



**Facultad
de
Ciencias**

PERTURBACIONES REGULARES Y SINGULARES EN PROBLEMAS DE CONTORNO

**(Regular and singular perturbations in boundary value
problems)**

**Trabajo de Fin de Grado
para acceder al**

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autor: Rubén Martínez Fernández

Directora: Delfina Gómez Gandarillas

Septiembre-2023

Resumen/Abstract

Resumen:

La presencia de un pequeño parámetro en un modelo diferencial puede ocasionar pequeñas o grandes perturbaciones en sus soluciones que dificultan los tratamientos computacionales usuales. El objetivo de este trabajo es abordar su influencia a través de diversos ejemplos con perturbaciones regulares y singulares. Para ello, se utilizarán técnicas del Análisis Asintótico que permiten obtener una aproximación de la solución cuando el pequeño parámetro tiende a cero. También se analizará el problema de la justificación, que precisa de herramientas del Análisis Funcional.

Palabras clave: problemas de contorno perturbados, pequeños parámetros, desarrollos asintóticos, capa límite, desarrollos compuestos.

Abstract:

The presence of a small parameter in a differential model may cause small or large perturbations in its solutions that make computational treatments difficult. The aim of this work is to address the effect of this parameter through several examples with regular and singular perturbations. To do this, Asymptotic Analysis techniques that allow us to obtain an approximation of the solution when the small parameter tends to zero will be used. The problem of the justification, which requires Functional Analysis tools, will also be analyzed.

Keywords: perturbed boundary value problems, small parameters, asymptotic expansions, boundary layer, composite expansions.

Índice general

Introducción	1
1. Preliminares	3
1.1. Resultados básicos y notación	3
1.2. Problema de contorno y Teorema de la Alternativa	4
1.3. Símbolos de orden. Sucesiones asintóticas	8
1.4. Órdenes de magnitud. Desarrollos asintóticos	12
2. Perturbaciones regulares y singulares	19
2.1. Problemas de contorno con perturbación regular	19
2.2. Algunos ejemplos regulares	21
2.3. Problemas de contorno con perturbación singular	28
2.4. Algunos ejemplos singulares	34
3. El problema de la justificación	41
3.1. Marco abstracto	41
3.2. Algunos ejemplos de justificación	44
Bibliografía	51

Introducción

En diversos modelos diferenciales que describen ciertos fenómenos físicos aparecen parámetros que en ocasiones toman valores muy pequeños. Estos parámetros pueden ocasionar grandes o pequeñas perturbaciones en las soluciones de los problemas y dificultar los tratamientos computacionales usuales de las mismas. Por ejemplo, se puede considerar el siguiente problema

$$\begin{cases} (x + \varepsilon)^2 u'_\varepsilon(x) + \varepsilon = 0 & x \in (0, 1) \\ u_\varepsilon(0) = 1, \end{cases}$$

donde ε es un pequeño parámetro positivo, $\varepsilon \in (0, 1]$. Para cada $\varepsilon > 0$, la solución de dicho problema viene dada por $u_\varepsilon(x) = \varepsilon/(x + \varepsilon)$ donde se puede observar que para valores muy pequeños de ε y x , la solución está definida como un cociente que puede dar lugar a errores computacionales. Además tomando ε muy pequeño se puede conjeturar que la solución del siguiente problema

$$\begin{cases} x^2 u'_0(x) = 0 & x \in (0, 1) \\ u_0(0) = 1, \end{cases}$$

que proviene de considerar $\varepsilon = 0$ en el problema de partida, se aproxima a la solución u_ε . Sin embargo, esto no es cierto ya que en ese caso $u_0(x) = 1$ mientras que la función $u_\varepsilon(x) = \varepsilon/(x + \varepsilon)$ converge puntualmente a la función

$$\tilde{u}_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

El ejemplo anterior permite ver que para obtener aproximaciones a la solución u_ε , no basta con prescindir del parámetro en el problema de partida y resolverlo para obtener una aproximación. Surge así la necesidad de realizar un estudio teórico de los denominados problemas perturbados, es decir, aquellos problemas donde aparece un pequeño parámetro ε que se hará tender a cero, a fin de determinar una aproximación de las soluciones que luego se puede calcular analítica o numéricamente.

Para obtener las aproximaciones mencionadas, se utilizará la teoría del análisis asintótico que se basa en dos etapas complementarias y no excluyentes. La primera fase versa sobre el cálculo formal de desarrollos asintóticos de la solución de los problemas. Dichos desarrollos proporcionarán candidatos a aproximaciones de la solución bajo ciertas suposiciones. Una vez determinados los candidatos a aproximaciones, se pasa a la segunda fase que trata de justificar que dichas aproximaciones son ciertamente desarrollos asintóticos de la solución del problema perturbado. Para ello, se prueba que la diferencia entre la solución exacta del problema, u_ε , y el candidato a aproximación, con una norma determinada, tiende a cero cuando ε tiende a cero. Para justificarlo, no será necesario conocer explícitamente la solución del problema ni su aproximación.

Nótese que el parámetro puede aparecer tanto en las ecuaciones, como en las condiciones (iniciales, de contorno, ...) o en el dominio. Por simplicidad, en este trabajo únicamente se abordan problemas de contorno asociados a ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden, donde el pequeño parámetro aparece en la ecuación diferencial. El objetivo del trabajo es

estudiar, a través de diversos ejemplos, la influencia del parámetro, obteniendo distinto comportamiento dependiendo de la ubicación del mismo en la ecuación.

En el primer capítulo se proporcionan nociones básicas de ecuaciones diferenciales ordinarias que se utilizarán en la memoria. Además se definirán conceptos del análisis asintótico, que serán fundamentales para llevar a cabo la primera de las fases previamente mencionadas. En particular, se introducirán los conceptos de sucesión asintótica, aproximación asintótica y desarrollo asintótico entre otros. De entre todos los conceptos a introducir, caben destacar los desarrollos asintóticos regulares, ya que son el tipo de desarrollos con los que se comienza a construir las aproximaciones de las soluciones de los problemas a tratar.

En el Capítulo 2 se procede a definir un problema de contorno perturbado distinguiendo aquellos con perturbación regular y singular. En el caso singular, se analizará el caso particular de perturbaciones singulares de tipo capa límite. Se proporcionarán diversos ejemplos originales donde la presencia del parámetro se ubicará en distintos términos de la ecuación, dando lugar a diferentes perturbaciones regulares o singulares. Además, se determinarán aproximaciones para cada uno de los ejemplos.

Para concluir con la memoria, en el tercer capítulo se trata la segunda de las fases previamente mencionadas: el problema de la justificación. La finalidad es probar que la diferencia entre la solución exacta y la aproximación obtenida converge a cero cuando ε tiende a cero en una determinada norma, sin necesidad de conocer explícitamente dichas funciones. Es por ello que se introducen ciertos conceptos y resultados del análisis funcional que permitirán probarlo en tres ejemplos con perturbación regular.

Capítulo 1

Preliminares

En este primer capítulo se hará una recopilación de resultados vistos en el grado, así como de otros que son novedosos y que serán de utilidad a lo largo de la memoria. Se comienza recordando resultados básicos sobre la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) lineales, continuando con la definición de problema de contorno. Se prosigue enunciando y demostrando el Teorema de la Alternativa, el cual permite determinar cuándo un problema de contorno tiene una única solución. Además se ilustrarán diversos ejemplos a modo de aplicación del teorema mencionado. Posteriormente para concluir con el capítulo, se irán introduciendo y trabajando conceptos de la teoría del análisis asintótico, que serán fundamentales cuando se estudien en el Capítulo 2 los problemas de contorno perturbados.

1.1. Resultados básicos y notación

Con el objetivo de introducir notación para desarrollar la memoria, se mencionarán conceptos básicos relacionados con la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias, para lo cual se han utilizado las referencias [4], [9] y [14]. Todas las ecuaciones diferenciales ordinarias que se emplearán a lo largo de la memoria serán lineales de orden 2 de la forma

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g(x) \quad (1.1)$$

donde $a_0, a_1, a_2, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas, es decir $a_0, a_1, a_2, g \in C[a, b]$, y $a_2(x) \neq 0$ para todo $x \in [a, b]$ con $a < b$. Al considerar una expresión como (1.1) donde se supone que el coeficiente $a_2(x) \neq 0$ para todo $x \in [a, b]$, se puede dividir por dicha función la ecuación y obtener la siguiente expresión equivalente, renombrando ciertas funciones:

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x) \quad (1.2)$$

con $p, q, f \in C[a, b]$. Es conocido que la diferencia de dos soluciones de (1.2) es solución de la ecuación lineal homogénea asociada,

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0. \quad (1.3)$$

Por lo que considerando y_{hom} la solución general de (1.3) e y_{part} una solución particular de (1.2), se obtiene la solución general de (1.2)

$$y(x) = y_{hom}(x) + y_{part}(x). \quad (1.4)$$

Otro resultado que es de interés considerar, es que el conjunto de soluciones de (1.3) forma un espacio vectorial de dimensión 2. Con esta apreciación y la expresión (1.4), la solución general de (1.2) viene dada por:

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + y_{part}(x) \quad (1.5)$$

siendo las funciones y_1, y_2 soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea (1.3), y_{part} una solución particular de la ecuación completa (1.2) y $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ constantes arbitrarias. Como $p, q, f \in C[a, b]$ una solución particular de (1.2), y_{part} , se podrá determinar mediante el método de variación de parámetros, por lo que se busca de la forma $y_{part}(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$ con $c_1(x)$ y $c_2(x)$ funciones a determinar verificando el sistema

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = f(x). \end{cases}$$

Nótese que todo lo considerado previamente para ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de orden 2 es fácilmente generalizable a ecuaciones de orden n , $n \in \mathbb{N}$, pero en lo que respecta al trabajo únicamente consideramos el caso $n = 2$.

1.2. Problema de contorno y Teorema de la Alternativa

En esta sección se introducirá la definición de problema de contorno con la que se trabajará en la memoria, concluyendo la misma enunciando y demostrando el Teorema de la Alternativa, el cual permite caracterizar cuándo un problema de contorno tiene una única solución. Las principales referencias utilizadas en la sección son [4], [9], [11] y [14].

Los problemas de contorno a considerar estarán formados por una ecuación diferencial (1.2), junto con dos condiciones de contorno de la forma

$$\begin{aligned} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) &= \gamma \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) &= \delta \end{aligned} \tag{1.6}$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \gamma, \beta_1, \beta_2, \delta \in \mathbb{R}$ con $|\alpha_1| + |\alpha_2| > 0$ y $|\beta_1| + |\beta_2| > 0$. Se exige que en ambas condiciones al menos una de las constantes α_1, α_2 y β_1, β_2 respectivamente sea no nula, para tener información en los dos extremos del intervalo $[a, b]$. Las condiciones (1.6) se denominan condiciones de contorno separadas, ya que cada una de ellas depende únicamente de uno de los extremos del intervalo $[a, b]$ donde están definidas todas las funciones involucradas en la ecuación diferencial. Se procede a definir de forma precisa en lo que respecta a la memoria, lo que se considerará un problema de contorno.

Definición 1.2.1. (Problema de Contorno)

Dados $a, b, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ con $|\alpha_1| + |\alpha_2| > 0$ y $|\beta_1| + |\beta_2| > 0$ y $p, q, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continuas, se denomina **problema de contorno** al problema que consiste en la búsqueda de funciones $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ verificando

$$\begin{cases} y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x) & \forall x \in (a, b) \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \gamma \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \delta. \end{cases} \tag{1.7}$$

En el caso en el que la ecuación diferencial (1.2) y las condiciones de contorno (1.6) sean homogéneas, es decir, f idénticamente cero y $\gamma = \delta = 0$, se dice que el problema (1.7) es un **problema de contorno homogéneo**.

Señalemos que un problema de contorno homogéneo siempre tiene al menos la solución trivial. No obstante, en general un problema de contorno puede tener una única solución, infinitas o por lo contrario ninguna solución. Los siguientes ejemplos ilustran cada una de dichas situaciones, donde la ecuación a considerar es común a todos ellos y varían las condiciones de contorno.

Ejemplo 1.2.2. (Problema de contorno con una única solución)

Se considera el siguiente problema

$$\begin{cases} (2x+1)y''(x) - 4(x+1)y'(x) + 4y(x) = (2x+1)^2 e^{2x} \\ y(0) - y'(0) = \frac{5}{24}, \quad y\left(\frac{1}{2}\right) + y'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2} \end{cases} \quad (1.8)$$

que dividiendo su ecuación por $(2x+1)$ se obtiene un problema de contorno de la forma (1.7) equivalente a (1.8). Se trata de probar si el problema tiene solución y en caso afirmativo si es única. Se comienza resolviendo la ecuación diferencial del problema que es de coeficientes variables. Dicha ecuación es equivalente a

$$y''(x) - \frac{4(x+1)}{2x+1}y'(x) + \frac{4}{2x+1}y(x) = (2x+1)e^{2x} \quad \text{si } x \neq -\frac{1}{2}. \quad (1.9)$$

La solución general de (1.9) viene dada por (1.5), donde y_1, y_2 son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea asociada

$$(2x+1)y''(x) - 4(x+1)y'(x) + 4y(x) = 0, \quad (1.10)$$

e y_{part} es una solución particular de (1.9). Nótese que $y_1(x) = x+1$ es solución de (1.10) y al ser una ecuación con coeficientes variables, es factible optar por el método de reducción de orden para determinar su solución general. Se realiza el cambio $y(x) = (x+1)u(x)$, siendo u la nueva variable, para llegar a un ecuación diferencial de primer orden. De esta manera se obtiene una segunda solución $y_2(x) = e^{2x}$, la cual es linealmente independiente con y_1 .

Para obtener una solución particular de (1.9), se hará uso del método de variación de parámetros. Buscamos $y_{part}(x) = c_1(x)(x+1) + c_2(x)e^{2x}$ con $c_1(x), c_2(x)$ funciones a determinar, obteniendo

$$y_{part}(x) = \frac{e^{2x}}{2}(x^2 + x - 1).$$

Por tanto la solución general de la ecuación del problema de contorno (1.8) es

$$y(x) = c_1(x+1) + c_2e^{2x} + \frac{e^{2x}}{2}(x^2 + x - 1) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \quad (1.11)$$

A continuación se analizan las condiciones de contorno para ver si el problema tiene o no solución. Imponiendo dichas condiciones a la solución general de la ecuación, (1.11), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} -c_2 = \frac{5}{24} \\ \frac{5}{2}c_1 + 3ec_2 + \frac{5e}{8} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

donde $c_1 = 1$, $c_2 = -5/24$ y por consiguiente el problema de contorno (1.8) tiene una única solución:

$$y(x) = (x+1) + \frac{e^{2x}}{2} \left(x^2 + x - \frac{17}{12} \right).$$

Ejemplo 1.2.3. (Problema de contorno con infinitas soluciones)

Considérese ahora el problema

$$\begin{cases} (2x+1)y''(x) - 4(x+1)y'(x) + 4y(x) = (2x+1)^2 e^{2x} \\ y(0) + y'(0) = -4, \quad \left(4 - \frac{3}{e}\right)y\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{9}{2e} - 2\right)y'\left(\frac{1}{2}\right) = -2e - \frac{9}{4}. \end{cases} \quad (1.12)$$

A diferencia del ejemplo anterior, este problema tiene infinitas soluciones. Esto ocurre debido a que al imponer ambas condiciones de contorno en la solución general (1.11) se llega al sistema

$$\begin{cases} 2c_1 + 3c_2 = -3 \\ 4c_1 + 6c_2 = -6 \end{cases}$$

concluyendo que $c_1 = (3c_2 - 3)/2$ mientras que $c_2 \in \mathbb{R}$ cualquiera. Así, se obtienen las infinitas soluciones del problema de contorno (1.12)

$$y(x) = \frac{3}{2}(c_2 - 1)(x + 1) + c_2 e^{2x} + \frac{e^{2x}}{2}(x^2 + x - 1) \text{ con } c_2 \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 1.2.4. (Problema de contorno sin solución)

Se considera el siguiente problema

$$\begin{cases} (2x + 1)y''(x) - 4(x + 1)y'(x) + 4y(x) = (2x + 1)^2 e^{2x} \\ y(0) + y'(0) = -4, \quad \left(4 - \frac{3}{e}\right)y\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{9}{2e} - 2\right)y'\left(\frac{1}{2}\right) = -2e + \frac{15}{4}. \end{cases} \quad (1.13)$$

A diferencia de los problemas de los ejemplos, Ejemplo 1.2.2 y Ejemplo 1.2.3, este problema no tiene solución, debido a que al aplicar las nuevas condiciones de contorno sobre la solución general (1.11) resulta el siguiente sistema incompatible

$$\begin{cases} 2c_1 + 3c_2 = -3 \\ 4c_1 + 6c_2 = 0. \end{cases}$$

Procedemos a enunciar y demostrar el Teorema de la Alternativa, el cual nos permitirá determinar si un problema de contorno dado tiene una única solución, analizando las soluciones del problema de contorno homogéneo asociado.

Teorema 1.2.5. (Teorema de la Alternativa)

Sean p, q y f funciones continuas en $[a, b]$. Para cada $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ el problema de contorno

$$\begin{cases} y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b) \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \gamma \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \delta \end{cases} \quad (1.14)$$

tiene una única solución si y solo si el problema de contorno homogéneo asociado

$$\begin{cases} y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b) \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0 \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{cases} \quad (1.15)$$

tiene como única solución la solución trivial.

Demostración

Se supone que (1.14) tiene una única solución con $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ fijos y se quiere probar que (1.15) tiene como única solución la trivial. Se tiene que la solución general de la ecuación del problema (1.14) es de la forma:

$$y(x) = c_1 \Phi_1(x) + c_2 \Phi_2(x) + y_{part}(x) \text{ con } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad (1.16)$$

donde Φ_1, Φ_2 son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea asociada e y_{part} es una solución particular de la ecuación completa. Se imponen sobre dicha solución general las condiciones de contorno del problema (1.14), obteniendo así el siguiente sistema de ecuaciones lineales escrito en forma matricial

$$\begin{pmatrix} \alpha_1\Phi_1(a) + \alpha_2\Phi_1'(a) & \alpha_1\Phi_2(a) + \alpha_2\Phi_2'(a) \\ \beta_1\Phi_1(b) + \beta_2\Phi_1'(b) & \beta_1\Phi_2(b) + \beta_2\Phi_2'(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma - \alpha_1y_{part}(a) - \alpha_2y'_{part}(a) \\ \delta - \beta_1y_{part}(b) - \beta_2y'_{part}(b) \end{pmatrix}$$

donde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ son las incógnitas a determinar. De forma abreviada representamos el sistema anterior por $Ac = v$. Como por hipótesis (1.14) tiene una única solución, las constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ están unívocamente determinadas por las condiciones de contorno de (1.14). Esto es equivalente a decir que el sistema de ecuaciones $Ac = v$, es un sistema compatible determinado. Por el Teorema de Rouché-Fröbenius, necesariamente el rango de la matriz de coeficientes, A , coincide con el rango de la matriz ampliada, $(A|v)$. Además dicho rango coincide con el número de incógnitas y por tanto $rg(A) = rg(A|v) = 2$.

Probemos que (1.15) tiene como única solución la trivial. Al igual que se ha razonado previamente, la solución general de su ecuación es de la forma

$$\tilde{y}(x) = \tilde{c}_1\Phi_1(x) + \tilde{c}_2\Phi_2(x) \text{ con } \tilde{c}_1, \tilde{c}_2 \in \mathbb{R} \quad (1.17)$$

donde Φ_1 y Φ_2 son soluciones linealmente independientes de la ecuación de (1.15). Se observa que a diferencia de (1.16) en este caso no hay que añadir una solución particular ya que la ecuación es homogénea. Se quiere probar que \tilde{c}_1 y \tilde{c}_2 son nulas. Para determinar dichos valores se emplea la expresión (1.17) y las condiciones de contorno de (1.15). De esta manera se obtiene el sistema $A\tilde{c} = 0$. Como $rg(A) = 2$, por el Teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es compatible determinado. Por tanto \tilde{c}_1, \tilde{c}_2 están unívocamente determinadas y son nulas, debido a que $(0, 0)^T$ es siempre solución de $A\tilde{c} = 0$.

Recíprocamente, suponemos que el problema de contorno (1.15) tiene una única solución y que dicha solución es la trivial y se quiere demostrar que el problema (1.14) tiene una única solución para constantes $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ fijas cualesquiera. Como se ha visto previamente, imponiendo las condiciones de contorno del problema (1.15) a la solución de la ecuación del mismo, (1.17), se obtiene el sistema lineal $A\tilde{c} = 0$. Como consecuencia de la hipótesis, se tiene que $\tilde{c}_1 = \tilde{c}_2 = 0$ y $rg(A) = 2$. Considerando fijas las constantes $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ y empleando que la solución general de la ecuación de (1.14) es (1.16), se obtiene el sistema $Ac = v$ donde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ están por determinar. Como $rg(A) = 2$, que coincide con el número de incógnitas, el sistema $Ac = v$ es compatible determinado como consecuencia del Teorema de Rouché-Fröbenius. Por tanto c_1, c_2 están unívocamente determinadas, por lo que el problema de contorno (1.14) tiene una única solución como se pretendía. ■

A modo de aplicación del Teorema de la Alternativa (Teorema 1.2.5), se analizarán nuevamente los mismos ejemplos tratados previamente.

Ejemplo 1.2.6. Sea el problema de contorno (1.8), con problema homogéneo asociado

$$\begin{cases} (2x+1)y''(x) - 4(x+1)y'(x) + 4y(x) = 0 \\ y(0) - y'(0) = 0 \quad y\left(\frac{1}{2}\right) + y'\left(\frac{1}{2}\right) = 0. \end{cases} \quad (1.18)$$

Por lo visto en el Ejemplo 1.2.2, la solución general de la ecuación diferencial homogénea es de la forma

$$y_{hom}(x) = \tilde{c}_1(x+1) + \tilde{c}_2e^{2x} \text{ con } \tilde{c}_1, \tilde{c}_2 \in \mathbb{R}. \quad (1.19)$$

Imponiendo las condiciones de contorno sobre esta se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} -\tilde{c}_2 = 0 \\ 5\tilde{c}_1 + 6e\tilde{c}_2 = 0 \end{cases}$$

de donde se concluye que $\tilde{c}_1 = \tilde{c}_2 = 0$ y el problema (1.18) tiene como única solución la trivial. Aplicando el Teorema de la Alternativa, se obtiene que el problema de partida (1.8) tiene una única solución como bien vimos en el Ejemplo 1.2.2.

Ejemplo 1.2.7. Considérese el problema (1.12) y su respectivo problema homogéneo asociado

$$\begin{cases} (2x+1)y''(x) - 4(x+1)y'(x) + 4y(x) = 0 \\ y(0) + y'(0) = 0, \quad \left(4 - \frac{3}{e}\right)y\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{9}{2e} - 2\right)y'\left(\frac{1}{2}\right) = 0. \end{cases} \quad (1.20)$$

Como respecto al ejemplo anterior, Ejemplo 1.2.6, únicamente varían las condiciones de contorno, la solución general de la ecuación del problema (1.20) coincide con la expresión (1.19). Imponiéndole a dicha solución general las nuevas condiciones de contorno homogéneas, se obtiene el siguiente sistema

$$\begin{cases} 2\tilde{c}_1 + 3\tilde{c}_2 = 0 \\ 4\tilde{c}_1 + 6\tilde{c}_2 = 0. \end{cases}$$

Nótese que es un sistema lineal compatible indeterminado, por lo que se tienen infinitas soluciones para el problema (1.20). Por tanto, en virtud del Teorema de la Alternativa, el problema inicial (1.12) no tiene una única solución en caso de que exista. Vimos en el Ejemplo 1.2.3 que se tienen infinitas soluciones para (1.12).

Ejemplo 1.2.8. Sea el problema de contorno (1.13). Al igual que en el Ejemplo 1.2.7, a partir del Teorema de la Alternativa se concluye que el problema (1.13) no tiene una única solución si es que existe, debido a que el problema de contorno homogéneo asociado coincide con (1.20). Como se observó en el Ejemplo 1.2.4, el problema (1.13) no tiene solución.

A pesar de que se pueda dar la casuística de que los problemas de contorno puedan tener una única, infinitas o ninguna solución, en lo que respecta a la memoria consideraremos problemas de contorno cuya solución existe y es única.

Como se ha anunciado al inicio del capítulo, a continuación se van a introducir ciertos conceptos del análisis asintótico que serán imprescindibles para abordar los problemas de contorno perturbados que se considerarán en el próximo capítulo.

1.3. Símbolos de orden. Sucesiones asintóticas

Se comienza con los denominados símbolos de orden, los cuales permiten comparar el comportamiento que tienen dos funciones cualesquiera definidas en $(0, \varepsilon_0]$ con $\varepsilon_0 > 0$ fijo. Esta sección se ha realizado empleando las referencias [1], [3], [6], [7], [8], [10] y [15].

Definición 1.3.1. (Símbolos de orden)

Sean $f, g : (0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas.

- Se dice que $f(\varepsilon) = O(g(\varepsilon))$ cuando ε tiende a cero, si existen constantes $K, C > 0$ independientes de ε tales que $|f(\varepsilon)| \leq K|g(\varepsilon)|$ para $0 < \varepsilon < C$.
- Se dice que $f(\varepsilon) = o(g(\varepsilon))$ cuando ε tiende a cero, si existe el límite de $f(\varepsilon)/g(\varepsilon)$ al tender ε a cero y es igual a cero, es decir $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f(\varepsilon)/g(\varepsilon) = 0$.

A estos símbolos se les denominan **símbolos de orden**.

Nótese que en la definición anterior se considera el límite por la derecha en la definición de "o", debido al dominio de definición de las funciones. Abusando de notación, en caso de que no se diga lo contrario, cuando se haga referencia al límite cuando ε tiende a cero, se hará referencia al límite por la derecha, ya que las funciones estarán definidas en $(0, \varepsilon_0]$.

Notación: En el caso en el que $f(\varepsilon) = O(g(\varepsilon))$ se denotará por $f(\varepsilon) \preceq g(\varepsilon)$ y si se tiene $f(\varepsilon) = o(g(\varepsilon))$, se escribirá en ocasiones $f(\varepsilon) \prec g(\varepsilon)$. Abreviadamente $f \preceq g$ y $f \prec g$, respectivamente.

Con el objetivo de interiorizar la definición anterior se tratan diversos ejemplos que ilustran los distintos casos posibles que pueden ocurrir.

Ejemplo 1.3.2. Sean $f(\varepsilon) = \text{sen}(\varepsilon)$ y $g(\varepsilon) = \varepsilon$ dos funciones con $\varepsilon \in (0, 1]$. Veamos que $\text{sen}(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ y $\text{sen}(\varepsilon) \neq o(\varepsilon)$. Para que se dé $\text{sen}(\varepsilon) = O(\varepsilon)$, basta considerar $K = 1$ y $C = 1$ que claramente verifican $|\text{sen}(\varepsilon)| \leq K|\varepsilon|$ para $0 < \varepsilon < C$. Probar que $\text{sen}(\varepsilon) \neq o(\varepsilon)$ es trivial, debido a que por infinitésimos equivalentes $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{sen}(\varepsilon)/\varepsilon = 1$.

Por otro lado se verifica que $\varepsilon = O(\text{sen}(\varepsilon))$ y $\varepsilon \neq o(\text{sen}(\varepsilon))$. Para que se cumpla la primera afirmación basta considerar $K = 2$ y $C = 1$, mientras que la segunda se tiene de obtener por infinitésimos equivalentes que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon/\text{sen}(\varepsilon) = 1$.

Ejemplo 1.3.3. Sean $f(\varepsilon) = \text{sen}(\varepsilon)$ y $g(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}$ dos funciones con $\varepsilon \in (0, 1]$. Se verifica $\text{sen}(\varepsilon) = O(\sqrt{\varepsilon})$, ya que si se considera $K = 1$ y $C = 1$ se cumple $|\text{sen}(\varepsilon)| \leq K|\sqrt{\varepsilon}|$ para $0 < \varepsilon < C$. Además, $\text{sen}(\varepsilon) = o(\sqrt{\varepsilon})$, debido a que por infinitésimos equivalentes $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{sen}(\varepsilon)/\sqrt{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{\varepsilon} = 0$.

A diferencia de lo que ocurría en el Ejemplo 1.3.2, al intercambiar las funciones no se mantienen los símbolos de orden, es decir, se tiene que $\sqrt{\varepsilon} \neq O(\text{sen}(\varepsilon))$ y $\sqrt{\varepsilon} \neq o(\text{sen}(\varepsilon))$. No se cumple que $\sqrt{\varepsilon} = O(\text{sen}(\varepsilon))$, debido a que para cualquier $K > 0$ que se considere, existe $\varepsilon_K > 0$ suficientemente pequeño tal que $\sqrt{\varepsilon} > K \text{sen}(\varepsilon)$ cuando $\varepsilon \in (0, \varepsilon_K]$ y la segunda afirmación es consecuencia de que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{\varepsilon}/\text{sen}(\varepsilon) = +\infty$.

En los casos en los que se den las situaciones del Ejemplo 1.3.2, se introduce un nuevo símbolo de orden. En ese ejemplo concreto, se dice que $\text{sen}(\varepsilon) = O_S(\varepsilon)$ y que $\varepsilon = O_S(\text{sen}(\varepsilon))$. De forma general:

Definición 1.3.4.

Dadas dos funciones continuas $f, g : (0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}$, se dice que $f(\varepsilon) = O_S(g(\varepsilon))$ cuando ε tiende a cero, si $f(\varepsilon) = O(g(\varepsilon))$ pero $f(\varepsilon) \neq o(g(\varepsilon))$.

A continuación se enuncian unas propiedades que verifican los símbolos de orden y que pueden ser de utilidad en el futuro.

Proposición 1.3.5.

Sean $f, g : (0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas. Entonces se verifican las siguientes propiedades:

- i) Si $f(\varepsilon) = o(g(\varepsilon)) \Rightarrow f(\varepsilon) = O(g(\varepsilon))$.
- ii) Si $f(\varepsilon) = O(g(\varepsilon)) \not\Rightarrow f(\varepsilon) = o(g(\varepsilon))$.
- iii) $f(\varepsilon) = o(g(\varepsilon)) \Leftrightarrow \frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} = o(1)$.

Demostración

- i) Supongamos que existe el límite $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(\varepsilon)/g(\varepsilon)$ y que además su valor es cero. Veamos que existen constantes $K, C > 0$ tales que $|f(\varepsilon)| \leq K|g(\varepsilon)|$ con $0 < \varepsilon < C$. Empleando la definición de límite de una función, tenemos que

$$\forall \gamma > 0 \exists \delta > 0 \text{ tal que si } 0 < \varepsilon < \delta, \text{ entonces } \left| \frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} \right| < \gamma.$$

Considerando $K = \gamma$ y $C = \delta$, se verifica que $f(\varepsilon) = O(g(\varepsilon))$.

ii) Basta considerar dos funciones $f, g : (0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}$ continuas de forma que $f(\varepsilon) = O(g(\varepsilon))$ y $f(\varepsilon) \neq o(g(\varepsilon))$. Véase el Ejemplo 1.3.2.

iii) Se tiene directamente de aplicar la definición de "o". ■

Nótese que (\mathcal{A}, \preceq) es un conjunto preordenado siendo $\mathcal{A} := \{f : f : (0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continuas}\}$, es decir, \preceq verifica las propiedades reflexiva y transitiva. En efecto:

■ PROPIEDAD REFLEXIVA

Sea $f \in \mathcal{A}$. Se tiene que probar que $f \preceq f$. Tomando $K = 1$ y $C = \varepsilon_0$, se obtiene que $f(\varepsilon) = O(f(\varepsilon))$.

■ PROPIEDAD TRANSITIVA

Sean $f, g, h \in \mathcal{A}$ de forma que $f \preceq g$ y $g \preceq h$, hay que probar que se tiene $f \preceq h$.

Como $f \preceq g$, existen constantes $K_1, C_1 > 0$ independientes de ε tales que se verifica $|f(\varepsilon)| \leq K_1|g(\varepsilon)|$ para todo $\varepsilon \in (0, C_1)$. Análogamente, como $g \preceq h$, existen constantes $K_2, C_2 > 0$ independientes de ε tales que se verifica $|g(\varepsilon)| \leq K_2|h(\varepsilon)|$ para todo $\varepsilon \in (0, C_2)$. Para probar $f \preceq h$, basta considerar las constantes $K = K_1K_2$ y $C = \min\{C_1, C_2\}$ que claramente son positivas e independientes de ε y verifican la desigualdad $|f(\varepsilon)| \leq K|h(\varepsilon)|$ para todo $\varepsilon \in (0, C)$.

(\mathcal{A}, \preceq) es un conjunto preordenado pero no es totalmente ordenado ya que no se cumple que para cualesquiera $f, g \in \mathcal{A}$, $f \preceq g \vee g \preceq f$. Un ejemplo de ello es considerar las siguientes funciones continuas definidas en $(0, 1/2]$. Sea la función $f(\varepsilon) = \varepsilon$ y la función definida a trozos

$$g(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{(2n+1)^2\sqrt{2n}-2n}{2n+1}(\varepsilon+1) - (2n+2)\sqrt{2n}+1 & \text{si } \varepsilon \in \left(\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}\right] \\ \frac{(\sqrt{2n+2}-(2n+1)^2)\sqrt{2n+2}}{2n+1} \left(\varepsilon - \frac{1}{2n+1}\right) + \frac{1}{(2n+1)^2} & \text{si } \varepsilon \in \left(\frac{1}{2n+2}, \frac{1}{2n+1}\right] \end{cases}$$

con $n \in \mathbb{N}$, que es una función oscilante formada por poligonales que pasan por los puntos $(1/k, 1/k^2)$ si $k \in \mathbb{N}$ impar y $(1/k, 1/\sqrt{k})$ si $k \in \mathbb{N}$ par. En la Figura 1.1 se proporciona la representación gráfica de ambas funciones así como de las funciones ε^2 y $\sqrt{\varepsilon}$ que ayudan a interpretar la función g , en dicha figura se puede observar que f y g no son comparables, ya que no se encuentra ningún subintervalo $(0, C) \subset (0, 1/2]$ de forma que una de las funciones acote a la otra en dicho subintervalo. Por tanto ciertamente (\mathcal{A}, \preceq) no es un conjunto totalmente ordenado y en consecuencia puede haber pares de funciones que no tenga sentido compararlas. Para evitar esta situación se considera un subconjunto de \mathcal{A} formado por las funciones que denominaremos funciones de orden.

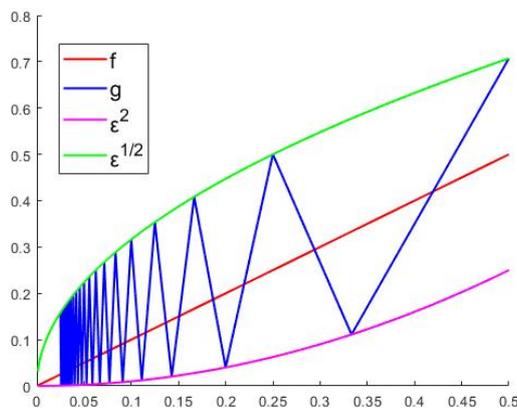


Figura 1.1: Representación gráfica de f , g , ε^2 y $\sqrt{\varepsilon}$.

Definición 1.3.6. (Función de orden)

Una función $\delta : (0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, se dice que es una **función de orden** si es positiva, monótona (en el dominio) y si existe y es finito el límite de $\delta(\varepsilon)$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Ejemplo 1.3.7.

- Todas las funciones constantes son funciones de orden.
- Para cada $n \in [0, \infty)$ consideramos $\delta : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\delta(\varepsilon) = \varepsilon^n$ que ciertamente es una función de orden.
- Sea $\delta : (0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $\delta(\varepsilon) = \text{sen}(\varepsilon)$. En este caso a diferencia del caso anterior no es una función de orden, debido a que la función no es monótona en todo el dominio de definición. Al principio la función crece hasta el valor $\varepsilon = \pi/2$ y luego decrece. Sin embargo, si restringimos el dominio al intervalo $(0, 1]$, sí que es una función de orden, ya que sería creciente.

Se procede a definir la noción de sucesión asintótica, que será una sucesión de funciones de orden verificando cierta propiedad.

Definición 1.3.8. (Sucesión asintótica)

Una **sucesión asintótica** es una sucesión $(\delta_n(\varepsilon))_{n \geq 0}$ de funciones de orden verificando $\delta_n = o(\delta_{n-1})$ ($\delta_n \prec \delta_{n-1}$) para cada $n \geq 1$, es decir, que existe el límite de $\delta_n(\varepsilon)/\delta_{n-1}(\varepsilon)$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ y es igual a cero.

A continuación se proporcionan distintos ejemplos de sucesiones asintóticas.

Ejemplo 1.3.9. Sea la sucesión de funciones dada por $\delta_n(\varepsilon) = \varepsilon^n$ con $n \geq 0$, se tiene que es una sucesión asintótica. En efecto, como se ha mencionado en el Ejemplo 1.3.7, se verifica que para cada $n \geq 0$, $\delta_n(\varepsilon) = \varepsilon^n$ es una función de orden. Veamos ahora que fijado $n \geq 1$ se cumple que $\delta_n(\varepsilon) = o(\delta_{n-1}(\varepsilon))$. Es fácil ver que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_n(\varepsilon)/\delta_{n-1}(\varepsilon) = 0$ verificando así que $\delta_n(\varepsilon) = \varepsilon^n$ es una sucesión asintótica. En la gráfica de la izquierda de la Figura 1.2 se representan las primeras cuatro funciones de la sucesión.

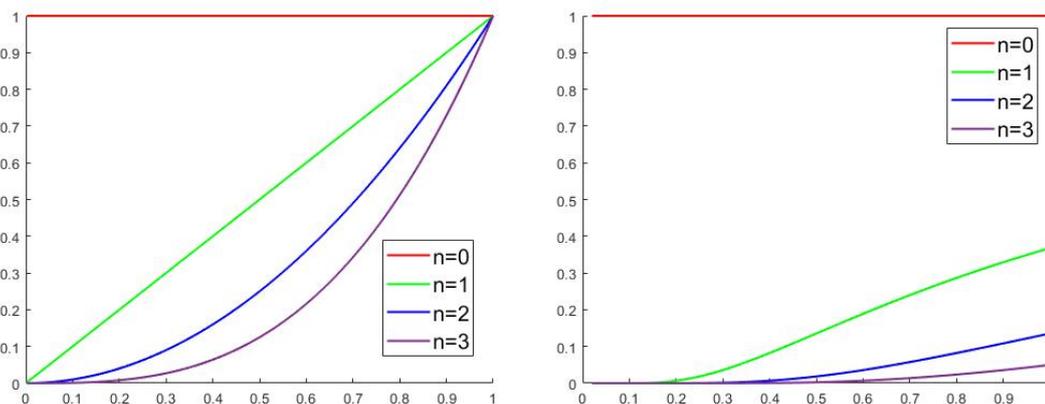


Figura 1.2: Representación gráfica de ε^n y $e^{-n/\varepsilon}$ para $n = 0, 1, 2, 3$.

A pesar de que la sucesión asintótica del Ejemplo 1.3.9 es la más habitual en la práctica, las hay de muy diversas formas, como la que se considera en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.3.10. Considérese la sucesión $(\delta_n(\varepsilon))_{n \geq 0}$ dada por $\delta_n(\varepsilon) = e^{-n/\varepsilon}$ con $n \geq 0$. De forma directa se tiene que fijado $n \geq 0$, $\delta_n(\varepsilon)$ es una función de orden. Para concluir que la sucesión es de orden queda por probar que $\delta_n \prec \delta_{n-1}$, o lo que es lo mismo $\delta_n = o(\delta_{n-1})$ para $n \geq 1$. Basta ver que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{-n/\varepsilon}/e^{-(n-1)/\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{-1/\varepsilon} = 0$ fijado $n \geq 1$. En la gráfica de la derecha de la Figura 1.2 se representan las cuatro primeras funciones de dicha sucesión.

1.4. Órdenes de magnitud. Aproximaciones y desarrollos asintóticos

Se procede a hablar ahora de los órdenes de magnitud, para lo cual se considerarán funciones que además de ε como en el caso de las funciones de orden, dependan de otra variable. Interesa introducir los órdenes de magnitud, ya que permitirán definir las denominadas aproximaciones asintóticas así como los desarrollos asintóticos, los cuales tendrán relevancia para determinar aproximaciones cada vez más finas de las soluciones de los problemas de contorno perturbados a estudiar en el Capítulo 2 cuando ε tiende a cero. Las referencias empleadas en esta sección han sido [1], [2], [3], [6], [7], [8] y [10].

Consideramos así funciones de la forma

$$\begin{aligned} \Phi : D \times (0, \varepsilon_0] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, \varepsilon) &\longmapsto \Phi(x, \varepsilon) \end{aligned}$$

donde $D = [a, b]$ con $a < b$. Para simplificar y si no hay lugar a confusión, fijado $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ consideramos $\phi_\varepsilon(x) = \Phi(x, \varepsilon)$, donde ahora ϕ_ε es una función que depende únicamente de una variable, $\phi_\varepsilon : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Las funciones ϕ_ε pueden considerarse en un cierto espacio vectorial denotado por $V(D)$, el cual considera el dominio de definición D , y en el que haya definida una norma denotada por $\|\cdot\|_{V(D)}$. De esta manera la norma del espacio normado $(V(D), \|\cdot\|_{V(D)})$ nos va a servir como medida del orden de magnitud de la función $\Phi(x, \varepsilon)$ en cuestión.

Definición 1.4.1.

Sea $V(D)$ un espacio de funciones con la norma $\|\cdot\|_{V(D)}$. Sea $\phi_\varepsilon(x) = \Phi(x, \varepsilon)$ tal que $\phi_\varepsilon \in V(D)$ para cada $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ donde $\phi_\varepsilon : D \longrightarrow \mathbb{R}$ y sea $\delta : (0, \varepsilon_0] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de orden. Se dice que

- i) $\Phi = O(\delta(\varepsilon))$ en D si $\|\phi_\varepsilon\|_{V(D)} = O(\delta(\varepsilon))$.
- ii) $\Phi = o(\delta(\varepsilon))$ en D si $\|\phi_\varepsilon\|_{V(D)} = o(\delta(\varepsilon))$.
- iii) $\Phi = O_S(\delta(\varepsilon))$ en D si $\Phi(x, \varepsilon) = O(\delta(\varepsilon))$ y $\Phi(x, \varepsilon) \neq o(\delta(\varepsilon))$ en D .

En la memoria consideraremos que estas funciones ϕ_ε que estarán en los siguientes espacios:

- $(C[a, b], \|\cdot\|_{C[a, b]})$ donde $C[a, b] = \{f : f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continuas}\}$ y $\|\cdot\|_{C[a, b]}$ esta definida como

$$\|f\|_{C[a, b]} := \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \quad \forall f \in C[a, b].$$

En el caso de tener funciones en el espacio $C[a, b]$ pero se pretenda calcular la norma en un subintervalo $[c, d] \subset [a, b]$, se denotará por $\|\cdot\|_{C[c, d]}$ y si es en el intervalo $[a, b]$ por $\|\cdot\|_\infty := \|\cdot\|_{C[a, b]}$ que es la notación usual. Se hace esta distinción debido a que habrá momentos en la memoria en los que se calcula la norma en todo el dominio $[a, b]$ y en otros en un subintervalo de este.

- $(L^2(a, b), \|\cdot\|_{L^2(a, b)})$ donde $L^2(a, b) = \mathcal{L}^2(a, b) / \sim$ siendo

$$\mathcal{L}^2(a, b) = \left\{ f : f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ medible y } \int_a^b f^2(x) dx < \infty \right\}$$

y \sim la siguiente relación de equivalencia:

$$f \sim g \iff m(\{x \in [a, b] : f(x) \neq g(x)\}) = 0 \text{ donde } m \text{ denota la medida de Lebesgue.}$$

Se define $\|\cdot\|_{L^2(a, b)}$ en ese espacio como $\|f\|_{L^2(a, b)} := \left(\int_a^b f^2(x) dx \right)^{1/2} \quad \forall f \in L^2(a, b)$.

- $(H^1(a, b), \|\cdot\|_{H^1(a,b)})$ donde

$$H^1(a, b) = \left\{ f \in L^2(a, b) : \exists g \in L^2(a, b) \text{ tal que } \int_a^b f\varphi' dx = - \int_a^b g\varphi dx \quad \forall \varphi \in C_c^1(a, b) \right\}$$

El conjunto $C_c^1(a, b) = C^1(a, b) \cap C_c(a, b)$ con $C_c(a, b)$ el conjunto de funciones continuas con soporte compacto en (a, b) , o lo que es lo mismo, dada $\varphi \in C_c^1(a, b)$ se tiene que $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. A la función g de la definición de $H^1(a, b)$ se le denomina **derivada débil** de f , que de hecho denotamos por $g = f'$. Recibe el nombre anterior ya que no tiene porqué existir la derivada en el sentido clásico, debido a que $f \in L^2(a, b)$. No obstante, si existe la derivada clásica, esta coincide con la débil. Se define $\|\cdot\|_{H^1(a,b)}$ como prosigue

$$\|f\|_{H^1(a,b)} := \|f\|_{L^2(a,b)} + \|f'\|_{L^2(a,b)} \quad \forall f \in H^1(a, b); \quad (1.21)$$

en ocasiones se considera la norma $\left(\|f\|_{L^2(a,b)}^2 + \|f'\|_{L^2(a,b)}^2\right)^{1/2}$ que es equivalente a (1.21) (véase Página 203 de [2]).

A no ser que se diga lo contrario, consideraremos las funciones ϕ_ε en el espacio normado $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$. En ese caso con la notación de la definición anterior, Definición 1.4.1, se tiene la siguiente definición más específica.

Definición 1.4.2.

Sea $C[a, b]$ el espacio de funciones continuas con la norma del supremo $\|\cdot\|_\infty$. Sea $\phi_\varepsilon(x) = \Phi(x, \varepsilon)$ tal que $\phi_\varepsilon \in C[a, b]$ para cada $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ donde $\phi_\varepsilon : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y sea $\delta : (0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}$ una función de orden. Se dice que

- i) $\Phi = O(\delta(\varepsilon))$ uniformemente en D si $\|\phi_\varepsilon\|_\infty = O(\delta(\varepsilon))$.
- ii) $\Phi = o(\delta(\varepsilon))$ uniformemente en D si $\|\phi_\varepsilon\|_\infty = o(\delta(\varepsilon))$.
- iii) $\Phi = O_S(\delta(\varepsilon))$ uniformemente en D si $\Phi = O(\delta(\varepsilon))$ y $\Phi \neq o(\delta(\varepsilon))$ uniformemente en D .

En los ejemplos que se proporcionan a continuación, se va a obtener el orden de magnitud de dos funciones distintas consideradas en los espacios normados indicados previamente.

Ejemplo 1.4.3. Considérese la función $\Phi : [0, 1] \times (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ donde $\Phi(x, \varepsilon) = \varepsilon x$, y la función de orden $\delta : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$. Por tanto para $\varepsilon \in (0, 1]$ fijo se tiene $\phi_\varepsilon(x) = \Phi(x, \varepsilon) = \varepsilon x$ (ε en este caso es una constante y no una variable como en Φ). Veamos que $\Phi(x, \varepsilon)$ tiene el mismo orden en los distintos espacios.

Considerando primero $\phi_\varepsilon \in C[0, 1]$ con la norma del supremo. Es fácil ver que

$$\|\phi_\varepsilon\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |\phi_\varepsilon(x)| = \sup_{x \in [0,1]} |\varepsilon x| = \varepsilon \sup_{x \in [0,1]} x = \varepsilon$$

de donde se obtiene por la Definición 1.4.1 que $\Phi = O_S(\varepsilon)$.

En el caso en el que consideremos $\phi_\varepsilon \in L^2(0, 1)$ con la norma $\|\cdot\|_{L^2(0,1)}$

$$\|\phi_\varepsilon\|_{L^2(0,1)} = \left(\int_0^1 \phi_\varepsilon^2(x) dx \right)^{1/2} = \left(\int_0^1 \varepsilon^2 x^2 dx \right)^{1/2} = \frac{\varepsilon\sqrt{3}}{3}$$

es fácil comprobar que $\|\phi_\varepsilon\|_{L^2(0,1)} = O(\varepsilon)$ y $\|\phi_\varepsilon\|_{L^2(0,1)} \neq o(\varepsilon)$, concluyendo así que $\Phi = O_S(\varepsilon)$. Por último si $\phi_\varepsilon \in (H^1(0, 1), \|\cdot\|_{H^1(0,1)})$

$$\|\phi_\varepsilon\|_{H^1(0,1)} = \|\phi_\varepsilon\|_{L^2(0,1)} + \|\phi_\varepsilon'\|_{L^2(0,1)} = \frac{\varepsilon(3 + \sqrt{3})}{3}$$

de donde como en el caso anterior se obtiene que $\Phi = O_S(\varepsilon)$.

En este ejemplo, el orden de magnitud de $\Phi(x, \varepsilon) = \varepsilon x$ coincide en los tres espacios. Sin embargo, se observa que el orden de magnitud puede variar en distintos espacios normados, debido a que la norma de las funciones $\phi_\varepsilon(x)$ en cada espacio es distinta. Prosigamos con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.4.4. Sea $\Phi : [0, 1] \times (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\Phi(x, \varepsilon) = e^{-x/\varepsilon}$. Considerando $\phi_\varepsilon \in C[0, 1]$ con la norma del supremo, se obtiene que $\Phi(x, \varepsilon) = O_S(1)$. En efecto

$$\|\phi_\varepsilon\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |\phi_\varepsilon(x)| = \sup_{x \in [0, 1]} e^{-x/\varepsilon} = 1$$

de donde claramente se tiene que $\|\phi_\varepsilon\|_\infty = O(1)$ y $\|\phi_\varepsilon\|_\infty \neq o(1)$ luego $\phi_\varepsilon = O_S(1)$. Por el contrario, si se considera $\phi_\varepsilon \in L^2(0, 1)$ con la norma, $\|\cdot\|_{L^2(0, 1)}$:

$$\|\phi_\varepsilon\|_{L^2(0, 1)} = \left(\int_0^1 \phi_\varepsilon^2(x) dx \right)^{1/2} = \left(\int_0^1 e^{-2x/\varepsilon} dx \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}(1 - e^{-2/\varepsilon})}$$

concluyendo que $\|\phi_\varepsilon\|_{L^2(0, 1)} = O_S(\varepsilon^{1/2})$.

Considerando $\phi_\varepsilon \in H^1(0, 1)$ con la norma definida en este espacio se sigue que,

$$\|\phi_\varepsilon\|_{H^1(0, 1)} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}(1 - e^{-2/\varepsilon})} + \sqrt{\frac{1}{2\varepsilon}(1 - e^{-2/\varepsilon})} = \frac{\varepsilon + 1}{\sqrt{2\varepsilon}} \sqrt{1 - e^{-2/\varepsilon}}$$

de donde se deduce que $\|\phi_\varepsilon\|_{H^1(0, 1)} = O_S(\varepsilon^{-1/2})$.

A continuación se definen las denominadas aproximaciones asintóticas y aproximaciones asintóticas regulares así como los desarrollos asintóticos y desarrollos asintóticos regulares, junto con diversos ejemplos. Las nociones anteriores serán de utilidad en el futuro debido a que nos permitirán obtener aproximaciones a la solución de problemas de contorno perturbados que se tratarán en el Capítulo 2.

Definición 1.4.5. (Aproximación asintótica y aproximación asintótica regular)

Sea $V(D)$ un espacio de funciones con la norma $\|\cdot\|_{V(D)}$ y $\Phi(x, \varepsilon) \in V(D)$. Sea $D_0 \subseteq D$ y δ una función de orden. Una función $\Phi_{as}(x, \varepsilon)$ se dice **aproximación asintótica** de $\Phi(x, \varepsilon)$ en D_0 si

$$\Phi(x, \varepsilon) - \Phi_{as}(x, \varepsilon) = o(\delta(\varepsilon)) \text{ en } D_0.$$

En el caso particular en el que $\Phi_{as}(x, \varepsilon) = \delta(\varepsilon)\phi(x)$ con ϕ una función independiente de ε , se dice que $\delta(\varepsilon)\phi(x)$ es una **aproximación asintótica regular** de $\Phi(x, \varepsilon)$ en D_0 .

Ejemplo 1.4.6. Consideramos la función $\Phi : [0, 1] \times (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $\Phi(x, \varepsilon) = \varepsilon x^2 + x + \varepsilon$, y la función de orden $\delta : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\delta(\varepsilon) = 1$, donde las funciones ϕ_ε se consideran en el espacio normado $(C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$. Resulta que la función $\Phi_{as}(x, \varepsilon) = x + \varepsilon$ es una aproximación asintótica uniforme de $\Phi(x, \varepsilon)$ en $[0, 1]$. Basta ver que

$$\Phi(x, \varepsilon) - \Phi_{as}(x, \varepsilon) = o(1) \text{ en } [0, 1] \tag{1.22}$$

o equivalentemente que $\varepsilon x^2 = o(1)$ en $[0, 1]$. En efecto, se tiene que $\|\varepsilon x^2\|_\infty = \varepsilon$ y por tanto se verifica (1.22) como se pretendía. Nótese que $\Phi_{as}(x, \varepsilon)$ no puede ser una aproximación regular, debido a que no se puede expresar como producto de la función de orden con una función que dependa únicamente de la variable x .

En cambio si se considera $\Phi_{as}(x) = x$, se tiene de forma directa que $\Phi(x, \varepsilon) - \Phi_{as}(x, \varepsilon) = \varepsilon(x^2 + 1)$ y por tanto $\|\varepsilon(x^2 + 1)\|_\infty = 2\varepsilon$, verificándose $\Phi(x, \varepsilon) - \Phi_{as}(x, \varepsilon) = o(1)$. A diferencia del caso anterior, la función considerada es una aproximación asintótica regular uniforme.

Ejemplo 1.4.7. Se consideran la función $\Phi : [0, 1] \times (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\Phi(x, \varepsilon) = \cos(\varepsilon + x)$, y la función de orden $\delta : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\delta(\varepsilon) = \cos(\varepsilon)$. Resulta que $\Phi_{as}(x, \varepsilon) = \cos(\varepsilon) \cos(x)$ es una aproximación asintótica regular uniforme de $\Phi(x, \varepsilon)$ en $[0, 1]$. Basta ver que

$$\frac{\Phi(x, \varepsilon) - \Phi_{as}(x, \varepsilon)}{\delta(\varepsilon)} = \frac{\cos(\varepsilon + x) - \cos(\varepsilon) \cos(x)}{\cos(\varepsilon)} = -\frac{\operatorname{sen}(\varepsilon) \operatorname{sen}(x)}{\cos(\varepsilon)} = -\tan(\varepsilon) \operatorname{sen}(x)$$

es $o(1)$ en $[0, 1]$. Es fácil ver que $\|-\tan(\varepsilon) \operatorname{sen}(x)\|_\infty = \tan(\varepsilon) \operatorname{sen}(1) \rightarrow 0$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

En el caso de considerar la función de orden $\delta : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\delta(\varepsilon) = \operatorname{sen}(\varepsilon)$ y $\Phi_{as}(x, \varepsilon) = \cos(x) - \operatorname{sen}(\varepsilon) \operatorname{sen}(x)$, se obtiene que $\Phi(x, \varepsilon) - \Phi_{as}(x, \varepsilon) = (\cos(\varepsilon) - 1) \cos(x)$ y mediante un cálculo directo $\Phi(x, \varepsilon) - \Phi_{as}(x, \varepsilon) = o(\operatorname{sen}(\varepsilon))$, de donde se concluye que $\cos(x) - \operatorname{sen}(\varepsilon) \operatorname{sen}(x)$ es una aproximación asintótica, no regular, uniforme de $\cos(\varepsilon + x)$ en $[0, 1]$.

Una vez definidas las aproximaciones asintóticas, se definen los desarrollos asintóticos y desarrollos asintóticos regulares que extienden las nociones anteriores.

Definición 1.4.8. (Desarrollo asintótico y desarrollo asintótico regular)

Sea $V(D)$ un espacio de funciones con la norma $\|\cdot\|_{V(D)}$. Supongamos que existe $(\delta_n(\varepsilon))_{n \geq 0}$ una sucesión asintótica y $(\phi_n(x, \varepsilon))_{n \geq 0}$ una sucesión de funciones en $V(D)$. Fijado $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, la expresión $\Phi_{as}^{(m)}(x, \varepsilon) = \sum_{n=0}^m \delta_n(\varepsilon) \phi_n(x, \varepsilon)$ se dice **desarrollo asintótico** de $\Phi(x, \varepsilon)$ con $m+1$ términos o **de orden m** en $D_0 \subseteq D$ si

$$\Phi(x, \varepsilon) - \Phi_{as}^{(m)}(x, \varepsilon) = o(\delta_m(\varepsilon)) \text{ en } D_0. \quad (1.23)$$

Se dice que $\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n(\varepsilon) \phi_n(x, \varepsilon)$ es un **desarrollo asintótico** de $\Phi(x, \varepsilon)$ si para todo $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\Phi_{as}^{(m)}(x, \varepsilon)$ es un desarrollo asintótico de orden m . En el caso en el que las funciones ϕ_n sean funciones independientes de ε , es decir, $(\phi_n(x))_{n \geq 0}$, se dice que $\Phi_{as}^{(m)}(x, \varepsilon) = \sum_{n=0}^m \delta_n(\varepsilon) \phi_n(x)$ es un **desarrollo asintótico regular** de $\Phi(x, \varepsilon)$ **de orden m** en $D_0 \subseteq D$ y que $\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n(\varepsilon) \phi_n(x)$ es un **desarrollo asintótico regular** en $D_0 \subseteq D$.

Diremos que las aproximaciones y los desarrollos asintóticos, ya sean regulares o no, son uniformes al considerar $V(D)$ como el espacio $C[a, b]$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$.

Nótese que en ningún momento se exige que la serie que representa los desarrollos tenga que ser convergente; en lo que al estudio que nos incumbe se refiere, es irrelevante si la serie converge o no, únicamente se quiere saber si se pueden obtener las distintas funciones planteadas en el desarrollo y si además se verifica (1.23) para todo $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. En la Página 15 de [3] se proporciona una idea de cómo construir un ejemplo que ilustre la situación precedente.

A modo de observación, resulta que no siempre tiene porqué existir el desarrollo regular de la función en cuestión, a causa de dos motivos. Puede ocurrir que los términos del desarrollo regular, ϕ_n , no existan o bien que no se dé (1.23). Un ejemplo de esta última situación se puede obtener del Ejemplo 2.1.2 de la Página 38 de [1]. A pesar de ello, sí que puede ocurrir que exista el desarrollo hasta un orden $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ fijado.

Notemos que para cada $m \geq 0$, $\Phi_{as}^{(m)}(x, \varepsilon)$ es una aproximación asintótica de $\Phi(x, \varepsilon)$ en $D_0 \subseteq D$ con función de orden $\delta_m(\varepsilon)$. Por tanto según se vaya incrementando el valor de m se irá obteniendo una mejor aproximación a la función $\Phi(x, \varepsilon)$ debido a la definición de sucesión asintótica.

A partir de ahora cuando se haga referencia a los desarrollos asintóticos regulares en ocasiones por simplicidad nos referiremos a ellos como desarrollos regulares. Y en el caso de no hacer mención a la palabra regular consideraremos que se habla de desarrollos asintóticos en general,

análogamente con las aproximaciones. Los desarrollos que tienen mayor interés serán los desarrollos asintóticos regulares, pues se reduce la dificultad del propio desarrollo.

Aunque existen otras sucesiones asintóticas, ver Ejemplo 1.3.10, en lo sucesivo cuando se hable de sucesión asintótica siempre se va a considerar $\delta_n(\varepsilon) = \varepsilon^n$ para cada $n \geq 0$ que denominaremos sucesión asintótica usual.

Ejemplo 1.4.9. Recordando el Ejemplo 1.4.6, se tiene que $x + \varepsilon$ y x , es un desarrollo asintótico uniforme y el desarrollo asintótico regular uniforme de orden 0 de $\Phi(x, \varepsilon) = \varepsilon x^2 + x + \varepsilon$ en $[0, 1]$ respectivamente, considerando la sucesión asintótica usual.

Ejemplo 1.4.10. Considerando la función $\Phi(x, \varepsilon) = \cos(\varepsilon + x)$ del Ejemplo 1.4.7, se procede a obtener el desarrollo asintótico regular uniforme de cierto orden de $\Phi(x, \varepsilon)$ en $[0, 1]$ tomando la sucesión asintótica usual. Para ello se determina el desarrollo de Taylor en ε de la función $\Phi(x, \varepsilon)$ centrado en $\varepsilon = 0$. Cabe destacar que a pesar de que $\varepsilon \in (0, 1]$ se puede realizar el desarrollo de Taylor mencionado, ya que la función $\Phi(x, \varepsilon)$ está bien definida en un entorno de $\varepsilon = 0$. Por tanto se hace el desarrollo y luego se considera que $\varepsilon \in (0, 1]$. Así,

$$\cos(\varepsilon + x) = \cos(x) - \operatorname{sen}(x)\varepsilon - \frac{\cos(x)}{2}\varepsilon^2 + \dots$$

Considerando el polinomio de Taylor de orden m , se obtendrá un desarrollo asintótico regular uniforme de orden m en $[0, 1]$. Se prueba que para el caso $m = 2$, $\cos(x) - \operatorname{sen}(x)\varepsilon - \cos(x)\varepsilon^2/2$ es el desarrollo regular uniforme de orden 2 en $[0, 1]$. Basta probar

$$A := \frac{\|\cos(\varepsilon + x) - \cos(x) + \operatorname{sen}(x)\varepsilon + \cos(x)\varepsilon^2/2\|_\infty}{\varepsilon^2} = o(1) .$$

En efecto,

$$\begin{aligned} 0 \leq A &= \frac{\|(\varepsilon^2 + 2\cos(\varepsilon) - 2)\cos(x) + 2(\varepsilon - \operatorname{sen}(\varepsilon))\operatorname{sen}(x)\|_\infty}{2\varepsilon^2} \\ &\leq \frac{(\varepsilon^2 + 2\cos(\varepsilon) - 2) + 2(\varepsilon - \operatorname{sen}(\varepsilon))\operatorname{sen}(1)}{2\varepsilon^2} \end{aligned} \quad (1.24)$$

donde la primera igualdad se obtiene de emplear la fórmula del coseno de la suma y la desigualdad de aplicar la desigualdad triangular y la definición de la norma uniforme. Tomando límites cuando ε tiende a cero en la expresión (1.24), se obtiene una indeterminación del tipo $0/0$ en la última igualdad, de donde aplicando la regla de L'Hôpital en dicha expresión 2 veces se obtiene

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(\varepsilon^2 + 2\cos(\varepsilon) - 2) + 2(\varepsilon - \operatorname{sen}(\varepsilon))\operatorname{sen}(1)}{2\varepsilon^2} = 0 .$$

En consecuencia de la regla del Sándwich se prueba la convergencia uniforme buscada, teniendo así que $\cos(x) - \operatorname{sen}(x)\varepsilon - \cos(x)\varepsilon^2/2$ es el desarrollo regular uniforme de orden 2 de $\cos(\varepsilon + x)$ en $[0, 1]$. Otra forma de probarlo sería empleando el resto del desarrollo de Taylor (ver [13], por ejemplo), de donde se obtiene

$$\cos(\varepsilon + x) - \cos(x) + \operatorname{sen}(x)\varepsilon + \frac{\cos(x)}{2}\varepsilon^2 = \frac{\operatorname{sen}(\xi + x)}{3!}\varepsilon^3 \text{ con } \xi \in (0, \varepsilon)$$

y por tanto A tiende a cero cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ como se pretendía.

Comparando el Ejemplo 1.4.10 con el Ejemplo 1.4.7, se observa que no se tiene la unicidad del desarrollo asintótico regular. Así, en el Ejemplo 1.4.7 la función $\cos(x) - \operatorname{sen}(\varepsilon)\operatorname{sen}(x)$ proporcionaba un desarrollo asintótico regular uniforme de orden uno de $\cos(x + \varepsilon)$ en $[0, 1]$, mientras que en el Ejemplo 1.4.10 la función $\cos(x) - \varepsilon\operatorname{sen}(x)$ hace lo propio. La diferencia es que en el

primer desarrollo a considerar, la función de orden es $\text{sen}(\varepsilon)$ que proviene de tomar la sucesión asintótica $\delta_n(\varepsilon) = (\text{sen}(\varepsilon))^n$ mientras que en el segundo caso la función de orden es ε considerando la sucesión asintótica usual. Es por ello que el desarrollo regular de una función depende de la sucesión asintótica considerada, pero como se prueba en la siguiente proposición, fijada dicha sucesión el desarrollo es único en caso de que exista, lo que justifica que en los ejemplos, Ejemplo 1.4.9 y Ejemplo 1.4.10, se hable del único desarrollo regular de la función.

Proposición 1.4.11.

Sea $V(D)$ un espacio de funciones con la norma $\|\cdot\|_{V(D)}$ y sea $(\delta_n(\varepsilon))_{n \geq 0}$ una sucesión asintótica. Supongamos que $\Phi(x, \varepsilon) \in V(D)$ y que existe desarrollo asintótico regular de $\Phi(x, \varepsilon)$ en D , entonces dicho desarrollo es único.

Demostración

Supongamos que existen dos desarrollos asintóticos regulares distintos de $\Phi(x, \varepsilon)$ en D :

$$\Phi(x, \varepsilon) = \delta_0(\varepsilon)\phi_0(x) + \delta_1(\varepsilon)\phi_1(x) + \delta_2(\varepsilon)\phi_2(x) + \cdots \quad (1.25)$$

$$\Phi(x, \varepsilon) = \delta_0(\varepsilon)\tilde{\phi}_0(x) + \delta_1(\varepsilon)\tilde{\phi}_1(x) + \delta_2(\varepsilon)\tilde{\phi}_2(x) + \cdots \quad (1.26)$$

con $\phi_k, \tilde{\phi}_k$ funciones independientes de ε para $k \geq 0$, que sabemos que existen por hipótesis. Se procede a probar por inducción en el orden del desarrollo que las funciones $\phi_k = \tilde{\phi}_k$ en el espacio $V(D)$ para cada $k \geq 0$ hasta el orden del desarrollo.

Considerando el desarrollo regular de orden 0 en (1.25) y (1.26) respectivamente, se tiene por (1.23) que los límites

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| \frac{\Phi(x, \varepsilon)}{\delta_0(\varepsilon)} - \phi_0(x) \right\|_{V(D)} \quad \text{y} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| \frac{\Phi(x, \varepsilon)}{\delta_0(\varepsilon)} - \tilde{\phi}_0(x) \right\|_{V(D)}$$

existen y son cero. Por tanto debido a la unicidad del límite de la función $\Phi(x, \varepsilon)/\delta_0(\varepsilon)$ en $V(D)$, se tiene que $\phi_0 = \tilde{\phi}_0$ en $V(D)$.

Supongamos ahora que si se tiene el desarrollo regular de orden $m - 1$ de (1.25) y (1.26), se verifica $\phi_k = \tilde{\phi}_k$ para $0 \leq k \leq m - 1$ y veamos que si se considera el desarrollo regular de orden m de las expresiones (1.25) y (1.26), entonces $\phi_k = \tilde{\phi}_k$ para $0 \leq k \leq m$.

Por hipótesis se verifica que los siguientes límites existen y son nulos,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| \frac{\Phi(x, \varepsilon) - \sum_{k=0}^m \delta_k(\varepsilon)\phi_k(x)}{\delta_m(\varepsilon)} \right\|_{V(D)} \quad \text{y} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| \frac{\Phi(x, \varepsilon) - \sum_{k=0}^m \delta_k(\varepsilon)\tilde{\phi}_k(x)}{\delta_m(\varepsilon)} \right\|_{V(D)} \quad (1.27)$$

El objetivo como bien hemos enunciado previamente es probar que $\phi_k = \tilde{\phi}_k$ en $V(D)$ para $0 \leq k \leq m$. Para comenzar, considerando

$$A := \left\| \frac{\Phi(x, \varepsilon) - \sum_{k=0}^{m-1} \delta_k(\varepsilon)\phi_k(x)}{\delta_{m-1}(\varepsilon)} \right\|_{V(D)},$$

tenemos que

$$\begin{aligned} 0 \leq A &= \left\| \frac{\Phi(x, \varepsilon) - \sum_{k=0}^m \delta_k(\varepsilon)\phi_k(x) + \delta_m(\varepsilon)\phi_m(x)}{\delta_{m-1}(\varepsilon)} \right\|_{V(D)} \\ &\leq \left\| \frac{\Phi(x, \varepsilon) - \sum_{k=0}^m \delta_k(\varepsilon)\phi_k(x)}{\delta_{m-1}(\varepsilon)} \right\|_{V(D)} + \left\| \frac{\delta_m(\varepsilon)\phi_m(x)}{\delta_{m-1}(\varepsilon)} \right\|_{V(D)} \\ &= \left\| \frac{\Phi(x, \varepsilon) - \sum_{k=0}^m \delta_k(\varepsilon)\phi_k(x)}{\delta_m(\varepsilon)} \right\|_{V(D)} \cdot \frac{\delta_m(\varepsilon)}{\delta_{m-1}(\varepsilon)} + \|\phi_m(x)\|_{V(D)} \cdot \frac{\delta_m(\varepsilon)}{\delta_{m-1}(\varepsilon)} \end{aligned} \quad (1.28)$$

donde la primera igualdad se obtiene de sumar y restar la expresión $\delta_m(\varepsilon)\phi_m(x)$, la desigualdad de emplear la desigualdad triangular y la última igualdad de sacar ciertos factores de las normas. Tomando límites cuando ε tiende a cero en (1.28) y empleando el límite izquierdo de (1.27), la definición de sucesión asintótica y la regla del Sándwich, se obtiene que la expresión A converge a cero cuando ε tiende a cero, por lo que se tiene el desarrollo de orden $m-1$ de (1.25). Razonando de manera similar, se tiene que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| \frac{\Phi(x, \varepsilon) - \sum_{k=0}^{m-1} \delta_k(\varepsilon) \tilde{\phi}_k(x)}{\delta_{m-1}(\varepsilon)} \right\|_{V(D)} = 0$$

Aplicando la hipótesis inductiva, se obtiene que $\phi_k = \tilde{\phi}_k$ en $V(D)$ con $0 \leq k \leq m-1$, por lo que queda por probar que $\phi_m = \tilde{\phi}_m$.

Por otro lado, por hipótesis se tienen los límites de (1.27), o equivalentemente que los siguientes límites son nulos,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| \frac{\Phi(x, \varepsilon) - \sum_{k=0}^{m-1} \delta_k(\varepsilon) \phi_k(x)}{\delta_m(\varepsilon)} - \phi_m(x) \right\|_{V(D)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| \frac{\Phi(x, \varepsilon) - \sum_{k=0}^{m-1} \delta_k(\varepsilon) \tilde{\phi}_k(x)}{\delta_m(\varepsilon)} - \tilde{\phi}_m(x) \right\|_{V(D)} = 0.$$

Debido a la igualdad en el espacio $V(D)$ de las funciones $\phi_k = \tilde{\phi}_k$ para $0 \leq k \leq m-1$ se tiene

$$f_\varepsilon(x) := \frac{\Phi(x, \varepsilon) - \sum_{k=0}^{m-1} \delta_k(\varepsilon) \phi_k(x)}{\delta_m(\varepsilon)} = \frac{\Phi(x, \varepsilon) - \sum_{k=0}^{m-1} \delta_k(\varepsilon) \tilde{\phi}_k(x)}{\delta_m(\varepsilon)}$$

concluyendo que $\phi_m = \tilde{\phi}_m$ por la unicidad del límite de la función $f_\varepsilon(x)$ en $V(D)$. ■

En el caso particular en el que $(V(D), \|\cdot\|_{V(D)}) = (C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$, la proposición anterior proporciona un método para ir obteniendo los diversos términos del desarrollo regular. Dichas funciones se determinarán empleando la convergencia puntual, debido a que la convergencia uniforme implica la puntual. Una vez determinadas las funciones, habrá que comprobar las distintas convergencias uniformes, para probar que es desarrollo regular. A modo de ejemplo de dicho método, determinaremos el desarrollo regular uniforme de orden 2 de la función del Ejemplo 1.4.10.

Ejemplo 1.4.12. Considerando la misma función y sucesión asintótica del Ejemplo 1.4.10, se procede a obtener el desarrollo regular uniforme de orden 2 de $\cos(x + \varepsilon)$ empleando la técnica de la Proposición 1.4.11. Supongamos que existe desarrollo regular uniforme de $\cos(\varepsilon + x)$ en $[0, 1]$ de la forma

$$\cos(\varepsilon + x) = \phi_0(x) + \phi_1(x)\varepsilon + \phi_2(x)\varepsilon^2 + \dots$$

Se obtienen $\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x)$ mediante los siguientes límites puntuales:

- $\phi_0(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \cos(x + \varepsilon) = \cos(x)$.
- $\phi_1(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \varepsilon) - \cos(x)}{\varepsilon} = -\operatorname{sen}(x)$ aplicando la regla de L'Hôpital.
- $\phi_2(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \varepsilon) - \cos(x) + \varepsilon \operatorname{sen}(x)}{\varepsilon^2} = -\frac{\cos(x)}{2}$ aplicando la regla de L'Hôpital.

Como podemos observar los términos del desarrollo regular uniforme de la función del ejemplo anterior coinciden con los del Ejemplo 1.4.10, debido a la unicidad de los desarrollos regulares que nos proporciona la Proposición 1.4.11. Como bien se ha mencionado previamente, para garantizar el desarrollo regular uniforme de orden 2 de dicha función, faltaría por probar la convergencia uniforme que nos indica la expresión (1.23), que en este caso está probado en el Ejemplo 1.4.10.

Capítulo 2

Perturbaciones regulares y singulares

En términos generales un problema de perturbación consiste en un problema en el que aparece un pequeño parámetro positivo, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ con $\varepsilon_0 > 0$. En la memoria, el tipo de problemas perturbados que se estudiarán serán problemas de contorno para ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de orden 2 en el que aparezca el parámetro previamente mencionado. La presencia de este puede manifestarse tanto en la ecuación diferencial, como en las condiciones de contorno. Es por ello que la solución del problema puede en principio depender de ε , $u(x, \varepsilon)$ aunque la denotaremos por $u_\varepsilon(x)$. De forma general consideraremos problemas de contorno perturbados de la siguiente forma con $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$

$$\begin{cases} g(\varepsilon)u_\varepsilon''(x) + p(x, \varepsilon)u_\varepsilon'(x) + q(x, \varepsilon)u_\varepsilon(x) = f(x, \varepsilon) & \forall x \in (a, b) \\ \alpha_1(\varepsilon)u_\varepsilon(a) + \alpha_2(\varepsilon)u_\varepsilon'(a) = \gamma(\varepsilon) \\ \beta_1(\varepsilon)u_\varepsilon(b) + \beta_2(\varepsilon)u_\varepsilon'(b) = \delta(\varepsilon) \end{cases} \quad (2.1)$$

donde $p, q, f : [a, b] \times (0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}$ y $\alpha_1, \alpha_2, \gamma, \beta_1, \beta_2, \delta, g : (0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas con α_1, α_2 y β_1, β_2 respectivamente, no ambas nulas. Se toma ε_0 suficientemente pequeño de tal forma que $g(\varepsilon) \neq 0$ para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, de donde se observa que la ecuación diferencial a considerar en el problema de contorno perturbado es lineal y de segundo orden en lo que respecta a la memoria.

Los problemas perturbados se pueden dividir en dos clases, los llamados con perturbación regular y con perturbación singular. En términos generales y sin tener formalismo alguno de la definición de perturbación regular y singular, la principal diferencia entre ambos es que las perturbaciones en el caso regular conducen a pequeños cambios en la solución del problema no perturbado (consiste en tomar $\varepsilon = 0$), mientras que en los problemas singulares, la perturbación por muy pequeña que sea, provoca cambios sustanciales en la solución del problema no perturbado.

El objetivo fundamental de este capítulo es definir formalmente un problema de contorno con perturbación regular y singular, además de trabajar con ejemplos concretos de perturbaciones tanto regulares como singulares, de los cuales se conoce la solución explícita. En todo el capítulo a desarrollar, se han empleado las referencias [1], [3], [5], [6], [7], [8], [10], [12], [15] y [16].

2.1. Problemas de contorno con perturbación regular

Una vez introducidos en el primer capítulo los conceptos fundamentales del análisis asintótico estos se utilizarán para poder definir un problema de contorno con perturbación regular. A partir de este momento se estudiarán un tipo concreto de problemas perturbados, que son un caso particular de (2.1). Dichos problemas se considerarán de la forma

$$\begin{cases} g(\varepsilon)u_\varepsilon''(x) + p(x, \varepsilon)u_\varepsilon'(x) + q(x, \varepsilon)u_\varepsilon(x) = f(x, \varepsilon) & \forall x \in (a, b) \\ u_\varepsilon(a) = \gamma, \quad u_\varepsilon(b) = \delta \end{cases} \quad (2.2)$$

donde ε es un parámetro pequeño, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, $p, q, f \in C([a, b] \times (0, \varepsilon_0])$, $g \in C(0, \varepsilon_0]$, $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Por simplicidad, se ha supuesto que las condiciones de contorno son de tipo Dirichlet no homogéneas y que no están perturbadas. De manera general se denotará por (P_ε) al problema perturbado (2.2). Se supondrá que tomando $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ fijo, existe una única solución de (P_ε) , denotada por u_ε . El objetivo es determinar un desarrollo asintótico regular uniforme en $[a, b]$ de dicha solución u_ε cuando ε tiende a cero, por lo que se consideran las funciones u_ε para cada $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ en el espacio normado $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$. De manera general las referencias consultadas para la realización de esta sección que trata de los problemas con perturbación regular han sido [3], [7], [8] y [16].

Para ello, de manera general y una vez fijada la sucesión asintótica usual $(\delta_n(\varepsilon))_{n \geq 0} = (\varepsilon^n)_{n \geq 0}$, se supondrá que existe un desarrollo regular uniforme de u_ε de la forma

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + \varepsilon u_1(x) + \varepsilon^2 u_2(x) + \cdots \text{ en } [a, b] \quad (2.3)$$

donde u_k son funciones a determinar con $k \geq 0$. Bajo la hipótesis de que las funciones p, q, f, g de (2.2) admiten un desarrollo de Taylor en potencias de ε , sustituyendo dichos desarrollos y el desarrollo regular (2.3) en (P_ε) e igualando coeficientes de la misma potencia de ε , se obtiene una colección de problemas que se denominarán (P_k) ; las soluciones de estos problemas proporcionarán las funciones u_k del desarrollo con $k \geq 0$, en caso de que esos problemas tengan solución. Una vez determinadas las funciones u_k , se probará que (2.3) efectivamente es un desarrollo regular uniforme de u_ε en $[a, b]$, es decir, que para todo $m \geq 0$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| \frac{u_\varepsilon(x) - \sum_{k=0}^m \varepsilon^k u_k(x)}{\varepsilon^m} \right\|_\infty = 0. \quad (2.4)$$

Nótese que la solución de los problemas (P_k) con $k \geq 0$ en caso de que exista y se verifique (2.4) es única, debido a la unicidad de los desarrollos regulares al tener fijada la sucesión asintótica, como se vio en el capítulo anterior.

En este contexto, se proporciona la definición de problema de contorno con perturbación regular y singular:

Definición 2.1.1. (Problema de contorno con perturbación regular y singular)

Sea $V(D)$ un espacio de funciones con la norma $\|\cdot\|_{V(D)}$. Supongamos que, para cada $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ fijo, la solución u_ε de un problema (P_ε) de la forma (2.2) verifica que $u_\varepsilon \in V(D)$ con $D = [a, b]$. Se dice que (P_ε) es un **problema de contorno con perturbación regular** si

- i) Existe un problema (P_0) (problema degenerado/no perturbado), que tiene como única solución u_0 .
- ii) La solución u_0 es una aproximación asintótica regular de u_ε en D , es decir,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u_\varepsilon - u_0\|_{V(D)} = 0.$$

En caso contrario se dice que el problema (P_ε) es un **problema de contorno con perturbación singular**.

En el Capítulo 1 vimos al definir los órdenes de magnitud que tenía gran relevancia el espacio normado considerado. De la misma forma puede tener repercusión al considerar un problema de contorno perturbado, ya que ese mismo problema puede ser regular con una norma y singular con otra, por ello hay que precisar el espacio normado con el que se trabajará en cada caso. En lo que resta del capítulo consideraremos $(V(D), \|\cdot\|_\infty) = (C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$.

A continuación se procede a estudiar diversos problemas de contorno con perturbaciones regulares, obteniendo desarrollos asintóticos uniformes hasta cierto orden de sus soluciones y realizando diversas representaciones gráficas, para visualizar dichas aproximaciones, ya que conocemos explícitamente sus soluciones.

2.2. Algunos ejemplos regulares

Los ejemplos que se consideran a continuación tratan de ilustrar la influencia del parámetro ε a la hora de determinar si un cierto problema (P_ε) es de perturbación regular o no, en función de la ubicación de dicho parámetro en los distintos términos de la ecuación diferencial del problema perturbado a considerar. En el primer ejemplo, supondremos que el parámetro se presenta multiplicando en el término que contiene a la función incógnita de la ecuación diferencial.

Ejemplo 2.2.1. Consideremos el siguiente problema de contorno perturbado con $\varepsilon \in (0, 1]$:

$$(P_\varepsilon) : \begin{cases} u_\varepsilon''(x) + \varepsilon u_\varepsilon(x) = 0 & x \in (0, 1) \\ u_\varepsilon(0) = 0, \quad u_\varepsilon(1) = 1. \end{cases}$$

Queremos probar que (P_ε) es un problema con perturbación regular. Para ello, fijada la sucesión asintótica $\delta_n(\varepsilon) = \varepsilon^n$ con $n \geq 0$, supongamos que existe un desarrollo asintótico regular uniforme de u_ε de la siguiente forma:

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + \varepsilon u_1(x) + \varepsilon^2 u_2(x) + \dots \text{ en } [0, 1]. \quad (2.5)$$

Sustituyendo la expresión (2.5) en (P_ε) tenemos que

$$\begin{aligned} u_0''(x) + \varepsilon u_1''(x) + \varepsilon^2 u_2''(x) + \dots + \varepsilon u_0(x) + \varepsilon^2 u_1(x) + \varepsilon^3 u_2(x) + \dots &= 0 \text{ en } [0, 1]. \\ u_0(0) + \varepsilon u_1(0) + \varepsilon^2 u_2(0) + \dots &= 0 \\ u_0(1) + \varepsilon u_1(1) + \varepsilon^2 u_2(1) + \dots &= 1. \end{aligned}$$

Igualando potencias de ε , se obtiene la siguiente familia de problemas de contorno:

$$(P_0) : \begin{cases} u_0''(x) = 0 \\ u_0(0) = 0, \quad u_0(1) = 1 \end{cases} \quad (P_k) : \begin{cases} u_k''(x) + u_{k-1}(x) = 0 \\ u_k(0) = 0, \quad u_k(1) = 0 \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{N}$$

los cuales nos proporcionarán las respectivas funciones u_k , en caso de que existan, del desarrollo regular anterior (2.5). Nótese que la solución del problema (P_k) se obtiene utilizando la solución de (P_{k-1}) y que todos ellos tienen solución, ya que (P_0) tiene solución y es única. De forma recursiva podemos obtener la solución de (P_k) para cualquier $k \geq 0$. Así se obtienen las funciones u_0 , u_1 y u_2 siguientes

$$u_0(x) = x, \quad u_1(x) = \frac{x - x^3}{6}, \quad u_2(x) = \frac{7x}{360} - \frac{x^3}{36} + \frac{x^5}{120}.$$

Probemos que (P_ε) es un problema de perturbación regular. Se tiene trivialmente la primera condición de la Definición 2.1.1, ya que existe (P_0) y tiene como única solución $u_0(x) = x$. Para ver la segunda condición, veamos que la solución de (P_0) es una aproximación asintótica regular uniforme de la solución de (P_ε) en $[0, 1]$ utilizando la expresión explícita de la solución u_ε . La ecuación del problema (P_ε) es una ecuación lineal homogénea de orden 2 con coeficientes constantes cuya solución general es:

$$u_\varepsilon(x) = c_1 \cos(\sqrt{\varepsilon}x) + c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{\varepsilon}x) \text{ con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Por tanto imponiendo las condiciones de contorno a dicha solución general se obtiene la solución de (P_ε) para cada $\varepsilon \in (0, 1]$:

$$u_\varepsilon(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(\sqrt{\varepsilon})} \operatorname{sen}(\sqrt{\varepsilon}x).$$

Al conocer la solución exacta de (P_ε) , es fácil ver que $\|u_\varepsilon - u_0\|_\infty \rightarrow 0$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

En efecto se tiene

$$\begin{aligned}
0 \leq \|u_\varepsilon - u_0\|_\infty &= \left\| \frac{1}{\operatorname{sen}(\sqrt{\varepsilon})} \operatorname{sen}(\sqrt{\varepsilon}x) - x \right\|_\infty = \left\| \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{\varepsilon}x) - x \operatorname{sen}(\sqrt{\varepsilon})}{\operatorname{sen}(\sqrt{\varepsilon})} \right\|_\infty \leq \\
&\leq \frac{1}{\operatorname{sen}(\sqrt{\varepsilon})} (\|\operatorname{sen}(\sqrt{\varepsilon}x) - \sqrt{\varepsilon}x\|_\infty + \|\sqrt{\varepsilon}x - x \operatorname{sen}(\sqrt{\varepsilon})\|_\infty) = \\
&= \frac{1}{\operatorname{sen}(\sqrt{\varepsilon})} (\|\operatorname{sen}(\sqrt{\varepsilon}x) - \sqrt{\varepsilon}x\|_\infty + (\sqrt{\varepsilon} - \operatorname{sen}(\sqrt{\varepsilon}))) \leq \\
&\leq \frac{1}{\operatorname{sen}(\sqrt{\varepsilon})} \left(\frac{K\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}{3!} + (\sqrt{\varepsilon} - \operatorname{sen}(\sqrt{\varepsilon})) \right)
\end{aligned} \tag{2.6}$$

con $K \in \mathbb{R}$, donde en la última desigualdad hemos empleado el desarrollo de Taylor de $\operatorname{sen}(\sqrt{\varepsilon}x)$ en $\varepsilon = 0$, considerando x constante, y se ha acotado $|\operatorname{sen}(\sqrt{\varepsilon}x) - \sqrt{\varepsilon}x|$. Tomando límites cuando ε tiende a cero a ambos lados de la desigualdad, aplicando la regla de L'Hôpital a la última expresión de (2.6) y empleando la regla del Sándwich, se concluye que u_0 es una aproximación asintótica regular uniforme de u_ε en $[0, 1]$ y por tanto (P_ε) es un problema regular.

A continuación, en la Figura 2.1, representamos gráficamente las soluciones de los problemas (P_ε) tomando $\varepsilon = 1, \varepsilon = 0.5, \varepsilon = 0.2, \varepsilon = 0.1$, junto con la solución de (P_0) , u_0 . Nótese que tomar $\varepsilon = 1$ en u_ε , consiste en sustituir $\varepsilon = 1$ en la expresión de u_ε , función que no hay que confundir con el término u_1 del desarrollo regular. Podemos observar que a medida que ε decrece hacia cero, las gráficas de las distintas funciones u_ε , se aproximan a la función u_0 . Así visualmente, podemos decir que u_0 es una aproximación de u_ε , la cual es regular en $[0, 1]$.

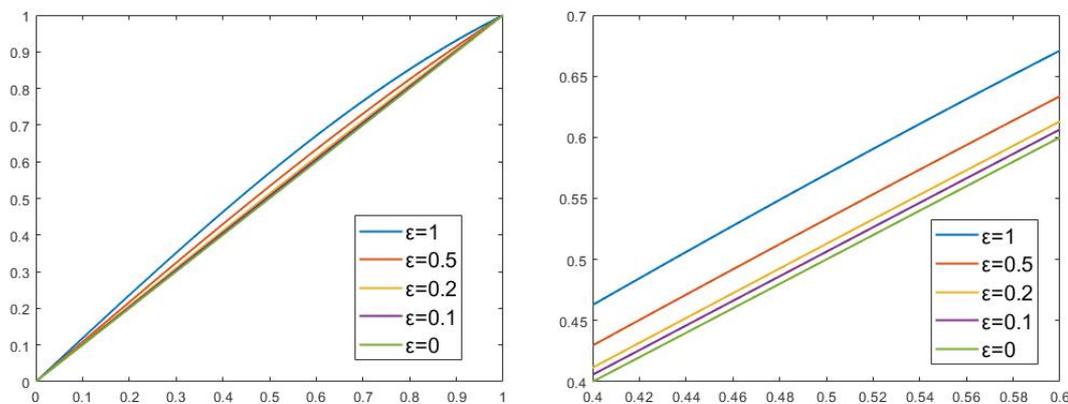


Figura 2.1: Representación gráfica de u_ε , para distintos valores de ε , y u_0 en los dominios $[0, 1]$ y $[0.4, 0.6]$ respectivamente.

De forma análoga a (2.6), se puede comprobar que se verifican las siguientes convergencias:

$$\frac{\|u_\varepsilon - u_0 - \varepsilon u_1\|_\infty}{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0, \quad \frac{\|u_\varepsilon - u_0 - \varepsilon u_1 - \varepsilon^2 u_2\|_\infty}{\varepsilon^2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

lo cual nos indica que $u_0(x) + \varepsilon u_1(x) = x + \varepsilon(x - x^3)/6$ es un desarrollo regular de orden 1 de u_ε mientras que $u_0(x) + \varepsilon u_1(x) + \varepsilon^2 u_2(x) = x + \varepsilon(x - x^3)/6 + \varepsilon^2(7x/360 - x^3/36 + x^5/120)$ es un desarrollo asintótico regular de orden 2 de u_ε , ambos uniformes y en $[0, 1]$ (ver PROBLEMA 1 en Sección 3.2 donde se prueba para un problema más general). Notemos que cuantos más términos del desarrollo tengamos se obtiene una mejor aproximación de u_ε , como se ilustra en la siguiente tabla

	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = 0.5$	$\varepsilon = 0.2$	$\varepsilon = 0.1$
$\ u_\varepsilon - u_0\ _\infty$	0.071296	0.033765	0.013092	0.006480
$\ u_\varepsilon - u_0 - \varepsilon u_1\ _\infty/\varepsilon$	0.007258	0.003435	0.001331	0.000659
$\ u_\varepsilon - u_0 - \varepsilon u_1 - \varepsilon^2 u_2\ _\infty/\varepsilon^2$	0.000737	0.000349	0.000135	0.000067

Tabla 2.1: Errores en las aproximaciones de u_ε para distintos valores de ε al incrementar el orden del desarrollo asintótico.

Procedemos a analizar la tabla anterior, Tabla 2.1. Para comenzar situémonos en una fila que contiene una expresión concreta en la primera columna de dicha tabla. En ella se observa que a medida que se van tomando valores de ε cada vez más pequeños, el valor de la expresión en cuestión decrece, lo cual nos hace intuir que u_0 , $u_0 + \varepsilon u_1$ y $u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2$ son ciertamente desarrollos regulares uniformes de u_ε en $[0, 1]$ de orden 0, 1 y 2 respectivamente. Considerando ahora un valor de ε fijo, a medida que se incrementa el orden del desarrollo regular los valores de las distintas expresiones decrecen, lo cual nos da lugar a decir que cuando vamos considerando un desarrollo de mayor orden, se va reduciendo el error entre u_ε y los desarrollos regulares uniformes de distinto orden de u_ε .

Se procede a analizar otro ejemplo en el que a diferencia del anterior el parámetro ε se sitúa multiplicando el término de la derivada de primer orden en la ecuación diferencial.

Ejemplo 2.2.2. Sea el problema de contorno perturbado

$$(P_\varepsilon) : \begin{cases} u_\varepsilon''(x) + \varepsilon u_\varepsilon'(x) - u_\varepsilon(x) = 0 & x \in (0, 1) \\ u_\varepsilon(0) = 0, & u_\varepsilon(1) = 1 \end{cases}$$

donde $\varepsilon \in (0, 1]$ y cuya solución viene dada por

$$u_\varepsilon(x) = e^{\varepsilon(1-x)/2} \left(\sinh \left(\sqrt{\varepsilon^2 + 4}/2 \right) \right)^{-1} \sinh \left(x \sqrt{\varepsilon^2 + 4}/2 \right) \quad \text{con } \varepsilon \in (0, 1].$$

Supongamos que existe un desarrollo asintótico regular uniforme de u_ε de la forma (2.5). Sustituyendo la expresión (2.5) en (P_ε) e igualando potencias de ε , se obtiene la sucesión de problemas de contorno (P_k) con $k \geq 0$. Tenemos así

$$(P_0) : \begin{cases} u_0''(x) - u_0(x) = 0 \\ u_0(0) = 0, & u_0(1) = 1 \end{cases} \quad (P_k) : \begin{cases} u_k''(x) + u_{k-1}'(x) - u_k(x) = 0 \\ u_k(0) = 0, & u_k(1) = 0 \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{N}.$$

Cada uno de los problemas anteriores nos proporcionará la respectiva función u_k del desarrollo regular (2.5) en caso de que exista. Calculamos las soluciones u_0, u_1 y u_2 :

$$u_0(x) = \frac{\sinh(x)}{\sinh(1)}, \quad u_1(x) = \frac{(1-x)\sinh(x)}{2\sinh(1)}, \quad u_2(x) = \frac{[(x^2-x)e\sinh(1)-1]\sinh(x)}{8e\sinh^2(1)} + \frac{xe^{-x}}{8\sinh(1)}$$

de donde obtenemos el siguiente desarrollo asintótico regular uniforme de orden 2 de u_ε en $[0, 1]$

$$u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 = \frac{\sinh(x)}{\sinh(1)} + \frac{\varepsilon(1-x)\sinh(x)}{2\sinh(1)} + \frac{[(x^2-x)e\sinh(1)-1]\varepsilon^2\sinh(x)}{8e\sinh^2(1)} + \frac{\varepsilon^2 xe^{-x}}{8\sinh(1)}$$

Nótese que todavía no se puede afirmar que sea un desarrollo asintótico regular uniforme de orden 2 de u_ε en $[0, 1]$, ya que falta por probar que $\|u_\varepsilon - u_0 - \varepsilon u_1 - \varepsilon^2 u_2\|_\infty/\varepsilon^2$ converge a cero cuando ε tiende a cero (ver PROBLEMA 2 en Sección 3.2 donde se prueba en un caso más general).

Al igual que se ha realizado en el Ejemplo 2.2.1, vamos a considerar una tabla con la cual podemos garantizar con cierta seguridad pero sin probarlo analíticamente, que ciertamente u_0 ,

$u_0 + \varepsilon u_1$, $u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2$ son desarrollos asintóticos regulares uniformes de u_ε en $[0, 1]$ de órdenes 0, 1 y 2 respectivamente.

	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = 0.5$	$\varepsilon = 0.2$	$\varepsilon = 0.1$
$\ u_\varepsilon - u_0\ _\infty$	0.110043	0.055433	0.022210	0.011106
$\ u_\varepsilon - u_0 - \varepsilon u_1\ _\infty / \varepsilon$	0.007242	0.003444	0.001434	0.000726
$\ u_\varepsilon - u_0 - \varepsilon u_1 - \varepsilon^2 u_2\ _\infty / \varepsilon^2$	0.002028	0.001024	0.000410	0.000205

Tabla 2.2: Errores en las aproximaciones de u_ε para distintos valores de ε al incrementar el orden del desarrollo asintótico.

El análisis de la Tabla 2.2 es análogo al realizado en el Ejemplo 2.2.1. A medida que se avanza de columna en una fila concreta de la primera columna, decrece el valor de la expresión, lo cual nos indica que cuando ε tiende a cero esas expresiones tienden a cero y por tanto nos garantiza de cierta forma que u_0 , $u_0 + \varepsilon u_1$, $u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2$ son desarrollos asintóticos regulares uniformes de u_ε en $[0, 1]$ de órdenes 0, 1 y 2 respectivamente como habíamos anunciado previamente. Por otro lado, fijado un ε y al considerar desarrollos regulares de mayor orden, se observa que los valores de las expresiones decrecen lo cual nos indica que a medida que se considere el desarrollo regular de mayor orden, se obtiene una mejor aproximación de la solución de (P_ε) . En la Figura 2.2, procedemos a representar gráficamente u_ε , para $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = 0.5$, $\varepsilon = 0.2$ y $\varepsilon = 0.1$, y u_0 . De nuevo, se observa que a medida que ε tiende a cero, las gráficas de las funciones u_ε para los diversos valores de ε se aproximan a la función u_0 , lo cual cabía esperar en base a lo analizado en la Tabla 2.2.

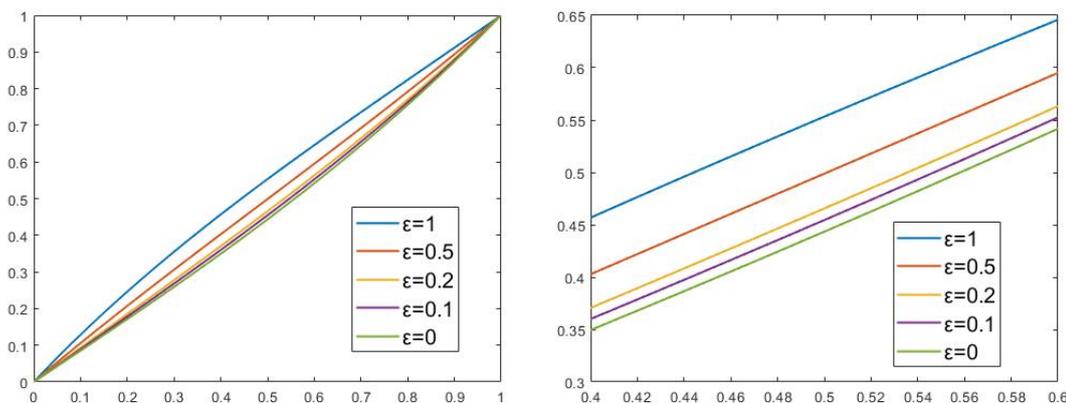


Figura 2.2: Representación gráfica de u_ε y u_0 en los dominios $[0, 1]$ y $[0.4, 0.6]$.

En el siguiente ejemplo a considerar, el parámetro hace presencia tanto en el término independiente, como en el término de la función incógnita de la ecuación diferencial.

Ejemplo 2.2.3. Considérese el problema de contorno perturbado (P_ε) en el que $\varepsilon \in (0, 1]$:

$$(P_\varepsilon) : \begin{cases} u_\varepsilon''(x) + \varepsilon^2 u_\varepsilon(x) = \cos(\varepsilon) & x \in (-1, 1) \\ u_\varepsilon(-1) = -1, & u_\varepsilon(1) = 1 \end{cases}$$

que tiene por solución

$$u_\varepsilon(x) = \frac{-\cos(\varepsilon x)}{\varepsilon^2} + \frac{\text{sen}(\varepsilon x)}{\text{sen}(\varepsilon)} + \frac{\cos(\varepsilon)}{\varepsilon^2}.$$

De nuevo, considerando la sucesión asintótica usual, supongamos que existe un desarrollo asintótico regular uniforme de u_ε de la forma:

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + \varepsilon u_1(x) + \varepsilon^2 u_2(x) + \dots \text{ en } [-1, 1]. \quad (2.7)$$

Utilizando el desarrollo de Taylor de la función $\cos(\varepsilon)$ en potencias de ε , centrado en $\varepsilon = 0$,

$$\cos(\varepsilon) = 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^4}{4!} - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\varepsilon^{2k}}{(2k)!}$$

y sustituyendo dicho desarrollo y el dado por (2.7) en el problema (P_ε) se obtiene una serie de problemas de contorno, (P_k) con $k \geq 0$, que nos permiten determinar las funciones del desarrollo asintótico en caso de que tengan solución dichos problemas. Se obtiene por tanto

$$(P_0) : \begin{cases} u_0''(x) = 1 \\ u_0(-1) = -1, \quad u_0(1) = 1 \end{cases} \quad (P_k) : \begin{cases} u_k''(x) + u_{k-2}(x) = (-1)^{k/2}/k! \\ u_k(-1) = 0, \quad u_k(1) = 0 \end{cases} \quad \text{con } k \text{ par.}$$

En el caso en el que k sea impar, $u_k(x) = 0$. Resolviendo los problemas (P_0) , (P_1) y (P_2) , los cuales tienen una única solución, se obtienen las funciones u_0 , u_1 y u_2 respectivamente:

$$u_0(x) = \frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2}, \quad u_1(x) = 0, \quad u_2(x) = \frac{1}{24} + \frac{x}{6} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24}.$$

Así, se obtiene el desarrollo asintótico regular de orden 2:

$$u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 = \frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2} + \varepsilon^2 \left(\frac{1}{24} + \frac{x}{6} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24} \right)$$

Al igual que en los ejemplos anteriores para garantizar que la expresión anterior es un desarrollo regular, faltaría por probar (2.4) para $m = 2$. Como los cálculos analíticos para realizar dicha prueba son laboriosos, únicamente haremos ahora un estudio numérico de la convergencia que nos indica (2.4), posponiendo la prueba para un caso más general a la Sección 3.2

En la Figura 2.3, consideramos las representaciones de u_ε para distintos valores de ε , además de representar u_0 . Se observa que al ir decreciendo el valor de ε , las funciones u_ε para los distintos ε se van aproximando a la solución de (P_0) . Esto es lo que ciertamente nos asegura que el problema (P_ε) es un problema de contorno con perturbación regular, ya que el problema (P_0) tiene solución única y además $\|u_\varepsilon - u_0\|_\infty$ tiende a cero cuando ε tiende a cero como se conjetura a partir de la Tabla 2.3.

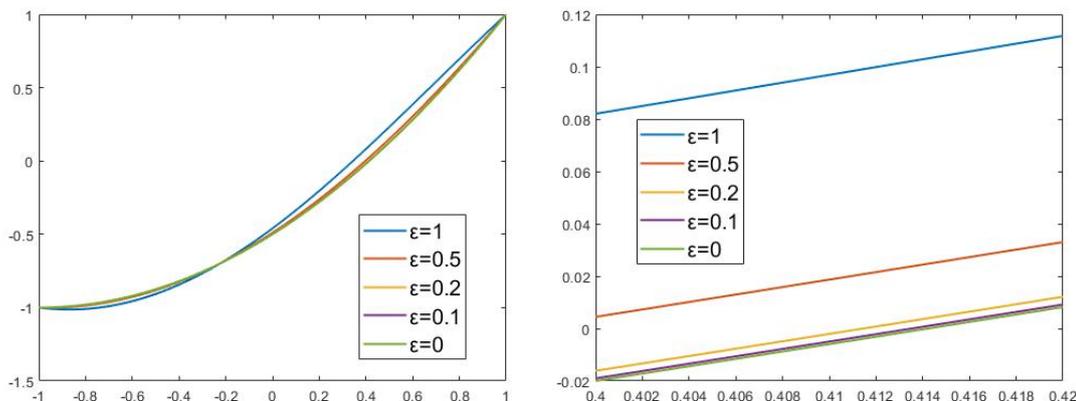


Figura 2.3: Representación gráfica de u_ε y u_0 en los dominios $[-1, 1]$ y $[0.4, 0.42]$.

A continuación se considera la Tabla 2.3 en la que se recopilan los distintos errores de los desarrollos asintóticos regulares uniformes de u_ε para los órdenes 0, 1 y 2 respectivamente y distintos valores de ε .

	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = 0.5$	$\varepsilon = 0.2$	$\varepsilon = 0.1$
$\ u_\varepsilon - u_0\ _\infty$	0.107819	0.025809	0.004084	0.001019
$\ u_\varepsilon - u_0 - \varepsilon u_1\ _\infty / \varepsilon$	0.107819	0.051617	0.020422	0.010195
$\ u_\varepsilon - u_0 - \varepsilon u_1 - \varepsilon^2 u_2\ _\infty / \varepsilon^2$	0.008596	0.002012	0.000316	0.000079

Tabla 2.3: Errores en las aproximaciones de u_ε para distintos valores de ε al incrementar el orden del desarrollo asintótico.

La interpretación de la tabla anterior, Tabla 2.3, es análoga a la de los ejemplos anteriores, aunque esta tiene una peculiaridad a considerar. Al igual que en otras ocasiones avanzando por columnas de una fila en concreto, para valores de ε cada vez más pequeños, decrece el valor de la expresión en cuestión, lo cual nos indica que ciertamente en cada respectivo caso tenemos que u_0 , $u_0 + \varepsilon u_1$ y $u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2$ son desarrollos asintóticos regulares uniformes de u_ε en $[-1, 1]$ de órdenes 0, 1 y 2, respectivamente.

Por otro lado, a diferencia de los casos anteriores, una vez fijado ε al observar el error asociado al desarrollo de orden cero y compararlo con el error del desarrollo de orden 1, no hay una reducción del error. Lo anterior ocurre ya que al tener que la función u_1 del desarrollo es constantemente igual a 0 y ser $\varepsilon \leq 1$, se obtiene la siguiente desigualdad entre los distintos errores

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_\infty \leq \frac{\|u_\varepsilon - u_0\|_\infty}{\varepsilon} = \frac{\|u_\varepsilon - u_0 - \varepsilon u_1\|_\infty}{\varepsilon}. \quad (2.8)$$

Así, si observamos detenidamente la Tabla 2.3, para los valores de ε considerados en la misma ciertamente se verifica la igualdad de (2.8). No obstante, si nos fijamos en la última de las filas en comparación con las demás, sí que decrece el valor por lo que vamos a obtener una mejor aproximación de u_ε al incrementar el orden del desarrollo siempre que el nuevo término a añadir en este sea no nulo.

Consideramos ahora un último ejemplo en el que la presencia del parámetro se encuentra multiplicando a la derivada de mayor orden de la ecuación diferencial de un problema de contorno.

Ejemplo 2.2.4. Considérese el problema de contorno perturbado (P_ε) en el que $\varepsilon \in (0, 1]$:

$$(P_\varepsilon) : \begin{cases} \varepsilon u_\varepsilon''(x) + u_\varepsilon'(x) = 0 & x \in (0, 1) \\ u_\varepsilon(0) = 0, \quad u_\varepsilon(1) = 1. \end{cases}$$

Supongamos de nuevo que existe el desarrollo regular uniforme de u_ε de la forma (2.5). Sustituyendo dicha expresión en el problema (P_ε) se obtiene la siguiente colección de problemas de contorno igualando coeficientes que tengan misma potencia de ε :

$$(P_0) : \begin{cases} u_0'(x) = 0 \\ u_0(0) = 0, \quad u_0(1) = 1 \end{cases} \quad (P_k) : \begin{cases} u_k'(x) + u_{k-1}''(x) = 0 \\ u_k(0) = 0, \quad u_k(1) = 0 \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{N}. \quad (2.9)$$

Se observa que no existe solución para (P_0) ya que por la ecuación diferencial sabemos que u_0 ha de ser una constante pero al aplicarle las condiciones de contorno en cada extremo toma distintos valores, es por ello que no estamos ante un problema de perturbación regular. Como la causa de que el problema (P_0) no tenga solución proviene de las condiciones de contorno del mismo, procedemos a suprimir una de estas y ver si el problema resultante tiene solución y si además aproxima a u_ε .

Previamente, como se puede obtener explícitamente la solución del problema, se procede a resolver el problema (P_ε) llegando a la solución

$$u_\varepsilon(x) = \frac{1 - e^{-x/\varepsilon}}{1 - e^{-1/\varepsilon}}.$$

Claramente se observa que u_ε converge puntualmente a la función

$$\tilde{u}_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x \leq 1 \end{cases} ,$$

cuando ε tiende a cero (ver Figura 2.4). Por la unicidad del desarrollo, dicha función \tilde{u}_0 debería corresponder con la función u_0 del mismo, pero resulta que \tilde{u}_0 no es continua, por lo que no se tiene la convergencia a cero de $\|u_\varepsilon - \tilde{u}_0\|_\infty$ cuando ε tiende a cero.

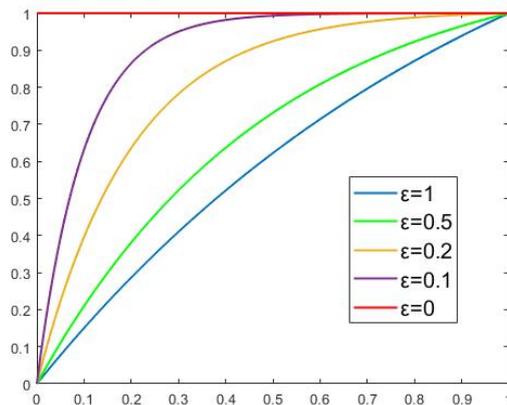


Figura 2.4: Representación gráfica de u_ε y $u_0 = 1$ en el dominio $[0, 1]$.

Volviendo a la idea de suprimir una de las condiciones de contorno de (P_0) , consideramos los casos:

- Caso $u_0(x) = 0$ donde hemos suprimido la condición $u_0(1) = 1$. Claramente se obtiene que $\|u_\varepsilon - u_0\|_\infty = 1$ debido a que $u_0(1) = 0$ y $u_\varepsilon(1) = 1$ y por consiguiente $u_0(x) = 0$ no es una aproximación regular uniforme de u_ε en $[0, 1]$. Como estamos interesados en tener desarrollos regulares, vamos a restringirnos al intervalo $[0, \delta]$ con $0 < \delta < 1$ obteniendo que

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{C[0,\delta]} = (1 - e^{-\delta/\varepsilon}) / (1 - e^{-1/\varepsilon}) \rightarrow 1 \text{ cuando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Notemos que no interesa un intervalo de la forma $[\delta, 1]$ ya que seguiría ocurriendo $\|u_\varepsilon - u_0\|_{C[\delta,1]} = 1$. Por lo que a priori esta elección de u_0 no nos interesa (ver Tabla 2.4).

- Caso $u_0(x) = 1$ donde hemos suprimido la condición $u_0(0) = 0$. Considerando esta función u_0 , se obtiene que $\|u_\varepsilon - u_0\|_\infty = 1$, porque $u_0(0) = 1$ y $u_\varepsilon(0) = 0$. Razonando como en el caso anterior no tiene sentido restringirnos al intervalo $[0, \delta]$ con $0 < \delta < 1$, pero en el intervalo $[\delta, 1]$ se tiene

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{C[\delta,1]} = (e^{-\delta/\varepsilon} - e^{-1/\varepsilon}) / (1 - e^{-1/\varepsilon}) \rightarrow 0 \text{ cuando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Tenemos por tanto que $u_0 = 1$ es una aproximación regular uniforme de u_ε en $[\delta, 1]$.

A modo de conclusión se puede decir que no existe el desarrollo asintótico regular uniforme de u_ε , en todo el intervalo $[0, 1]$ y la perturbación es singular. Considerando la función $u_0 = 0$ que cumple la ecuación diferencial de (P_0) y la primera condición de contorno, no se obtiene en ninguno de los subintervalos considerados que sea una aproximación regular uniforme de u_ε en el intervalo en cuestión. Por lo contrario considerando $u_0 = 1$ al realizar la restricción al intervalo $[\delta, 1]$ con $0 < \delta < 1$ fijo, se tiene que $u_0 = 1$ es una aproximación regular uniforme de u_ε en dicho intervalo.

			$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = 0.5$	$\varepsilon = 0.2$	$\varepsilon = 0.1$
$\ u_\varepsilon - u_0\ _{C[\delta,1]}$	$u_0 = 1$	$\delta = 0.5$	0.3775	0.2689	0.0759	0.0067
		$\delta = 0.2$	0.7132	0.6187	0.3636	0.1353
		$\delta = 0.1$	0.8495	0.7904	0.6039	0.3679
$\ u_\varepsilon - u_0\ _{C[0,\delta]}$	$u_0 = 0$	$\delta = 0.5$	0.6225	0.7311	0.9241	0.9933
		$\delta = 0.2$	0.2868	0.3813	0.6364	0.8647
		$\delta = 0.1$	0.1505	0.2096	0.3961	0.6321

Tabla 2.4: Errores en la aproximación de u_ε por $u_0 = 0$ y $u_0 = 1$ en distintos intervalos.

En la Tabla 2.4, podemos observar lo comentado previamente. Considerando $u_0 = 1$ y el intervalo $[\delta, 1]$, para δ un valor fijo $0 < \delta < 1$, a medida que decrece el valor de ε , $\|u_\varepsilon - u_0\|_{C[\delta,1]}$ decrece. Ese fenómeno se puede observar también en la Figura 2.4, ya que en el intervalo considerado, las distintas funciones u_ε están más próximas de la función constantemente igual a 1, lo cual justifica de cierta forma que $u_0 = 1$ es una aproximación regular uniforme de u_ε en $[\delta, 1]$. Por otro lado, considerando la misma situación de antes con la diferencia de que ahora el valor de ε es fijo, a medida que aumenta el intervalo a considerar, es decir decrece δ , se obtienen valores de $\|u_\varepsilon - u_0\|_{C[\delta,1]}$ mayores debido a que las distintas funciones u_ε crecen hacia 1 y por tanto distan más de la función $u_0 = 1$ como se observa en la Figura 2.4.

Considerando ahora el intervalo $[0, \delta]$ y $u_0 = 0$, para δ fijo a medida que ε decrece $\|u_\varepsilon - u_0\|_{C[0,\delta]}$ crece y parece que tiende a 1, lo cual se ajusta a lo analizado previamente. Si por lo contrario, fijamos ε y vamos decreciendo el valor de δ a considerar, se obtienen valores de la norma anterior cada vez más pequeños, por el hecho de que las funciones u_ε son crecientes próximas a cero en $[0, \delta]$.

Este último ejemplo motiva la siguiente sección que se centra en el análisis de problemas de contorno con perturbación singular, en los cuales ocurrirán fenómenos como los vistos en el Ejemplo 2.2.4, denominados singularidades de capa límite.

Con la colección de ejemplos vistos, podemos conjeturar que dado un problema de contorno perturbado en el que el parámetro no está multiplicando a la derivada de mayor orden de la ecuación diferencial, dicho problema será de perturbación regular. En caso contrario y como se ha visto en el Ejemplo 2.2.4, se espera estar ante un problema con perturbación singular. El motivo que justifica el fenómeno anterior, se debe a que como el parámetro ε multiplica a la derivada de mayor orden de la ecuación del problema (P_ε), el problema degenerado consta de una ecuación de menor orden. Dicha reducción de orden provoca que al resolver la ecuación se obtenga una única constante a determinar, por lo que al imponer las condiciones, puede que lleguemos a una contradicción, dando lugar a un problema sin solución.

2.3. Problemas de contorno con perturbación singular

A continuación se procede a estudiar problemas de contorno con perturbación singular que en base a la Definición 2.1.1, son aquellos que no son de perturbación regular. Al igual que en los problemas regulares, los problemas perturbados a tratar en la sección serán de la forma (2.2). Aunque existen otros tipos de singularidades, solo consideraremos aquellas del tipo capa límite.

El objetivo de la sección será encontrar aproximaciones asintóticas uniformes de las soluciones de los problemas perturbados, que sean válidas en todo el dominio de definición cuando ε tiende a cero. En lo que sigue, al mencionar desarrollos asintóticos ya sean regulares o no, consideraremos desarrollos de orden cero. Para realizar esta sección, aparte de las referencias empleadas en los problemas con perturbación regular también se han utilizado [1], [5], [6], [10], [12] y [15].

En problemas singulares razonaremos de la siguiente manera. Se procederá a dividir el dominio de definición en dos subintervalos y suponer que en cada uno de ellos existe un desarrollo asintótico regular de orden cero. Sea $a < \delta < b$ consideramos de forma genérica $[a, \delta] \cup [\delta, b] = [a, b]$, donde a y b serán los puntos donde se dan las condiciones de contorno y supongamos que existe un desarrollo asintótico regular de orden cero de la solución u_ε de (2.2) en $[a, \delta]$ y otro en $[\delta, b]$ respectivamente.

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + o(1) \text{ en } [a, \delta]$$

$$u_\varepsilon(x) = u_0^*(x) + o(1) \text{ en } [\delta, b]$$

donde u_0 y u_0^* son funciones. Sustituyendo dichos desarrollos en el problema (P_ε) , (2.2) en sus respectivos dominios, e igualando coeficientes con potencias de ε igual a cero, se obtienen los problemas (P_0) y (P_0^*) planteados en $[a, \delta]$ y $[\delta, b]$ respectivamente. Al realizar esta estrategia se consigue separar las condiciones de contorno, debido a que estamos suponiendo desarrollos asintóticos regulares en dos intervalos distintos, cada uno conteniendo a un extremo. En otras palabras, la condición de contorno del problema (P_0) estará dada en el extremo $x = a$, mientras que en el problema (P_0^*) en $x = b$. En los casos en los que no exista el desarrollo en ninguno de los dos subintervalos considerados, se procederá a dividir el intervalo inicial en tres subintervalos y así sucesivamente hasta encontrar una partición en la que en uno de los intervalos, exista el desarrollo regular de la función u_ε .

La estrategia anterior será viable en los casos en los que el tipo de singularidades del problema sean de capa límite, que son las singularidades a considerar en la memoria, ya que puede ocurrir que se tenga otro tipo de singularidad y no se pueda solventar el problema de dicha forma (ver Ejemplo 2.2.3 de la Página 45 de [1]). Las singularidades de capa límite reciben ese nombre por la presencia de una capa límite en la solución del problema a considerar. Se procede a definir a continuación el concepto de capa límite.

Definición 2.3.1.

Sea una función $u_\varepsilon(x)$, $x \in [a, b]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ tal que existe un conjunto de puntos aislados $A = \{x_k\}_{k \in \mathcal{K}} \subset [a, b]$ con $\mathcal{K} \subset \mathbb{N}$, verificando las siguientes propiedades:

- Para todo intervalo cerrado $I \subseteq [a, b]$ independiente de ε tal que $x_k \in I$ para algún $k \in \mathcal{K}$, no existe aproximación asintótica regular de la función u_ε en I .
- Para todo intervalo cerrado $J \subseteq [a, b]$ independiente de ε tal que $x_k \notin J$ para todo $k \in \mathcal{K}$, existe aproximación asintótica regular de la función u_ε en J .

Entonces se dice que u_ε tiene una **capa límite** en cada x_k con $k \in \mathcal{K}$ y A se denomina conjunto de capas límite.

En base a la definición anterior, Definición 2.3.1, el conjunto de capas límite a priori puede ser un conjunto formado por puntos aislados que pueden ser los extremos a, b , o no. Los problemas singulares estudiados en la memoria tendrán una capa límite en uno o en los dos extremos. A modo de existencia de una capa límite en un punto interior se proporciona el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.3.2. Considérese la función $u_\varepsilon(x) = \tanh(x/\varepsilon)$ con $x \in [-1, 1]$, $\varepsilon \in (0, 1]$. Siguiendo la estrategia de la Proposición 1.4.11, se tiene que el límite puntual de u_ε es

$$u_0(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x \leq 1 \end{cases} \quad (2.10)$$

cuando ε tiende a cero, el cual correspondería con el desarrollo regular uniforme de orden 0 de u_ε en $[-1, 1]$, pero resulta que $u_0 \notin C[-1, 1]$, no teniendo sentido plantearse $\|u_\varepsilon - u_0\|_\infty$, por

lo que no existe el desarrollo mencionado. Representando gráficamente la función para distintos valores de ε , se puede intuir que la capa límite estará situada en $x = 0$, veámoslo.

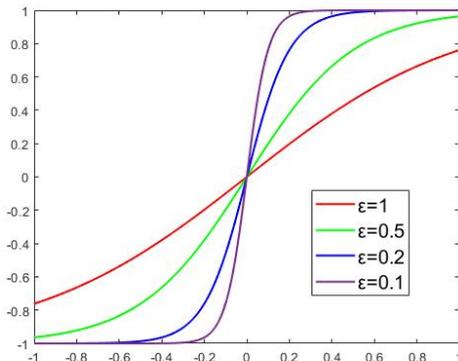


Figura 2.5: Representación gráfica de u_ε en el dominio $[-1, 1]$.

Nótese que para cualquier intervalo $I = [\delta, \beta] \subseteq [-1, 1]$ con $-1 \leq \delta < 0 < \beta \leq 1$ y $0 \in I$, no existe aproximación asintótica regular uniforme de u_ε en I , debido a que la función u_0 se obtendría de realizar la restricción de (2.10) al intervalo $[\delta, \beta]$, la cual no es continua en el cero. Por otro lado, para todo intervalo $J = [\alpha, \beta] \subset (0, 1]$, existe el desarrollo regular uniforme de orden 0 de u_ε en J . La función $u_0 = 1$ se obtiene de restringir la función (2.10) al intervalo J y además se verifica que $\|u_\varepsilon - u_0\|_{C[\alpha, \beta]}$ tiende a cero cuando ε tiende a cero. En efecto, es fácil ver que

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{C[\alpha, \beta]} = \sup_{x \in [\alpha, \beta]} \left(1 - \tanh\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right) = 1 - \tanh\left(\frac{\alpha}{\varepsilon}\right)$$

tiende a cero cuando ε tiende a cero por el hecho de ser $\alpha > 0$.

Considerando los intervalos anteriores, aún no se puede garantizar que en $x = 0$ tengamos una capa límite, ya que faltan intervalos del tipo $K = [\delta, \gamma] \subset [-1, 0)$ donde debemos verificar que existe aproximación regular uniforme de u_ε . En este caso al restringir (2.10) a K se obtiene la función $u_0 = -1$ la cual verifica que

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{C[\delta, \gamma]} = \sup_{x \in [\delta, \gamma]} \left(1 + \tanh\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right) = 1 + \tanh\left(\frac{\gamma}{\varepsilon}\right)$$

tiende a cero cuando ε tiende a cero por ser $\gamma < 0$.

De todo lo anterior, se deduce que u_ε tiene una única capa límite en $x = 0$, debido a que en todo intervalo cerrado que contiene al cero no existe desarrollo asintótico regular uniforme de orden cero de u_ε , mientras que en todo intervalo cerrado que no contiene al cero sí que existe aproximación regular uniforme de u_ε .

Desde este momento en adelante salvo que se diga lo contrario, consideraremos que las soluciones a los problemas de contorno de la forma (2.2) tienen una única capa límite en uno de los extremos. Veamos como razonamos si tenemos una capa límite en $x = a$ o una capa límite en $x = b$ de forma genérica en un problema de perturbación singular de la forma (2.2).

- Capa límite en $x = a$

Como la solución u_ε del problema (2.2) tiene una única capa límite en $x = a$, se tiene que dado cualquier intervalo $I = [a, \delta] \subseteq [a, b]$ con $a < \delta \leq b$, no existe desarrollo asintótico regular de orden cero de u_ε en I , mientras que si consideramos cualquier intervalo $J = [\alpha, \beta] \subset [a, b]$ con $a < \alpha < \beta \leq b$, existe aproximación asintótica regular de u_ε en J .

De entre todos los intervalos en los que existe desarrollo regular de orden 0 se toma el de mayor longitud, considerando $I = [a, \delta]$ los intervalos en los que no existe aproximación regular de u_ε y $J = [\delta, b]$ en los que sí, con $a < \delta < b$.

Al desarrollo regular de u_ε en J , es decir,

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + o(1) \text{ en } [\delta, b] \quad (2.11)$$

se le denomina **desarrollo exterior** y a la variable del desarrollo, x , **variable exterior**. Por lo contrario considerando el intervalo que contiene la capa límite, $I = [a, \delta]$, en el cual no existe el desarrollo regular, se toma una nueva variable que nos permitirá modificar de cierta forma el problema de contorno original de manera que la solución del nuevo problema (\tilde{P}_ε) , (P_ε) escrito en la nueva variable, admita un desarrollo regular en determinado intervalo:

Transformación si la capa límite está en $x = a$: $\xi = \frac{x - a}{\varepsilon^\alpha}$ con $\alpha > 0$

Como $x \in [a, \delta]$, se tiene que la variable ξ para valores de ε, δ y α fijos verifica que $\xi \in [0, (\delta - a)/\varepsilon^\alpha]$ que si hacemos tender ε a cero, fijado un $x \in I$, tenemos que ξ tiende a ∞ , ya que $x - a > 0$, en otras palabras,

$$\text{si } x \in [a, \delta] \text{ entonces } \xi \in \left[0, \frac{\delta - a}{\varepsilon^\alpha}\right] \rightarrow [0, \infty) \text{ cuando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Realizando el cambio de variable anterior, consideramos $u_\varepsilon(x) = u_\varepsilon(\xi\varepsilon^\alpha + a) = \tilde{u}_\varepsilon(\xi)$ y calculamos las respectivas derivadas de $u_\varepsilon(x)$ expresadas en función de $\tilde{u}_\varepsilon(\xi)$, haciendo uso de la regla de la cadena:

- $\frac{du_\varepsilon}{dx} = \frac{d\tilde{u}_\varepsilon}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = \frac{d\tilde{u}_\varepsilon}{d\xi} \cdot \frac{1}{\varepsilon^\alpha}$
- $\frac{d^2u_\varepsilon}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{du_\varepsilon}{dx} \right) = \frac{d}{d\xi} \left(\frac{d\tilde{u}_\varepsilon}{d\xi} \cdot \frac{1}{\varepsilon^\alpha} \right) \cdot \frac{1}{\varepsilon^\alpha} = \frac{d^2\tilde{u}_\varepsilon}{d\xi^2} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{2\alpha}}$

Por tanto se obtienen las siguientes igualdades:

$$u_\varepsilon(x) = \tilde{u}_\varepsilon(\xi) \quad u'_\varepsilon(x) = \frac{\tilde{u}'_\varepsilon(\xi)}{\varepsilon^\alpha} \quad u''_\varepsilon(x) = \frac{\tilde{u}''_\varepsilon(\xi)}{\varepsilon^{2\alpha}}, \quad (2.12)$$

de donde al emplear $u'_\varepsilon(x)$ y $\tilde{u}'_\varepsilon(\xi)$ se sobreentiende que se está derivando respecto de x y ξ respectivamente. Utilizando las expresiones (2.12) en el problema de contorno (2.2), obtenemos un problema que llamaremos (\tilde{P}_ε) que de manera general será de la siguiente forma

$$\begin{cases} \tilde{g}(\varepsilon)\tilde{u}''_\varepsilon(\xi) + \tilde{p}(\xi, \varepsilon)\tilde{u}'_\varepsilon(\xi) + \tilde{q}(\xi, \varepsilon)\tilde{u}_\varepsilon(\xi) = \tilde{f}(\xi, \varepsilon) & \forall \xi \in [0, (\delta - a)/\varepsilon^\alpha] \\ \tilde{u}_\varepsilon(0) = \gamma \end{cases}$$

donde ajustaremos α para que $\tilde{g}(\varepsilon)$ sea de orden unidad, es decir que no haya presencia alguna de potencias de ε en la derivada de mayor orden de la ecuación del problema. Denotaremos a la solución de dicho problema por $\tilde{u}_\varepsilon(\xi)$. Notemos que solo se obtiene una condición de contorno debido a que $x \in [a, \delta]$, que solo contiene el extremo a del intervalo $[a, b]$. Supongamos ahora que existe un desarrollo asintótico regular de orden 0 de $\tilde{u}_\varepsilon(\xi)$ de la forma:

$$\tilde{u}_\varepsilon(\xi) = \tilde{u}_0(\xi) + o(1) \text{ en } [0, A] \text{ con } A > 0 \text{ fijo.} \quad (2.13)$$

que lo denominaremos **desarrollo interior** y ξ será la **variable interior**. La función $\tilde{u}_0(\xi)$, vendrá determinada por el problema degenerado (\tilde{P}_0) de (\tilde{P}_ε) .

Una vez determinados los desarrollos, tanto el interior como el exterior, queremos obtener una única aproximación válida en todo el intervalo $[a, b]$ por lo que de cierta forma hemos de realizar un acoplamiento entre ambos, el desarrollo exterior (2.11) válido en $J = [\delta, b]$ y el desarrollo interior (2.13) válido en $[0, A]$. Para ello, imponemos el denominado principio del Matching que en lo que respecta a la memoria se realizará al orden 0, es por ello que hemos considerado el desarrollo exterior e interior de orden 0.

PRINCIPIO DEL MATCHING AL ORDEN 0 (Capa límite en $x = a$)

- 1) Existe $\lim_{x \rightarrow a^+} u_0(x)$ y es finito.
- 2) Existe $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \tilde{u}_0(\xi)$ y es finito.
- 3) Los límites anteriores coinciden, $M := \lim_{x \rightarrow a^+} u_0(x) = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \tilde{u}_0(\xi)$.

Nuestro principal objetivo era poder determinar un desarrollo asintótico uniforme de la solución u_ε en todo el dominio de definición $[a, b]$, dicho desarrollo será el denominado **desarrollo asintótico compuesto**, u_ε^c , que al imponer el principio del Matching al orden 0 será de la forma:

$$u_\varepsilon^c(x) = u_0(x) + \tilde{u}_0\left(\frac{x-a}{\varepsilon^\alpha}\right) - M$$

Notemos que hay que restar M , debido a la igualdad en el límite de ambos desarrollos y existir una región llamada región de solapamiento. Tenemos que $u_0(x)$ es una aproximación regular de $u_\varepsilon(x)$ en $x \in [\delta, b]$ para todo $0 < \delta < b$ y por otro lado tenemos que $\tilde{u}_0(\xi)$ es una aproximación regular de $\tilde{u}_\varepsilon(\xi)$ en $\xi \in [0, A]$ con $A > 0$ fijo. Deshaciendo el cambio de variable en las últimas expresiones, tenemos que $\tilde{u}_0((x-a)/\varepsilon^\alpha)$ es una aproximación asintótica de $\tilde{u}_\varepsilon((x-a)/\varepsilon^\alpha)$ en $x \in [a, a + \varepsilon^\alpha A]$. La región de solapamiento será el intervalo donde tanto el desarrollo exterior como el desarrollo interior sean desarrollos válidos de u_ε .

Vamos a proporcionar una idea de cómo podemos obtener dicha región de solapamiento, considerando $\alpha = 1$. Comenzamos representando las regiones donde son válidos los respectivos desarrollos, que son $x \in [\delta, b]$ y $x \in [a, a + \varepsilon A]$; para ello dibujamos las rectas $x = \delta$, $x = b$, $x = a$ y $x = a + \varepsilon A$.

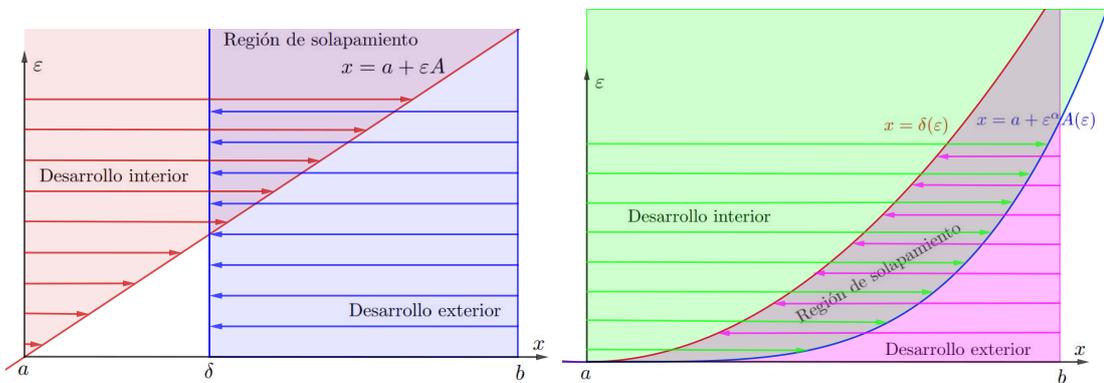


Figura 2.6: Regiones de solapamiento del desarrollo interior y exterior considerando A y δ fijos y en función de ε .

Tomando $a < \delta < b$ fijo y ε suficientemente pequeño, en la representación de la izquierda de la Figura 2.6 observamos que existe una zona en la que no hay solapamiento. No obstante, como δ y A son fijos pero arbitrarios, en ocasiones se pueden elegir $\delta = \delta(\varepsilon)$ y $A = A(\varepsilon)$ tal que los desarrollos exterior e interior sean válidos en $[\delta(\varepsilon), b]$ y $[a, a + \varepsilon A(\varepsilon)]$ respectivamente y $\delta(\varepsilon) \rightarrow a$ y $A(\varepsilon) \rightarrow \infty$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. De esta manera, se tiene una región de solapamiento para ε suficientemente pequeño como se observa en la representación de la derecha de la Figura 2.6. (ver Ejemplo 2.4.1 donde se construye dicha región).

■ Capa límite en $x = b$

Como por hipótesis la solución u_ε tiene una capa límite en $x = b$, se tiene que en los intervalos de la forma $I = [\delta, b]$ no existe aproximación asintótica regular de la solución de (2.2), mientras que en los de la forma $J = [a, \delta]$ sí, considerando $a < \delta < b$. Sea

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + o(1) \text{ en } [a, \delta] \quad (2.14)$$

el desarrollo regular de orden cero de u_ε en el intervalo $[a, \delta]$ que al igual que en el caso anterior lo denominaremos **desarrollo exterior**. A diferencia del caso anterior realizamos el cambio de variable

Transformación si la capa límite está en $x = b$: $\xi = \frac{x - b}{\varepsilon^\alpha}$ con $\alpha > 0$

considerando el intervalo $I = [\delta, b]$. Como $x \in [\delta, b]$ entonces se tiene que la variable ξ , fijando los valores de ε , δ y α pertenece al intervalo $[(\delta - b)/\varepsilon^\alpha, 0]$. Fijado $x \in I$ si se hace tender ε a cero, ξ tiende a $-\infty$, debido a que $x - b < 0$. Así,

$$\text{si } x \in [\delta, b] \text{ entonces } \xi \in \left[\frac{\delta - b}{\varepsilon^\alpha}, 0 \right] \rightarrow (-\infty, 0] \text{ cuando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Como en el caso anterior considerando $u_\varepsilon(x) = u_\varepsilon(\xi\varepsilon^\alpha + b) = \tilde{u}_\varepsilon(\xi)$ se obtienen las mismas relaciones de antes (2.12) y razonando análogamente se obtiene el problema

$$\begin{cases} \tilde{g}(\varepsilon)\tilde{u}_\varepsilon''(\xi) + \tilde{p}(\xi, \varepsilon)\tilde{u}_\varepsilon'(\xi) + \tilde{q}(\xi, \varepsilon)\tilde{u}_\varepsilon(\xi) = \tilde{f}(\xi, \varepsilon) & \forall \xi \in [(\delta - b)/\varepsilon^\alpha, 0] \\ \tilde{u}_\varepsilon(0) = \delta \end{cases}$$

donde ajustaremos α para que $\tilde{g}(\varepsilon)$ sea de orden unidad. En este caso a diferencia del anterior, se obtiene una condición de contorno que está asociada a la condición en b del problema (P_ε) inicial. Se supone que existe un desarrollo regular de orden 0 de $\tilde{u}_\varepsilon(\xi)$ de la forma:

$$\tilde{u}_\varepsilon(\xi) = \tilde{u}_0(\xi) + o(1) \text{ en } [-A, 0] \text{ con } A > 0 \quad (2.15)$$

donde $\tilde{u}_0(\xi)$ es la solución del problema degenerado (\tilde{P}_0) . Para acoplar el desarrollo exterior (2.14) y el interior (2.15), procedemos a imponer el principio del Matching, pero en este caso considerando la capa límite de la solución u_ε en $x = b$.

PRINCIPIO DEL MATCHING AL ORDEN 0 (Capa límite en $x = b$)

- 1) Existe $\lim_{x \rightarrow b^-} u_0(x)$ y es finito.
- 2) Existe $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \tilde{u}_0(\xi)$ y es finito.
- 3) Los límites anteriores coinciden, $M := \lim_{x \rightarrow b^-} u_0(x) = \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \tilde{u}_0(\xi)$

En este caso el desarrollo asintótico compuesto es de la forma:

$$u_\varepsilon^c(x) = u_0(x) + \tilde{u}_0\left(\frac{x-b}{\varepsilon^\alpha}\right) - M$$

que resultará ser un desarrollo asintótico de orden 0 de u_ε en el intervalo $[a, b]$. De nuevo, se resta M , debido a la región de solapamiento y el valor de ambos límites. Tenemos que $u_0(x)$ es una aproximación regular de $u_\varepsilon(x)$ en $x \in [a, \delta]$ para todo $a < \delta < b$ y por otro lado tenemos que $\tilde{u}_0(\xi)$ es una aproximación regular de $\tilde{u}_\varepsilon(\xi)$ en $\xi \in [-A, 0]$ con $A > 0$ fijo. Deshaciendo el cambio de variable en las últimas expresiones, tenemos que $\tilde{u}_0((x-b)/\varepsilon^\alpha)$ es una aproximación asintótica de $\tilde{u}_\varepsilon((x-b)/\varepsilon^\alpha)$ en $x \in [b - \varepsilon^\alpha A, b]$. La región de solapamiento será el intervalo donde tanto el desarrollo exterior como el desarrollo interior son desarrollos validos de u_ε . Para determinar esa región podemos seguir la estrategia realizada en el caso en el que la capa límite se ubique en $x = a$.

A la forma de razonar descrita en la memoria ante problemas con perturbación singular, donde la singularidad es de tipo capa límite, para obtener desarrollos asintóticos de orden 0 de u_ε en $[a, b]$ cuando ε tiende a cero, se le denomina método de desarrollos asintóticos compuestos.

2.4. Algunos ejemplos singulares

En esta sección consideraremos dos problemas de contorno con perturbación singular. El primero de ellos tendrá una única capa límite, mientras que el segundo a considerar tendrá dos capas límite, una en cada extremo respectivamente. Para comenzar se trata de encontrar una aproximación uniforme en $[0, 1]$ de la solución del problema singular del Ejemplo 2.2.4.

Ejemplo 2.4.1. Sea el problema de contorno perturbado

$$(P_\varepsilon) : \begin{cases} \varepsilon u_\varepsilon''(x) + u_\varepsilon'(x) = 0 \\ u_\varepsilon(0) = 0, \quad u_\varepsilon(1) = 1 \end{cases} \quad (2.16)$$

donde $\varepsilon \in (0, 1]$ y $x \in D = [0, 1]$. Como obtuvimos en el Ejemplo 2.2.4, la solución de (2.16) es

$$u_\varepsilon(x) = \frac{1 - e^{-x/\varepsilon}}{1 - e^{-1/\varepsilon}}.$$

Vimos que no existía un desarrollo regular uniforme en $[0, 1]$ considerando la sucesión asintótica usual, pero $u_0(x) = 1$ era una aproximación regular en $[\delta, 1]$ para todo $0 < \delta < 1$ fijo, por lo que estamos ante un problema de perturbación singular de tipo capa límite. Vamos a aplicar el método de desarrollos asintóticos compuestos para determinar una aproximación asintótica uniforme de orden cero de u_ε en $[0, 1]$, empleando el principio del Matching al orden 0, por lo que todos los desarrollos a considerar han de ser de orden 0, como hemos mencionado en el marco teórico.

Por el estudio realizado previamente, supongamos que existe el siguiente desarrollo regular

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + o(1) \text{ en } [\delta, 1]$$

donde $0 < \delta < 1$ fijo. Sustituyendo dicho desarrollo en el problema (2.16) se tiene

$$(P_0) : \begin{cases} u_0'(x) = 0 & x \in (\delta, 1) \\ u_0(1) = 1 \end{cases}$$

de donde se llega a que $u_0(x) = 1$ es el desarrollo exterior de orden 0 de u_ε en $[\delta, 1]$.

Procedemos a determinar el desarrollo interior de u_ε en $[0, \delta]$. Para ello definimos el cambio de variable $\xi = x/\varepsilon^\alpha$. Notemos que si ξ es fijo y ε tiende a cero, entonces x tiende a cero, y en el caso en el que x sea fijo al hacer tender ε a cero, como $x \in [0, \delta]$, se tiene que ξ tiende a infinito. Con la transformación anterior y utilizando las igualdades (2.12) en el problema (2.16) se obtiene

$$(\tilde{P}_\varepsilon) : \begin{cases} \varepsilon^{(1-\alpha)} \tilde{u}_\varepsilon''(\xi) + \tilde{u}_\varepsilon'(\xi) = 0 & \xi \in [0, \delta/\varepsilon^\alpha] \\ \tilde{u}_\varepsilon(0) = 0 \end{cases}$$

Igualamos la potencia de ε de la derivada de orden superior a cero, obteniendo que $\alpha = 1$, de esta manera se consigue que la ecuación diferencial del problema (\tilde{P}_ε) sea independiente de ε . El problema precedente tiene por solución $\tilde{u}_\varepsilon(\xi) = c_1 (e^{-\xi} - 1)$ con $c_1 \in \mathbb{R}$. A continuación supongamos que existe un desarrollo asintótico regular uniforme de orden cero de $\tilde{u}_\varepsilon(\xi)$

$$\tilde{u}_\varepsilon(\xi) = \tilde{u}_0(\xi) + o(1) \text{ en } [0, A] \text{ con } A > 0 \text{ fijo,}$$

donde la función $\tilde{u}_0(\xi)$ se obtiene de resolver el siguiente problema

$$(\tilde{P}_0) : \begin{cases} \tilde{u}_0''(\xi) + \tilde{u}_0'(\xi) = 0 \\ \tilde{u}_0(0) = 0 \end{cases}$$

que coincide con (\tilde{P}_ε) por ser este último independiente de ε . Por tanto $\tilde{u}_0(\xi) = \tilde{u}_\varepsilon(\xi)$, obteniendo $\tilde{u}_0(\xi) = c(1 - e^{-\xi})$ con $c \in \mathbb{R}$ cualquiera. En este primer ejemplo determinaremos una región de solapamiento, razonando como en el contexto teórico. Tenemos que $u_0(x) = 1$ es un desarrollo exterior válido en $[\delta, 1]$ para todo $0 < \delta < 1$, pero también es válido en $[\delta(\varepsilon), 1]$ considerando por ejemplo $\delta(\varepsilon) = \varepsilon^\beta$ que tiende a la capa límite $x = 0$ cuando ε tiende a cero, con $0 < \beta < 1$. En efecto, se verifica

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{C[\varepsilon^\beta, 1]} = \sup_{x \in [\varepsilon^\beta, 1]} \left| \frac{1 - e^{-x/\varepsilon}}{1 - e^{-1/\varepsilon}} - 1 \right| = \left| \frac{e^{-1/\varepsilon} - e^{-\varepsilon^\beta - 1}}{1 - e^{-1/\varepsilon}} \right| \rightarrow 0 \text{ cuando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Por otro lado, tenemos que, tomando $c = 1$, $\tilde{u}_0(\xi) = c(1 - e^{-\xi})$ es un desarrollo interior válido para $\xi \in [0, A]$ con $A > 0$ arbitrario y $\xi = x/\varepsilon$, pero resulta que considerando $A = A(\varepsilon) = \varepsilon^{-\gamma}$ con $0 < \gamma < 1$ también es un desarrollo válido en dicho intervalo. Así, escribiendo $\tilde{u}_0(\xi)$ en la variable x , se tiene $\tilde{u}_0(x/\varepsilon) = 1 - e^{-x/\varepsilon}$ con $x \in [0, A\varepsilon] = [0, \varepsilon^{1-\gamma}]$. Veamos que dicha función es un desarrollo uniforme de u_ε en $[0, \varepsilon^{1-\gamma}]$. En efecto, se verifica que

$$\|u_\varepsilon - \tilde{u}_0\|_{C[0, \varepsilon^{1-\gamma}]} = \sup_{x \in [0, \varepsilon^{1-\gamma}]} \left| \frac{e^{-1/\varepsilon} (1 - e^{-x/\varepsilon})}{1 - e^{-1/\varepsilon}} \right| = \frac{e^{-1/\varepsilon}}{1 - e^{-1/\varepsilon}} \cdot (1 - e^{-\varepsilon^{1-\gamma}}) \rightarrow 0 \text{ cuando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Como queremos que los intervalos $[\varepsilon^\beta, 1]$ y $[0, \varepsilon^{1-\gamma}]$ se solapen, es decir que no sean disjuntos, necesitamos que $\varepsilon^\beta < \varepsilon^{1-\gamma}$ o lo que es lo mismo, que $1 - \gamma < \beta$. Por tanto, podemos considerar valores de β y γ cualesquiera de tal forma que se verifique esa desigualdad. Considerando $\beta = 1/2$ y $\gamma = 3/4$ se tiene que una región de solapamiento será el intervalo $[0, \varepsilon^{1/4}] \cap [\varepsilon^{1/2}, 1] = [\varepsilon^{1/2}, \varepsilon^{1/4}]$ como se ilustra en la Figura 2.7.

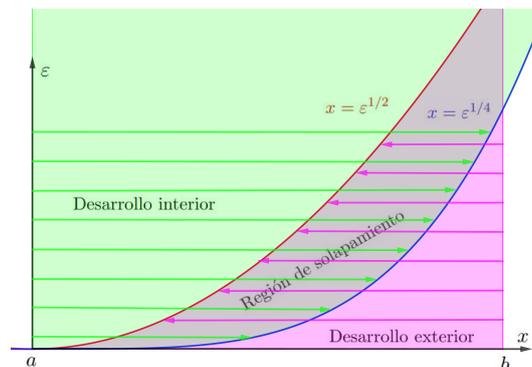


Figura 2.7: Región de solapamiento del desarrollo interior y exterior.

Imponemos ahora el principio del Matching al orden 0 el cual nos permitirá determinar la constante c :

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} u_0(x) = 1$, por lo que existe y es finito.
- 2) $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \tilde{u}_0(\xi) = c$ con $c \in \mathbb{R}$, por tanto existe y es finito.
- 3) Tomando $c = 1$, los límites anteriores coinciden, $M := \lim_{x \rightarrow 0^+} u_0(x) = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \tilde{u}_0(\xi) = 1$.

Por tanto $\tilde{u}_0(\xi) = 1 - e^{-\xi}$, de donde se obtiene el desarrollo asintótico compuesto:

$$u_\varepsilon^c(x) = u_0(x) + \tilde{u}_0\left(\frac{x-a}{\varepsilon^\alpha}\right) - M \text{ luego } u_\varepsilon^c(x) = 1 - e^{-x/\varepsilon}$$

Observamos que

$$\|u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon^c(x)\|_\infty = \frac{e^{-1/\varepsilon}}{1 - e^{-1/\varepsilon}} \left\| 1 - e^{-x/\varepsilon} \right\|_\infty = e^{-1/\varepsilon}$$

que ciertamente converge a cero cuando ε tiende a cero, luego u_ε^c es un desarrollo uniforme en $[0, 1]$ de u_ε . Veámoslo ahora tanto gráfica como numéricamente

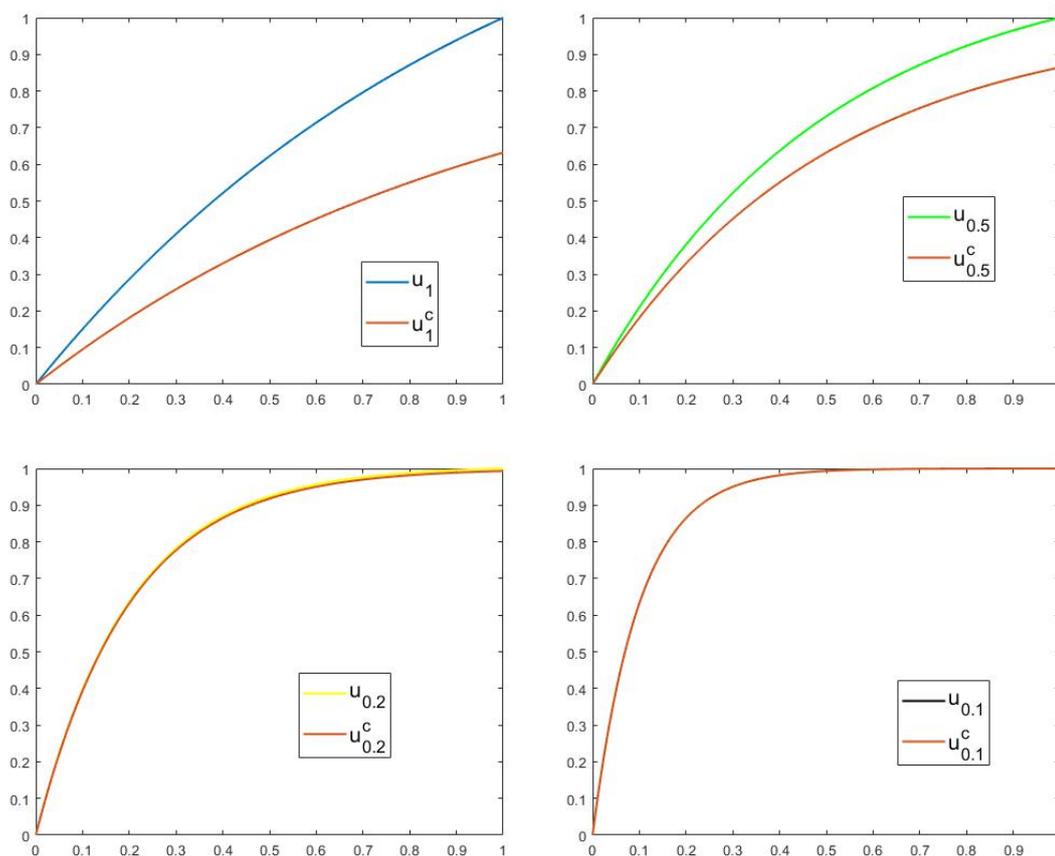


Figura 2.8: Representación gráfica de u_ε , u_ε^c en $[0, 1]$ para diversos valores de ε .

	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = 0.5$	$\varepsilon = 0.2$	$\varepsilon = 0.1$
$\ u_\varepsilon - u_\varepsilon^c\ _\infty$	0.367879	0.135335	0.006738	0.000045

Tabla 2.5: Errores en las aproximaciones de u_ε por el desarrollo compuesto $u_\varepsilon^c(x)$

En la Tabla 2.5, se indica el error que se comete al aproximar u_ε por el desarrollo asintótico compuesto u_ε^c de orden cero. Se ve que a medida de que ε decrece la norma tiende a 0, lo que sugiere que u_ε^c es un desarrollo asintótico uniforme de u_ε en $[0, 1]$. En cuanto a la Figura 2.8 se observa que a medida de que ε va decreciendo a cero la curva que representa el desarrollo compuesto se asemeja más a la solución u_ε con el ε considerado.

En este ejemplo conocemos la solución explícita de u_ε y por tanto, como vimos en el Ejemplo 2.2.4, sabemos que hay una capa límite en $x = 0$. Pero esto no es lo habitual y debemos hacer conjeturas y/o propuestas para poder obtener una aproximación válida en todo el intervalo $[a, b]$ en caso de no llegar a contradicciones. Así, al suponer que existe un desarrollo regular en $[0, 1]$, (2.5), obtenemos los problemas (2.9). Como vimos (P_0) no tenía solución y procedimos a suprimir una condición. Hemos visto que si suprimimos la condición $u_0(0) = 0$ y suponemos una capa límite en $x = 0$, llegamos a un desarrollo exterior en $[\delta, 1]$ que luego podemos acoplar con un desarrollo interior en $[0, \varepsilon A]$.

Sin embargo, si suprimimos la condición $u_0(1) = 1$ y nos quedamos con $u_0(0) = 0$, obtenemos como candidato a desarrollo exterior $u_0(x) = 0$ en $[0, \delta]$ con $0 < \delta < 1$ fijo. Ahora suponemos que existe una capa límite en $x = 1$ y llegaremos a un absurdo que nos permitirá afirmar que no existe capa límite en $x = 1$. Para ello, introducimos la variable interior $\xi = (x - 1)/\varepsilon^\alpha$, obteniendo el siguiente problema:

$$(\tilde{P}_\varepsilon) : \begin{cases} \varepsilon^{(1-\alpha)} \tilde{u}_\varepsilon''(\xi) + \tilde{u}_\varepsilon'(\xi) = 0 & \xi \in [(\delta - 1)/\varepsilon^\alpha, 0] \\ \tilde{u}_\varepsilon(0) = 1. \end{cases}$$

Consideramos $\alpha = 1$ y razonando de forma análoga al caso anterior donde la capa límite estaba en $x = 0$, se obtiene que $\tilde{u}_0(\xi) = c(1 - e^{-\xi}) + e^{-\xi}$ con $c \in \mathbb{R}$. Imponiendo el principio del Matching al orden cero, observamos que el único valor $c \in \mathbb{R}$ tal que existe y es finito el $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \tilde{u}_0(\xi)$ es $c = 1$ pero en ese caso no coincide con el $\lim_{x \rightarrow 1^-} u_0(x) = 0$ pues $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \tilde{u}_0(\xi) = 1$. Por tanto al no verificarse las condiciones del principio, no podemos acoplar el desarrollo exterior e interior y en consecuencia no podemos obtener el desarrollo compuesto válido en $[0, 1]$. De lo anterior se deduce que en $x = 1$ no hay capa límite, ya que en ese caso se verificaría el Matching.

Ejemplo 2.4.2. Considérese el problema de contorno perturbado con $\varepsilon \in (0, 1]$:

$$(P_\varepsilon) : \begin{cases} \varepsilon u_\varepsilon''(x) - u_\varepsilon(x) = 1 & x \in (0, 1) \\ u_\varepsilon(0) = 0, \quad u_\varepsilon(1) = 0. \end{cases} \quad (2.17)$$

Suponiendo que existe el desarrollo asintótico regular uniforme de orden 0 de la forma $u_\varepsilon(x) = u_0(x) + o(1)$ en $[0, 1]$, se obtiene como problema degenerado

$$(P_0) : \begin{cases} u_0(x) = -1 \\ u_0(0) = 0, \quad u_0(1) = 0. \end{cases} \quad (2.18)$$

Claramente el problema precedente (2.18) no tiene solución por lo que no existe el supuesto desarrollo regular de u_ε en $[0, 1]$. Es por ello que estamos ante un problema de perturbación singular. Veamos si presenta alguna capa límite.

Sea $0 < \delta < 1$, supongamos que existen los siguientes desarrollos asintóticos regulares:

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + o(1) \text{ en } [0, \delta]$$

$$u_\varepsilon(x) = u_0^*(x) + o(1) \text{ en } [\delta, 1].$$

Sustituimos ambos desarrollos en el problema (2.17), obteniendo los siguientes problemas

$$(P_0) : \begin{cases} u_0(x) = -1 \\ u_0(0) = 0 \end{cases} \quad (P_0^*) : \begin{cases} u_0^*(x) = -1 \\ u_0^*(1) = 0. \end{cases}$$

Resulta que no existen desarrollos regulares uniformes de la solución u_ε en los intervalos $[0, \delta]$, $[\delta, 1]$, por lo que no podemos localizar todavía el conjunto de capas límite. Para buscar dicho conjunto, vamos a dividir el dominio en tres regiones distintas. Sean $0 < \beta < \gamma < 1$, consideramos la siguiente partición del dominio, $[0, 1] = [0, \beta] \cup [\beta, \gamma] \cup [\gamma, 1]$ y volveremos a suponer que en cada uno de los intervalos precedentes existe un desarrollo asintótico regular uniforme. Cabe destacar que por el análisis realizado al considerar el dominio como unión de dos subintervalos, no existirá desarrollo regular uniforme de u_ε de orden 0 en los intervalos $[0, \beta]$ y $[\gamma, 1]$. Por lo contrario en el intervalo $[\beta, \gamma]$ tenemos como desarrollo asintótico regular uniforme de orden cero de u_ε , $u_0 = -1$, que se obtiene de suprimir ambas condiciones de contorno en (2.18). Por lo que concluimos en base a la definición de capa límite, Definición 2.3.1, que se tienen dos capas límite, una en $x = 0$ y otra en $x = 1$.

Notemos que el procedimiento anterior nos ha permitido localizar las capas límites de u_ε bajo ciertas suposiciones, sin conocer la solución u_ε . No obstante, en este caso, podemos resolver el problema (2.17) y obtener la solución explícita de su solución

$$u_\varepsilon(x) = \frac{1}{\sinh(1/\sqrt{\varepsilon})} (\sinh(x/\sqrt{\varepsilon}) + \sinh((1-x)/\sqrt{\varepsilon})) - 1.$$

En la Figura 2.9 hacemos una representación gráfica de u_ε para diversos valores de ε y podemos ratificar que $u_0 = -1$ es una aproximación uniforme en $[\beta, \gamma]$ y hay dos capas límites; una en $x = 0$ y otra en $x = 1$.

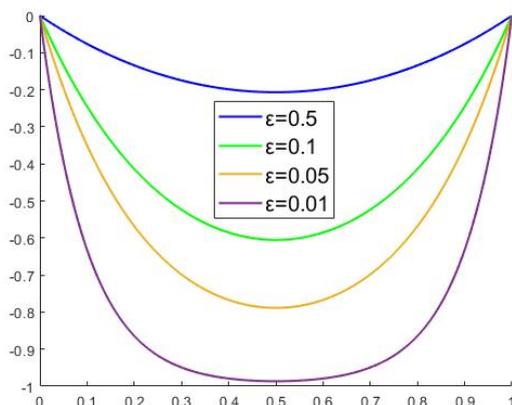


Figura 2.9: Representación gráfica de u_ε en el dominio $[0, 1]$.

Hasta ahora hemos obtenido el desarrollo exterior de orden 0, escrito en la variable exterior, x , $u_0(x) = -1$ en $[\beta, \gamma]$. Vamos a obtener los desarrollos interiores asociados a los distintos entornos de los puntos donde tenemos las capas límite.

- *Desarrollo interior en $[0, \beta]$ considerando la capa límite $x = 0$*

Consideramos el cambio de variable $\xi = x/\varepsilon^\alpha$ con $\alpha > 0$ a determinar. Una vez realizado el cambio y considerando las expresiones (2.12) se tiene

$$(\tilde{P}_\varepsilon) : \begin{cases} \varepsilon^{1-2\alpha} \tilde{u}_\varepsilon''(\xi) - \tilde{u}_\varepsilon(\xi) = 1 \\ \tilde{u}_\varepsilon(0) = 0. \end{cases}$$

Para quitar potencias de ε de la derivada de mayor orden de la ecuación y no estar ante una situación similar a la del problema inicial, exigimos $1 - 2\alpha = 0$, de donde $\alpha = 1/2$.

Sustituyendo dicho valor de α en (\tilde{P}_ε) se tiene

$$(\tilde{P}_\varepsilon) : \begin{cases} \tilde{u}_\varepsilon''(\xi) - \tilde{u}_\varepsilon(\xi) = 1 \\ \tilde{u}_\varepsilon(0) = 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

que tiene por solución $\tilde{u}_\varepsilon(\xi) = (1 - \tilde{c})e^{-\xi} + \tilde{c}e^\xi - 1$ con $\tilde{c} \in \mathbb{R}$. Al suponer que existe el desarrollo asintótico regular uniforme de orden cero de $\tilde{u}_\varepsilon(\xi)$ se obtiene que $\tilde{u}_0(\xi) = (1 - \tilde{c})e^{-\xi} + \tilde{c}e^\xi - 1$ con $\tilde{c} \in \mathbb{R}$, el cual coincide con $\tilde{u}_\varepsilon(\xi)$ debido a que el problema (2.19) es independiente de ε . Para determinar la constante \tilde{c} imponemos el principio del Matching al orden 0:

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} u_0(x) = -1$, por lo que existe y es finito.
- 2) $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \tilde{u}_0(\xi)$ existe y es finito si y solo si $\tilde{c} = 0$.
- 3) Los límites anteriores coinciden si $\tilde{c} = 0$, $M_1 := \lim_{x \rightarrow 0^+} u_0(x) = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \tilde{u}_0(\xi) = -1$.

Por tanto se obtiene el desarrollo interior, de orden 0, considerando la capa límite $x = 0$, $\tilde{u}_0(\xi) = e^{-\xi} - 1$, lo denominamos $\tilde{u}_0^0(\xi)$, para que no haya confusión a la hora de obtener el desarrollo compuesto con el desarrollo interior de orden cero obtenido con la capa límite $x = 1$.

- *Desarrollo interior en $[\gamma, 1]$ considerando la capa límite $x = 1$*
Consideramos el cambio de variable $\eta = (x - 1)/\varepsilon^\alpha$ con $\alpha > 0$ a determinar. Una vez realizado el cambio y considerando las expresiones (2.12) se tiene

$$(\tilde{P}_\varepsilon) : \begin{cases} \varepsilon^{1-2\alpha} \tilde{u}_\varepsilon''(\eta) - \tilde{u}_\varepsilon(\eta) = 1 \\ \tilde{u}_\varepsilon(0) = 0. \end{cases}$$

Al igual que en el caso anterior, consideramos $\alpha = 1/2$ para quitar la presencia de potencias de ε de la derivada de mayor orden de la ecuación, obteniendo así el problema

$$(\tilde{P}_\varepsilon) : \begin{cases} \tilde{u}_\varepsilon''(\eta) - \tilde{u}_\varepsilon(\eta) = 1 \\ \tilde{u}_\varepsilon(0) = 0. \end{cases}$$

Nótese que coincide con el problema (2.19), con la diferencia de que se emplean distintas variables. Por ello tiene por solución $\tilde{u}_\varepsilon(\eta) = (1 - \tilde{c})e^{-\eta} + \tilde{c}e^\eta - 1$ con $\tilde{c} \in \mathbb{R}$, que coincide con la solución del problema degenerado, $\tilde{u}_0(\eta) = (1 - \tilde{c})e^{-\eta} + \tilde{c}e^\eta - 1$, por el mismo motivo del caso anterior. Para determinar la constante \tilde{c} imponemos el principio del Matching al orden 0.

- 1) $\lim_{x \rightarrow 1^-} u_0(x) = -1$, por lo que existe y es finito.
- 2) $\lim_{\eta \rightarrow -\infty} \tilde{u}_0(\eta)$ existe y es finito si y solo si $\tilde{c} = 1$.
- 3) Los límites anteriores coinciden si $\tilde{c} = 1$, $M_2 := \lim_{x \rightarrow 1^-} u_0(x) = \lim_{\eta \rightarrow -\infty} \tilde{u}_0(\eta) = -1$.

Obteniendo $\tilde{u}_0(\eta) = e^\eta - 1$ como desarrollo interior de orden 0 al considerar la capa límite $x = 1$, que se denota por $\tilde{u}_0^1(\eta)$.

Para concluir con el ejemplo vamos a obtener el desarrollo compuesto que nos proporciona un desarrollo asintótico de orden cero de u_ε uniforme en todo el dominio $[0, 1]$. En este caso hemos de añadir dos nuevos términos por tener una capa límite más que en el Ejemplo 2.4.1

$$u_\varepsilon^c(x) = u_0(x) + \tilde{u}_0^0\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right) - M_1 + \tilde{u}_0^1\left(\frac{x-1}{\sqrt{\varepsilon}}\right) - M_2$$

luego

$$u_\varepsilon^c(x) = -1 + e^{-x/\sqrt{\varepsilon}} + e^{(x-1)/\sqrt{\varepsilon}}.$$

Veamos tanto gráfica como numéricamente que efectivamente el desarrollo asintótico compuesto u_ε^c es un desarrollo asintótico uniforme de orden cero de u_ε en todo el dominio de definición $[0, 1]$.

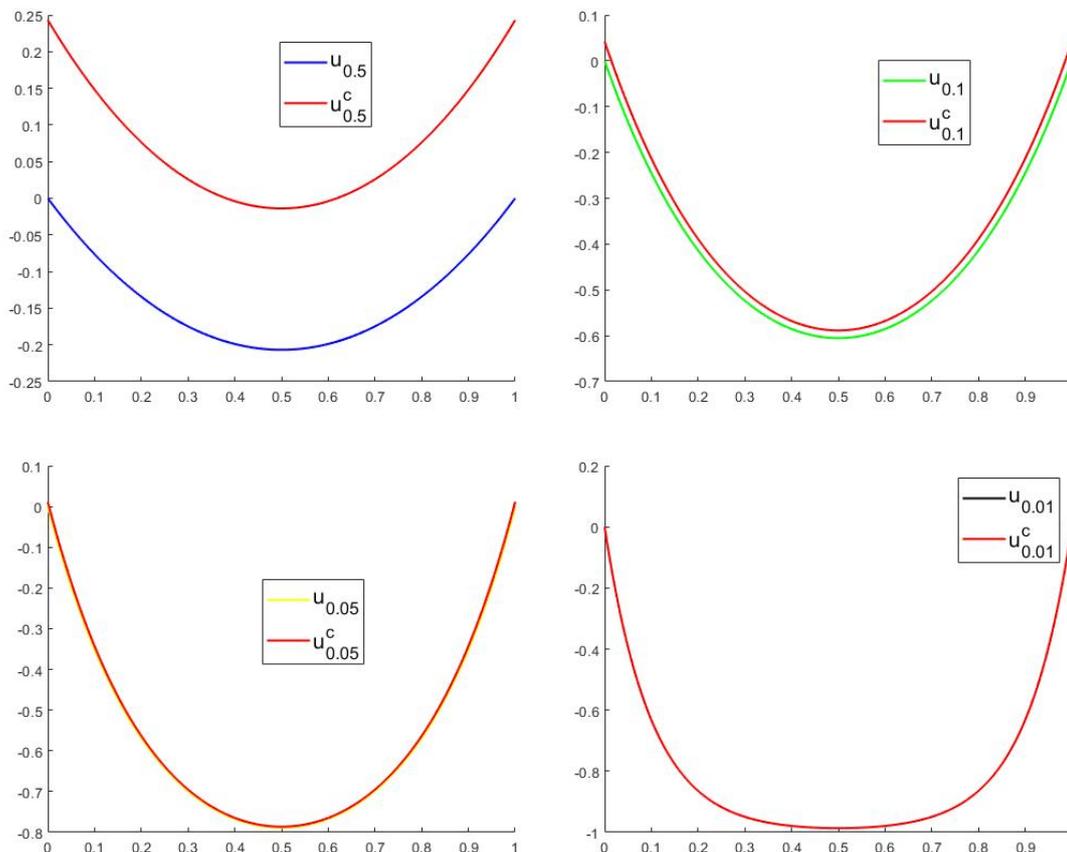


Figura 2.10: Representación gráfica de u_ε , u_ε^c en $[0, 1]$ para diversos valores de ε .

	$\varepsilon = 0.5$	$\varepsilon = 0.1$	$\varepsilon = 0.05$	$\varepsilon = 0.01$
$\ u_\varepsilon - u_\varepsilon^c\ _\infty$	0.243116	0.042329	0.011423	0.000045

Tabla 2.6: Errores en las aproximaciones de u_ε por el desarrollo compuesto u_ε^c

La interpretación de la Tabla 2.6 así como de las representaciones gráficas de la Figura 2.10 es la misma que en el Ejemplo 2.4.1. Cuando ε converge a cero observando la tabla, tenemos que $\|u_\varepsilon - u_\varepsilon^c\|_\infty$ tiende a cero, por lo que podemos intuir que ciertamente u_ε^c es un desarrollo asintótico uniforme de orden cero de u_ε en $[0, 1]$ cuando ε tiende a cero. Lo anterior cuadra con las distintas representaciones gráficas; las funciones u_ε^c para valores de ε cada vez más pequeños se van asemejando cada vez más con la función u_ε .

Capítulo 3

El problema de la justificación

En el Capítulo 2 hemos determinado aproximaciones uniformes de las soluciones u_ε de ciertos problemas perturbados (P_ε) utilizando técnicas formales como son los desarrollos asintóticos que nos permiten obtener ciertas funciones u_k , soluciones de problemas (P_k) , $k \geq 0$, que intervienen en las distintas aproximaciones de u_ε . Posteriormente hemos utilizado las expresiones explícitas de la solución u_ε y de sus aproximaciones $u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \cdots + \varepsilon^m u_m$, $m \geq 0$ para probar que efectivamente $u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \cdots + \varepsilon^m u_m$ es un desarrollo regular uniforme de orden m , es decir, se verifica

$$\left\| \frac{u_\varepsilon - u_0 - \varepsilon u_1 - \cdots - \varepsilon^m u_m}{\varepsilon^m} \right\|_\infty \rightarrow 0 \text{ cuando } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.1)$$

Sin embargo, esto no es lo habitual ya que de manera general no conocemos las fórmulas explícitas de dichas funciones ya sea por la dificultad para obtenerlas o porque el manejo con ellas es complicado.

En este capítulo estudiamos el problema de la justificación que consiste en probar que los desarrollos obtenidos formalmente verifican (3.1) para todo $m \geq 0$, pero únicamente conociendo que u_ε y u_k son soluciones de determinados problemas (P_ε) y (P_k) . Por simplicidad, abordaremos únicamente problemas con perturbaciones regulares. Para poder resolver este problema se hará uso de ciertas nociones y resultados del Análisis Funcional que se introducen en la Sección 3.1. Posteriormente, en la Sección 3.2, utilizaremos dichas herramientas para analizar tres problemas de contorno perturbados que serán una generalización de los ejemplos vistos en la Sección 2.2.

3.1. Marco abstracto

En esta primera sección se introduce el concepto de formulación débil de un problema de contorno viendo la diferencia entre solución clásica y solución débil. A continuación se procederá a enunciar el Teorema de Lax-Milgram que proporciona la existencia y unicidad de solución débil, y para concluir con la sección se proporcionan ciertas desigualdades que serán útiles en la Sección 3.2 para acotar (3.1). Para lo cual se han empleado las referencias [2] y [15].

Para motivar los conceptos teóricos novedosos, planteamos el siguiente problema de contorno: Hallar $u \in C^2[a, b]$ verificando

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x) \\ u(a) = 0, \quad u(b) = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

siendo $f \in C[a, b]$ con $a < b$ y cuya solución se denomina **solución clásica**. Multiplicando la ecuación diferencial de (3.2) por una función $\varphi \in C^1[a, b]$ cualquiera verificando que $\varphi(a) =$

$\varphi(b) = 0$, e integrando entre a y b haciendo uso de la integración por partes, se obtiene:

$$\int_a^b u'(x)\varphi'(x)dx + \int_a^b u(x)\varphi(x)dx = \int_a^b f(x)\varphi(x)dx \quad \forall \varphi \in C^1[a, b] \text{ con } \varphi(a) = \varphi(b) = 0. \quad (3.3)$$

Recordando la derivada en el sentido débil y el espacio normado $H^1(a, b)$ definido en el Capítulo 1 dotado con el producto escalar

$$\langle u, v \rangle_{H^1(a, b)} = \langle u, v \rangle_{L^2(a, b)} + \langle u', v' \rangle_{L^2(a, b)}$$

siendo u', v' las derivadas débiles de u y v respectivamente, procedemos a introducir un subconjunto de este que denotaremos por $H_0^1(a, b)$ y que se define como la clausura de $C_c^1(a, b)$ en $H^1(a, b)$. Dicho espacio coincide con

$$H_0^1(a, b) := \{f \in H^1(a, b) : f(a) = f(b) = 0\}.$$

Además se tiene que $H_0^1(a, b)$ está dotado del producto escalar inducido por $H^1(a, b)$ y en consecuencia la norma de $H_0^1(a, b)$ es la inducida por $H^1(a, b)$, de hecho $(H_0^1(a, b), \|\cdot\|_{H_0^1(a, b)})$ es también un espacio de Hilbert.

De esta manera llegamos a la formulación débil del problema (3.2) que consiste en hallar $u \in H_0^1(a, b)$ verificando (3.3) para todo $\varphi \in H_0^1(a, b)$. A la función $u \in H_0^1(a, b)$ se le denomina **solución débil**. Si $f \in C[a, b]$, se puede probar que toda solución débil pertenece a $C^2[a, b]$ y de esta manera se recupera la solución clásica.

Procedemos a definir lo que es una forma bilineal continua y coerciva, que son conceptos fundamentales para enunciar el Teorema de Lax-Milgram, el cual nos garantiza la existencia y unicidad de solución débil.

Definición 3.1.1. (Forma bilineal continua y coerciva)

Sea H un espacio de Hilbert y $b : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal. Se dice que:

- b es **continua** si existe una constante $C > 0$ tal que $|b(u, v)| \leq C\|u\|\|v\|$ para todo $u, v \in H$.
- b es **coerciva** si existe una constante $\alpha > 0$ tal que $b(u, u) \geq \alpha\|u\|^2$ para todo $u \in H$.

Teorema 3.1.2. (Lax-Milgram)

Sea H un espacio de Hilbert y H^* su espacio dual. Sea $b : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal, continua y coerciva. Entonces para todo $\tilde{\varphi} \in H^*$ existe un único $u \in H$ tal que

$$b(u, v) = \langle \tilde{\varphi}, v \rangle \quad \forall v \in H.$$

Notación: Dado $f \in H^*$ y $x \in H$, escribiremos $\langle f, x \rangle$ para denotar $f(x)$.

Volviendo al problema (3.3), tenemos que existe una única solución como consecuencia de este teorema, ya que es fácil probar que la expresión de la derecha de la igualdad de (3.3) define una forma bilineal continua y coerciva sobre el espacio $H_0^1(a, b)$, por lo que para cada $\varphi \in H_0^1(a, b)$ existe una única solución débil de (3.3).

A continuación enunciamos el siguiente resultado que nos dice que dada una función de $f \in H^1(a, b)$, que notemos que en realidad es una clase de equivalencia, existe un único representante de dicha clase que sea una función $\tilde{f} \in C[a, b]$.

Teorema 3.1.3.

Sea $f \in H^1(a, b)$, entonces existe una única función $\tilde{f} \in C[a, b]$ tal que

$$f = \tilde{f} \text{ en casi todo punto de } (a, b) \text{ y } \tilde{f}(\alpha) - \tilde{f}(\beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f'(x) dx \quad \forall \alpha, \beta \in [a, b]$$

siendo f' la derivada débil de f .

A partir de ahora, consideraremos en todo momento el representante continuo. Nótese que en virtud del Teorema 3.1.3 los elementos de $H^1(a, b)$ que sean funciones no continuas, lo han de ser en un conjunto de medida nula donde las discontinuidades sean siempre evitables, ya que si se considera una función con otro tipo de discontinuidad no vamos a poder determinar un representante continuo y por tanto la función a considerar no se encontrará en el espacio $H^1(a, b)$. Por otro lado si $f \in H^1(a, b)$ es continua, $f = \tilde{f}$. Otra observación a considerar es que toda función continua en $[a, b]$ y derivable a trozos pertenece a $H^1(a, b)$. Asimismo, si f es continua y derivable, entonces $f \in H^1(a, b)$ y la derivada débil coincide con la derivada en el sentido clásico.

Se proceden a enunciar dos desigualdades que serán cruciales a la hora de justificar los desarrollos asintóticos.

Teorema 3.1.4.

Sea el intervalo acotado $I = (a, b)$, entonces existen constantes $C_1 > 0, C_2 > 0$ tales que

$$\|f\|_{\infty} \leq C_1 \|f'\|_{L^2(a,b)} \text{ para todo } f \in H_0^1(a, b). \quad (3.4)$$

$$\|f\|_{L^2(a,b)} \leq C_2 \|f'\|_{L^2(a,b)} \text{ para todo } f \in H_0^1(a, b). \quad (3.5)$$

Demostración

Sea $f \in H_0^1(a, b)$. Consideramos su representante continuo, que verifica $f(a) = f(b) = 0$ y por tanto $f(x) - f(a) = f(x)$ con $x \in [a, b]$. Usando el Teorema 3.1.3 y tomando valores absolutos se obtiene la primera igualdad

$$|f(x)| = \left| \int_a^x f'(t) dt \right| \leq \int_a^x |f'(t)| dt \leq \int_a^b |f'(t)| dt \leq \|f'\|_{L^2(a,b)} \sqrt{b-a}; \quad (3.6)$$

la primera y segunda desigualdad de (3.6) se deducen de aplicar propiedades de la integral y la última mediante la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Tomando el supremo con $x \in [a, b]$ en (3.6) se obtiene la desigualdad (3.4) considerando $C_1 = \sqrt{b-a}$. Por otro lado, tomando cuadrados en (3.6), integrando y tomando raíces se obtiene (3.5) tomando $C_2 = b-a$. ■

Notemos que la desigualdad (3.4) permite acotar la norma del supremo, $\|f\|_{\infty}$, por la norma $\|f'\|_{L^2(a,b)}$ y por tanto cuando queramos probar que funciones $f_{\varepsilon} \in H_0^1(a, b)$ convergen a cero cuando ε tiende a cero, bastará probar que $\|f'_{\varepsilon}\|_{L^2(a,b)}$ converge a cero. Por otro lado la desigualdad (3.5), denominada desigualdad de Poincaré, implica que en $H_0^1(a, b)$ la norma inducida por $H^1(a, b)$ es equivalente a $\|f'_{\varepsilon}\|_{L^2(a,b)}$ y por tanto probando que $\|f'_{\varepsilon}\|_{L^2(a,b)}$ tiende a cero cuando ε tiende a cero, se tiene que $\|f_{\varepsilon}\|_{\infty}, \|f_{\varepsilon}\|_{L^2}$ y $\|f_{\varepsilon}\|_{H^1}$ tienden a cero. Es por ello que al justificar que los desarrollos de las soluciones de los problemas planteados en la siguiente sección son desarrollos asintóticos regulares uniformes pues verifican

$$\left\| \frac{u'_{\varepsilon} - u'_0 - \varepsilon u'_1 - \dots - \varepsilon^m u'_m}{\varepsilon^m} \right\|_{L^2(a,b)} \rightarrow 0 \text{ cuando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Tendremos también que serán desarrollos regulares en los espacios $(L^2(a, b), \|\cdot\|_{L^2(a,b)})$ y $(H^1(a, b), \|\cdot\|_{H^1(a,b)})$.

3.2. Algunos ejemplos de justificación

En esta sección abordamos la justificación de tres problemas de contorno con perturbación regular, que serán una generalización de los ejemplos vistos en la Sección 2.2 del Capítulo 2.

PROBLEMA 1

Consideramos el siguiente problema perturbado en el que $D = [a, b]$ y $\varepsilon \in (0, 1]$,

$$(P_\varepsilon) : \begin{cases} u_\varepsilon''(x) + \varepsilon u_\varepsilon(x) = f(x) \\ u_\varepsilon(a) = \gamma, \quad u_\varepsilon(b) = \delta \end{cases}$$

con $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ y $f \in C[a, b]$ y cuya solución denotamos por u_ε . Supongamos ahora que existe un desarrollo asintótico regular de u_ε en el intervalo $[a, b]$ de la forma

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + \varepsilon u_1(x) + \varepsilon^2 u_2(x) + \dots \quad (3.7)$$

de donde sustituyendo esta expresión en el problema (P_ε) e igualando coeficientes de la misma potencia de ε se obtienen los siguientes problemas

$$(P_0) : \begin{cases} u_0''(x) = f(x) \\ u_0(a) = \gamma, \quad u_0(b) = \delta \end{cases} \quad (P_k) : \begin{cases} u_k''(x) + u_{k-1}(x) = 0 \\ u_k(a) = 0, \quad u_k(b) = 0 \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{N}$$

que tienen por única solución u_0 y u_k para cada $k \in \mathbb{N}$ respectivamente. Procedemos a probar que (3.7) es el desarrollo asintótico regular uniforme de u_ε en $[a, b]$, es decir, que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\|u_\varepsilon - \sum_{k=0}^m \varepsilon^k u_k\|_\infty}{\varepsilon^m} = 0 \text{ para todo } m \geq 0.$$

Vamos a comenzar probando el caso $m = 0$, es decir que $\|u_\varepsilon - u_0\|_\infty$ tiende a cero cuando ε tiende a cero. Se define la función $R_{\varepsilon,0} = u_\varepsilon - u_0$, por lo que se trata de ver la convergencia a cero, cuando ε tiende a cero, de la norma $\|R_{\varepsilon,0}\|_\infty$. Teniendo en cuenta que u_ε y u_0 son soluciones de (P_ε) y (P_0) respectivamente, resulta que $R_{\varepsilon,0}$ es solución del siguiente problema

$$(\tilde{P}_{\varepsilon,0}) : \begin{cases} R_{\varepsilon,0}''(x) + \varepsilon R_{\varepsilon,0}(x) = -\varepsilon u_0(x) \\ R_{\varepsilon,0}(a) = 0, \quad R_{\varepsilon,0}(b) = 0. \end{cases}$$

Notemos que $R_{\varepsilon,0} \in H_0^1(a, b)$ y procedemos a obtener la formulación débil del problema $(\tilde{P}_{\varepsilon,0})$. Sea $\varphi \in H_0^1(a, b)$ cualquiera, multiplicando por dicha función la ecuación diferencial del problema $(\tilde{P}_{\varepsilon,0})$ y tomando integrales se obtiene la expresión:

$$\int_a^b R_{\varepsilon,0}''(x)\varphi(x)dx + \varepsilon \int_a^b R_{\varepsilon,0}(x)\varphi(x)dx = -\varepsilon \int_a^b u_0(x)\varphi(x)dx$$

de donde integrando por partes la primera integral y empleando que $\varphi \in H_0^1(a, b)$, obtenemos la formulación débil del problema $(\tilde{P}_{\varepsilon,0})$: hallar $R_{\varepsilon,0} \in H_0^1(a, b)$ tal que

$$\int_a^b R_{\varepsilon,0}'(x)\varphi'(x)dx - \varepsilon \int_a^b R_{\varepsilon,0}(x)\varphi(x)dx = \varepsilon \int_a^b u_0(x)\varphi(x)dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(a, b). \quad (3.8)$$

La solución a este problema como ya vimos es la denominada solución débil. Veamos que para ε suficientemente pequeño, existe y es única a partir del Teorema 3.1.2.

Para $\varepsilon > 0$ fijo definimos la forma bilineal $b_\varepsilon : H_0^1(a, b) \times H_0^1(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$b_\varepsilon(u, v) := \int_a^b u'v'dx - \varepsilon \int_a^b uvdx$$

y probemos que además es continua y coerciva para ε suficientemente pequeño. En efecto,

- b_ε es continua. Sean $u, v \in H_0^1(a, b)$. Entonces,

$$\begin{aligned} |b_\varepsilon(u, v)| &= |\langle u', v' \rangle_{L^2} - \varepsilon \langle u, v \rangle_{L^2}| = |\langle u', v' \rangle_{L^2} + \langle u, v \rangle_{L^2} - (1 + \varepsilon) \langle u, v \rangle_{L^2}| \\ &\leq |\langle u, v \rangle_{H_0^1}| + (1 + \varepsilon) |\langle u, v \rangle_{L^2}| \leq \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1} + (1 + \varepsilon) \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \\ &\leq (2 + \varepsilon) \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1} \end{aligned}$$

donde la primera igualdad se tiene de aplicar la definición de producto escalar en $L^2(a, b)$, la segunda igualdad de sumar y restar $\langle u, v \rangle_{L^2}$, la primera desigualdad de aplicar la desigualdad triangular en \mathbb{R} junto con la definición del producto escalar en $H_0^1(a, b)$, que es el heredado de $H^1(a, b)$, la siguiente desigualdad se obtiene como consecuencia de la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la equivalencia de las distintas normas de $H^1(a, b)$ visto en el Capítulo 1 y la última de acotar la norma en $L^2(a, b)$ por la norma en $H_0^1(a, b)$.

- b_ε es coerciva, para ε suficientemente pequeño tal que $1 - \varepsilon C > 0$. Sea $u \in H_0^1(a, b)$

$$b_\varepsilon(u, u) = \|u'\|_{L^2}^2 - \varepsilon \|u\|_{L^2}^2 \geq (1 - \varepsilon C) \|u'\|_{L^2}^2 \geq (1 - \varepsilon C) \|u\|_{H_0^1}^2$$

las acotaciones obtenidas son consecuencia del Teorema 3.1.4 y que la norma en $L^2(a, b)$ se puede acotar por la norma en $H_0^1(a, b)$. Basta tomar $\alpha = 1 - \varepsilon C$ para verificar que es una forma bilineal coerciva.

Estamos por tanto en condiciones de aplicar el Teorema de Lax-Milgram considerando el operador $\tilde{\varphi}_\varepsilon : H_0^1(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\langle \tilde{\varphi}_\varepsilon, u \rangle = \varepsilon \int_a^b u_0 u dx$$

que es acotado como consecuencia de la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Por tanto para ε suficientemente pequeño existe una única solución de (3.8).

Probemos que $\|R_{\varepsilon,0}\|_\infty$ tiende a cero cuando ε tiende a cero. Como $R_{\varepsilon,0} \in H_0^1(a, b)$ aplicando la desigualdad (3.4) del Teorema 3.1.4 basta probar que $\|R'_{\varepsilon,0}\|_{L^2(a,b)}$ converge a cero cuando ε tiende a cero. Para ello se considera la formulación débil (3.8) con $\varphi = R_{\varepsilon,0}$, deduciendo:

$$\|R'_{\varepsilon,0}\|_{L^2(a,b)}^2 - \varepsilon \|R_{\varepsilon,0}\|_{L^2(a,b)}^2 = \varepsilon \langle u_0, R_{\varepsilon,0} \rangle_{L^2(a,b)}.$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz en la expresión de la derecha de la igualdad anterior se obtiene una cota superior y la acotación inferior se debe a la desigualdad de Poincaré

$$(1 - \varepsilon(b-a)^2) \|R'_{\varepsilon,0}\|_{L^2(a,b)}^2 \leq \|R'_{\varepsilon,0}\|_{L^2(a,b)}^2 - \varepsilon \|R_{\varepsilon,0}\|_{L^2(a,b)}^2 \leq \varepsilon \|u_0\|_{L^2(a,b)} \|R_{\varepsilon,0}\|_{L^2(a,b)}.$$

Volviendo a acotar superiormente mediante la desigualdad de Poincaré sobre la última cota de la expresión anterior obtenemos $(1 - \varepsilon(b-a)^2) \|R'_{\varepsilon,0}\|_{L^2(a,b)}^2 \leq \varepsilon(b-a) \|u_0\|_{L^2(a,b)} \|R'_{\varepsilon,0}\|_{L^2(a,b)}$ luego, si $\|R'_{\varepsilon,0}\|_{L^2(a,b)} \neq 0$, se tiene

$$0 \leq \|R'_{\varepsilon,0}\|_{L^2(a,b)} \leq \frac{\varepsilon(b-a) \|u_0\|_{L^2(a,b)}}{1 - \varepsilon(b-a)^2}.$$

Tomando límites cuando ε tiende a cero se llega a que $\|R'_{\varepsilon,0}\|_{L^2(a,b)}$ tiende a cero como queríamos demostrar.

Veamos ahora que $u_0 + \varepsilon u_1$ es el desarrollo regular de orden uno de u_ε en $[a, b]$. Para ello razonaremos como en el caso de orden cero. Definimos $R_{\varepsilon,1} = (u_\varepsilon - u_0 - \varepsilon u_1)/\varepsilon$ y se trata de probar que $\|R_{\varepsilon,1}\|_\infty$ tiende a cero cuando ε tiende a cero. Resulta que $R_{\varepsilon,1}$ es solución del problema

$$(\tilde{P}_{\varepsilon,1}) : \begin{cases} R''_{\varepsilon,1}(x) + \varepsilon R_{\varepsilon,1}(x) = -\varepsilon u_1(x) \\ R_{\varepsilon,1}(a) = 0, \quad R_{\varepsilon,1}(b) = 0, \end{cases}$$

el cual coincide con el problema $(\tilde{P}_{\varepsilon,0})$ considerando la función u_0 por u_1 y en consecuencia se verifica que $\|R'_{\varepsilon,1}\|_{L^2(a,b)}$ converge a cero cuando ε tiende a cero.

Vamos a probar por inducción en el orden del desarrollo (3.7) que $R_{\varepsilon,m} := (u_\varepsilon - \sum_{k=0}^m \varepsilon^k u_k)/\varepsilon^m$ verifica

$$(\tilde{P}_{\varepsilon,m}) : \begin{cases} R''_{\varepsilon,m}(x) + \varepsilon R_{\varepsilon,m}(x) = -\varepsilon u_m(x) \\ R_{\varepsilon,m}(a) = 0, \quad R_{\varepsilon,m}(b) = 0 \end{cases}$$

con $m \geq 0$. Como hemos visto previamente $R_{\varepsilon,0}$ lo verifica. Supongamos ahora que $R_{\varepsilon,m}$ verifica $(\tilde{P}_{\varepsilon,m})$ y probemos que $R_{\varepsilon,m+1}$ cumple $(\tilde{P}_{\varepsilon,m+1})$.

Resulta que se tiene la siguiente relación entre $R_{\varepsilon,m}$ y $R_{\varepsilon,m+1}$: $R_{\varepsilon,m+1} = R_{\varepsilon,m}/\varepsilon - u_{m+1}$. Empleando esta expresión, la hipótesis inductiva y el problema (P_{m+1}) se tiene que $R_{\varepsilon,m+1}$ verifica $(\tilde{P}_{\varepsilon,m+1})$. En efecto se verifica

$$\begin{aligned} R''_{\varepsilon,m+1}(x) + \varepsilon R_{\varepsilon,m+1}(x) &= R''_{\varepsilon,m}(x)/\varepsilon - u''_{m+1}(x) + R_{\varepsilon,m}(x) - \varepsilon u_{m+1}(x) \\ &= -u_m(x) - u''_{m+1}(x) - \varepsilon u_{m+1}(x) = -\varepsilon u_{m+1}(x) \end{aligned}$$

donde la primera igualdad simplemente se obtiene de sustituir en la ecuación de $(\tilde{P}_{\varepsilon,m+1})$, la segunda de emplear la ecuación de $(\tilde{P}_{\varepsilon,m})$ y la última empleando la ecuación del problema (P_{m+1}) . De forma directa $R_{\varepsilon,m+1}$ verifica las condiciones de contorno del problema $(\tilde{P}_{\varepsilon,m+1})$ usando las condiciones de los problemas $(\tilde{P}_{\varepsilon,m})$ y (P_{m+1}) .

Como el problema $(\tilde{P}_{\varepsilon,m+1})$ se distingue del problema $(\tilde{P}_{\varepsilon,0})$ en el término independiente de la ecuación diferencial, razonando como en el caso $m = 0$ se obtiene que $\|R'_{\varepsilon,m+1}\|_{L^2(a,b)}$ converge a cero cuando ε tiende a cero.

Nótese que el problema del Ejemplo 2.2.1 es un caso particular del problema que acabamos de justificar, en el que se considera $f = 0, a = 0, \gamma = 0, b = 1, \delta = 1$. Por la justificación realizada, ahora sí que podemos garantizar que los desarrollos de distintos órdenes planteados en la Sección 2.2 del Capítulo 2 son verdaderamente desarrollos regulares uniformes del orden en cuestión. Además, por lo visto previamente, los desarrollos planteados en ese momento son también desarrollos asintóticos regulares considerando los espacios $(L^2(a,b), \|\cdot\|_{L^2(a,b)})$ y $(H^1(a,b), \|\cdot\|_{H^1(a,b)})$.

PROBLEMA 2

Sea el problema de perturbación regular

$$(P_\varepsilon) : \begin{cases} u''_\varepsilon(x) + \varepsilon u'_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(x) = f(x) \\ u_\varepsilon(a) = \gamma, \quad u_\varepsilon(b) = \delta \end{cases}$$

donde $D = [a,b]$, $\varepsilon \in (0,1]$, $f \in C[a,b]$ y $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Al igual que en el problema anterior, supongamos que existe el desarrollo regular de u_ε en $[a,b]$ de la forma (3.7) de donde sustituyendo dicho desarrollo en el problema (P_ε) e igualando coeficientes de la misma potencia de ε se obtienen los siguientes problemas

$$(P_0) : \begin{cases} u''_0(x) - u_0(x) = f(x) \\ u_0(a) = \gamma, \quad u_0(b) = \delta \end{cases} \quad (P_k) : \begin{cases} u''_k(x) - u_k(x) + u'_{k-1}(x) = 0 \\ u_k(a) = 0, \quad u_k(b) = 0 \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{N}.$$

Se trata de probar que ciertamente (3.7) es un desarrollo regular uniforme de u_ε en $[a,b]$. Para comenzar, se demuestra que u_0 es el desarrollo regular de orden cero de u_ε en $[a,b]$ razonando de manera similar al problema anterior, es por ello que definimos $R_{\varepsilon,0} = u_\varepsilon - u_0$ que resulta ser solución del siguiente problema perturbado

$$(\tilde{P}_{\varepsilon,0}) : \begin{cases} R''_{\varepsilon,0}(x) + \varepsilon R'_{\varepsilon,0}(x) - R_{\varepsilon,0}(x) = -\varepsilon u'_0(x) \\ R_{\varepsilon,0}(a) = 0, \quad R_{\varepsilon,0}(b) = 0 \end{cases}$$

Procedemos a obtener la formulación débil del problema $(\tilde{P}_{\varepsilon,0})$: hallar $R_{\varepsilon,0} \in H_0^1(a,b)$ tal que

$$\int_a^b R'_{\varepsilon,0}(x)\varphi'(x)dx + \varepsilon \int_a^b R_{\varepsilon,0}(x)\varphi'(x)dx + \int_a^b R_{\varepsilon,0}(x)\varphi(x)dx = \varepsilon \int_a^b u'_0(x)\varphi(x)dx \quad (3.9)$$

para todo $\varphi \in H_0^1(a,b)$. Para ε suficientemente pequeño, dicho problema tiene una única solución como consecuencia del Teorema de Lax-Milgram. Para ello consideramos la forma bilineal $b_\varepsilon : H_0^1(a,b) \times H_0^1(a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ y el operador acotado $\tilde{\varphi}_\varepsilon \in (H_0^1(a,b))^*$, definidos

$$b_\varepsilon(u,v) := \int_a^b u'v'dx + \varepsilon \int_a^b uv'dx + \int_a^b uvdx, \quad \langle \tilde{\varphi}_\varepsilon, u \rangle := \varepsilon \int_a^b u'_0 u dx \quad \forall u, v \in H_0^1(a,b)$$

Probemos que b_ε es continua y coerciva para ε suficientemente pequeño.

- b_ε es continua: Sean $u, v \in H_0^1(a,b)$. Entonces,

$$\begin{aligned} |b_\varepsilon(u,v)| &= |\langle u', v' \rangle_{L^2} + \varepsilon \langle u, v' \rangle_{L^2} + \langle u, v \rangle_{L^2}| \leq |\langle u, v \rangle_{H_0^1}| + \varepsilon |\langle u, v' \rangle_{L^2}| \leq \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1} \\ &\quad + \varepsilon \|u\|_{L^2} \|v'\|_{L^2} \leq (1 + \varepsilon) \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1} \end{aligned}$$

donde la primera igualdad se tiene de aplicar la definición de producto escalar en $L^2(a,b)$, la primera desigualdad de aplicar la desigualdad triangular en \mathbb{R} junto con la definición de producto escalar en $H_0^1(a,b)$, que es el heredado de $H^1(a,b)$, la siguiente desigualdad como consecuencia de la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la equivalencia de las distintas normas en $H^1(a,b)$ visto en el Capítulo 1 y la última de acotar la norma en $L^2(a,b)$ por la norma en $H_0^1(a,b)$.

- b_ε es coerciva, para ε suficientemente pequeño verificando $1 - \varepsilon > 0$. Sea $u \in H_0^1(a,b)$

$$\begin{aligned} b_\varepsilon(u,u) &= \|u'\|_{L^2}^2 + \varepsilon \langle u, u' \rangle_{L^2} + \|u\|_{L^2}^2 = \|u\|_{H_0^1}^2 + \varepsilon \langle u, u' \rangle_{L^2} \geq \|u\|_{H_0^1}^2 - \varepsilon |\langle u, u' \rangle_{L^2}| \\ &\geq \|u\|_{H_0^1}^2 - \varepsilon \|u\|_{L^2} \|u'\|_{L^2} \geq (1 - \varepsilon) \|u\|_{H_0^1}^2 \end{aligned}$$

las acotaciones obtenidas son consecuencia de Cauchy-Schwarz y Teorema 3.1.4 y que la norma en $L^2(a,b)$ se puede acotar por la norma en $H_0^1(a,b)$. Basta tomar $\alpha = 1 - \varepsilon$ para verificar que es una forma bilineal coerciva.

Se quiere probar que $\|R_{\varepsilon,0}\|_\infty$ tiende a cero cuando ε tiende a cero. Al igual que en el problema 1, aplicando el Teorema 3.1.4 basta ver que $\|R'_{\varepsilon,0}\|_{L^2(a,b)} \rightarrow 0$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Para ello consideramos en el problema (3.9) $\varphi = R_{\varepsilon,0}$ obteniendo

$$\|R'_{\varepsilon,0}\|_{L^2(a,b)}^2 + \varepsilon \langle R_{\varepsilon,0}, R'_{\varepsilon,0} \rangle_{L^2(a,b)} + \|R_{\varepsilon,0}\|_{L^2(a,b)}^2 = \varepsilon \langle u'_0, R_{\varepsilon,0} \rangle_{L^2(a,b)}.$$

Manipulando dicha expresión y considerando que $0 \leq \|R_{\varepsilon,0}\|_{L^2(a,b)}^2$ se tiene la siguiente cadena de desigualdades

$$\|R'_{\varepsilon,0}\|_{L^2(a,b)}^2 \leq \varepsilon (\langle u'_0, R_{\varepsilon,0} \rangle_{L^2(a,b)} - \langle R_{\varepsilon,0}, R'_{\varepsilon,0} \rangle_{L^2(a,b)}) \leq \varepsilon |\langle u'_0, R_{\varepsilon,0} \rangle_{L^2(a,b)} - \langle R_{\varepsilon,0}, R'_{\varepsilon,0} \rangle_{L^2(a,b)}|.$$

Aplicando la desigualdad triangular en la última cota superior, junto con las desigualdades de Cauchy-Schwarz y la de Poincaré se concluye $\|R'_{\varepsilon,0}\|_{L^2(a,b)} \leq \varepsilon(b-a)(\|u'_0\|_{L^2(a,b)} + \|R'_{\varepsilon,0}\|_{L^2(a,b)})$. Cuando $\|R'_{\varepsilon,0}\|_{L^2(a,b)} \neq 0$, finalmente se llega a

$$0 \leq \|R'_{\varepsilon,0}\|_{L^2(a,b)} \leq \frac{\varepsilon(b-a)\|u'_0\|_{L^2(a,b)}}{1 - \varepsilon(b-a)}$$

de donde tomando límites cuando ε tiende a cero, trivialmente se tiene que $\|R'_{\varepsilon,0}\|_{L^2(a,b)}$ tiende a cero. A continuación probaremos por inducción en el orden del desarrollo que $R_{\varepsilon,m}$ verifica $(\tilde{P}_{\varepsilon,m})$ siendo

$$R_{\varepsilon,m}(x) := \frac{u_\varepsilon(x) - \sum_{k=0}^m \varepsilon^k u_k(x)}{\varepsilon^m} \text{ y } (\tilde{P}_{\varepsilon,m}) : \begin{cases} R''_{\varepsilon,m}(x) + \varepsilon R'_{\varepsilon,m}(x) - R_{\varepsilon,m}(x) = -\varepsilon u'_m(x) \\ R_{\varepsilon,m}(a) = 0, \quad R_{\varepsilon,m}(b) = 0 \end{cases}$$

con $m \geq 0$. Si $m = 0$ por lo visto anteriormente se verifica. Supongamos que se verifica para m y probemos que se verifica para $m + 1$, es decir, partiendo de la hipótesis de que $R_{\varepsilon,m}$ verifica $(\tilde{P}_{\varepsilon,m})$ se prueba que $R_{\varepsilon,m+1}$ es solución de $(\tilde{P}_{\varepsilon,m+1})$. Al igual que en el problema anterior $R_{\varepsilon,m+1} = R_{\varepsilon,m}/\varepsilon - u_{m+1}$ y empleando los problemas $(\tilde{P}_{\varepsilon,m})$ y (P_{m+1}) se concluye de manera directa que $R_{\varepsilon,m+1}$ verifica $(\tilde{P}_{\varepsilon,m+1})$. A continuación como $(\tilde{P}_{\varepsilon,m+1})$ se asemeja al problema $(\tilde{P}_{\varepsilon,0})$, la acotación obtenida para probar que $\|R_{\varepsilon,m+1}\|_\infty$ tiende a cero cuando ε tiende a cero es:

$$0 \leq \|R'_{\varepsilon,m+1}\|_{L^2(a,b)} \leq \frac{\varepsilon(b-a)\|u'_{m+1}\|_{L^2(a,b)}}{1 - \varepsilon(b-a)}$$

de donde como en el caso del desarrollo de orden cero, se tiene que $u_0 + \varepsilon u_1 + \dots + \varepsilon^m u_m$ es el desarrollo regular de orden m de la función u_ε en $[a, b]$.

Realizando la analogía con el problema del Ejemplo 2.2.2 del Capítulo 2, este último es un caso particular del problema que acabamos de justificar considerando $f = 0, a = 0, \gamma = 0, b = 1$ y $\delta = 1$. Es por ello que todos los desarrollos de distintos órdenes considerados en el Ejemplo 2.2.2 efectivamente son desarrollos asintóticos regulares uniformes, es más también son desarrollos asintóticos considerando los espacios $(L^2(a, b), \|\cdot\|_{L^2(a,b)})$ y $(H^1(a, b), \|\cdot\|_{H^1(a,b)})$.

PROBLEMA 3

Considérese el problema de contorno perturbado

$$(P_\varepsilon) : \begin{cases} u''_\varepsilon(x) + \varepsilon^2 u_\varepsilon(x) = f(x, \varepsilon) \\ u_\varepsilon(a) = \gamma, \quad u_\varepsilon(b) = \delta \end{cases}$$

donde $D = [a, b]$, $\varepsilon \in (0, 1]$, $f \in C^\infty([a, b] \times [-k, k])$ con $k > 0$ y $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$. En este caso a diferencia de los dos problemas anteriores, la función f depende de las dos variables, x y ε . Para cada $m \geq 0$, f admite desarrollo de Taylor en potencias de ε centrado en $\varepsilon = 0$, de grado m (veamos a x como una constante)

$$f(x, \varepsilon) = \sum_{n=0}^m \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f(x, 0)}{\partial \varepsilon^n} \varepsilon^n + R_m(x, \varepsilon) \quad (3.10)$$

donde

$$R_m(x, \varepsilon) = \frac{1}{(m+1)!} \frac{\partial^{m+1} f(x, \xi)}{\partial \varepsilon^{m+1}} \varepsilon^{m+1} \text{ con } \xi \in (0, \varepsilon)$$

(ver referencia [13], por ejemplo) y observemos que como $f \in C^\infty([a, b] \times [-k, k])$, para cada $m \geq 0$

$$\|R_m(x, \varepsilon)/\varepsilon^m\|_{L^2(a,b)} \rightarrow 0 \text{ cuando } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.11)$$

Comencemos suponiendo que existe el desarrollo regular de u_ε en $[a, b]$ de la forma (3.7) de donde sustituyendo dicho desarrollo y (3.10) en el problema (P_ε) , e igualando coeficientes de la misma potencia de ε , se obtienen los siguientes problemas

$$(P_0) : \begin{cases} u''_0(x) = f(x, 0) \\ u_0(a) = \gamma, \quad u_0(b) = \delta \end{cases} \quad (P_1) : \begin{cases} u''_1(x) = \frac{\partial f(x, 0)}{\partial \varepsilon} \\ u_1(a) = 0, \quad u_1(b) = 0 \end{cases}$$

$$(P_k) : \begin{cases} u_k''(x) + u_{k-2}(x) = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f(x, 0)}{\partial \varepsilon^k} & \text{con } k \in \mathbb{N}, k \geq 2. \\ u_k(a) = 0, \quad u_k(b) = 0 \end{cases}$$

Probemos que $\|R_{\varepsilon,0}\|_\infty$ tiende a cero cuando ε tiende a cero, siendo $R_{\varepsilon,0} = u_\varepsilon - u_0$. Resulta que $R_{\varepsilon,0}$ es solución del siguiente problema perturbado

$$(\tilde{P}_{\varepsilon,0}) : \begin{cases} R_{\varepsilon,0}''(x) + \varepsilon^2 R_{\varepsilon,0}(x) = g_{\varepsilon,0}(x) - \varepsilon^2 u_0(x) \\ R_{\varepsilon,0}(a) = 0, \quad R_{\varepsilon,0}(b) = 0 \end{cases}$$

siendo $g_{\varepsilon,0}(x) = f(x, \varepsilon) - f(x, 0) = R_0(x, \varepsilon)/\varepsilon^0$ como consecuencia del Teorema del Valor Medio (ver [13], por ejemplo). De nuevo $R_{\varepsilon,0} \in H_0^1(a, b)$ y se procede a obtener la formulación débil del problema $(\tilde{P}_{\varepsilon,0})$: hallar $R_{\varepsilon,0} \in H_0^1(a, b)$ tal que

$$\int_a^b R_{\varepsilon,0}'(x) \varphi'(x) dx - \varepsilon^2 \int_a^b R_{\varepsilon,0}(x) \varphi(x) dx = - \int_a^b g_{\varepsilon,0}(x) \varphi(x) dx + \varepsilon^2 \int_a^b u_0(x) \varphi(x) dx$$

para todo $\varphi \in H_0^1(a, b)$. Para ε suficientemente pequeño, el problema (3.1) tiene solución única como consecuencia del Teorema de Lax-Milgram, donde la forma bilineal $b_\varepsilon : H_0^1(a, b) \times H_0^1(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ y el operador acotado $\tilde{\varphi}_\varepsilon \in (H_0^1(a, b))^*$ se definen como: Sean $u, v \in H_0^1(a, b)$

$$b_\varepsilon(u, v) := \int_a^b u'v' dx - \varepsilon^2 \int_a^b uv dx, \quad \langle \tilde{\varphi}_\varepsilon, u \rangle := - \int_a^b g_{\varepsilon,0} u dx + \varepsilon^2 \int_a^b u_0 u dx.$$

Razonando de manera similar al PROBLEMA 1 se tiene que b_ε es continua y coerciva para ε suficientemente pequeño.

Probemos ahora que $\|R_{\varepsilon,0}\|_\infty$ tiende a cero cuando ε tiende a cero. Para ello como hemos visto en otras situaciones, basta probar que $\|R_{\varepsilon,0}'\|_{L^2(a,b)}$ tiende a cero cuando ε tiende a cero. Considerando en la formulación débil $\varphi = R_{\varepsilon,0}$ se obtiene

$$\|R_{\varepsilon,0}'\|_{L^2(a,b)}^2 - \varepsilon^2 \|R_{\varepsilon,0}\|_{L^2(a,b)}^2 = - \langle g_{\varepsilon,0}, R_{\varepsilon,0} \rangle_{L^2(a,b)} + \varepsilon^2 \langle u_0, R_{\varepsilon,0} \rangle_{L^2(a,b)}.$$

Acotamos inferiormente la expresión izquierda de la igualdad precedente usando la desigualdad de Poincaré y superiormente la de la derecha considerando el valor absoluto junto con la desigualdad triangular

$$(1 - \varepsilon^2(b-a)^2) \|R_{\varepsilon,0}'\|_{L^2(a,b)}^2 \leq |\langle g_{\varepsilon,0}, R_{\varepsilon,0} \rangle_{L^2(a,b)}| + \varepsilon^2 |\langle u_0, R_{\varepsilon,0} \rangle_{L^2(a,b)}|.$$

Continuamos acotando la expresión de la derecha haciendo uso de la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la desigualdad de Poincaré obteniendo $(1 - \varepsilon^2(b-a)^2) \|R_{\varepsilon,0}'\|_{L^2(a,b)}^2 \leq (b-a) (\|g_{\varepsilon,0}\|_{L^2(a,b)} + \varepsilon^2 \|u_0\|_{L^2(a,b)}) \|R_{\varepsilon,0}'\|_{L^2(a,b)}$ y finalmente

$$0 \leq \|R_{\varepsilon,0}'\|_{L^2(a,b)} \leq \frac{(b-a) (\|g_{\varepsilon,0}\|_{L^2(a,b)} + \varepsilon^2 \|u_0\|_{L^2(a,b)})}{1 - \varepsilon^2(b-a)^2}.$$

Tomando límites cuando ε tiende a cero, trivialmente se tiene que $\|R_{\varepsilon,0}'\|_{L^2(a,b)}$ tiende a cero debido a que $\|g_{\varepsilon,0}\|_{L^2(a,b)} \rightarrow 0$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ por (3.11). En consecuencia queda probado que u_0 es el desarrollo regular uniforme de orden cero de u_ε en $[a, b]$.

De manera similar se prueba que $u_0 + \varepsilon u_1$ es el desarrollo regular uniforme de orden uno de u_ε en $[a, b]$ ya que $R_{\varepsilon,1} := (u_\varepsilon - u_0 - \varepsilon u_1)/\varepsilon$ verifica el problema:

$$(\tilde{P}_{\varepsilon,1}) : \begin{cases} R_{\varepsilon,1}''(x) + \varepsilon^2 R_{\varepsilon,1}(x) = g_{\varepsilon,1}(x) - \varepsilon(u_0(x) + \varepsilon u_1(x)) \\ R_{\varepsilon,1}(a) = 0, \quad R_{\varepsilon,1}(b) = 0 \end{cases}$$

donde

$$g_{\varepsilon,1}(x) = \left(f(x, \varepsilon) - f(x, 0) - \varepsilon \frac{\partial f(x, 0)}{\partial \varepsilon} \right) / \varepsilon = R_1(x, \varepsilon) / \varepsilon$$

empleando (3.10).

Finalmente, por el método de inducción, podemos probar que $R_{\varepsilon,m}$ verifica el problema

$$(\tilde{P}_{\varepsilon,m}) : \begin{cases} R''_{\varepsilon,m}(x) + \varepsilon^2 R_{\varepsilon,m}(x) = g_{\varepsilon,m}(x) - \varepsilon(u_{m-1}(x) + \varepsilon u_m(x)) \\ R_{\varepsilon,m}(a) = 0, \quad R_{\varepsilon,m}(b) = 0 \end{cases}$$

para $m \geq 1$, donde

$$g_{\varepsilon,m}(x) = \frac{1}{\varepsilon^m} \left(\tilde{f}(\varepsilon) - \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f(x, 0)}{\partial \varepsilon^k} \varepsilon^k \right) = R_m(x, \varepsilon) / \varepsilon^m$$

empleando (3.10) y como consecuencia de (3.11), $\|g_{\varepsilon,m}\|_{L^2(a,b)} \rightarrow 0$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Si $m = 1$ visto. Supongamos que se verifica para m y veamos que se cumple para $m + 1$, es decir que $R_{\varepsilon,m+1}$ verifica $(\tilde{P}_{\varepsilon,m+1})$, sabiendo que $R_{\varepsilon,m}$ verifica $(\tilde{P}_{\varepsilon,m})$.

De manera directa empleando los problemas $(\tilde{P}_{\varepsilon,m})$ y (P_{m+1}) se obtiene lo enunciado y razonando de manera similar a situaciones anteriores, la acotación obtenida para probar que $\|R_{\varepsilon,m+1}\|_{\infty}$ tiende a cero cuando ε tiende a cero es:

$$0 \leq \|R'_{\varepsilon,m+1}\|_{L^2(a,b)} \leq \frac{(b-a)(\|g_{\varepsilon,m+1}\|_{L^2(a,b)} + \varepsilon\|u_m + \varepsilon u_{m+1}\|_{L^2(a,b)})}{1 - \varepsilon^2(b-a)^2}.$$

Tomando límites cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, se tiene que $u_0 + \varepsilon u_1 + \dots + \varepsilon^m u_m$ es el desarrollo regular de orden m de la función u_ε en $[a, b]$ en cualquiera de los espacios $(C[a, b], \|\cdot\|_{\infty})$, $(L^2(a, b), \|\cdot\|_{L^2(a,b)})$ y $(H^1(a, b), \|\cdot\|_{H^1(a,b)})$.

Recordando el Ejemplo 2.2.3 y realizando una analogía con el problema que se acaba de estudiar, observamos que dicho problema de la Sección 2.2 es un caso particular del problema tratado considerando $f(x, \varepsilon) = \cos(\varepsilon)$, $a = -1, \gamma = -1, b = 1, \delta = 1$. Por la justificación realizada, los distintos desarrollos de distintos órdenes planteados en el Ejemplo 2.2.3 son ciertamente desarrollos regulares uniformes del orden en cuestión. Además, podemos garantizar que son desarrollos regulares en los tres espacios normados considerados en la memoria.

Bibliografía

- [1] ÁLVAREZ DIOS, J.A., VIAÑO, J.M., *Notas sobre Métodos Asintóticos en Ecuaciones Diferenciales*, Tórculo Edicións, Santiago de Compostela, 2000.
- [2] BRÉZIS, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, New York, 2011.
- [3] ECKHAUS, W., *Asymptotic Analysis of Singular Perturbations*, North Holland, Amsterdam, 1979.
- [4] GÓMEZ, D., *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, Universidad de Cantabria, 2020-2021.
- [5] ILL'IN, A.M., *Matching of Asymptotic Expansions of Solutions of Boundary Value Problems*, American Mathematical Society, Rhode Island, 1992.
- [6] KEVORKIAN, J., COLE, J.D., *Perturbation Methods in Applied Mathematics*, Springer-Verlag, New York, 1981.
- [7] LAGERSTROM, P.A., *Matched Asymptotic Expansions: Ideas and Techniques*, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [8] MURRAY, J.D., *Asymptotic Analysis*, Elsevier North-Holland, New York, 1984.
- [9] MYINT-U., T., *Ordinary Differential Equations*, Elsevier North-Holland, New York, 1978.
- [10] NAYFEH, A.H., *Introduction to Perturbation Techniques*, John Wiley and Sons, New York, 1981.
- [11] NOVO, S., OBAYA, R., ROJO, J., *Ecuaciones y Sistemas Diferenciales*, Editorial AC, Madrid, 1992.
- [12] O'MALLEY, R.E., *Introduction to Singular Perturbations*, Academic Press, New York, 1974.
- [13] PÉREZ, C., PORRAS, B., *Apuntes de Cálculo Diferencial*, Universidad de Cantabria, 2019-2020.
- [14] ROSS, S.L., *Ecuaciones Diferenciales*, Editorial Reverté, Barcelona, 1992.
- [15] SANCHEZ-HUBERT, J., SANCHEZ-PALENCIA, E., *Vibration and Coupling of Continuous Systems*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [16] VASIL'EVA, A.B., BUTUZOV, V.F., KALACHEV, L.V., *The Boundary Function Method for Singular Perturbation Problems*, SIAM, Philadelphia, 1995.