Facultad
de
Ciencias

CURVAS EN EL PLANO HIPERBÓLICO
(CURVES IN THE HYPERBOLIC PLANE)

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autora: Olatz Irastorza Valdés

Director: Fernando Etayo Gordejuela

Septiembre - 2023

Agradecimientos

En primer lugar, quisiera comenzar expresando mi agradecimiento a Fernando por guiarme durante este trabajo. Sus ánimos, sus palabras amables y su infinita paciencia han sido un pilar fundamental de este proceso.

A mi madre le debo un agradecimiento que va más allá de las palabras por su apoyo incondicional durante todos estos años. Gracias por escuchar mis preocupaciones, por compartir mis alegrías y por creer en mí.

Por último, quiero agradecer también a mi familia, a los amigos de toda la vida y a los que he hecho por el camino. Gracias por acompañarme durante estos años y hacer la vida un poco más divertida.

Resumen

En este trabajo se pretenden estudiar algunas curvas notables de la geometría hiperbólica. Para ello, veremos el semiplano de Poincaré como una variedad diferenciable con una métrica riemanniana. En este modelo calcularemos la curvatura del plano hiperbólico y también veremos como son las geodésicas en él. Utilizando las transformaciones de Möbius veremos las isometrías del semiplano de Poincaré, lo que dará estructura al espacio y facilitará analizar las propiedades de las curvas que se pretenden estudiar. Por último se verá la forma y se calculará la curvatura de las circunferencias, los horociclos y los hiperciclos del semiplano. Se concluirá clasificando las geodésicas, los hiperciclos, los horociclos y las circunferencias en curvas de curvatura nula, curvatura entre cero y uno, curvatura constante igual a uno y mayor que uno respectivamente.

Palabras clave: Geometría hiperbólica, horociclos, hiperciclos, semiplano de Poincaré.

Abstract

This works aims to study some notable curves in hyperbolic geometry. In order to do this, we will study the Poincré half plane as a diferentiable manifold with a riemannian metric. In this model we will calculate the curvature of the hyperbolic plane and we will also describe the geodesics in it. Using Möbius transformations, we will learn about the isometríes in Poincaré's half plane, this will help us understand the structure of the half plane, facilitating the study of the properties of the curves. Finally, we will observe the shape and compute the curvature of the hypercycles, horocycles, and circles in the half plane. We will conclude by classifying the geodesics, hypercycles, horocycles, and circles as curves with null curvature, curvature between zero and one, constant curvature equal to one and curvature greater than one respectively.

Key words: hyperbolic geometry, horocycles, hypercycles, Poincaré half plane.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

El objetivo fundamental de este trabajo es estudiar, desde el punto de vista de la Geometría Diferencial, los cuatro tipos de fundamentales de curvas del plano hiperbólico: las rectas hiperbólicas, las circunferencias hiperbólicas, los horociclos y los hiperciclos. Antes de describir el contenido de la memoria, hacemos una pequeña introducción histórica que muestra la relevancia del tema que vamos a tratar.

Para hablar de geometría hiperbólica, rama que forma parte de la geometría no euclídea, es imprescindible hablar primero de la geometría euclídea. Esta recibe su nombre por el matemático griego Euclides, quien escribió "los Elementos" alrededor del año 300 a. C. Este libro recoge los conocimientos de geometría que se habían desarrollado hasta ese momento, utilizando un sistema axiomático para desarrollar varias proposiciones, lemas y corolarios. Al inicio del libro, Euclides presenta los 5 postulados de la geometría plana sobre los que se basan los razonamientos del libro que son los siguientes:

I. Por dos puntos diferentes pasa una sola línea recta.

II. Un segmento rectilíneo puede ser siempre alargado.

III. Hay una sola circunferencia con un centro y un radio dados.

IV. Todos los ángulos rectos son iguales.

V. Si una recta secante corta a dos rectas formando a un lado ángulos interiores, la suma de los cuales sea menor que dos ángulos rectos; las dos rectas, suficientemente alargadas se cortarán en el mismo lado.

El quinto postulado, sin embargo, ha suscitado muchas dudas a lo largo de la historia ya que fueron muchos los matemáticos que trataron de demostrarlo a partir de los cuatro primeros postulados. Entre ellos se encuentran Leibniz, Descartes, Lagrange, Legendre, Fourier, etc. Estos intentos no lograron completar la demostración y es en el siglo XIX cuando aparecen los primeros trabajos que desarrollan modelos geometrícos a partir de los primeros cuatro postulados, pero con la negación del quinto.

A finales del siglo XVIII, Gauss comenzó a estudiar este problema, y podemos ver en varias cartas que escribió entre los años 1813 y 1831 que obtuvo algunos teoremas fundamentales de lo que él llamó geometría antieuclidiana en un comienzo. A pesar de estas cartas, Gauss no publicó sus hallazgos por temor a no ser comprendido.

Alrededor de la misma época, János Bólyai también se dedicó al estudio de las consecuencias que se derivan de negar el quinto postulado. En 1832 publicó los resultados de su investigación en un trabajo titulado “Tentamen” que escribió junto con su padre, el matemático Farkas Bólyai.

Pero esta no es la primera noción que tenemos del desarrollo de la geometría no euclídea, ya que como János Bólyai descubriría más tarde, Lobatchevski se había adelantado. Es Nikolai Lobatchevski al que se considera el primero en publicar su descubrimiento de la geometría no euclidea por la exposición de su investigación en una conferencia titulada “Exposición breve de los fundamentos de la Geometría con una demostración lógica del teorema de las paralelas”, que tuvo lugar en 1826.

Es gracias a la investigación de estos y otros muchos matemáticos que ahora podemos hablar de geometría no euclídea, y en este caso concreto, de geometría hiperbólica. Para ello, nos vamos a valer principalmente del modelo del semiplano de Poincaré, que nos facilitará los cálculos de los capítulos posteriores. Cabe mencionar que también existen otros modelos, como el del disco de Poincaré, el disco de Klein-Beltrami o el modelo del hiperboloide, que presentan otras ventajas y también es interesante conocer. En el plano hiperbólico, las curvas no se comportan como en el plano euclídeo, lo que da lugar a propiedades interesantes de estudiar. Entre algunas curvas de interés se encuentran las rectas o geodésicas, las circunferencias, los hiperciclos y los horociclos, que construyen el núcleo fundamental de nuestro estudio.

Las rectas se pueden definir como las curvas que no se curvan, cuyo equivalente en geometría hiperbólica serían las geodésicas, que no se curvan vistas desde el propio espacio en el que trabajamos. Lo que en geomería euclídea es una recta, en geometría hiperbólica puede tomar distintas formas dependiendo del modelo que escojamos. Por ejemplo, en el semiplano de Poincaré serán rectas verticales o arcos de circunferencia, que a pesar de tener distinta forma, tendrán en común la curvatura nula.

Las circunferencias se definen como curvas que mantienen una distancia constante con un punto. Estas tienen la misma forma en el semiplano que en el plano euclídeo, con una pequeña diferencia en su curvatura. Mientras que en el plano euclídeo la curvatura de una circunferencia será mayor que cero, en geometría hiperbólica tendrá que ser mayor que uno; además, la relación entre la curvatura y el radio de una circunferencia es diferente en estas ramas de la geometría.

Los hiperciclos son las curvas que mantienen una distancia ortogonal constante con las rectas o geodésicas. En el plano euclídeo estas serían las paralelas, pero ya sabemos que estas curvas son algo diferentes en la geometría hiperbólica. En el semiplano, los hiperciclos tendrán forma de rectas o de arcos de circunferencia, cuyos extremos dependerán de la geodésica con la que mantengan una distancia constante.

Por último, los horociclos son las curvas que son ortogonales a todas las geodésicas que comparten un punto en el infinito. En el caso euclídeo, estas geodésicas son las familias de rectas paralelas, y las curvas perpendiculares a todas ellas son simplemente rectas. En el caso hiperbólico sin embargo, estas curvas tienen curvatura constante igual a uno, lo que las diferenciaría de las rectas. Además, en el semiplano de Poincaré tienen forma de circunferencias tangentes al borde y, en el caso particular de que el punto en el que sean tangentes al borde sea el punto del infinito, los horociclos también pueden tener la forma de rectas horizontales.

Como se puede intuir, en la geometría hiperbólica se complica un poco el estudio de estas curvas con propiedades tan ineteresantes. Para poder analizar esto con más detalle, será necesario introducir algunos conceptos de geometría diferencial y variedades riemannianas que se explicarán brevemente en el próximo capítulo. También veremos algunas propiedades de los modelos mencionados anteriormente, y especialmente del semiplano de Poincaré, del que estudiaremos las isometrías para hacernos una mejor idea de la estructura de este modelo. Con todo ello podremos llevar a cabo el objetivo de estudiar la curvatura de las curvas mencionadas, ya que todas ellas tienen curvatura constante. Como vamos a ver, podremos clasificar estas cuatro familias de curvas en las curvas de curvatura nula, las geodésicas; las curvas de curvatura entre 0 y 1, los hiperciclos; las de curvatura constante igual a 1, los horocilos; y las de curvatura mayor que 1, las circunferencias.

Capítulo 2

Preliminares

Para poder desarrollar la geometría hiperbólica necesitaremos unas herramientas y conceptos básicos sobre geometría de curvas, superficies y variedades que vamos a introducir en este capítulo. Estos conceptos se pueden encontrar en libros de geometría diferencial, por ejemplo en *Elements of Differential Geometry* [4].

2.1. Repaso de geometría de curvas y superficies en $\mathbb{R}^3$

Para introducir las bases de la geometría diferencial, vamos a empezar por describir las curvas, un lugar geométrico de una sola dimensión. Después podremos continuar con las superficies, lugares geométricos de dos dimensiones y un poco más complejos. Por último y tras visualizar los conceptos en una y dos dimensiones, pasaremos a generalizar lo aprendido a n dimensiones, hablando de variedades en el siguiente apartado.

Definición 2.1 *Una* parametrización regular *en* $\mathbb{R}^3$ *es una función* $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ *de clase* $\mathcal{C}^1$ *tal que* $\alpha'(t) \neq 0$ *para todo* $t \in (a, b)$.

Llamamos cambio de parámetro *a cualquier difeomorfismo* $t : (c, d) \to (a, b), s \to t(s)$ *y decimos que dos representaciones* α *y* β *paramétricas son* equivalentes *cuando existe un cambio de parámetros tal que* $\alpha(t(s)) = \beta(s)$.

La relación que acabamos de definir es de equivalencia, y llamamos a curva regular *a cada una de las clases que genera. Las propiedades de la curva serán aquellas que no dependen de la parametrización escogida.*

Definición 2.2 *La* longitud de arco *de un segmento de una curva regular* $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ *se define como*

$$\int_a^b \left| \frac{d\alpha}{dt} \right| dt.$$

Esta definición no depende de la parametrización.

Teorema 2.3 *Sea* $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ *una parametrización regular y sea* $t_0 \in (a, b)$*. Entonces la función*

$$\begin{array}{rccc} s: & (a,b) & \to & im(s) \\ & t & \mapsto & s(t) = \int_{t_0}^{t} \left|\left| \frac{d\alpha}{dx} \right|\right| dx \end{array}$$

es un cambio de parámetro y además $||\frac{d\alpha}{ds}|| = 1$.

Ahora que sabemos esto podemos dar una nueva definición.

Definición 2.4 *Una* parametrización natural *de una curva es una parametrización regular* $\alpha = \alpha(s)$ *donde* $||\alpha'(s)|| \equiv 1$.

Una vez tenemos una curva parametrizada, podemos proceder a definir los vectores tangente y de curvatura, que nos indicarán la dirección de la curva y como se curva la misma.

Definición 2.5 *Sea* $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^3$, $s \mapsto \alpha(s)$ *una curva parametrizada de modo natural y sea* $s_0 \in (a, b)$*. Decimos que el* vector tangente *de* α *en* $\alpha(s_0)$ *es* $\alpha'(s_0)$*, y lo denotamos por* $\vec{t}(s_0)$.

Decimos que el vector de curvatura *de* α *en* $\alpha(s_0)$ *es* $\alpha''(s_0) = \vec{t}(s_0)$ *y lo denotamos por* $\vec{k}(s_0)$. *El módulo de este vector es la* curvatura *de* α *en* $\alpha(s_0)$ *y lo escribimos como* $k(s_0) = ||\vec{k}(s_0)||$. *Llamamos* vector normal *de* α *en* $\alpha(s_0)$ *a* $\vec{n}(s_0) = \frac{1}{k}\vec{k}(s_0)$

Nota: el vector tangente indica la dirección de la curva pero el sentido de esta y del propio vector tangente dependerá de la parametrización.

Haciendo algo similar para una dimensión más vamos a describir las superficies.

Definición 2.6 *Sea* $\mathcal{U}$ *un abierto de* $\mathbb{R}^2$*. Llamamos* superficie simple *a una función* $x : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ *inyectiva y de clase* $\mathcal{C}^k$ *para algún* $k \geq 1$ *tal que el producto de las derivadas parciales* $\frac{\partial x}{\partial u} \times \frac{\partial x}{\partial v} \neq 0$ *en* $\mathcal{U}$.

Notación: $\quad x_1 = \frac{\partial x}{\partial u} \qquad x_2 = \frac{\partial x}{\partial v}$

Definición 2.7 *Decimos que un subconjunto* $M \subset \mathbb{R}^3$ *es una* superficie *de clase* $\mathcal{C}^k$ *si*

- *para todo punto* $P \in M$ *existe una superficie simple* $x : \mathcal{U}_{\mathcal{P}} \to M'$ *donde* $\mathcal{U}_{\mathcal{P}}$ *es un entorno de* P *y* $M' \subset M$.

- *para cada par de superficies simples* $x : \mathcal{U} \to \mathcal{U}' \subset M$ *e* $y : \mathcal{V} \to \mathcal{V}' \subset M$ *se cumple que* $y^{-1} \cdot x : (x^{-1}(\mathcal{U}' \cap \mathcal{V}')) \to (y^{-1}(\mathcal{U}' \cap \mathcal{V}'))$ *es un difeomorfismo entre abiertos de* $\mathbb{R}^2$.

Llamamos cartas *a las aplicaciones* x^{-1} *e* y^{-1} *y decimos que la aplicación* $y^{-1} \cdot x$ *es un* cambio de cartas.

Con la definición anterior de superficie, viendo una superficie $\mathcal{C}^k$ como la unión de superficies simples, podríamos preguntarnos cómo cambian las propiedades de la superficie dependiendo de la superfice simple en la que estemos trabajando. Por esto, es importante distinguir si una propiedad es local, es decir, depende de la carta de coordenadas escogida; o es intrínseca, no depende de la carta.

Vamos a empezar introduciendo la noción de *espacio tangente* donde más adelante definiremos la noción de una métrica.

Definición 2.8 *Sea $x : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ una superficie simple. Llamamos* plano tangente *de la superficie en el punto $P = x(a, b)$ al plano que pasa por P y es perpendicular a $x_1(a, b) \times x_2(a, b)$. Llamamos* vector normal *a la superficie en P a $\vec{N}(a, b) = \frac{x_1(a,b)\times x_2(a,b)}{|x_1(a,b)\times x_2(a,b)|}$.*

Definición 2.9 *Un vector $\vec{X}$ es un* vector tangente a la superficie *simple $x_{\mathcal{U}} \to \mathbb{R}^3 en P = x(a, b)$ si $\vec{X}$ es el vector tangente en P de una curva en $x(\mathcal{U})$, es decir, para algún $\epsilon > 0$ existe una curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to x(\mathcal{U})$ tal que $\alpha(0) = P$, $\frac{d\alpha}{dt}(0) = \vec{X}$ y $\alpha(t) = x(\alpha^1(t), \alpha^2(t))$ donde α^i son de clase $\mathcal{C}^1$.*

Lema 2.10 *El conjunto de los vectores tangentes a una superficie simple $x : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ en $P = x(a, b)$ es un espacio vectorial de dimensión 2 con base $\{x_1(a, b), x_2(a, b)\}$.*

Definición 2.11 *Llamamos* plano tangente *de una superficie regular M en el punto P al conjunto de los vectores tangentes a M en P y lo denotamos por T_PM.*

Ahora que tenemos una superficie M en $\mathbb{R}^3$ y un punto $P \in M$, podemos definir una métrica en el espacio tangente de la superficie en P. Sean $\vec{X}, \vec{Y}$ dos vectores tangentes a M en P, vamos a ver cómo podemos hablar del producto escalar $\langle\vec{X}, \vec{Y}\rangle$. Escribimos los vectores en función de una superfice simple $x : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ que contenga a P como $\vec{X} = X^1x_1 + X^2x_2$, $\vec{Y} = Y^1x_1Y^2x_2$ y como el producto escalar es una función bilineal,

$$\langle\vec{X}, \vec{Y}\rangle = \sum X^iY^j\langle x_i, x_j\rangle = \sum X^iY^jg_{ij}$$

e introducimos una nueva definición.

Definición 2.12 *Llamamos* coeficientes de la métrica Riemanniana *o* coeficientes del tensor métrico *a las funciones $g_{ij} = \langle x_i, x_j\rangle$ $(i, j = 1, 2)$.*

Los coeficientes g_{ij} forman una matriz regular definida positiva que denotaremos por g.

$$\langle\vec{X}, \vec{Y}\rangle = g(\vec{X}, \vec{Y}) = (X^1, X^2)\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y^1 \\ Y^2 \end{pmatrix}.$$

Definición 2.13 *Con la notación anterior, llamamos* primera forma fundamental *de la superficie M en P a la aplicación bilineal*

$$\begin{array}{rccl} g: & T_PM \times T_PM & \to & \mathbb{R} \\ & (\vec{X}, \vec{Y}) & \mapsto & \langle\vec{X}, \vec{Y}\rangle = \sum X^iY^jg_{ij} \end{array}$$

A los conceptos que se pueden medir desde la propia superficie los llamamos conceptos *intrínsecos*. Estos son los que dependen únicamente de la primera forma fundamental.

Definición 2.14 *Sea $x : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ una superficie simple y sea $\alpha(s)$ una curva parametrizada de modo regular. Llamamos* vector normal intrínseco *en $P = x(a,b) \in \alpha$ a $\vec{S} = \vec{N} \times \vec{t}$, donde $\vec{N}$ es el vector normal a la superficie en P y $\vec{t}$ es el vector tangente de α en P.*

Sea $x : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ una superficie simple y sea $\alpha(s)$ una curva parametrizada de modo regular. El vector tangente a la curva $\vec{t}$ y el vector normal a la superficie que la contiene $\vec{N}$ son perpendiculares ya que el vector normal es perpendicular al plano tangente. El vector normal intrínseco $\vec{S}$ que acabamos de definir es perpendicular a los dos anteriores. Con estos tres vectores tenemos una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. Además, el vector de curvatura $\vec{k}$ es perpendicular al vector tangente $\vec{t}$ y por lo tanto está contenido en el plano que definen $\vec{S}$ y $\vec{N}$. Es por esto por lo que podemos descomponer el vector de curvatura como

$$\vec{k}(s) = k(s)\vec{n}(s) = k_n(s)\vec{N}(s) + k_g(s)\vec{S}(s)$$

Definición 2.15 *La* curvatura normal *de una curva α parametrizada de modo natural es la componente normal de $\alpha''(s) = \vec{k}(s)$ que denotamos por k_n en la descomposición que acabamos de ver. La* curvatura geodésica *es la componente de $\alpha''(s)$ en la dirección de $\vec{S}$, k_g.*

Como vemos, las curvaturas normal y geodésica están relacionadas con las componentes de la dirección del vector de curvatura. La curvatura geodésica, al estar realcionada con $\vec{S}$ que se encuentra en el plano tangente a la superficie, mide cómo se curva la curva vista desde la superficie. La curvatura normal, al estar relacionada con el vector normal a la superficie, depende de cómo se curva la propia superficie.

Es interesante preguntarse cómo sería una curva que vista desde la propia superficie parezca una "recta". Esta pregunta motiva la siguiente definición.

Definición 2.16 *Llamamos geodésica a una curva cuya curvatura geodésica se anula en todos sus puntos, $k_g \equiv 0$.*

Definición 2.17 *Sea $x : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ una superficie simple. Los* coeficientes de la segunda forma fundamental de la superficie *son las funciones $L_{ij} = \langle x_{ij}, \vec{N} \rangle$ definidas en $\mathcal{U}$. A partir de estos coeficientes definimos la* segunda forma fundamental *como la aplicación bilineal y simétrica*

$$\begin{array}{llll} L: & T_PM \times T_PM & \to \mathbb{R} & \\ & (X,Y) & & L(X,Y) = \sum Lij X^i Y^j \end{array}$$

donde $X = X^1 x_i + X^2 x_2$, $Y = Y^1 x_i + Y^2 x_2 \in T_PM$. También lo podemos escribir de forma matricial como

$$L(X,Y) = (X^1, X^2) \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y^1 \\ Y^2 \end{pmatrix}.$$

Definición 2.18 *Los* símbolos de Christoffel *son las funciones* Γ_{ij}^k $1 \leq i, j, k \leq 2$ *definidas en* $\mathcal{U}$ *por* $\Gamma_{ij}^k = \sum_{l=1}^2 \langle x_{ij}, x_l \rangle g^{lk}$ *donde* g^{lk} *son los coeficientes de la matriz inversa de la primera forma fundamental* g.

Proposición 2.19 *Sea* $z : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ *una superficie simple. Entonces la* ***fórmula de Gauss*** *dice lo siguiente:*

$$x_{ij} = L_{ij}\vec{N} + \sum_k \Gamma_{ij}^k x_k$$

Proposición 2.20 *Sea* $z : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ *una superficie simple con coeficientes de la métrica Riemanniana* g_{ij}. *Entonces*

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{2} g^{km} \left(\frac{\partial g_{mi}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{mj}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m} \right)$$

Proposición 2.21 *Sea* $\gamma(s)$ *una curva parametrizada de modo natural una superficie simple* $x : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(s) = x(\gamma_1(s), \gamma_2(s)$. γ *es una geodésica si y sólo si*

$$\gamma_k'' + \sum_{i,j=1}^{2} \Gamma_{ij}^k \gamma_i' \gamma_j' = 0 \quad \textit{para } k = 1, 2$$

Definición 2.22 *Sea* M *una duperficie regular y sea* P. *La* aplicación de Weingarten $\mathcal{L}$: $T_P M \to T_P M$ *viene dada por* $\mathcal{X} = -g^{-1}L(X) = -X \times \vec{N}$

Definición 2.23 *La* curvatura de Gauss K *es el determinante de* $\mathcal{L}$.

$$K = det\mathcal{L} = \frac{detL}{detg}$$

Definición 2.24 *Llamamos* símbolos de Christoffel de segunda especie *a* R_{ijk}^l *donde*

$$R_{ijk}^l = \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial u^j} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial u^k} + \sum \left(\Gamma_{ik}^p \Gamma_{pj}^l - \Gamma_{ij}^p \Gamma_{pk}^l \right)$$

Teorema 2.25 ***Teorema Egregio de Gauss***

La curvatura de Gauss de una superficie es intrínseca y se puede escribir como

$$K = \frac{\sum_{l=1}^2 R_{121}^l g_{l2}}{det(g)}$$

2.2. Variedades riemannianas

Ahora, vamos a introducir el concepto de variedades que pretende generalizar las superficies. Esto nos da una visión más abstracta del espacio al que vamos a dotar de estructura geométrica para poder ver los conceptos del apartado anterior. Para ello será necesario definir una métrica que usaremos para definir algunos conceptos intrínsecos, como hemos hecho hasta ahora con la primera forma fundamental.

Definición 2.26 *Sea M un conjunto. Una* carta *es una aplicación inyectiva $x : U \subset M \to \mathbb{R}^n$ tal que $X(U) = V$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $x^{-1} : V \to U$ es una aplicación continua.*

Definición 2.27 *Un* atlas *sobre M es un conjunto de cartas cuyos dominios cubren todo M. Es decir, para cada $p \in M$ hay una carta del atlas $x : U \to \mathbb{R}^n$ tal que $p \in U$. Se dice que un atlas es $\mathcal{C}^k$ cuando los cambios de cartas son difeomorfismos de clase $\mathcal{C}^k$. Esto es lo mismo que decir que para cada par de cartas $x : U \subset M \to \mathbb{R}^n$, $\bar{x} : \bar{U} \subset M \to \mathbb{R}^n$ la aplicación*

$$x \cdot \bar{x}^{-1} : \bar{x}(U \cap \bar{U}) \to x(U \cap \bar{U})$$

es un difeomorfismo de clase $\mathcal{C}^k$ entre abiertos de $\mathbb{R}^n$.

Definición 2.28 *Una* variedad *es un conjunto M dotado de un atlas de forma que los cambios de cartas. Decimos que la variedad es de* dimensión *n cuando las cartas toman valores en $\mathbb{R}^n$.*

Hemos visto en el apartado anterior que definir un vector tangente es de gran utilidad a la hora de analizar las curvas de una superficie. Para definir los vectores tangentes hemos utilizado las propiedades de $\mathbb{R}^3$, el espacio ambiente de las superficies en el que sabemos derivar. Sin embargo, en el caso de las variedades no conocemos el espacio ambiente, por lo que necesitamos introducir la noción de diferenciabilidad. Aquí veremos la utilidad del atlas de las variedades.

Definición 2.29 *Sea M una variedad y sea $p \in M$. Decimos que una función $f : M \to \mathbb{R}$ es* diferenciable *de clase $\mathcal{C}^k$ ($k \leq \infty$) en p si existe una carta en un entorno U de p, $x : U \to \mathbb{R}^n$ tal que*

$$f \circ x^{-1} : x(U) \to \mathbb{R}$$

es diferenciable de clase $\mathcal{C}^k$ en $x(p) \in \mathbb{R}^n$.

Vemos que esta definición no depende de la elección de la carta ya que en caso de tener otra carta $\bar{x} : \bar{U} \to \mathbb{R}^n$, donde $\bar{U}$ es también entorno de p, entonces $f \circ \bar{x}^{-1} = (f \circ x^{-1}) \circ (x \circ \bar{x}^{-1})$ también es de clase $\mathcal{C}^k$.

El conjunto de funciones diferenciables de la variedad lo denotamos $\mathfrak{F}(M) = \{f : M \to \mathbb{R}$ tal que f es de clase $\mathcal{C}^k\}$.

Definición 2.30 *Un* vector tangente *a una variedad M en $p \in M$ es una función $X_p : \mathfrak{F} \to \mathbb{R}$ cuyo valor en f escribimos como $X_p(f)$ y de forma que para todo $f, g \in \mathfrak{F}(M)$ y para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ se cumple que*

- $X_p(f+g) = X_p(f) + X_p(g)$
- $X_p(\alpha f) = \alpha X_p(f)$
- $X_p(fg) = f(p)X_p(g) + g(p)X_p(f)$.

Podemos ver $X_p(f)$ como la derivada direccional de f en la dirección de X_p en el punto p.

Definición 2.31 *El* espacio tangente *de M en p es el conjunto de todos los vectores tangentes a M en p y lo denotamos por T_pM.*

Proposición 2.32 *T_pM es un espacio vectorial.*

Definición 2.33 *Sea $x : U \to \mathbb{R}^n$ una carta definida en un entorno U de $p \in M$ y sean $u^1, u^2, ..., u^n$ las coordenadas de la carta en $\mathbb{R}^n$. Definimos $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$ como el vector tangente en coordenadas locales que viene dado por*

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p (f) = \frac{\partial(f \circ x^{-1})}{\partial u^i}(x(p)).$$

Definición 2.34 *Con la notación anterior, llamamamos* funciones de coordenadas locales *respecto de la carta c a las funciones $x^i : U \to \mathbb{R}$ dadas por $x^i(p) = u^i(x(p))$.*

Vemos que es posible calcular los vectores tangentes en coordenadas locales de las funciones de coordenadas, y cuando lo hacemos vemos que queda

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p (x^i) = \delta_i^j \qquad \text{para todo } 1 \leq i, j \leq n.$$

Proposición 2.35 *Los vectores tangentes en coordenadas locales forman una base del espacio tangente T_pM, $\mathcal{B} = \{(\partial/\partial x^i)_p : 1 \leq i \leq n\}$.*

Definición 2.36 *Decimos que un* campo *X es una asignación de un vector tangetnte $X_p \in T_pM$ a cada punto $p \in M$. Dados un campo X y una función $f \in \mathfrak{F}(M)$, podemos definir una función Xf en M que viene dada por $(Xf)(p) = X_p(f)$. Si $Xf \in \mathfrak{F}(M)$ para todo $f \in \mathfrak{F}(M)$, entonces llamamos a X un* campo vectorial*. Denotamos el conjunto de campos vectoriales sobre M como $\mathfrak{X}(M)$.*

Podemos escribir un campo vectorial X en coordenadas locales como

$$X_p = \sum X^i(p) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p.$$

Sea α una curva en una variedad diferenciable M. Un ejemplo de campo vectorial es el *campo vectorial tangente a una curva α* que podemos definir en coordenadas locales como

$$T_\alpha = \sum_i \frac{di}{dt}(t) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\alpha(t)}. \tag{2.1}$$

Ahora vamos a definir una opercaión entre campos vectoriales.

Definición 2.37 *Sean X, Y dos campos en $\mathfrak{X}(M)$. Definimos el* corchete de Lie *entre dos campos como*

$$[X,Y] = X(Y(f)) - Y(X(f)) \qquad \forall f \in \mathfrak{F}(M)$$

Definición 2.38 *Sea M una variedad diferenciable, sea $\mathfrak{F}(M)$ el conjunto de funciones diferenciabels sobre M y sea $\mathfrak{X}(M)$ el conjunto de campos vectoriales sobre M. Llamamos* campo tensorial *de tipo (0,s) a toda aplicación $\mathfrak{F}(M)$-lineal*

$$T^0_s : \mathfrak{X}(M) \times \overset{s}{\cdots} \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{F}(M)$$

Definición 2.39 *Sea M una variedad diferenciable. Llamamos* métrica riemanniana *g a un campo tensorial del tipo (0,2) simétrico y definido positivo. En ese caso, llamamos a (M,g)* variedad riemanniana.

Un ejemplo de métrica riemanniana que ya conocemos es la primera forma fundamental de una superficie inmersa en $\mathbb{R}^3$.

Proposición 2.40 *Dos métricas riemannianas g y $\bar{g}$ en una variedad diferenciable M se dicen conformes siexiste una finción $f : M \to \mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} : r < 0\}$ de modo que $\bar{g} = fg$.*

Anteriormente hemos introducido el concepto de derivada direccional como generalización de las derivadas en una variedad. Ahora, buscamos generalizar la derivada del producto con una regla similar a la que ya conocemos. Para ello, introducimos el concepto de conexión lineal. Además, podremos utilizar esto para definir los símbolos de Christoffel de una variedad.

Definición 2.41 *Una conexión lineal $\nabla_X Y$ en una variedad M es una función*

$$\begin{array}{rccc} \nabla : & \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) & \to & \mathfrak{X}(M) \\ & (X,Y) & \to & \nabla_X Y \end{array}$$

tal que dados unos campos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ y dada $f \in \mathfrak{F}(M)$ se cumple que

- $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$ *y para $r \in \mathbb{R}$ se cumple también $\nabla_X rY = r\nabla_X Y$*
- $\nabla_{X+Y} \nabla_X Z + \nabla_Y Z$
- $\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$
- $\nabla_X fY = X(f)Y + f\nabla_X Y.$

Definición 2.42 *Sea ∇ una conexión en una variedad M y sea $x : \mathcal{U} \to M$ una carta. Llamamos* símbolos de Christoffel *de la conexión con respecto a la carta x a las funciones $\Gamma^k_{ij} \in \mathfrak{F}(\mathcal{U})$ defididas por*

$$\nabla_{\partial/\partial x^i}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \sum_k \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k} \tag{2.2}$$

Definición 2.43 *Sea* ∇ *una conexión lineal en la variedad riemanniana (M,g).Decimos que* ∇ *es una* conexión métrica *si para todo* $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ *se cumple*

$$Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).$$

Definición 2.44 *Llamamos* tensor de torsión *al operador*

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) & \rightarrow & \mathfrak{X}(M) \\ & (X,Y) & \rightarrow & T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \end{array}$$

Definición 2.45 *Decimos que una conexión* ∇ *es* simétrica *o* libre de torsión *si*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y] \quad \textit{para todo } X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$

esto es lo mismo que decir que se anula el tensor de torsión.

Lema 2.46 ∇ *es una conexión libre de torsión si y sólo si para todas las cartas tenemos* $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k \;\; \forall 1 \leq i, j, k \leq n$ *(donde n es la dimensión de la variedad).*

Teorema 2.47 (Lema fundamental de la geometría riemanniana) *Sea M una variedad riemanniana con una métrica riemanniana g. Entonces existe una única conexión métrica simétrica* ∇ *en M.*

Definición 2.48 *A la conexión definida en el teorema anterior la llamamos* conexión de Levi-Civita.

Definición 2.49 *Sea* $\alpha : [a,b] \rightarrow M$ *una curva en una variedad diferenciable M dotada de una métrica riemanniana g. Definimos la* longitud de la curva α *como*

$$|\alpha| = \int_a^b \sqrt{g_{\alpha(t)}\left(T_{\alpha(t)}, T_{\alpha(t)}\right)} dt.$$

Decimos que α *está* parametrizada de modo natural *cuando* $g_{\alpha(t)}\left(T_{\alpha(t)}, T_{\alpha(t)}\right) = 1$ *o lo que es equivalente, cuando* $|\alpha| = 1$.

Utilizando la longitud de arco que acabamos de definir, podemos introducir la noción de distancia entre dos puntos de una variedad.

Definición 2.50 *Sean* $p, q \in M$ *la distancia entre los puntos es* $d(p,q) = inf|\alpha|$, *donde tomamos el ínfimo sobre todas las curvas* α $\mathcal{C}^\infty$ *que unen los puntos* p *y* q.

Proposición 2.51 *Una variedad M dotada de la distancia que hemos definido forma un espacio métrico.*

Definición 2.52 *Decimos que una curva* α *en una variedad M es* geodésica *(con respecto a una conexión* ∇*) si* $\nabla_{T_\alpha} T_\alpha = 0$, *donde* T_α *es el campo descrito en (2.1).*

Definición 2.53 *Sea α una curva parametrizada de modo natural en una variedad diferenciable M. Decimos que su curvatura es $\nabla_{T_\alpha} T_\alpha$.*

Definición 2.54 *Decimos que una variedad riemanniana es* geodésicamente completa *si toda geodésica de la variedad se puede definir en todo $\mathbb{R}$.*

Teorema 2.55 (Hopf-Rinow) *Si una variedad riemanniana (M,g) es geodésicamente completa, entonces dos puntos cualesquiera de M se pueden unir por una geodésica que minimiza la distancia entre los puntos y además (M,g) es un espacio métrico completo.*

Capítulo 3

El plano hiperbólico

En este capítulo veremos las principales propiedades geométricas del plano hiperbólico considerado como superficie dotada de una métrica riemanniana. En particular calcularemos su curvatura de Gauss y sus geodésicas. Veremos también distintas formas de representarlo, y a pesar de que cualquiera de ellas se puede usar como base para estudiar las propiedades de este espacio, nos centraremos principalmente en el semiplano de Poincaré, mencionando brevemente los otros modelos más conocidos.

3.1. El semiplano de Poincaré

3.1.1. Definición y primeras propiedades

Definición 3.1 *Se llama* plano hiperbólico *a la variedad riemanniana* $(\mathbb{H}^2, g)$ *siendo*

$$\mathbb{H}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} \quad ; \quad g = \frac{1}{y^2}\, dx \otimes dx + \frac{1}{y^2}\, dy \otimes dy$$

La métrica, que se llama *métrica hiperbólica*, se puede expresar matricialmente como

$$g = \begin{pmatrix} 1/y^2 & 0 \\ 0 & 1/y^2 \end{pmatrix}$$

3.1.2. Propiedades métricas

Los ángulos en el semiplano de Poincaré coinicden con los ángulos euclídeos que conocemos hasta ahora.

Proposición 3.2 *El modelo del seiplano de Poincaré y el plano euclideo son conformes, es decir, los ángulos euclídeos coinciden con los hiperbólicos en este modelo.*

Demostración. Aplicamos la proposición 2.40 a la métrica del semiplano de Poincaré $g = \frac{1}{y^2} dx \otimes dx + \frac{1}{y^2} dy \otimes dy$ y a la métrica eucídea $\bar{g} = dx \otimes dx + dy \otimes dy$ restringida a $\mathbb{H}^2$. Vemos que para la función positiva $f : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{R}^+$ tal que $f(x,y) = y^2$ se cumple que $\bar{g} = fg$, con lo que se demuestra que ambas métricas son conformes.

3.1.3. Curvatura del plano hiperbólico

Para calcular la curvatura de Gauss, dado que esta es intrínseca, basta con la primera forma fundamental de la superficie. Para calcularla vamos a usar la siguiente fórmula que proviene del Teorema Egregio de Gauss

$$K = \frac{\sum_{l=1}^{2} R^l_{121} g_{l2}}{det(g)} \tag{3.1}$$

donde R^l_{121} son los símbolos de Christoffel de segunda especie.

Recordamos que

$$R^l_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial u^j} - \frac{\partial \Gamma^l_{ij}}{\partial u^k} + \sum \left(\Gamma^p_{ik}\Gamma^l_{pj} - \Gamma^p_{ij}\Gamma^l_{pk} \right)$$

por lo que vamos a empezar calculando los símbolos de Christoffel Γ^k_{ij}. Para ello utilizaremos su definición, ya que conocemos g y es fácil calcular g^{-1}.

$$g = \begin{pmatrix} 1/y^2 & 0 \\ 0 & 1/y^2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad g^{-1} = \begin{pmatrix} y^2 & 0 \\ 0 & y^2 \end{pmatrix}$$

A partir de esto obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{11} &= \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{2} g^{1m}\left(\frac{\partial g_{m1}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{m1}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^m}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[y^2\left(\frac{\partial(1/y^2)}{\partial x} + \frac{\partial(1/y^2)}{\partial x} - \frac{\partial(1/y^2)}{\partial x}\right) + 0\left(\frac{\partial 0}{\partial x} + \frac{\partial 0}{\partial x} - \frac{\partial(1/y^2)}{\partial y}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[y^2(0+0-0) + 0(\cdots)\right] = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{12} &= \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{2} g^{1m}\left(\frac{\partial g_{m1}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{m2}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial u^m}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[y^2\left(\frac{\partial(1/y^2)}{\partial y} + \frac{\partial 0}{\partial x} - \frac{\partial 0}{\partial x}\right) + 0\left(\frac{\partial 0}{\partial y} + \frac{\partial(1/y^2)}{\partial x} - \frac{\partial 0}{\partial y}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[y^2(-\frac{2}{y^3} + 0 - 0) + 0(\cdots)\right] = -\frac{1}{y}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^2_{11} &= \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{2} g^{2m}\left(\frac{\partial g_{m1}}{\partial u^1}+\frac{\partial g_{m1}}{\partial u^1}-\frac{\partial g_{11}}{\partial u^m}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left[0\left(\frac{\partial(1/y^2)}{\partial x}+\frac{\partial(1/y^2)}{\partial x}-\frac{\partial(1/y^2)}{\partial x}\right)+y^2\left(\frac{\partial 0}{\partial x}+\frac{\partial 0}{\partial x}-\frac{\partial(1/y^2)}{\partial y}\right)\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[0(\cdots)+y^2(0+0-(-\frac{2}{y^3}))\right]=\frac{1}{y}
\end{aligned}
$$

Los demás símbolos de Christoffel se obtienen de forma similar.

$$
\begin{gathered}
\Gamma^1_{11}=\Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}=\Gamma^1_{22}=0\\
\Gamma^1_{12}=\Gamma^1_{21}=\Gamma^2_{22}=-\frac{1}{y}\\
\Gamma^2_{11}=\frac{1}{y}
\end{gathered}
$$

Con los símbolos de Christoffel de la variedad podemos calcular R^l_{121} para $l=1,2$ simplemente usando la definición de los símbolos de Christoffel de segunda especie, y tenemos que $R^1_{121}=0$ y $R^2_{121}=-\frac{1}{y^2}$.

$$
\begin{aligned}
R^1_{121} &= \frac{\partial\Gamma^1_{11}}{\partial y}-\frac{\partial\Gamma^1_{12}}{\partial x}+\sum\left(\Gamma^p_{11}\Gamma^1_{p2}-\Gamma^p_{12}\Gamma^1_{p1}\right)\\
&=\frac{\partial 0}{\partial y}-\frac{\partial(-1/y)}{\partial x}+\left[\left(0\cdot(-\frac{1}{y})-(-\frac{1}{y})\cdot 0\right)+\left(\frac{1}{y}\cdot 0-0\cdot(-\frac{1}{y})\right)\right]\\
&=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R^2_{121} &= \frac{\partial\Gamma^2_{11}}{\partial y}-\frac{\partial\Gamma^2_{12}}{\partial x}+\sum\left(\Gamma^p_{11}\Gamma^2_{p2}-\Gamma^p_{12}\Gamma^2_{p1}\right)\\
&=\frac{\partial(1/y)}{\partial y}-\frac{\partial 0}{\partial x}+\left[\left(0\cdot 0-(-\frac{1}{y})\cdot\frac{1}{y}\right)+\left(\frac{1}{y}\cdot(-\frac{1}{y})-0\cdot 0\right)\right]\\
&=-\frac{1}{y^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{1}{y^2}=-\frac{1}{y^2}
\end{aligned}
$$

Por último calculamos la curvatura.

$$
K=\frac{R^1_{121}g_{12}+R^2_{121}g_{22}}{det(g)}=\frac{0\cdot 0+\left(-\frac{1}{y^2}\right)\cdot\frac{1}{y^2}}{\frac{1}{y^4}}=\frac{-\frac{1}{y^4}}{\frac{1}{y^4}}=-1
$$

Con lo que queda demostrado que la variedad descrita tiene curvatura constante $K=-1$.

3.1.4. Geodésicas en el semiplano de Poincaré

Para profundizar en el estudio de este modelo, vamos a ver qué aspecto tienen las geodésicas en él. Sabemos que para encontrar las geodésicas $\alpha(t) = (\alpha^1(t), \alpha^2(t))$ tenemos que resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{d^2\alpha^k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{2} \Gamma_{ij}^k \frac{d\alpha^i}{dt}\frac{d\alpha^j}{dt} = 0 \qquad para \;\; k = 1, 2$$

Insertando en estas ecuaciones los símbolos de Christoffel calculados en el apartado anterior, obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\alpha^1}{dt^2} + \left(0 - \frac{1}{\alpha^2(t)}\frac{d\alpha^1}{dt}\frac{d\alpha^2}{dt} - \frac{1}{\alpha^2(t)}\frac{d\alpha^2}{dt}\frac{d\alpha^1}{dt} + 0\right) = 0 \\
\frac{d^2\alpha^1}{dt^2} + \left(\frac{1}{\alpha^2(t)}\frac{d\alpha^1}{dt}\frac{d\alpha^1}{dt} + 0 + 0 - \frac{1}{\alpha^2(t)}\frac{d\alpha^2}{dt}\frac{d\alpha^2}{dt}\right) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\alpha^1}{dt^2} - \frac{2}{\alpha^2(t)}\frac{d\alpha^1}{dt}\frac{d\alpha^2}{dt} = 0 \\
\frac{d^2\alpha^1}{dt^2} + \frac{1}{\alpha^2(t)}\left(\frac{d\alpha^1}{dt}\right)^2 - \frac{1}{\alpha^2(t)}\left(\frac{d\alpha^2}{dt}\right)^2 = 0
\end{aligned}$$

Las soluciones del sistema pueden ser de dos formas

(a)

$$\begin{aligned}
\alpha^1(t) &= a + b\, tanh(rt) \\
\alpha^2(t) &= b\, sech(rt)
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\alpha^1(t) &= c \\
\alpha^2(t) &= de^{pt}
\end{aligned}$$

Las geodésicas de la primera forma, (a), son semicircunferencias (euclídeas) en el semiplano superior que están centradas en el eje x, con centro $(a, 0)$ y radio $|b|$. Como esto no es evidente, veamos que se cumple

$$(\alpha^1(t) - a)^2 + (\alpha^2(t))^2 = b^2.$$

Tenemos la identidad de trigonometría hiperbólica $cosh^2(x) - sinh^2(x) = 1$ dividiendo esto entre $cos^2(x)$ podemos obtener una nueva identidad trigonométrica: $1 = sech^2(x) + tanh^2(x)$. Ahora aplicamos esto en la fórmula anterior que tratamos de demostrar.

$$(a + b\, tanh(rt) - a)^2 + (b\, sech(rt))^2 = b^2(tanh^2(rt) + sech^2(rt)) = b^2$$

Las geodésicas de la segunda forma, (b), cumplen una ecuación del tipo $x = c$. Además, el valor de y es siempre positivo por lo que este tipo de geodésicas son (semi)rectas perpendiculares al eje x.

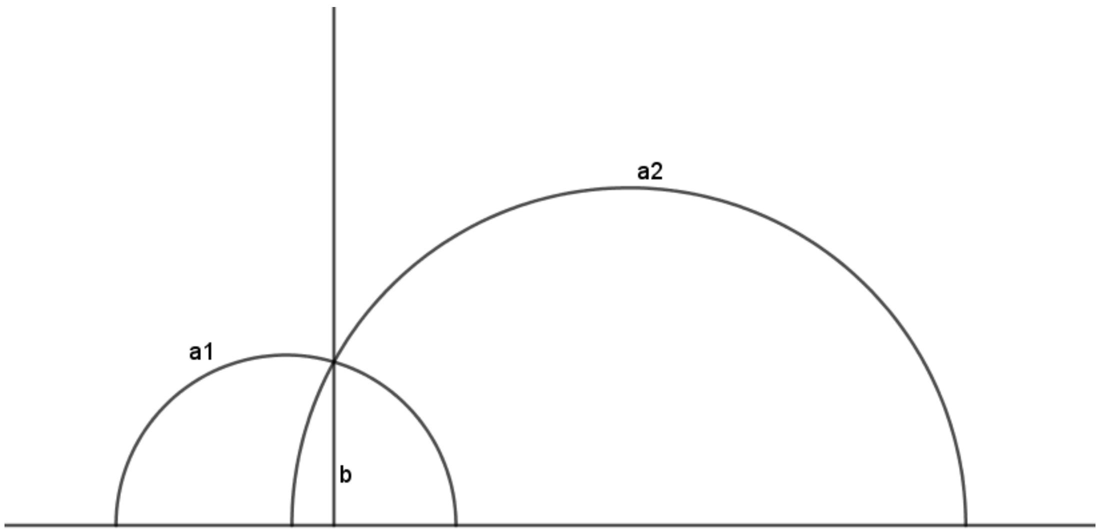

Figura 3.1: Las geodésicas en el semiplano de Poincaré

Las geodésicas que hemos descrito están definidas en todo $\mathbb{R}$, es decir, el semiplano de Poincaré es geodésicamente completo. Por lo tanto, podemos aplicar el Teorema de Hopf-Rinow y decir que el semiplano de Poincaré $(\mathbb{H}^2, g)$ es un espacio métrico completo.

3.2. El disco de Poincaré

Definición 3.3 *Se llama* disco de Poincaré *a la variedad Riemanniana* (D_P, g)*, siendo*

$$D_P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \quad ; \quad g = \frac{dx \otimes dx + dy \otimes dy}{1 - \frac{x^2+y^2}{4}}$$

$$g = \begin{pmatrix} 1 - \frac{x^2+y^2}{4} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{x^2+y^2}{4} \end{pmatrix}$$

En el disco de Poincaré las geodésicas tienen forma de arcos de circunferencia ortogonales al borde de la variedad o de rectas que pasan por el centro del disco. Adenás, en este modelo los ángulos entre geodésicas se corresponden con los ángulos euclideos.

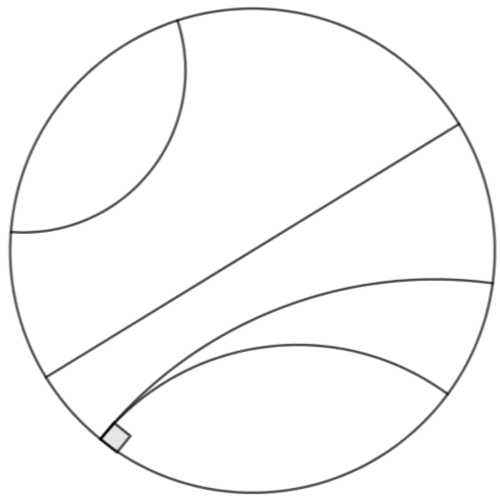

Figura 3.2: Las geodésicas en el disco de Poincaré

3.3. El disco de Klein-Beltrami

Definición 3.4 *Lamamos* disco de Klein-Beltrami *a la variedad* (D_{KB}, g), *donde* D_B *y* g *se definen como*

$$D_{KB} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\};$$

$$g = \frac{(1 - y^2)\, dx \otimes dx + 2xy\, dx \otimes dy + (1 - x^2)\, dy \otimes dy}{(1 - x^2 - y^2)^2}$$

También podemos escribir g *de forma matricial como*

$$g = \frac{1}{(1 - x^2 - y^2)^2} \begin{pmatrix} 1 - y^2 & xy \\ xy & 1 - x^2 \end{pmatrix}$$

Este modelo tiene la ventaja de que las geodésicas son las rectas, igual que ocurre en geometría euclídea. Sin embargo, los ángulos entre curvas son más complicados de medir ya que no coinciden con los ángulos euclídeos y la medida del ángulo depende del vértice del mismo.

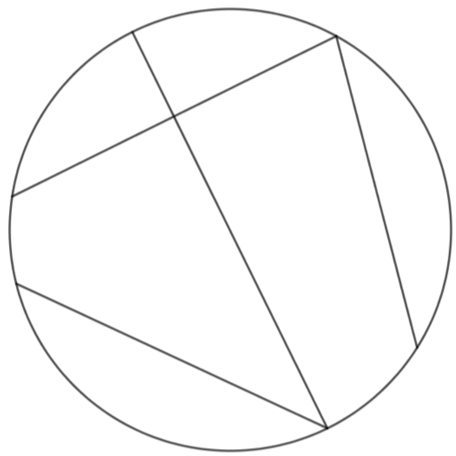

Figura 3.3: Las geodésicas en el disco de Klein-Beltrami

3.4. El modelo del hiperboloide

Definición 3.5 *El* modelo del hiperboloide *o* modelo de Minkowski *es la variedad* (H_M, g)

$$H_M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = -1, z > 0\} \quad ; \quad g = dx \otimes dx + dy \otimes dy - dz \otimes dz$$

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La métrica g en este caso no es una métrica riemanniana para todo $\mathbb{R}^3$, sino que es pseudoriemanniana, siendo métrica riemanniana unicamente al restringirla a la variedad.

Capítulo 4

Isometrías en el plano hiperbólico

En este capítulo vamos a analizar como son las transformaciones del plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$ en sí mismo. Vamos a trabajar con números comlejos e introducir un grupo de aplicaciones llamadas transformaciones de Möbius que luego utilizaremos para clasificar las isometrías del semiplano de Poincaré. Esto nos dará algunas pistas sobre como se comporta el plano hiperbólico. Para estudiar las isometrías seguiremos las notas de un curso en geometría hiperbólica de la Universidad de Manchester [2], profundizando en algunos ejercicios propuestos y notas interesantes que aparecen en estas. El estudio de las isometrías nos permitirá ver cómo podemos relacionar las rectas y las circunferencias en el semiplano, herramienta que será de gran utilidad en el capítulo siguiente. Con ellas, podremos simplificar el cálculo de la curvatura de las curvas con forma de arcos de circunferencia, ya que podremos transformarlas isométricamente en rectas. Es decir, podremos formalizar la noción de que las rectas en este espacio son circunferencias con un punto en el infinito.

Comenzamos por ver que podemos cambiar la forma en que representamos el semiplano de Poincaré. Recordamos que en el capítulo anterior lo describimos como $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$, por lo tanto, si denotamos un número complejo por $z = x + iy$, podemos describir el semiplano de Poincaré como $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}$.

Con esta descripción del semiplano, definimos el borde de la variedad como $\partial\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) = 0\} \cup \{\infty\}$, que también se conoce como círculo en el infinito(circle at infinity en inglés). Esto se debe a que es topológicamente equivalente a una circunferencia. Para comprobar esto basta ver que la proyección estereográfica π es un homeomorfismo que transforma $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

$$
\begin{array}{rccl}
\pi : & \mathbb{S}^1 & \rightarrow & \mathbb{R} \cup \{\infty\} \\
 & z & \rightarrow & \left\{ \begin{array}{ll} \text{la intersección entre la recta que une i con z y la recta real} & \text{si } z \in \mathbb{S}^1 - \{i\} \\ \infty & \text{cuando } z = i \end{array} \right.
\end{array}
$$

Ahora que tenemos esta nueva forma de describir el espacio en el que estamos trabajando, si queremos hablar de isometrías vamos a tener que definir lo que son.

Definición 4.1 *Una* isometría *entre las variedades diferenciables M y N es una aplicación $f : M \to N$ biyectiva que conserva las distancias entre los puntos.*

Definición 4.2 *La* distancia *entre dos puntos del plano hiperbólico se define tomando el ínfimo de las longitudes de las curvas que unen dichos puntos.*

Sabemos que las geodésicas no se curvan, y localmente, hacen la función de líneas rectas ya que minimizan las distancias. Esto no es cierto globalmente, pero sabemos que si existe la línea más corta entre dos puntos, entonces es una geodésica. En el caso del semiplano de Poincaré, dados dos puntos existe una única geodésica que los une y además es esta la que minimiza la distancia entre ellos (como se explica en los capítulos 4 y 5 de “Hyperbolic Geometry”[2]).

4.1. Transformaciones de Möbius

Definición 4.3 *Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tal que $ad - bc > 0$. Una* transformación de Möbius *es una aplicación $\gamma : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$ de la forma*

$$\gamma(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Veamos que estas transformaciones están bien definidas, es decir, que $\gamma(z) \in \mathbb{H}^2$. Para ello basta comprobar que la parte imaginaria de $\gamma(z)$ es mayor que 0.

$$\gamma(z) = \gamma(x + yi) = \frac{a(x + yi) + b}{c(x + yi) + d} = \frac{(ax + b + ayi)(cx + d - cyi)}{(cx + d + cyi)(cx + d - cyi)} =$$

$$= \frac{acx^2 + bcx + \boldsymbol{ayicx} + axd + bd + \boldsymbol{ayid} - \boldsymbol{acxyi} - \boldsymbol{bcyi} + ay^2c}{|cz + d|^2}$$

Por lo tanto vemos que la parte imaginaria es la siguiente

$$Im(\gamma(z)) = \frac{aycx + ayd - acxy - bcy}{|cz + d|^2} = \frac{ayd - bcy}{|cz + d|^2} = \frac{(ad - bc)y}{|cz + d|^2} \tag{4.1}$$

y podemos determinar su signo fácilmente, ya que sabemos que $ad - bc > 0$ por definición, $y > 0$ porque $z = x + yi \in \mathbb{H}^2$ y claramente $|cz + d|^2 > 0$ también. Con lo que concluimos que $Im(\gamma(z)) > 0$ y que las transformaciones de Möbius están bien definidas.

Proposición 4.4 *Las transformaciones de Möbius forman un grupo con la composición de aplicaciones. Denotaremos este grupo por $M\ddot{o}b(\mathbb{H}^2)$.*

1. La composición de dos transformaciones de Möbius es una transformación de Möbius. Sean γ_1 y γ_2 trnsformaciones de Möbius tales que

$$\gamma_1(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} \qquad \gamma_2(z) = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}$$

con $a_1d_1 - b_1c_1 > 0$ y $a_2d_2 - b_2c_2 > 0$. Vemos que la composición es

$$\gamma_1(\gamma_2(z)) = \frac{a_1\frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2} + b_1}{c_1\frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2} + d_1} = \frac{a_1a_2z + a_1b_2 + b_1c_2z + b_1d_1}{c_1a_2z + c_1b_2 + d_1c_2z + d_1d_2} = \frac{(a_1a_2 + b_1c_2)z + (a_1b_2 + b_1d_1)}{(c_1a_2 + d_1c_2)z + (b_2c_1 + d_1d_2)}.$$

Solo quedaría ver que $(a_1a_2 + b_1c_2)(b_2c_1 + d_1d_2) - (a_1b_2 + b_1d_1)(c_1a_2 + d_1c_2) > 0$ que se cumple ya que esto es lo mismo que decir que $(a_1d_1 - b_1c_1)(a_2d_2 - b_2c_2) > 0$.

2. La composición es asociativa. Sean $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ trnsformaciones de Möbius, entonces

$$(\gamma_1 \circ \gamma_2) \circ \gamma_3 = \gamma_1 \circ (\gamma_2 \circ \gamma_3)$$

3. La identidad es el elemento neutro del grupo. Podemos escribir la identidad $\gamma(z) = z$ como una transformación con $a = d = 1$ y $b = c = 0$ y cumple $ad - bc = 1 > 0$.

4. Existe la aplicación inversa $\gamma^{-1}(z)$, veamos cómo es. Sea γ un transformación de Möbius $\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, vamos a ver que es fácil despejar z de la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} \tfrac{az+b}{cz+d} &= w \\ az + b &= czw + dw \\ az - cwz &= dw - b \\ z &= \tfrac{dw-b}{a-cw} \end{aligned}$$

a partir de ello podemos definir la inversa como $\gamma^{-1}(w) = \frac{dw-b}{-cw+a}$. Además es fácil ver que cumple la condición $da - (-c)(-b) = ad - bc > 0$ por lo que también es una transformación de Möbius.

Proposición 4.5 *Las transformaciones de Möbius son isometrías del plano hiperbólico* $\mathbb{H}^2$

Para demostrar esta proposición vamos a ver que la longitud de un camino se preserva al aplicar una transformación de Möbius. Para ello vamos a ver cómo podemos calcular la longitud de un camino usando la norma euclidea de $\gamma'(z)$ y su parte imaginaria. Esto último ya lo hemos calculado anteriormente (4.1).

Sea $\gamma : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$ una transformación de Möbius, donde $ad - bc > 0$. Sea $\alpha : [t_0, t_1] \to \mathbb{H}^2$ un camino.

$$Im(\gamma(z)) = \frac{(ad-bc)y}{|cz+d|^2} = \frac{(ad-bc)}{|cz+d|^2} Im(z)$$

Ahora calculamos la norma (euclídea) de la derivada de $\gamma(z)$

$$|\gamma'(z)| = \left| \frac{a(cz+d) - (az+b)c}{(cz+d)^2} \right| = \frac{ad-bc}{|(cz+d)^2|}$$

Veamos cómo podemos redefinir longitud de un camino α usando la métrica g del semiplano de Poincaré. Comenzamos por recordar la definición de longitud de un camino

$$\text{long}_{\mathbb{H}}\left(\alpha\left(t_0\right), \alpha(t_1)\right) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g\left(\alpha'(t), \alpha'(t)\right)}dt$$

y recordamos también que en este caso $g = \begin{pmatrix} 1/y^2 & 0 \\ 0 & 1/y^2 \end{pmatrix}$. Siendo $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ donde α_1 es la parte real de la aplicación y α_2 es la parte imaginaria, nos queda

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g\left(\alpha'(t), \alpha'(t)\right)}dt &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(\alpha_1'(t), \alpha_2'(t)) \begin{pmatrix} 1/\alpha_2^2(t) & 0 \\ 0 & 1/\alpha_2^2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1'(t) \\ \alpha_2'(t) \end{pmatrix}}dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\begin{pmatrix} \frac{\alpha_1'(t)}{\alpha_2^2(t)}, & \frac{\alpha_2'(t)}{\alpha_2^2(t)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1'(t) \\ \alpha_2'(t) \end{pmatrix}}dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\frac{(\alpha_1'(t))^2}{\alpha_2^2(t)} + \frac{(\alpha_2'(t))^2}{\alpha_2^2(t)}}dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{(\alpha_1'(t))^2 + (\alpha_2'(t))^2}}{\alpha_2(t)}dt
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Si observamos el resultado, vemos que $\sqrt{(\alpha_1'(t))^2 + (\alpha_2'(t))^2}$ es la norma euclídea del vector $\alpha'(t)$ y que $\alpha_2(t)$ es la parte imaginaria de α, por lo que tenemos

$$\text{long}_{\mathbb{H}}\left(\alpha\left(t_0\right), \alpha(t_1)\right) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{|\alpha'(t)|}{Im(\alpha(t))}dt \tag{4.3}$$

Por último, vamos a combinar los resultados anteriores para calcular la longitud del camino α una vez aplicamos la transformación γ, es decir, la longitud de $\gamma \circ \alpha$.

$$\begin{aligned}
\text{long}_{\mathbb{H}^2}(\gamma \circ \alpha) &= \int \frac{|(\gamma \circ \alpha)'(t)|}{Im(\gamma \circ \alpha)(t)}dt \\
&= \int \frac{|\gamma'(\alpha(t))||\alpha'(t)|}{Im(\gamma \circ \alpha)(t)}dt \\
&= \int \frac{ad-bc}{|c\alpha(t)+d|^2}|\alpha'(t)| \frac{|c\alpha(t)+d|^2}{ad-bc} \frac{1}{Im(\alpha(t))}dt \\
&= \int \frac{|\alpha'(t)|}{Im(\alpha(t))}dt = \text{long}_{\mathbb{H}^2}(\alpha)
\end{aligned}$$

4.2. Clasificación de isometrías

Observación 4.6 *Podemos describir las geodésicas usando únicamente sus extremos en $\partial\mathbb{H}^2$. Las semicircunferencias se pueden describir usando sus extremos $z_+, z_- \in \mathbb{R}$ y las semirrectas tendrán un extremo en el eje real y el otro en ∞.*

Definición 4.7 *Llamaremos $\mathcal{H}$ al conjunto de todas las semirrectas verticales y semicircunferencias perpendiculares al eje real, es decir, al conjunto de todas las geodésicas.*

Lema 4.8 *Sea $H \in \mathcal{H}$ una geodésica. Entonces existe una transformación de Möbius que transforma H en el eje imaginario biyectivamente.*

Demostración. Sea H es una semirrecta vertical de la forma $Re(z) = a$, entonces la traslación $z \to z - a$ es una transformación de Möbius que lleva H al eje imaginario $Re(z) = 0$. Sea H es una semicircunferencia con extremos $z_-, z_+ \in \mathbb{R}$, con $z_- < z_+$. Queremos la transformación de Möbius que envía estos extremos a los exrtemos del eje imaginario, por lo que consideramos la semirrecta $Re(z) = 0$ como la geodésica (la semirrecta vertical) con extremos en 0 y ∞. Definimos

$$\gamma(z) = \frac{z - z_+}{z - z_-}$$

que es una transformación de Möbius ya que $-z_- + z_+ > 0$. La imagen de H por una isometría es también un elemento de $\mathcal{H}$, esto es, $\gamma(z) \in \mathcal{H}$. Además, $\gamma(z_+) = 0$ y $\gamma(z_-) = \infty$, por lo que podemos asegurar que $\gamma(H)$ es el eje imaginario.

Lema 4.9 *Sea $H \in \mathcal{H}$ y $z_0 \in H$. Entonces existe una transformación de Möbius que lleva H al eje imaginario y z_0 a i.*

Demostración. Sea H una geodésica, $H \in \mathcal{H}$. Sabemos por el lema 4.8 que existe una transformación de Möbius $\gamma_1 \in M\ddot{o}b(\mathbb{H}^2)$ que lleva H al eje imaginario, por lo tanto sabemos que $\gamma_1(z_0)$ está en el eje imaginario. Tomamos una transformación de Möbius $\gamma_2 \in M\ddot{o}b(\mathbb{H}^2)$ de la forma $\gamma_2(z) = kz$. Tomando un $k > 0$ adecuado podemos hacer que $\gamma_1(z_0) = i$, basta con tomar $k = i/\gamma_1(z_0)$. Para terminar, solo queda componer las aplicaciones anteriores para ver que $\gamma = \gamma_2 \circ \gamma_1$ es la transformación de Möbius que buscábamos.

Teorema 4.10 *Dados dos puntos en $\mathbb{H}^2$ existe una única geodésica $H \in \mathcal{H}$ que los une.*

Demostración. Sean $z_0 = x_0 + y_0 i$ y $z_1 = x_1 + y_1 i$ dos puntos distintos de $\mathbb{H}^2$. Si $x_0 = x_1$, los dos puntos estarán en la misma recta vertical y no podrán estar en una circunferencia centrada en el eje real, por lo que esa recta será la geodésica H que buscamos. Si $x_0 \neq x_1$, z_0 y z_1 no pueden estar en una misma recta vertical por lo que tendremos que buscar una semicircunferencia con centro en el eje de las abcisas. El centro de esta semicircunferencia será la intersección de este eje con la mediatriz (euclídea) de z_0 y z_1 ya que el centro debe estar a una misma distancia euclídea de ambos puntos. La intersección de estas rectas (que no pueden ser paralelas porque $x_0 \neq x_1$, z_0 y z_1) es un único punto que junto con z_0 nos define una única circunferencia.

Hasta ahora, hemos visto que las transformaciones de Möbius son isometrías, pero no hemos visto en ningún momento que sean las únicas. Sea $z = x + yi \in \mathbb{H}^2$, definimos la aplicación $\rho : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$ como $\rho(z) = -x + yi$, la reflexión sobre el eje imaginario. Es fácil ver que ρ es una isometría, y también veremos que no es una transformación de Möbius ya que no se puede escribir como $\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ con $ad - bc > 0$. Vamos a ver que no es posible tener $\rho(z) = \gamma(z)$.

Esto es lo mismo que decir que queremos ver si existen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{a(x+yi)+b}{c(x+yi)+d} = -x + yi$. Desarrollando esto tendríamos la ecuación

$$\frac{acx^2 + bcx + \textbf{ayicx} + axd + bd + \textbf{ayid-acxyi-bcyi} + ay^2c}{|cz+d|^2} = -x + yi$$

de donde vamos a separar la parte real de la imaginaria.

- Parte real:
$$\frac{acx^2 + bcx + axd + bd + ay^2c}{|cz+d|^2} = -x$$

- Parte imaginaria:
$$\frac{aycx + ayd - acxy - bcy}{|cz+d|^2} = y$$

De la parte imaginaria podemos deducir que $ad - bc = |cz+d|^2$, y si sustituímos esto en la parte real nos da la siguiente relación entre x e y

$$acx^2 + bcx + axd + bd + ay^2c = -(ad - bc)x$$
$$acx^2 + 2axd + bd + ay^2c = 0$$

que no puede cumplirse para todo $z = x + yi \in \mathbb{H}^2$, ya que como vemos, sólo se cumple para la cónica que describen las ecuaciones.

Proposición 4.11 *Las transformaciones de Möbius son aplicaciones conformes y por lo tanto preservan los ángulos y la orientación.*

Demostración. Como las transformaciones de Möbius son aplicaciones del plano complejo en sí mismo, serán conformes si y sólo si son holomorfas y su derivada no se anula. Sea $\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ una transformación de Möbius con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y con $ad - bc > 0$. La aplicación γ es holomorfa ya que como mucho puede tener un polo en $z = \frac{-d}{c}$ en el caso de que $c \neq 0$. Además, su derivada es $\gamma'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$, que es estrictamente positiva en todo su dominio, porque $ad - bc > 0$ y $(cz+d)^2 > 0$ para todo $z \in \mathbb{C} - \{\frac{-d}{c}\}$ (en todo $\mathbb{C}$ si $c = 0$).

Conociendo estas isometrías del semiplano de Poincaré, podemos clasificar las isometrías obteniendo un resultado similar al que conocemos de $\mathbb{R}^2$, donde sabemos que las isometrías son simetrías o rotaciones.

Teorema 4.12 *Si una isometría preserva la orientación podemos escribirla como una transformación de Möbius, y en el caso de que invierta la orientación la podemos escribir como una transformación de Möbius compuesta con la reflexión sobre el eje imaginario ρ*

Demostración. Sea α una isometría que preserva la orientación. Sea $\triangle ABC$ un triángulo que al aplicar la isometría α nos da $\triangle A'B'C'$. Usando el lema 4.9, sabemos que existe una transformación de Mobius γ_1 que lleva el segmento AB al eje imaginario. Sabemos que existe también $\gamma_2 \in M\ddot{o}b(\mathbb{H}^2)$ que lleva $A'B'$ al mismo eje.

Como ambas transformaciones preservan la orientación, tendríamos que tanto γ_1 como γ_2 llevan $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ al mismo triángulo con un lado en el eje imaginario. Por lo tanto $\gamma = \gamma_2^{-1} \circ \gamma_1$ lleva $\triangle ABC$ en $\triangle A'B'C'$. Esta aplicación γ, por las propiedades de grupo de $M\ddot{o}b(\mathbb{H}^2)$, es una transformación de Möbius y como consecuencia de ello una isometría. Con esto, tenemos dos isometrías que transforman $\triangle ABC$ en $\triangle A'B'C'$ y podemos deducir que son iguales, es decir, que α se puede escribir como una transformación de Möbius.

Ahora, sea β una isometría que invierte la orientación de $\triangle ABC$, transformándolo en $\triangle A'B'C'$. En este caso, aplicamos ρ al triángulo $\triangle ABC$, obtenemos un nuevo triángulo $\triangle A''B''C''$ y estamos en la situación anterior. Llevando los segmentos $A''B''$ y AB al eje imaginario mediante las respectivas transformaciones de Möbius γ_1 y γ_2 como hemos hecho en el caso anterior, podemos escribir $\beta = \gamma_2^{-1} \circ \gamma_1 \circ \rho = \gamma \circ \rho$ y tendríamos β escrito como la composición de una aplicación de Möbius y la reflexión sobre el eje imaginario.

Capítulo 5

Curvas en el plano hiperbólico

Este capítulo está dedicado a estudiar algunas curvas notables en la geometría hiperbólica. Cuando se trata de geometría euclídea, todos conocemos varias curvas con propiedades interesantes como pueden ser las rectas paralelas, que equidistan unas de otras, o las circunferencias, que mantienen una distancia constante con un punto. En la geometría hiperbólica también encontramos curvas con estas características y al estudiarlas nos daremos cuenta de que las rectas y las circunferencias siguen teniendo gran importancia. En el libro *The Elements of Non-Euclidean Geometry*[3] (páginas 51-52) encontramos la construcción de algunas de estas curvas notables, que utilizaremos como base para el desarrollo de sus propiedades que veremos en este capítulo.

Antes de introducir las curvas que vamos a estudiar, vamos a ver un resultado sobre la curvatura de una curva en el semiplano de Poincaré que usaremos más adelante para calcular la curvatura de las curvas que veremos después.

Proposición 5.1 *Sea $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = \gamma_1 \frac{\partial}{\partial x} + \gamma_2 \frac{\partial}{\partial y}$ una curva parametrizada de modo natural y sea ∇ la conexión de Levi-Civita, entonces*

$$\nabla_{\gamma'}\gamma' = \left(\gamma_1'' - 2\frac{\gamma_1'\gamma_2'}{\gamma_2}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(\gamma_2'' + \frac{(\gamma_1')^2}{\gamma_2} - \frac{(\gamma_2')^2}{\gamma_2}\right)\frac{\partial}{\partial y} \tag{5.1}$$

y si $\nabla_{\gamma'}\gamma' = X_1 \frac{\partial}{\partial x} + x_2 \frac{\partial}{\partial y}$, donde X_1, X_2 don las componentes de la ecuación anterior, la curvatura se puede calcular como

$$||\nabla_{\gamma'}\gamma'|| = \sqrt{\frac{X_1^2}{\gamma_2^2} + \frac{X_2^2}{\gamma_2^2}} \tag{5.2}$$

Demostración. Para la primera igualdad tenemos que calcular la conexión $\nabla_{\gamma'}\gamma'$ sobre nuestro campo γ. Lo haremos usando la siguiente expresión de una conexión

$$\nabla_T Y = \sum \left[\frac{dY^i}{dt}\frac{\partial}{\partial x^i} + y^i \nabla_T \frac{\partial}{\partial x^i}\right]$$

que cuando $Y = T = \gamma'$ queda como

$$\nabla_{\gamma'}\gamma' = \sum \left[\frac{d(\gamma_i')}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} + \gamma_i' \nabla_{\left(\gamma_1' \frac{\partial}{\partial x} + \gamma_2' \frac{\partial}{\partial y}\right)} \frac{\partial}{\partial x^i} \right].$$

Ahora aplicamos las propiedades de una conexión obteniendo

$$\nabla_{\gamma'}\gamma' = \sum \left[\frac{d(\gamma_i')}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} + \gamma_i' \left(\gamma_1' \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial x^i} + \gamma_2' \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \right].$$

En esta expresión conocemos la forma de la conexiónen función de los símbolos de Christoffel del semiplano como vemos en 2.2 y estos símbolos ya los hemos calculado en el apartado 3.1.3. Es decir, calculalmos $\nabla_{\partial/\partial x^i}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)$ para $i, j = 1, 2$, obteniendo

$$\begin{aligned}
\nabla_{\partial/\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) &= \frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y} \\
\nabla_{\partial/\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) &= -\frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial x} \\
\nabla_{\partial/\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) &= -\frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial x} \\
\nabla_{\partial/\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) &= -\frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}
\end{aligned}$$

donde en lugar de y podemos poner γ_2 ya que estaríamos haciendo el cálculo de la conexión a lo largo de la cuva γ. Al sustituir esto en la fórmula anterior obtenemos la expresión de $\nabla_{\gamma'}\gamma'$ que buscábamos.

La curvatura $\left|\left|\nabla_{\gamma'}\gamma'\right|\right|$ viene directamente de calcular la norma de la expresión de $\nabla_{\gamma'}\gamma'$ que hemos obtenido usando la métrica del semiplano de Poincaré.

5.1. Circunferencias

Definición 5.2 *En un plano, llamamos* circunferencia *al conjunto de puntos que equidistan de un punto dado al que llamaremos* centro *C. Lamamos* radio *r a la distancia constante entre el centro y cualquier punto de este lugar geométrico.*

Tanto en geometría euclidea como en geometría hiperbólica, el ángulo de intersección de la circunferencia con cualquiera de sus radios es un ángulo recto.

Proposición 5.3 *Las circunferencias hiperbólicas en el semiplano de Poincaré tienen la misma forma que las circunferencias euclídeas.*

Idea de la demostración. Vamos a construir la circunferencia hiperbólica a partir de un centro hiperbólico $C_h = (x_0, y_0)$ y un radio hiperbólico r_h. Queremos encontrar los puntos a distancia r_h de C_h y lo vamos a hacer parametrizando geodésicas que pasen por C_h y recorriendo la distancia del radio a lo largo de ellas. Empezamos con una geodésica con forma de semirrecta vertical $\alpha_1(t) = (x_0, e^t)$ que pasa por el centro. Si $C_h = \alpha_1(t_0)$ para algún $t_0 \in \mathbb{R}$, los puntos a distancia r_h del centro serán $\alpha_1(t_0 + r_h) = (x_0,\, y_0e^{r_h})$ y $\alpha_1(t_0 - r_h) = (x_0,\, y_0e^{-r_h})$, ya que la geodésica está parametrizada de modo natural. El centro euclídeo se encontrará a distancia euclídea media entre estos dos puntos, que es $C_e = (x_0,\, y_0cosh(r_h))$. El radio euclídeo será la distancia euclídea entre el centro euclídeo y cualquiera de los otros puntos, lo que da $r_e = y_0sinh(r_h)$.

Hacemos lo mismo que hemos hecho con la semirrecta vertical para las geodésicas con forma de circunferencia. Sea $\alpha_2(t) = (a + b\,tanh(t),\, b\,sech(t))$. Igual que antes la geodésica está parametrizada de modo natural. De nuevo, si $C_h = \alpha_1(t_0)$ para algún $t_0 \in \mathbb{R}$, los puntos a distancia r_h del centro serán $\alpha_1(t_0 + r_h) = (a + b\,tanh(t_0 + r_h),\, b\,sech(t_0 + r_h))$ y $\alpha_1(t_0 - r_h) = (a + b\,tanh(t - r_h),\, b\,sech(t - r_h))$. Si dibujamos estos puntos para una familia de pares (a, b) tal que $a, b \in \mathbb{R}$ y $b > y_0$ (recordamos que el punto (a, b) es la parte más alta de la geodésica que pasa por C_h) veremos que, en efecto, traza una circunferencia euclídea. Por desgracia, la comprobación de que cumple la ecuación de una circunferencia da lugar a calculos engorrosos en los que no nos vamos a extender.

Proposición 5.4 *Sea $\gamma \subset \mathbb{H}^2$ una circunferencia euclidea en el semiplano de Poincaré, con centro $C = (x_0, y_0)$ y radio r. Entonces γ es también una circunferencia hiperbólica de centro $C_{\mathbb{H}} = (x_0, \sqrt{y_0^2 - r^2})$ y radio hiperbólico $R_{\mathbb{H}} = ln\sqrt{\frac{y_0+r}{y_0-r}}$.*

Demostración.

Primero vamos a ver que el centro hiperbólico de la circunferencia está en la misma semirrecta vertical que el centro euclídeo de la misma. Comenzamos por ver que en este modelo tenemos una simetría respecto a las rectas verticales. Nótese que la reflexión sobre el eje imaginario $h(x + iy) = -x + iy$ y la aplicación $m(z) = z + b$ (que es transformación de Möbius para todo $b \in \mathbb{R}$) son ambas isometrías, y que con la composición de ambas podemos obtener la reflexión sobre cualquier recta vertical. Con esto justificaremos que el centro hiperbólico de la circunferencia γ será de la forma $C_{\mathbb{H}} = (x_0, y)$ para algún $y > 0$.

Ahora que sabemos en qué semirrecta está $C_{\mathbb{H}}$ vamos a encontrar y haciendo que la distancia de $C_{\mathbb{H}}$ con los puntos $S = (x_0, y_0 + r)$ y $Q = (x_0, y_0 - r)$ sea la misma. Sea $\gamma(t) = (x_0, e^t)$ la geodésica en la que se encuentran S y Q. Esta es una parametrización natural de la geodésica ya que

$$long_{\mathbb{H}}(\gamma(t_0), \gamma(t_1)) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{|\gamma'(t)|}{Im(\gamma(t))}dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{e^t}{e^t}dt = t_1 - t_0.$$

Para calcular la distancia entre S y $C_{\mathbb{H}}$, basta hacer que $\gamma(t_0) = (x_0, y)$ y $\gamma(t_1) = (x_0, y_0 + r)$. Por la parametrización de γ, en este caso los extremos son $e^{t_0} = y$ y $e^{t_1} = y_0 + r$. De ahí despejamos t_0 y t_1, y conociendo que la distancia entre ambos puntos es $t_1 - t_0$ deducimos que esto es lo mismo que decir que la distancia entre S y $C_{\mathbb{H}}$ es $ln(y_0 + r) - ln(y) = ln(\frac{y_0+r}{y})$. De forma similar podemos calcular la distancia entre $C_{\mathbb{H}}$ y Q, que es $ln(\frac{y}{y_0-r})$. Como queremos que $C_{\mathbb{H}}$ se encuentre en el punto medio (usando la distancia hiperbólica) entre S y Q, igualamos ambas distancias y despejamos y.

$$ln\left(\frac{y_0+r}{y}\right) = ln\left(\frac{y}{y_0-r}\right)$$

De aquí, obtenemos $y = \sqrt{(y_0^2 - r^2)}$ y el centro hiperbólico de la circunferencia queda $C_{\mathbb{H}} = (x_0, \sqrt{(y_0^2 - r^2)})$. El radio hiperbólico se puede obtener de la distancia entre S y $C_{\mathbb{H}}$, que es

$$ln(\frac{y_0+r}{y}) = ln\left(\frac{y_0+r}{\sqrt{(y_0^2 - r^2)}}\right) = ln\left(\sqrt{\frac{y_0+r}{y_0-r}}\right).$$

Proposición 5.5 *La curvatura de una circunferencia hiperbólica es coth(r), donde r es el radio hiperbólico de la circunferencia.*

La demostración de esta proposición la podemos encontrar en el trabajo “Curves with Constrained Curvature on Hyperbolic Surfaces”[6].

Es interesante destacar que como el radio r es un número positivo, entonces la cotangente hiperbólica es mayor que uno, esto es, la curvatura de las circunferencias hiperbólicas es siempre mayor que uno. Además, la función cotangente hiperbólica es biyectiva entre 1 e infinito, con lo que dado un numero real $R > 1$ existirá un número positivo r tal que $R = coth(r)$, y por tanto una circunferencia hiperbólica de radio r y curvatura R.

5.2. Horociclos

Vamos a hacer que el centro de la circunferencia hiperbólica tienda a un punto de la frontera del semiplano de Poincaré. Cuando esto ocurre, las geodésicas que forman los radios de la circunferencia coinciden en un punto de la frontera del semiplano, es decir, son paralelas. El radio de la circunferencia tiende a infinito y el límite de la circunferencia será una nueva curva que sigue siendo ortogonal a las geodésicas que forman los radios.

Definición 5.6 *Llamamos* horociclo *al lugar geométrico ortogonal a las geodésicas con un mismo punto del infinito. Al punto de convergencia de las geodésicas lo llamamos* centro *C del horociclo y las geodésicas que convergen en C se llaman* diámetros.

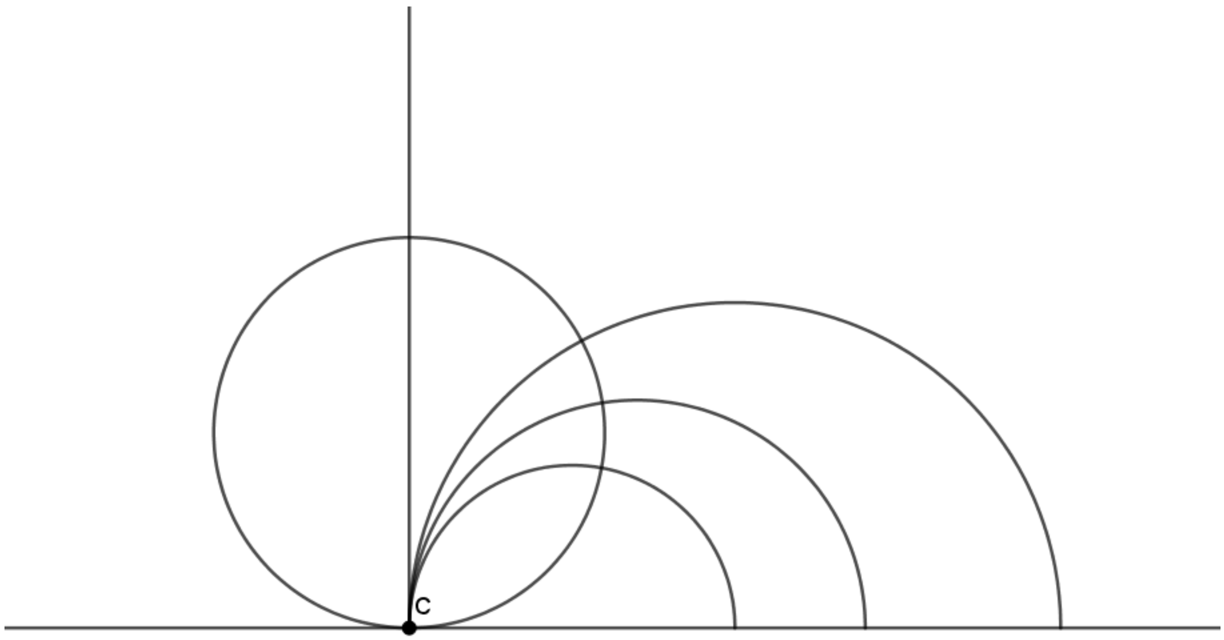

Figura 5.1: Horociclo con forma de circunferencia y geodésicas ortogonales a él que convergen en el centro C

Teorema 5.7 *Las rectas horizontales y las circunferencias tangentes al origen son horociclos.*

Demostración. Cuando el centro de convergencia de las geodésicas es el punto del infinito, las geodésicas serán semirrectas verticales. Las rectas horizontales son ortogonales a todas las geodésicas que convergen en este punto, ya que hemos visto que el modelo del semiplano es conforme con el plano euclídeo.

Cuando el centro de convergencia de las geodésicas es un punto $C = (c, 0)$ en la recta real, las circunferencias contenidas en el semiplano que son tangentes a la recta $\{y = 0\}$ en C son ortogonales a las geodésicas que convergen en ese punto. En una circunferencia euclidea, el radio en un punto es perpendicular al vector tangente en dicho punto, por lo que podemos decir que dos circunferencias euclídeas se cortan ortogonalmente si y sólo si en los puntos de intersección el radio de una cicunferencia es tangente a la otra. La circunferencia tangente a la recta real en $(c, 0)$ tiene un radio vertical que es tangente a todas las geodésicas con forma de semicircunferencia que convergen en ese mismo punto. Además, la semirrecta vertical que pasa por C también es ortogonal a la circunferencia tangente en C en los dos puntos en los que intersecan. De nuevo, como los ángulos del semiplano de Poincaré coinciden con los ángulos euclídeos, podemos decir que todas las geodésicas que convergen en C son ortogonales a las circunferencias tangentes al eje de las abcisas en ese punto.

Vamos a ver algunas propiedades de los horociclos

Proposición 5.8 *Por cada par de puntos pasan dos horociclos.*

Demostración. Sean P, Q dos puntos distintos en $\mathbb{H}^2$. Como hemos visto que las rectas horizontales son horociclos, vamos a analizar lo que ocurre en el caso de que P y Q estén en una misma recta horizontal.

En este caso, la recta que definen ambos puntos es un horociclo, necesitamos ver si hay algún otro que contenga a ambos puntos. Ya hemos encontrado el único horociclo con forma de recta vertical posible, así que veamos que hay un horociclo con la forma de circunferencia tangente a la recta real que contiene a P y Q. Esa circunferencia deberá tener el centro en la mediatriz de PQ y, como esta es una recta vertical, punto de tangencia con la recta real será donde la mediatriz corte el eje real. Por lo tanto tenemos 3 puntos que determinan una única circunferencia, esto es, el único horociclo de este tipo que contiene a P y Q.

En el caso en el que los puntos no estén en una misma recta vertical no podemos buscar horociclos de este tipo, así que los buscaremos con forma de circunferencia. Sea $C = (x, y)$ el centro de una de estas circunferencias y sean $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$. Necesitamos que C cumpla las siguientes condiciones:

- C está en la mediatriz de PQ. Lo podemos escribir como $d(C, P) = d(C, Q)$.
- La circunferencia es tangente a la recta real, es decir, $d(C, \{y = 0\} = d(C, P)$.

Esto nos da un sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} & = & \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2} \\ y & = & \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 2(x_2-x_1)x + 2(y_2-y_1)y + x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2 & = & 0 \\ x^2 - 2x_1x - 2y_1y + x_1^2 + y_1^2 & = & 0 \end{array} \right.$$

donde la primera ecuación es la de una recta y la segunda la de una parábola.

Proposición 5.9 *No puede haber tres puntos de un horociclo en una misma geodésica, circunferencia o hiperciclo.*

Demostración. Sabemos que una recta y una cónica se cortan en cero, uno o dos puntos o la recta está contenida en la cónica. Para demostrar la proposición solo hay que ver que las rectas no pueden estar contenidas en las cónicas, que es evidente dadas las podibles formas de las geodésicas y los horociclos.

Proposición 5.10 *La distancia de un horociclo a su centro es infinita.*

Demostración. Sea α un horociclo en $\mathbb{H}^2$ con froma de circunferencia tangente al origen. Podemos parametrizarlo como $\alpha(t) = (a + r\,cos\,t, r + r\,sin\,t)$ donde $a, r|in\mathbb{R}$ y (a, r) es el centro euclídeo de la circunferencia. Sea $p = \alpha(t_0)$ un punto del horociclo. Sabemos que el centro del horociclo $C = \alpha(3\pi/2)$. Entonces,

- cuando $t \in 0, 3\pi/2)$

$$long_{\mathbb{H}}(P, C) = lim_{t\to\frac{3\pi}{2}^-} \int_0^t \frac{|\alpha'(t)|}{Im(\alpha(t))} dt$$

- cuando $t \in (3\pi/2, 2\pi)$

$$long_{\mathbb{H}}(P, C) = lim_{t\to\frac{3\pi}{2}^+} \int_t^{\frac{3\pi}{2}} \frac{|\alpha'(t)|}{Im(\alpha(t))} dt$$

Estos casos son análogos por lo que será suficiente ver el primero.

$$\begin{aligned}
long_{\mathbb{H}} &= lim_{t\to\frac{3\pi}{2}^-} \int_0^t \frac{\sqrt{(-rsint)^2 + (rcost)^2}}{r + rsint} dt \\
&= lim_{t\to\frac{3\pi}{2}^-} \int_0^t \frac{r}{r + rsint} dt \\
&= lim_{t\to\frac{3\pi}{2}^-} \int_0^t \frac{1}{1 + sint} \\
&= lim_{t\to\frac{3\pi}{2}^-} \left(-\frac{2}{tan(t/2) + 1} + 2 \right) \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

Proposición 5.11 *La curvatura de un horociclo es constante igual a 1.*

Demostración. Para calcular la curvatura de una curva en una variedad vamos a usar la conexión de Levi-Civita, que queda determinada por los símbolos de Christoffel de la variedad que hemos calculado en el tercer capítulo. Sea γ un horociclo parametrizado de forma natural, sabemos que su curvatura es $||\nabla_{\gamma'}\gamma'||$.

Comenzaremos con la parametrización natural de un horociclo γ de la forma $\gamma(t) = (t, c)$. Entonces, $\gamma'(t) = (1, 0)$ y

$$||\gamma'|| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} \frac{\partial\gamma_i}{\partial t} \frac{\partial\gamma_j}{\partial t}} = \frac{1}{c}.$$

Vemos que la longitud de un segmento de γ es $\int_0^t ||\gamma'(t)||dt = \frac{1}{c}t$. Como queremos que eso sea simplemente t para que la curva esté parametrizada de modo natural, introducimos un nuevo parámetro s y tenemos $\frac{1}{c}t = s$. Despejando de esta última igualdad obtenemos la nueva parametrización con $t = cs$, es decir, $\gamma(s) = (cs, c)$ es una parametrización natural del horociclo.

Ahora que tenemos la parametrización adecuada, vamos a calcular $\nabla_{\gamma'}\gamma'$. Vemos γ' como un campo igual que hemos hecho en la proposición 5.1, de forma que

$$\gamma'(s) = (c, 0) = c\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}0 = c\frac{\partial}{\partial x},$$

calculamos también γ'', que es fácil ver que se anula, $\gamma'' = (0, 0)$. Ahora, sustituyendo en la ecuación (5.1), sabemos que

$$\nabla_{\gamma'}\gamma' = (0 - 2\frac{c \cdot 0}{c})\frac{\partial}{\partial x} + (0 + \frac{c^2}{c} - \frac{0}{c})\frac{\partial}{\partial y} = c\frac{\partial}{\partial y}.$$

Calcular la norma de $\nabla_{\gamma'}\gamma'$ en este caso es sencillo, por lo que la curvatura es

$$||\nabla_{\gamma'}\gamma'|| = \sqrt{(\ 0\ ,\ c\ ) \begin{pmatrix} 1/c^2 & 0 \\ 0 & 1/c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}} = 1.$$

Con esto hemos calculado la curvatura de las rectas horizontales, pero un horociclo también puede ser una circunferencia tangente al eje x, lo que nos daría unas cuentas más complicadas si utilizamos el mismo método para calcular su curvatura. Por suerte, podemos utilizar una transformación de Möbius que envíe el centron del horociclo al punto del infinito.

Sea γ un horociclo con centro $C = (a, 0)$ y sea f una transformación de Möbius. Podemos definir $f(z) = \frac{-1}{z-a}$ que al llevar el centro del horociclo al infinito, transforma este en la recta horizontal $f(\gamma(t))$. La curvatura de $f(\gamma(t))$ es la misma que la de γ ya que f es una isometría

5.3. Hiperciclos

Definición 5.12 *Los* hiperciclos *o* curvas equidistantes *son las curvas con distancia ortogonal constante con una geodésica.*

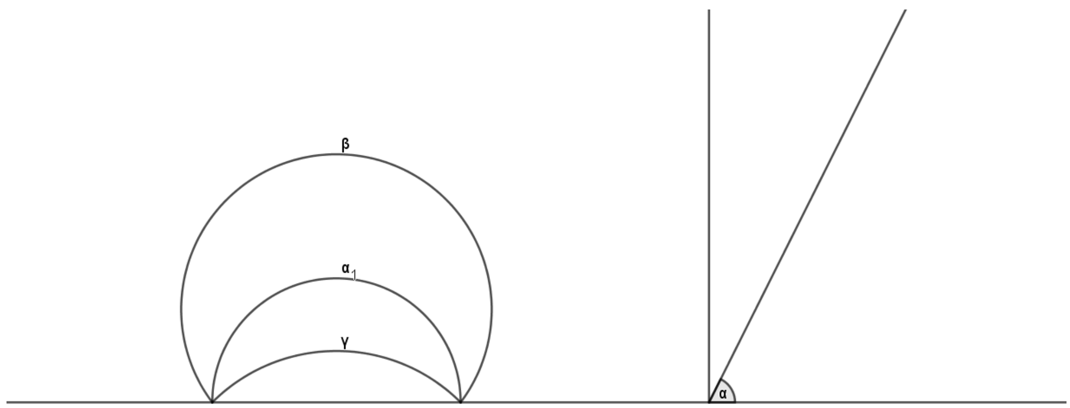

Figura 5.2: Izq.: Geodésica α_1 y dos horociclos, β y γ, que mantienen una distacia constante con $alpha_1$. Dcha.: Geodésica con forma de semirrecta vertical y horociclo equidistante a ella.

Proposición 5.13 *Los hiperciclos equidistantes a una geodésica γ son las rectas o circunferencias que comparten ambos puntos en la frontera $\partial\mathbb{H}^2$ con los de γ pero no son perpendiculares al eje real.*

Queremos ver que los hiperciclos son las rectas y circunferencias que no hemos cubierto en los casos anteriores.

Demostración Como hemos hecho anteriormente, comenzaremos por estudiar el caso más sencillo. Sea γ una geodésica con forma de recta vertical, $\gamma(t) = (c, t)$. Las geodésicas perpendiculares a γ son las semicircunferencias que tienen su punto más alto en γ, estas geodésicas tendrán la forma $\alpha(t) = (a + b\, tanh(Rt),\ b\, sech(Rt))$ donde $(a, b) \in \gamma$. El valor de R indica la velocidad a la que parametrizamos la geodésica, por lo que podremos asumir que $R = 1$ y la geodésica está parametrizada de modo natural. Así, para cada punto $\gamma(t_0) = (c, t_0)$ de γ, tenemos una geodésica $\alpha_{t_0}(s) = (c + t_0\, tanh(s),\ t_0\, sech(s))$ En este caso, circunferencias o rectas que buscamos tienen que tener $C = (c, 0)$ y $\{\infty\}$ como puntos en la frontera, es decir, buscamos las rectas que pasan por C y cortan el eje x en un ángulo que no es recto. Una recta con estas características la podemos parametrizar como $\beta(t) = (c+t\, cos(90^o \pm \theta),\ t\, sin(90^o \pm \theta))$ donde θ es el ángulo entre las rectas γ y β. La geodésica α_{t_0} interseca a β en $\beta(t_0) = (c + t_0\, cos(90^o \pm \theta),\ t_0\, sin(90^o \pm \theta))$, ya que hemos usado un punto en la semicircunferencia α para parametizar β haciendo variar el radio de β.

Llamamos P al punto en el que intersecan α y γ, y Q al punto de intersección de α y β. Vamos a calcular la distancia hiperbólica entre P y Q teniendo en cuenta que

$$\begin{array}{rcccl} P & = & \gamma(t_0) & = & \alpha_{t_0}(0) \\ Q & = & \beta(t_0) & = & \alpha_{t_0}(s_0) \qquad \text{para algún } s_0 \in (0, \infty) \end{array}$$

Como hemos parametrizado α_{t_0} de modo natural, sabemos que

$$long_{\mathbb{H}}(\alpha_{t_0}(0), \alpha_{t_0}(s_0)) = s_0 - 0 = s_0$$

así que veamos cuál es el valor de s_0, despejando de $\beta(t_0) = \alpha_{t_0}(s_0)$.

$$(c + t_0\ cos(90^o \pm \theta),\ t_0\ sin(90^o \pm \theta)) = (c + t_0\ tanh(s_0),\ t_0\ sech(s_0))$$

Usamos la segunda coordenada para conseguir $sin(90^o \pm \theta) = sech(s_0)$, de donde deducimos que $s_0 = arccosh(cosec(90^o \pm \theta))$. Vemos que la distancia no depende de t_0, por lo que es igual para cualquier par de puntos unidos por una geodésica α perpendicular a γ, que también será perpendicular a β ya que el radio euclídeo de la semicircunferencia α tiene la misma dirección que la recta β. Además, $sin(90^o + \theta) = sin(90^o - \theta)$ por lo que las dos rectas a la derecha y a la izquierda de γ que forman un ángulo θ con γ y que intersecan al eje x en C son ambas equidistantes a γ.

Con esto hemos visto solo el caso en el que buscamos las rectas equidistantes a una geodésica γ con forma de semirrecta vertical, pero los demás casos en los que γ es una semicircunferencia se pueden deducir utilizando las isometrías del plano hiperbólico. Mediante una trasformación de Möbius que lleve C y $\{\infty\}$ a los extremos de la geodésica con forma de semicircunferencia, transformaos la recta β en segmentos de circunferencia con los mismos extremos que γ y así cubriríamos todos los casos. En "Hyperbolic Geometry" [7] podemos encontrar el resultado de aplicar las transformaciones de Möbius a las ecuaciones de las circunferencias o rectas en el plano complejo, lo que justificaría poder cubrir el caso de los hiperciclos con forma de arco de circunferencia. Esto mismo se puede justificar también sabiendo que las transformaciones de Möbius conservan la razón doble, por lo que las rectas y circunferencias se transformarán en otras rectas o circunferencias mediante estas transformaciones.

Proposición 5.14 *La curvatura de un hiperciclo está entre 0 y 1.*

Demostración. Sea γ un hiperciclo. Como antes, quermos calcular la curvatura $\left|\left|\nabla_{\gamma'}\gamma'\right|\right|$ donde γ es el hiperciclo parametrizado de forma natural. Para hacer esto vamos a hacer los cálculos con un hiperciclo con la forma de una recta que corta el eje real en un ángulo no recto. Podemos escribir γ como $\gamma(t) = (c + t, t\ tan\alpha)$ donde $C = (c, 0)$ es el punto en el que la recta corta el eje x y donde α es el ángulo en el que intersecan. Veamos cómo es la parametrización natural de esta curva. Sabemos que $\gamma'(t) = (1, tan\alpha)$ y con esto calculamos

$$\int \frac{|\gamma'(t)|}{Im(\gamma(t))} dt = \int \frac{\sqrt{1 + tan^2\ \alpha}}{t\ tan\ \alpha} dt = \int \frac{\sqrt{\frac{1}{cos^2\ \alpha}}}{t \frac{sin\ \alpha}{cos\ \alpha}} = \frac{1}{sin\ \alpha} ln(t)$$

Despejando t de $s = \frac{1}{sin\alpha} ln(t)$ obtenemos el parámetro natural $t = e^{s\ sin\alpha}$. Con esto podemos calcular $\left|\left|\nabla_{\gamma'}\gamma'\right|\right|$ para

$$\gamma(s) = (c + e^{s\ sin\alpha}, e^{s\ sin\alpha}\ tan\ \alpha).$$

Lo haremos como hemos visto al inicio de este capítulo en las expresiones (5.1) y (5.2). Empezamos viendo las derivadas de γ

$$\gamma'(s) = (sin\ \alpha\ e^{s\ sin\alpha}, tan\ \alpha\ sin\ \alpha\ e^{s\ sin\alpha})$$
$$\gamma''(s) = (sin^2\ \alpha\ e^{s\ sin\alpha}, tan\ \alpha\ sin^2\ \alpha\ e^{s\ sin\alpha})$$

que introduciéndolo en la ecuación de la conexión (5.1) nos da

$$\nabla_{\gamma'}\gamma' = \left(sin^2\alpha\ e^{s\ sin\alpha} - 2\frac{sin^2\alpha\ tan\alpha\ e^{2s\ sin\alpha}}{tan\alpha\ e^{s\ sin\alpha}} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \\ + \left(sin^2\alpha\ \tan\alpha\ e^{s\ sin\alpha} + \frac{sin^2\alpha\ e^{2s\ sin\alpha}}{tan\alpha\ e^{s\ sin\alpha}} - \frac{sin^2\alpha\ tan^2\alpha\ e^{2s\ sin\alpha}}{tan\alpha\ e^{s\ sin\alpha}} \right) \frac{\partial}{\partial y},$$

simplificando esto queda

$$\nabla_{\gamma'}\gamma' = \left(-sin^2\alpha\ e^{s\ sin\alpha}\right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(sin\alpha\ cos\alpha\ e^{s\ sin\alpha}\right) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Ahora calculamos la norma de esto, como hemos hecho en (5.2).

$$\begin{aligned} ||\nabla_{\gamma'}\gamma'|| &= \sqrt{\frac{(-sin^2\alpha\ e^{s\ sin\alpha})^2}{(tan\alpha\ e^{s\ sin\alpha})^2} + \frac{(sin\alpha\ cos\alpha\ e^{s\ sin\alpha})^2}{(tan\alpha\ e^{s\ sin\alpha})^2}} \\ &= \sqrt{\frac{sin^2\alpha(sin^2 + cos^2\alpha)}{tan^2\alpha}} \\ &= \sqrt{cos^2\alpha} = |cos\,\alpha| \end{aligned}$$

Igual que hemos hecho con los horociclos, para calcular la curvatura de un hiperciclo con forma de circunferencia que interseca al eje real en un ángulo distinto de uno recto, bastaría con aplicar al hiperciclo una transformación de Möbius que envíe uno de los puntos de corte con el eje al punto del infinito y después repetir el proceso que acabamos de ver. Como las transformaciones de Möbius preservan los ángulos por ser isometrías, la curvatura de un hiperciclo de cualquier tipo depende del ángulo con el que corta el eje x.

Resumiendo lo que hemos visto en estos apartados, podemos clasificar las curvas de curvatura constante del plano hiperbólico en función de su curvatura.

Teorema 5.15 *Sea γ una curva de curvatura constante k en el plano hiperbólico, entonces:*

- *Si la $k = 0$ la curva es una* ***geodésica***
- *Si $k \in (0, 1)$ la curva es un* ***hiperciclo***
- *Si $k = 1$, la curva es un* ***horociclo***
- *Si $k > 1$, la curva es una* ***circunferencia***

Bibliografía

[1] DEBORAH F. LOGAN, *A General Theory of Geodesics with Applications to Hyperbolic Geometry*, 1995, University of North Florida

[2] CHARLES WALKDEN, *Hyperbolic Geometry* , 2019, Department of Mathematics of The University of Manchester

[3] D. M. Y. SOMMERVILLE, *The Elements of Non-Euclidean Geometry*, 1919

[4] R. S. MILLMAN, G. D. PARKER, *Elements of Differential Geometry*, 1977, Prentice-Hall Inc.

[5] J. M. SIGARRETA ALMIRA, P. RUESGA RAMOS, *Evolución de la Geomentría desde su perspectiva histórica*, 2004, Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. XI, No. 1

[6] N. C. SALDANHA, P. ZUHLKE, *Spaces of Curves with Constrained Curvature on Hyperbolic Surfaces*, 2020, Indiana University Mathematics Journal 69 No. 4

[7] J.W. ANDERSON, *Hyperbolic Geometry*, 2005, Springer