\sigma^\perp$ . De las definiciones de ambos, obtenemos:*

$$(\mathbb{R}^n/(\mathbb{R} \cdot \sigma))^* = \text{Hom}(\mathbb{R}^n/(\mathbb{R} \cdot \sigma), \mathbb{R})$$

$$\begin{aligned} \sigma^\perp &= \{u \in \mathbb{R}^* = \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) : u(v) = 0 \text{ para todo } v \in \sigma\} = \\ &= \{u \in \mathbb{R}^* = \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) : u(v) = 0 \text{ para todo } v \in \mathbb{R} \cdot \sigma\} \end{aligned}$$

Luego, dado  $u \in \sigma^\perp$ , como  $\mathbb{R} \cdot \sigma \subseteq \ker(u)$ , entonces  $u$  induce un único homomorfismo  $\tilde{u} : \mathbb{R}^n/(\mathbb{R} \cdot \sigma) \rightarrow \mathbb{R}$ , es decir, un elemento de  $(\mathbb{R}^n/(\mathbb{R} \cdot \sigma))^*$ .

**Lema 4.2.2.** *Dado  $\sigma'$  un cono en  $st(\sigma, \Sigma) \subset \mathbb{R}^n$ , se cumple que  $\pi(\sigma')^\vee = \check{\sigma}' \cap ((\mathbb{R} \cdot \sigma)^\perp)^* = \check{\sigma}' \cap \sigma^\perp$ , donde  $((\mathbb{R} \cdot \sigma)^\perp)^*$  denota el espacio vectorial dual de  $(\mathbb{R} \cdot \sigma)^\perp$ .*

*Demostración.* ■ Dado un cono  $\sigma' \in st(\sigma, \Sigma)$ , probaremos primero que  $\pi(\sigma')^\vee = \check{\sigma}' \cap ((\mathbb{R} \cdot \sigma)^\perp)^*$ . Utilizando las definiciones, tenemos que:

$$\pi(\sigma')^\vee = \{u \in (\mathbb{R}^n)^* : \langle u, \pi(v) \rangle \geq 0 \text{ para todo } v \in \sigma'\}$$

$$\check{\sigma}' = \{u \in (\mathbb{R}^n)^* : \langle u, v \rangle \geq 0 \text{ para todo } v \in \sigma'\}$$

De hecho, como  $\pi(\sigma') \subseteq (\mathbb{R} \cdot \sigma)^\perp$ , entonces podemos considerar  $(\pi(\sigma')^\vee) \subseteq ((\mathbb{R} \cdot \sigma)^\perp)^*$ . Además, como  $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R} \cdot \sigma)^\perp \oplus (\mathbb{R} \cdot \sigma)$ , si  $v \in \sigma'$ , podemos escribir de forma única  $v = \pi(v) + \Pi(v)$ . Entonces tenemos:

$$\check{\sigma}' \cap ((\mathbb{R} \cdot \sigma)^\perp)^* = \{u \in ((\mathbb{R} \cdot \sigma)^\perp)^* : \langle u, v \rangle \geq 0 \text{ para todo } v \in \sigma'\}$$

Como  $\langle u, v \rangle = \langle u, \pi(v) \rangle + \langle u, \Pi(v) \rangle$  y  $\langle u, \Pi(v) \rangle = 0$  (porque al tener que  $u \in ((\mathbb{R} \cdot \sigma)^\perp)^* \cong (\mathbb{R}^n/(\mathbb{R} \cdot \sigma))^*$ , se anula sobre los elementos de  $\mathbb{R} \cdot \sigma$ ). Así, podemos concluir que:

$$\check{\sigma}' \cap ((\mathbb{R} \cdot \sigma)^\perp)^* = \{u \in ((\mathbb{R} \cdot \sigma)^\perp)^* : \langle u, \pi(v) \rangle \geq 0 \text{ para todo } v \in \sigma'\} = \pi(\sigma')^\vee$$

- Ahora, sea un cono  $\sigma' \in st(\sigma, \Sigma)$ , vamos a probar que  $\pi(\sigma')^\vee = \check{\sigma}' \cap \sigma^\perp$ . Utilizando las definiciones, tenemos que:

$$\check{\sigma}' = \{u \in (\mathbb{R}^n)^* : \langle u, v \rangle \geq 0 \text{ para todo } v \in \sigma'\}$$

$$\sigma^\perp = \{u \in (\mathbb{R}^n)^* : \langle u, v \rangle = 0 \text{ para todo } v \in \sigma\}$$

Igual que antes, dado  $v \in \sigma'$ , escribimos  $v = \pi(v) + \Pi(v)$ . Luego, si  $u \in \check{\sigma}' \cap \sigma^\perp$ , entonces  $0 \leq \langle u, v \rangle = \langle u, \pi(v) \rangle$  porque  $\langle u, \Pi(v) \rangle = 0$  (dado que  $u \in \sigma^\perp \cong (\mathbb{R}/(\mathbb{R} \cdot \sigma))^*$  como vimos en la Observación 4.2.1), luego  $u \in \pi(\sigma')$ . Esto prueba que  $\check{\sigma}' \cap \sigma^\perp \subseteq \pi(\sigma')$ . Recíprocamente, si  $u \in \pi(\sigma')$ , entonces  $\langle u, v \rangle = 0$  para todo  $v \in \sigma$  por la igualdad que hemos probado antes, luego  $u \in \sigma^\perp$ . Por otro lado, dado  $v \in \sigma'$ , si escribimos como antes,  $v = \pi(v) + \Pi(v)$ , entonces  $\langle u, v \rangle = \langle u, \pi(v) \rangle \geq 0$ , por estar  $\pi(v) \in \pi(\sigma')$ , luego  $u \in \pi(\sigma')$  y ya tenemos la otra contención.

□

**Proposición 4.2.3.** *El conjunto  $\Sigma/\sigma$  que acabamos de construir es un abanico en  $(\mathbb{R} \cdot \sigma)^\perp$ .*

*Demostración.* Durante la demostración vamos a considerar cualquier elemento del conjunto  $\Sigma/\sigma$  de la forma  $\pi(\sigma')$  con  $\sigma' \in \Sigma$ , dado que todos los elementos de dicho conjunto son así. Aclarado este punto, procedemos a comprobar las propiedades que debe cumplir un conjunto para ser abanico en  $(\mathbb{R} \cdot \sigma)^\perp$ .

- Veamos que todo elemento de  $\Sigma/\sigma$  es cono en  $(\mathbb{R} \cdot \sigma)^\perp$ . Dado  $\sigma' \in \Sigma$ , tenemos que  $\sigma' = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ . Cualquier elemento  $v \in \sigma'$  será de la forma  $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ . Vía la proyección ortogonal  $\pi$ , tenemos que  $\pi(v) = \lambda_1 \pi(v_1) + \dots + \lambda_n \pi(v_n)$ . Es decir, que cualquier elemento  $\pi(v) \in \pi(\sigma')$  está generado por combinaciones con coeficientes positivos de los elementos  $\pi(v_1), \dots, \pi(v_n) \in (\mathbb{R} \cdot \sigma)^\perp$ , luego  $\pi(\sigma')$  es cono.
- Ahora comprobamos que todo cono en  $\Sigma/\sigma$  es fuertemente convexo. Supongamos que existe  $v \in \pi(\sigma') \in \Sigma/\sigma$  tal que  $-v \in \pi(\sigma')$ . Dado que  $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R} \cdot \sigma)^\perp \oplus (\mathbb{R} \cdot \sigma)$ , tenemos que existen elementos  $w_1, w_2 \in \sigma'$  tales que  $v = w_1 - \Pi(w_1)$  y  $-v = w_2 - \Pi(w_2)$ . De la combinación de ambas igualdades, tenemos que  $w_1 + w_2 = \Pi(w_1 + w_2)$ , es decir, que  $w_1 + w_2 \in \mathbb{R} \cdot \sigma$ . Pero dado que  $w_1, w_2 \in \sigma'$  y  $\sigma$  es cara de  $\sigma'$ ,  $w_1 + w_2$  debe estar en  $\sigma$ . Sea  $\sigma = \sigma' \cap \lambda^\perp$  con  $\lambda \in \check{\sigma}'$ , tenemos que  $\langle w_1 + w_2, \lambda \rangle = \langle w_1, \lambda \rangle + \langle w_2, \lambda \rangle = 0$ , pero  $\langle w_1, \lambda \rangle \geq 0$  y  $\langle w_2, \lambda \rangle \geq 0$  porque  $w_1, w_2 \in \sigma'$ , luego  $\langle w_1, \lambda \rangle = 0$  y  $\langle w_2, \lambda \rangle = 0$ , así que  $w_1, w_2 \in \sigma$ . Es decir, que  $\Pi(w_1) = w_1$ , luego  $v = 0$ , así que  $\pi(\sigma')$  es fuertemente convexo.
- También hay que probar que todo cono de  $\Sigma/\sigma$  es racional. Sea  $\pi(\sigma') \in \Sigma/\sigma$ , los generadores de  $\sigma'$  están en  $\sigma' \cap N$ . Por tanto, los generadores de  $\pi(\sigma')$

estarán en  $\pi(\sigma' \cap N) = \pi(\sigma') \cap \pi(N)$ . Dado que  $\pi(N)$  es un retículo respecto del espacio vectorial  $(\mathbb{R} \cdot \sigma)^\perp$ , ya tenemos lo que queríamos.

- Hay que comprobar que toda cara de un cono en  $\Sigma/\sigma$  es cono en  $\Sigma/\sigma$ . Dicho de otro modo, dado un cono  $\pi(\sigma') \in \Sigma/\sigma$ , nos preguntamos si toda cara de  $\pi(\sigma')$  es de la forma  $\pi(\tau')$  con  $\tau'$  cara de  $\sigma'$ . Sea  $\gamma = \pi(\sigma') \cap \lambda^\perp$  con  $\lambda \in \pi(\sigma')^\circ$ , como  $\pi(\sigma')^\circ = \check{\sigma}' \cap \sigma^\perp$ , tenemos que  $\lambda \in \check{\sigma}'$ . Luego  $\tau' = \sigma' \cap \lambda^\perp$  es cara de  $\sigma'$ . De hecho, dado que  $\lambda \in \sigma^\perp$ , tenemos además que  $\sigma$  es cara de  $\tau'$ . Más aún,  $\gamma = \pi(\tau')$  ya que  $v \in \tau'$  equivale a decir que  $\langle v, \lambda \rangle = \langle \pi(v), \lambda \rangle + \langle \Pi(v), \lambda \rangle = 0$ , o lo que es lo mismo  $\langle \pi(v), \lambda \rangle = 0$  (dado que  $\langle \Pi(v), \lambda \rangle = 0$  porque  $\lambda \in \sigma^\perp$ ), es decir que  $\pi(v) \in \gamma$ . Es decir, que para cualquier elemento de  $\tau'$ , tenemos que su proyección está en  $\gamma$  y que cualquier elemento de  $\gamma$  es la proyección de algún elemento de  $\tau'$ , luego debe ser  $\gamma = \pi(\tau')$ .
- Finalmente, probaremos que la intersección de dos conos  $\pi(\sigma')$  y  $\pi(\tau')$  en  $\Sigma/\sigma$  es una cara común a  $\pi(\sigma')$  y  $\pi(\tau')$ . Dado que los conos  $\sigma'$  y  $\tau'$  están en el abanico  $\Sigma$ , tenemos que  $\sigma' \cap \tau'$  es cara común a  $\sigma'$  y  $\tau'$ . Como hemos visto en el punto anterior de la demostración, toda cara de  $\pi(\sigma')$  es de la forma  $\pi(\gamma')$  con  $\gamma'$  cara de  $\sigma'$ . En este caso  $\pi(\sigma' \cap \tau') = \pi(\sigma') \cap \pi(\tau')$  es cara tanto de  $\pi(\sigma')$  como de  $\pi(\tau')$ .

□

**Definición 4.2.4.** El abanico  $\Sigma/\sigma$  que acabamos de construir se llama *abanico cociente* de  $\Sigma$ .

**Lema 4.2.5.** 1. Se cumple la igualdad

$$(\Sigma/\sigma)^\circ = \{\check{\sigma}' \cap \sigma^\perp : \sigma' \in st(\sigma, \Sigma)\}$$

y cada cono  $\tau = \check{\sigma}' \cap \sigma^\perp \in (\Sigma/\sigma)^\circ$  es una cara del correspondiente cono  $\check{\sigma}'$ .

2. El siguiente diagrama es conmutativo ( $\check{st}(\sigma, \Sigma)$  denota el abanico dual de  $st(\sigma, \Sigma)$ )

$$\begin{array}{ccc} st(\sigma, \Sigma) & \xrightarrow{\sigma' \mapsto \check{\sigma}'} & \check{st}(\sigma, \Sigma) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \cap \sigma^\perp \\ \Sigma/\sigma & \xrightarrow{\pi(\sigma') \mapsto \pi(\check{\sigma}')} & (\Sigma/\sigma)^\circ \end{array}$$

*Demostración.* 1. Gracias al Teorema 1.2.17, dado que  $\sigma$  es cara de  $\sigma'$ , tenemos que  $\check{\sigma}' \cap \sigma^\perp$  es cara de  $\check{\sigma}'$ .

2. Es consecuencia directa del punto 1. de este lema. □

Ahora ya podemos comprobar que la variedad tórica  $X_{\Sigma/\sigma}$  dada por el abanico  $\Sigma/\sigma$  en  $(\mathbb{R} \cdot \sigma)^\perp$  se puede embeber en  $X_\Sigma$ .

**Lema 4.2.6.** 1. Para cada cono  $\tau = \check{\sigma}' \cap \sigma^\perp$  en  $(\Sigma/\sigma)^\check{}$  existe un embebimiento tórico invariante  $X_\tau \hookrightarrow X_{\check{\sigma}'}$ .

2. Cada uno de estos embebimientos  $X_\tau \hookrightarrow X_{\check{\sigma}'}$  es compatible con el pegado de variedades tóricas afines en  $X_{\Sigma/\sigma}$  y  $X_\Sigma$  respectivamente.

*Demostración.* 1. Dado que  $\tau$  es un elemento de  $(\Sigma/\sigma)^\check{}$  y una cara de  $\check{\sigma}'$ , podemos aplicar directamente el Lema 4.1.1.

2. Es consecuencia directa del punto 1. de este Lema, ya que al ser invariante el embebimiento  $X_\tau \hookrightarrow X_{\check{\sigma}'}$ , las funciones coordenadas conservan las relaciones que mantienen, luego las aplicaciones de cambio de coordenadas. □

Como consecuencia de este lema, la elección de  $\sigma$  determina un embebimiento de  $X_{\Sigma/\sigma}$  en  $X_\Sigma$  como subvariedad tórica invariante.

**Ejemplo 4.2.7.** Dado el abanico  $\Sigma$  del Ejemplo 3.3.1, vamos a elegir el cono  $\sigma = \langle e_2 \rangle \in \Sigma$ , luego  $(\mathbb{R} \cdot \sigma)^\perp = \langle e_1, -e_1 \rangle$ . Así, tenemos que

$$\begin{aligned} st(\sigma, \Sigma) &= \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma\} & \check{st}(\sigma, \Sigma) &= \{\check{\sigma}_0, \check{\sigma}_1, \langle e_1^*, -e_1^*, e_2^* \rangle\} \\ \Sigma/\sigma &= \{\langle e_1 \rangle, \langle -e_1 \rangle, \{0\}\} & (\Sigma/\sigma)^\check{ } &= \{\langle e_1^* \rangle, \langle -e_1^* \rangle, \langle e_1^*, -e_1^* \rangle\} \end{aligned}$$

Es decir, que  $X_{\Sigma/\sigma} = \mathbb{P}^1$  y, por el lema anterior, podemos embeberla en  $X_\Sigma = \mathbb{P}^2$  como la recta proyectiva  $\mathbb{P}^1 \times \{0\}$ .

**Ejemplo 4.2.8.** Dado el abanico  $\Sigma$  del Ejemplo 3.3.3, vamos a elegir el cono  $\sigma = \langle e_1 \rangle \in \Sigma$ , luego  $(\mathbb{R} \cdot \sigma)^\perp = \langle e_2, -e_2 \rangle$ . Así, tenemos que

$$\begin{aligned} st(\sigma, \Sigma) &= \{\sigma_0, \sigma_3, \sigma\} & \check{st}(\sigma, \Sigma) &= \{\check{\sigma}_0, \check{\sigma}_3, \langle e_1^*, e_2^*, -e_2^* \rangle\} \\ \Sigma/\sigma &= \{\langle e_2 \rangle, \langle -e_2 \rangle, \{0\}\} & (\Sigma/\sigma)^\check{ } &= \{\langle e_2^* \rangle, \langle -e_2^* \rangle, \langle e_2^*, -e_2^* \rangle\} \end{aligned}$$

Es decir, que  $X_{\Sigma/\sigma} = \mathbb{P}^1$  y, por el lema anterior, podemos embeberla en  $X_{\Sigma} = \mathbb{P}^2$  como la recta proyectiva  $\{0\} \times \mathbb{P}^1$ . De igual modo, si ahora elegimos  $\tau = \langle -e_1 \rangle \in \Sigma$ , tenemos:

$$\begin{aligned} st(\tau, \Sigma) &= \{\sigma_1, \sigma_2, \tau\} & \check{st}(\tau, \Sigma) &= \{\check{\sigma}_1, \check{\sigma}_2, \langle -e_1^*, e_2^*, -e_2^* \rangle\} \\ \Sigma/\tau &= \{\langle e_2 \rangle, \langle -e_2 \rangle, \{0\}\} & (\Sigma/\tau)^{\check{}} &= \{\langle e_2^* \rangle, \langle -e_2^* \rangle, \langle e_2^*, -e_2^* \rangle\} \end{aligned}$$

Nuevamente, obtenemos que  $X_{\Sigma/\tau} = \mathbb{P}^1$ , pero está embebida en  $X_{\Sigma}$  como la recta proyectiva  $\{\infty\} \times \mathbb{P}^1$ . Esto se debe a que para  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  hemos elegido coordenadas  $([t_0 : t_1], [s_0 : s_1])$  con  $z_1 = t_0/t_1$  y  $z_2 = s_0/s_1$ . Luego, en el caso de  $X_{\Sigma/\sigma}$  tenemos que  $z_1 = 0$ , es decir,  $t_0 = 0$  y, por tanto, el embebimiento en  $X_{\Sigma}$  está dado por  $\{[0 : 1]\} \times \mathbb{P}^1 = \{0\} \times \mathbb{P}^1$ . Por otro lado, en  $X_{\Sigma/\tau}$  tenemos que  $z_1^{-1} = 0$ , luego  $t_1 = 0$  y el embebimiento en  $X_{\Sigma}$  está dado por  $\{[1 : 0]\} \times \mathbb{P}^1 = \{\infty\} \times \mathbb{P}^1$ . Del mismo modo, podemos obtener las subvariedades tóricas invariantes  $\mathbb{P}^1 \times \{0\}$  y  $\mathbb{P}^1 \times \{\infty\}$  de  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  a partir de los conos  $\langle e_2 \rangle$  y  $\langle -e_2 \rangle$  respectivamente.



# Capítulo 5

## La acción tórica y sus órbitas

En esta sección vamos a ver el motivo de que las variedades que estamos tratando en este texto se llamen tóricas.

### 5.1. La acción tórica

El toro  $\mathbb{T} = (\mathbb{C}^*)^n$  es un grupo con la operación de multiplicación componente a componente. La acción del toro sobre cualquier variedad tórica  $X_\sigma$  se describe de la siguiente forma:

**Definición 5.1.1.** Sea  $\{a_1, \dots, a_k\}$  un sistema de generadores del monoide  $S_\sigma$  en  $\mathbb{R}^n$ . Escribimos cada  $a_i$  con coordenadas  $a_i = (a_i^1, \dots, a_i^n)$  con  $a_i^j \in \mathbb{Z}$  y cada  $t \in \mathbb{T}$  con coordenadas  $t = (t_1, \dots, t_n)$  con  $t_j \in \mathbb{C}^*$ . Un punto  $x \in X_\sigma$  tendrá coordenadas  $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{C}^k$ . La aplicación dada por:

$$\begin{aligned} \mathbb{T} \times X_\sigma &\longrightarrow X_\sigma \\ (t, x) &\longmapsto tx = (t^{a_1} x_1, \dots, t^{a_k} x_k) \end{aligned}$$

donde  $t^{a_i} = t_1^{a_i^1} \cdots t_n^{a_i^n} \in \mathbb{C}^*$  es una acción de grupo llamada la acción tórica (natural) sobre  $X_\sigma$ .

**Observación 5.1.2.** *La acción está bien definida.*

*Demostración.* Basta con comprobar que dados  $(x_1, \dots, x_k) \in X_\sigma$  y  $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{T}$ , entonces  $(t^{a_1} x_1, \dots, t^{a_k} x_k)$  cumple las relaciones binomiales de  $I_\sigma$ . Sea  $\xi^\nu - \xi^\mu \in I_\sigma$ , donde  $\xi^\nu = \xi_1^{\nu_1} \cdots \xi_k^{\nu_k}$  y  $\xi^\mu = \xi_1^{\mu_1} \cdots \xi_k^{\mu_k}$  queremos ver que  $(x_1 t^{a_1})^{\nu_1} \cdots (x_k t^{a_k})^{\nu_k} = (x_1 t^{a_1})^{\mu_1} \cdots (x_k t^{a_k})^{\mu_k}$ , es decir, que

$(t^{a_1\nu_1} \dots t^{a_k\nu_k})(x_1^{\nu_1} \dots x_k^{\nu_k}) = (t^{a_1\mu_1} \dots t^{a_k\mu_k})(x_1^{\mu_1} \dots x_k^{\mu_k})$ . Esto es cierto, dado que  $(x_1, \dots, x_k) \in X_\sigma$  implica que  $x_1^{\nu_1} \dots x_k^{\nu_k} = x_1^{\mu_1} \dots x_k^{\mu_k}$  y que por la Proposición 2.3.10, se tiene que  $(t^{a_1}, \dots, t^{a_k}) \in X_\sigma \cap (\mathbb{C}^*)^k$ , luego  $t^{a_1\nu_1} \dots t^{a_k\nu_k} = t^{a_1\mu_1} \dots t^{a_k\mu_k}$ .  $\square$

**Teorema 5.1.3.** *La acción tórica es compatible con la aplicación de cambio de coordenadas entre diferentes representaciones de una variedad tórica.*

*Demostración.* Sea  $\sigma$  un cono en  $\mathbb{R}^n$ , elegimos dos sistemas de generadores  $\{a_1, \dots, a_k\}$  y  $\{b_1, \dots, b_l\}$  de  $S_\sigma$ . Por el Lema 2.3.5, existe un cambio de coordenadas entre las representaciones  $V(I_\sigma) \subseteq \mathbb{C}^k$  y  $V(I'_\sigma) \subseteq \mathbb{C}^l$  de la variedad tórica  $X_\sigma$ .

Recordemos que el cambio de coordenadas  $\phi$  venía dado de la siguiente forma. Sea  $b_j = \lambda_1^j a_1 + \dots + \lambda_k^j a_k$  con  $\lambda_i^j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  y  $\phi(x_1, \dots, x_k) = (y_1, \dots, y_l)$ , entonces  $y_j = x_1^{\lambda_1^j} \dots x_k^{\lambda_k^j}$ .

Veamos que  $\phi(t^{a_1} x_1, \dots, t^{a_k} x_k) = (t^{b_1} y_1, \dots, t^{b_l} y_l)$ , es decir, que la acción tórica es compatible con el cambio de coordenadas. Efectivamente, para cada  $j = 1, \dots, l$ , tenemos que  $t^{b_j} y_j = t^{a_1 \lambda_1^j + \dots + a_k \lambda_k^j} x_1^{\lambda_1^j} \dots x_k^{\lambda_k^j} = t^{a_1 \lambda_1^j} x_1^{\lambda_1^j} \dots t^{a_k \lambda_k^j} x_k^{\lambda_k^j}$ , lo cual finaliza la demostración.  $\square$

**Observación 5.1.4.** *El toro embebido  $X_\sigma \cap (\mathbb{C}^*)^k$  en la variedad  $X_\sigma$  es una órbita de la acción natural del toro llamada la “gran” órbita. Se puede comprobar fácilmente que se corresponde con la órbita del punto  $(1, \dots, 1) \in \mathbb{T}$ .*

Ahora, dado un abanico  $\Sigma$ , queremos ver que las acciones tóricas naturales sobre cada  $X_\sigma$  con  $\sigma \in \Sigma$  se pueden extender a una acción tórica natural sobre  $X_\Sigma$ .

**Teorema 5.1.5.** *Sea  $\Sigma$  un abanico en  $\mathbb{R}^n$ , dado un cono  $\sigma \in \Sigma$  y una cara  $\tau < \sigma$ , la identificación  $X_\tau \cong X_\sigma \setminus \{u_k = 0\}$  del Lema 3.2.3 es compatible con la acción tórica natural sobre dichas variedades tóricas.*

*Demostración.* Sea  $\{a_1, \dots, a_k\}$  un sistema de generadores de  $S_\sigma$  con  $\sigma$  un cono del abanico  $\Sigma$  en  $\mathbb{R}^n$ . Obtenemos las funciones coordenadas  $(u_1, \dots, u_k)$  de la variedad tórica  $X_\sigma$ .

Sea  $\tau$  una cara de  $\sigma$ , recordamos que podemos construir la variedad tórica  $X_\tau$  con funciones coordenadas  $(u_1, \dots, u_{k+1})$  tal que las relaciones entre las funciones coordenadas de  $X_\tau$  son las mismas que las de  $X_\sigma$  añadiendo la relación  $u_k u_{k+1} = 1$ .

Dado  $t \in \mathbb{C}^{k+1}$  y  $x = (x_1, \dots, x_{k+1}) \in X_\tau$ , al aplicar la acción tórica sobre  $X_\tau$  obtenemos el punto  $tx = (t^{a_1} x_1, \dots, t^{a_{k+1}} x_{k+1})$  que se corresponde, vía la identificación entre  $X_\tau$  y  $X_\sigma \setminus \{u_k = 0\}$ , con el punto  $(t^{a_1} x_1, \dots, t^{a_k} x_k) \in X_\sigma \setminus \{u_k = 0\}$  que coincide

con la acción tórica sobre el punto  $x' = (x_1, \dots, x_k) \in X_\sigma \setminus \{u_k = 0\}$ . Con esto queda demostrado el teorema.  $\square$

Este teorema implica que la acción tórica sobre cada cono de un abanico es compatible con la aplicación de pegado de variedades tóricas afines. Finalmente, podemos afirmar que:

**Corolario 5.1.6.** *Dado un abanico  $\Sigma$  en  $\mathbb{R}^n$ , la acción tórica natural sobre las variedades tóricas afines  $X_\sigma$  para cada  $\sigma \in \Sigma$ , inducen una acción natural tórica sobre la variedad tórica  $X_\Sigma$ .*

Dado que la acción tórica sobre cualquier variedad tórica está descrita por monomios, podemos afirmar directamente el siguiente resultado.

**Teorema 5.1.7.** *Respecto a la topología usual y la topología de Zariski en  $\mathbb{C}^k$ , la acción tórica sobre cualquier variedad tórica  $X_\Sigma$  es continua. La gran órbita es un subconjunto abierto denso, luego cualquier otra órbita está contenida en su clausura.*

Ahora, como habíamos adelantado antes, vamos a hablar sobre el comportamiento de las subvariedades tóricas invariantes respecto de la acción tórica. Usaremos la misma notación que en el capítulo anterior, es decir, consideramos un cono  $\sigma$  en  $\mathbb{R}^n$  y una cara propia  $\tau$  del cono dual  $\check{\sigma}$ . Consideramos un sistema generador  $(a_1, \dots, a_k)$  de  $\tau$  y lo extendemos a un sistema generador  $(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_q)$  de  $\check{\sigma}$ . De esta forma, tomando  $u_i = z^{a_i}$ , tenemos que  $X_\tau \cong X_\sigma \cap \{u_{k+1} = \dots = u_q = 0\}$ . Ahora bien, el siguiente lema justifica por qué llamamos invariantes a las subvariedades tóricas invariantes.

**Lema 5.1.8.** *Toda subvariedad afín tórica  $X_\tau$  de una variedad tórica afín  $X_\sigma$  es invariante bajo la acción natural del toro sobre  $X_\sigma$ .*

Ahora vamos a dar un par de resultados necesarios para poder demostrar que cualquier variedad tórica se puede expresar como unión disjunta de sus órbitas por la acción tórica natural.

**Teorema 5.1.9.** *La acción natural del toro sobre una subvariedad tórica invariante  $X_\tau$  de  $X_\sigma$  está dada por la acción inducida de un subtoro  $\mathbb{T}'$  en  $\mathbb{T}$ .*

*Demostración.* Podemos elegir una base  $\{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$  del retículo  $N$  tal que  $\{v_1, \dots, v_r\}$  es una base del espacio vectorial  $\mathbb{R} \cdot \tau$  y  $\tau \subset \check{\sigma} \cap (-\check{\sigma}) + \langle v_1, \dots, v_r \rangle$ . De

aquí, tenemos un sistema de generadores  $\{a_1, \dots, a_m, a_{m+1}, \dots, a_k\}$  del monoide  $\check{\sigma} \cap M$  con  $\tau = \langle a_1, \dots, a_m \rangle$  y  $a_i \notin \tau$  para  $i \geq m+1$  y las correspondientes coordenadas  $(u_1, \dots, u_m)$  y  $(u_1, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_k)$  de las variedades  $X_\tau$  y  $X_\sigma$  respectivamente. Así, la acción natural del toro de  $(\mathbb{C}^*)^r$  sobre  $X_\tau$  está dada por  $s(x_1, \dots, x_m) = (s^{a_1}x_1, \dots, s^{a_m}x_m)$  para  $s = (s_1, \dots, s_r) \in (\mathbb{C}^*)^r$ . Esta acción es claramente compatible con la acción inducida por el subtoro  $\mathbb{T}' = \{t \in \mathbb{T} : t_{r+1} = \dots = t_n = 1\}$  de  $\mathbb{T}$  sobre la subvariedad tórica invariante  $X_\tau \cong X_{\check{\sigma}} \cap \{u_{m+1} = \dots = u_k = 0\}$ .  $\square$

**Lema 5.1.10.** *Toda subvariedad tórica invariante afín  $X_\tau$  de  $X_\sigma$  contiene una única órbita  $O_\tau$  que es relativamente densa en  $X_\tau$ , es decir,  $X_\tau$  es la clausura de una órbita. Del mismo modo, toda clausura de una órbita en  $X_\sigma$  es una subvariedad tórica invariante afín  $X_\tau$  para una única cara  $\tau$  de  $\check{\sigma}$ .*

*Demostración.* Para demostrar la primera afirmación, sabemos que por el Teorema 5.1.9, la acción natural del toro sobre una subvariedad tórica invariante  $X_\tau$  de  $X_\sigma$  está dada por la acción inducida de un subtoro  $\mathbb{T}'$  de  $\mathbb{T}$ . Ahora bien, por el Teorema 5.1.7, la gran órbita de la acción inducida por el toro  $\mathbb{T}'$  es una órbita abierta densa en  $X_\tau$ , que será única respecto de estas condiciones, porque cualquier otra órbita no será densa en  $X_\tau$  dado que estará contenida en el complementario de la gran órbita, que es un cerrado.

Para la segunda afirmación, descomponemos el cono  $\check{\sigma}$  de la siguiente forma. Podemos encontrar una base  $\{v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_n\}$  del retículo  $\mathbb{Z}^n$  tal que  $\{v_1, \dots, v_p\}$  es una base de  $\gamma \cap \mathbb{Z}^n$  con  $\gamma = \check{\sigma} \cap (-\check{\sigma})$ . Consideramos el subespacio lineal  $U'$  generado por  $\{v_{p+1}, \dots, v_n\}$ . Con esto, consideramos  $\nu = \check{\sigma} \cap U'$  que es un cono racional cumpliendo  $\check{\sigma} = \gamma + \nu$ . Si es necesario, modificamos la base  $\{v_{p+1}, \dots, v_n\}$  de  $U' \cap \mathbb{Z}^n$  de forma que podamos asumir que  $\nu \subset \langle v_{p+1}, \dots, v_n \rangle$ .

Toda cara de  $\check{\sigma}$  se puede escribir de forma única como  $\tau = \gamma + \tau_0$  con  $\tau_0 = \tau \cap \nu$  una cara de  $\nu$ . Sea  $A(\nu) = \{a_{p+2}, \dots, a_k\}$  el único sistema mínimo de generadores de  $\nu \cap \mathbb{Z}^n$  (ver Lema 1.3.10), entonces  $A(\tau_0) = A(\nu) \cap \tau$  es el sistema mínimo de generadores de  $\tau_0 \cap \mathbb{Z}^n$ .

Consideramos un punto  $x \in X_\sigma$  que no esté en la clausura de una órbita. Así, respecto del sistema coordinado  $(u_1, \dots, u_p, u_{p+1}, u_{p+2}, \dots, u_k)$  correspondiente al sistema mínimo de generadores  $A(\check{\sigma}) = \{a_1, \dots, a_p, a_{p+1}, a_{p+2}, \dots, a_k\}$  con  $a_i = v_i$  para  $i \leq p$  y  $a_{p+1} = -(a_1 + \dots + a_p)$ , hay coordenadas  $x_i \neq 0$  para algún  $i \geq p+2$  (dado que  $u_i$  es inversible para  $i \leq p+1$ ), luego  $A(x) = \{a_i \in A(\check{\sigma}) : x_i \neq 0, i \geq p+2\}$  es no vacío. Entonces,  $\tau_0 = \nu \cap V$  (con  $V$  el espacio vectorial generado por  $A(x)$ ) es la

cara más pequeña de  $\nu$  conteniendo  $A(x)$ . Tenemos que  $A(x) = A(\tau_0)$ . Finalmente,  $\tau = \gamma + \tau_0$  tiene la propiedad de que el punto  $x$  está en la órbita abierta densa de  $X_\tau$ , luego  $X_\tau$  es la clausura de la órbita  $\mathbb{T}x$ .  $\square$

Dado un cono fijo  $\sigma$  de un abanico  $\Sigma$ , podemos considerar la subvariedad tórica invariante  $X_{\Sigma/\sigma}$  de  $X_\Sigma$ . Por el Lema 5.1.10, sabemos que, en el caso afín, una subvariedad tórica invariante es una clausura de una órbita. Por el Teorema 5.1.9, la acción tórica natural sobre dicha subvariedad está inducida por la acción tórica natural sobre la variedad ambiente restringida a un subtoro adecuado. Veremos que esto también se conserva en el caso general.

**Teorema 5.1.11.** *Dado un abanico  $\Sigma$  en  $\mathbb{R}^n$ :*

1. *Toda órbita de la acción tórica sobre la variedad tórica  $X_\Sigma$  es el embebimiento  $\mathbb{T}_k$  de un toro de dimensión  $k$  con  $0 \leq k \leq n$ .*
2.  *$X_\Sigma$  es la unión disjunta de todas sus órbitas. Su número es finito.*

*Demostración.* 1. Consecuencia directa del Lema 5.1.10

2. Que  $X_\Sigma$  sea unión disjunta de sus órbitas se debe a la definición de órbita (un punto no puede estar en dos órbitas distintas). La segunda parte del enunciado se demuestra inductivamente. Esto se debe a que cualquier subvariedad tórica  $X_{\Sigma/\sigma}$  contiene a un toro  $\mathbb{T}_k$  de dimensión  $k$  como un subconjunto denso y abierto y  $X_{\Sigma/\sigma} \setminus \mathbb{T}_k$  es subvariedad tórica de  $X_{\Sigma/\sigma}$ , luego podemos recubrirlo con embebimientos de toros de menor dimensión.  $\square$

**Definición 5.1.12.** Llamamos a cada uno de los  $\mathbb{T}_k$  del teorema anterior *toro embebido*. En particular,  $\mathbb{T}_n = \mathbb{T}$  se llama la *gran órbita* de  $X_\Sigma$ .



# Bibliografía

- [Bras] Jean-Paul Brasselet : *Introduction to Toric Varieties*, Marseille, 2006.
- [Cox] David Cox, John Little, Hal Schenck : *Toric Varieties*, American Mathematical Society, 2011.
- [Cox2] David Cox, John Little, Donal O'Shea : *Using Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, Nueva York, 1998.
- [Cox3] David Cox : *Lectures on Toric Varieties*, CIMPA School on Commutative Algebra, Hanoi, 2005.
- [Dem] Michel Demazure : *Sous-groupes algébriques de rang maximum du groupe de Cremona*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)**3**,(1970), 507-588.
- [Ewa] Günter Ewald : *Combinatorial Convexity and Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, Nueva York, 1996.
- [Ful] William Fulton : *Introduction to Toric Varieties*, Princeton University Press, New Jersey, 1993.
- [Hart] Robin Hartshorne : *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, Nueva York, 1977.
- [Hung] Thomas W. Hungerford : *Algebra*, Springer-Verlag, Nueva York, 1974.
- [Koop] Tjalling C. Koopmans : *Activity Analysis of Production and Allocation*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1951.
- [Mac] James MacLaurin : *The Resolution of Toric Singularities*, University of South Wales, 2006.
- [Mil] Ezra Miller : *What is a Toric Variety?*, Notices of the AMS (55)**5**, (2008), 586-587.

- [Oda] Tadao Oda : *Convex Bodies and Algebraic Geometry: An Introduction to the Theory of Toric Varieties*, Springer-Verlag, Alemania, 1988.
- [Rock] R. Tyrrell Rockafellar : *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, 1970.
- [Ver] Helena Verrill, David Joyner : *Notes on toric varieties*, 2002.