Facultad
de
Ciencias

ESTUDIO DEL "SABRA SHELL MODEL"

(Study of the "Sabra shell model")

Trabajo de Fin de Grado

para acceder al

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autor: Lindes Domínguez Díaz

Director: Rafael Granero Belinchón

Septiembre – 2023

Agradecimientos

A mi tutor Rafa, por su ayuda y paciencia.

A mis amigos, por haberme acompañado y animado durante esta etapa.

A Víctor y Davinia, por estar siempre apoyándome y ayudarme tanto este último año.

A mis padres, por no dejarme caer nunca y por darme la oportunidad de ser quien soy a día de hoy.

Y por último, a mi abuelo, sé que estarías orgulloso.

Resumen

A día de hoy la turbulencia sigue siendo un fenómeno físico muy complicado de entender y para ello se han creado los shells models, estos sistemas modelan el fenómeno de la turbulencia desde un punto de vista matemático y que permite encontrar soluciones de manera más sencilla a algunos casos de flujos turbulentos.
En este TFG nos centraremos en dos shells models muy importantes el GOY y el Sabra, demostraremos algunas propiedades de estos modelos y probaremos la existencia de solución de los mismos, además verificaremos númericamente que cumplen las propiedades demostradas.

Palabres clave: Turbulencia, shell model, ecuaciones diferenciales ordinarias.

Abstract

Nowadays turbulence continues to be a very complicated physical phenomenon to understand and for this reason shell models have been created. These systems model the phenomenon of turbulence from a mathematical point of view and enables finding solutions in a simpler way to some cases of turbulent flows.
In this TFG we are going to focus on two very important shell models, GOY and Sabra, we will demonstrate some properties of these models and prove the existence of solution for them, we are also going to verify numerically the previously demonstrated properties.

Keywords: turbulence, shell model, ordinary differential equations.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

La turbulencia es un fenómeno físico que pertenece a la mecánica de fluidos. Todos hemos oido hablar de las famosas turbulencias en los aviones y es que la mayoría de fluidos que encontramos en la naturaleza son turbulentos, como por ejemplo, el flujo del agua en los ríos o el movimiento del aire cerca de la superficie de la tierra. Determinar las causas por las cuales el movimiento de un fluido se vuelve turbulento es muy importante en ingeniería aeronáutica o en meteorología.

La mecánica de fluidos es la rama de la física que estudia el movimiento de los fluidos, así como las fuerzas que lo provocan. En física, un fluido es un conjunto de partículas que se mantienen unidas entre sí por fuerzas cohesivas débiles, por lo tanto es una sustancia que se deforma continuamente bajo la aplicación de una fuerza, por muy pequeña que sea. La descripción matemática del movimiento de un fluido está determinada por las ecuaciones de Euler y las ecuaciones de Navier Stokes, estas últimas son un sistema de ecuaciones que a día de hoy sigue sin ser resuelto para dimensión 3, la turbulencia se puede considerar una solución de las ecuaciones de Navier Stokes y es por esto que sigue siendo un fenómeno difícil de entender en la actualidad a pesar de ser objeto de estudio desde el siglo XIX.

Osborne Reynolds, en 1883, estudió las diferencias entre los flujos laminares, que son flujos en los que las partículas se mueven de forma "ordenada", y los flujos turbulentos, donde las particulas se mueven de forma "desordenada". Podríamos pensar que Reynolds fue el primero en interesarse por este fenómeno físico pero echando la vista atrás, Leonardo Da Vinci(1452-1519) ya se interesó por las turbulencias, en el siguiente cuadro pintado por él, Diluvio sobre una ciudad, podemos apreciar como el artista dibuja remolinos para tratar de plasmar el viento y el agua moviéndose de manera brusca.

Figura 1.1: Cuadro de Da Vinci

No fue hasta 1922, cuando Lewis Fry Richardson, un matemático y físico inglés estudió la cascada de energía de la turbulencia y corroboró que la turbulencia, tal y como había pintado Da Vinci, estaba formada por remolinos de distintos tamaños.

Más adelante, en 1941 Andréi Kolmogorov, un matemático ruso, publicó una de las más importantes teorías de la turbulencia. Para ello se basó en la idea de Richardson. La teoría de Kolmogotov, también conocida como K41 tuvo algunas críticas y eso hizo que en 1962 Kolmogorov junto a Obukhov pubicase otra teoría con los errores encontrados en la K41 corregidos.

Capítulo 2

Turbulencia

En este capítulo presentaremos una introducción a los flujos turbulentos, la teoría K41 y la teoría K62, para ello nos hemos basado en [5] y [3].
Se considera flujo turbulento al flujo que se forma cuando en la ecuación de Navier Stokes, que más adelante explicaremos, el término no lineal aumenta más que el término disipativo, esto genera que las partículas se muevan desordenadamente.
Un párametro muy importante en el estudio de la turbulencia es el número de Reynolds, un parámetro adimensional que permite diferenciar cuantitativamente un flujo laminar de un flujo turbulento.
Este parámetro fue creado por George Gabriel Stokes en 1851 pero recibe su nombre en honor a Osborne Reynolds, quien popularizó su uso en 1883. Es la relación entre las fuerzas inerciales y las fuerzas viscosas presentes en un fluido.

$$R_e = \frac{LV}{\nu} \tag{2.1}$$

Donde L es la longitud característica también conocida como escala integral, esta longitud es en la que se inyecta la energía, V es la velocidad integral, es decir la velocidad asociada a la escala integral y ν es el coeficiente de viscosidad cinética.
Una de las características de un flujo turbulento es ser un fenómeno en el que la energía se disipa, ocurre a altas velocidades y baja viscosidad. Cuando R_e es muy grande las fuerzas inerciales, es decir el término no lineal de la ecuación de Navier Stokes tiene mayor presencia, en cambio, si R_e es muy pequeño la energía cinética se disipa debido a una importante presencia de viscosidad.

2.1. Cascada de energía

Lewis Fry Richardson en 1922 presentó un estudio donde asumió que la turbulencia está formada por remolinos. Los remolinos de escalas grandes se descomponen en remolinos más pequeños cuando el fluido se encuentra en estado turbulento, esto genera una cascada de energía, la energía cinética va decayendo por las diferentes escalas de remolinos hasta disiparse. Aunque la escala, y por lo tanto el tamaño de los remolinos se representa como una variable continua, de cara a entender mejor el proceso podemos modelizarlo de forma discreta de la siguiente forma, los remolinos de mayor tamaño tienen una escala de longitud $\sim \ell_0$, los sucesivos remolinos tienen una escala $\ell_n = \ell_0 r^n$ con $n = 0, 1, 2, ...$ donde $0 < r < 1$. El número de remolinos por unidad de volumen se asume que aumenta como r^{-3n} para garantizar que los remolinos pequeños ocupan el mismo espacio que los grandes. Los remolinos más pequeños tienen escala $\sim \eta$ que es la escala de disipación de Kolmogorov.
La energía se introduce en las grandes escalas que al fragmentarse los remolinos hace que la energía decaiga desde las escalas más grandes hacia los remolinos con escalas más pequeñas, en donde la energía se disipa en forma de calor por efecto de las fuerzas viscosas. Este estudio de la turbulencia es esencial para la teoría K41 y otras teorías de la turbulencia.

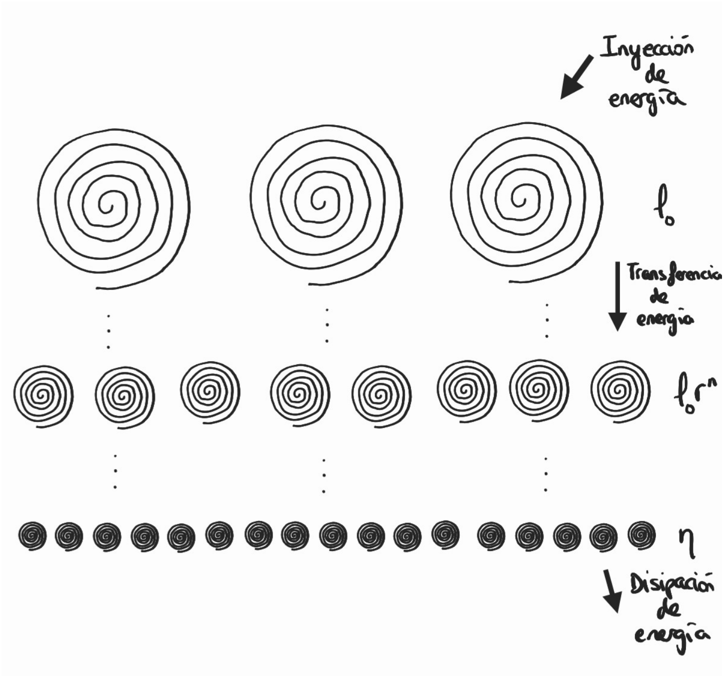

Figura 2.1: Cascada de energía

2.2. Teoría K41

En 1941 Kolmogorov desarrolló una teoría estadística de la turbulencia ya que debido a la "irregularidad" de los flujos turbulentos y a su naturaleza "aleatoria" es muy difícil describir de forma determinística este fenónemo físico.. En el modelo de cascada de energía se asume que la turbulencia es estadísticamente homogénea (invariante por traslaciones), estadísticamente isótropa (invariante por rotaciones) y estadísticamente estacionaria (invariante en el tiempo). Kolmogorov basándose en el trabajo de Richardson asumió que la turbulencia se puede dividir en tres regiones:

- **Región integral** formada por los remolinos de escala ℓ_0
- **Región inercial** formada por los remolinos de escala ℓ con $\ell_0 < \ell < \eta$
- **Región disipativa** formada por los remolinos de escala η

La energía se inyecta en la escala integral ℓ_0, también conocida como longitud característica, en esta escala los remolinos tienen números de Reynolds muy altos, por lo que la viscosidad es despreciable y entonces toda la energía se transfiere sin ser disipada, la tasa a la cual se transfiere la energía solo depende de la escala integral y de la velocidad asociada a ella que denotamos por u_0 [5]

$$T(\ell) \sim \frac{u_0^3}{\ell_0} \tag{2.2}$$

En la región inercial, donde los efectos viscosos siguen sin ser importantes, el flujo de energía es independiente de la escala y es igual a la tasa de disipación de energía que denotamos por ε

$$\Pi_\ell = \varepsilon \tag{2.3}$$

Por tanto, en la región inercial a energía inyectada, la energía disipada y el flujo de energía en el rango inercial son iguales. El incremento de velocidad en la escala ℓ que denotamos por $\delta u(\ell)$ como en [3]

$$\delta u(\ell) \sim (\varepsilon \ell)^{1/3} \tag{2.4}$$

Siendo $\delta u(\ell) \equiv |u(r+\ell) - u(r)|$ y su espectro de energía es

$$E(k) \sim \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} \tag{2.5}$$

Teniendo en cuenta que el número de onda $k \sim 1/\ell$ observamos que la energía disminuye a medida que los remolinos se hacen más pequeños, ya que las escalas pequeñas corresponden a una k grande y las escalas grandes a una k pequeña.

2.2.1. Espectro de energía

Para demostrar la relación del espectro de energía con la tasa de disipación y el número de onda, Kolmogorov utilizó la función de estructura de segundo orden que está relacionada con la densidad espectral de energía. Antes de comenzar con la demostración daremos la definición de transformada de Fourier que utilizaremos a lo largo del estudio.

Definición 2.1 (Tranformada de Fourier) *Sea u una función definida en $\mathbb{R}^3$, denotamos por $\hat{u}$ a la transformada de Fourier que para cada $\xi \in \mathbb{R}^3$ viene dada por*

$$\widehat{u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} u(x) e^{-ix\xi} dx$$

Usando la identidad de Parseval, la densidad de energía por unidad de masa es

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = \frac{1}{2}(2\pi)^3 \int_{\mathbb{R}^3} \hat{u}(\mathbf{k}) \hat{u}^*(\mathbf{k}) d\mathbf{k} = \frac{1}{2}(2\pi)^3 \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} k^2 \sin\theta |\hat{u}(k)|^2 d\phi d\theta dk \\ &= \frac{1}{2}(2\pi)^3 4\pi \int_0^\infty k^2 |\hat{u}(k)^2| dk \equiv \int_{\mathbb{R}^3} E(k) dk \end{aligned} \tag{2.6}$$

Donde $\hat{u}^*$ denota la conjugación compleja, asumiendo que el flujo es isótropo $\hat{u}(\mathbf{k}) = \hat{u}(k)$ y se ha definido el espectro de energía [3] como

$$E(k) = (2\pi)^4 k^2 |\hat{u}(k)|^2 \tag{2.7}$$

Definimos $\langle v \rangle$, el promedio de la función v como

$$\langle v \rangle = \int v(x) dx \tag{2.8}$$

Sabiendo que la función de estructura de orden p [5] es

$$S_p(\ell) = \langle (\delta \mathbf{u}(\ell))^p \rangle \tag{2.9}$$

Obtenemos

$$S_2(\ell) = \langle (\delta \mathbf{u}(\ell))^2 \rangle = \int [\mathbf{u}(\ell + \mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{x})]^2 d\mathbf{x} = 2 \int [\mathbf{u}(\mathbf{x})^2 - \mathbf{u}(\ell + \mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{x})] d\mathbf{x} \tag{2.10}$$

La transformada de Fourier de la velocidad se expresa en términos de la función de estructura de segundo orden. Usando (2.6),(2.7),(2.10) y sabiendo que $\int e^{i\mathbf{kx}}d\mathbf{x} = (2\pi)^3\delta(\mathbf{k})$ se obtiene

$$\begin{aligned}
|\widehat{u}(k)|^2 &= \frac{1}{(2\pi)^6}\int\int e^{i\mathbf{k(x-y)}}u_i(\mathbf{x})u_i(\mathbf{y})d\mathbf{x}d\mathbf{y} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^6}\int e^{i\mathbf{kl}}\left[\int u_i(\mathbf{l}+\mathbf{y})u_i(\mathbf{y})d\mathbf{y}\right]d\mathbf{l} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^6}\int e^{i\mathbf{kl}}\left[\langle\mathbf{u}^2\rangle - S_2(l)/2\right]d\mathbf{l} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\langle\mathbf{u}^2\rangle\delta(\mathbf{k}) - \frac{1}{(2\pi)^6}\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{ikl\cos\theta}\frac{S_2(l)}{2}l^2\sin\theta d\phi d\theta dl \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\langle\mathbf{u}^2\rangle\delta(\mathbf{k}) - \frac{1}{(2\pi)^6}2\pi\int_0^\infty\frac{1}{2}\left[-\frac{e^{iklx}}{ikl}\right]_{x=-1}^{x=1} l^2S_2(l)dl \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\langle\mathbf{u}^2\rangle\delta(\mathbf{k}) + \frac{1}{(2\pi)^5}\int_0^\infty\sin(kl)\left(\frac{l}{k}\right)S_2(l)dl
\end{aligned} \tag{2.11}$$

En la sustitución $\mathbf{l} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ se ha utilizado la homogeneidad. La isotropía se ha utilizado a la hora de hacer la integral en la esfera. El primer sumando es la energía cinética del movimiento del centro de masa del fluido, que en muchos casos es eliminado con una transformación de Galileo. Haciendo la sustitución x=kl obtenemos

$$E(k) = \frac{1}{2\pi}k^{-1}\int_0^\infty x\sin xS_2(x/k)dx$$

Y utilizando (2.4) para la función de estructura de segundo orden se obtiene

$$\begin{aligned}
E(k) &= \frac{1}{2\pi}k^{-1}\int_0^\infty x\sin xS_2(x/k)dx = \frac{1}{2\pi}k^{-1}\int_0^\infty x\sin x(x/k)^{2/3}\varepsilon^{2/3}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}k^{-5/3}\varepsilon^{2/3}\int_0^\infty x^{5/3}\sin xdx
\end{aligned}$$

Quedando demostrada así la relación (2.5). Centrándonos en la región disipativa, en este conjunto de remolinos el número de Reynolds es 1, lo que nos confirma que la viscosidad es muy relevante en este caso y por eso se disipa la energía.

$$R_e\eta = \frac{\eta u_\eta}{\nu} = \frac{\left(\dfrac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4}(\varepsilon\nu)^{1/4}}{\nu} = 1 \tag{2.12}$$

Las escalas de disipación de energía nos indican el tamaño de los remolinos en donde la energía cinética se disipa en forma de calor. Estas escalas son conocidas como las escalas de disipación de Kolmogorov y son las siguientes:
Escala de longitud

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4} \tag{2.13}$$

Con esto se obtiene el número de onda disipativo

$$K_d = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{-1/4} \tag{2.14}$$

La escala de velocidad disipativa

$$u_\eta = (\varepsilon\nu)^{1/4} \tag{2.15}$$

Y la escala de tiempo disipativa

$$\tau_\eta = \left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{1/2} \tag{2.16}$$

La relación entre las escalas de longitud mayor y menor en el flujo turbulento es proporcional al número de Reynolds.

$$\frac{L}{\eta} \sim \left(\frac{UL}{\nu}\right)^{3/4} = R_e^{3/4}$$

Para elaborar esta teoría de la turbulencia Kolmogorov utilizó una serie de hipótesis que ahora enunciaremos.

- **Hipótesis 1** En el límite del número de Reynolds infinito, todas las posibles simetrías de las ecuaciones de Navier Stokes, son restauradas en un sentido estadístico a escalas pequeñas y fuera de las fronteras. Definimos como escalas pequeñas a las escalas menores que la escala integral ℓ_0.

- **Hipótesis 2** Bajo las mismas condiciones que en la hipótesis 1, el flujo turbulento es auto-similar a escalas pequeñas. Es decir, existe un único exponente $h \in \mathbb{R}$ tal que

$$\delta\mathbf{u}(\mathbf{r}, \lambda\ell) = \lambda^h \delta\mathbf{u}(\mathbf{r}, \ell) \;\; \forall\lambda \in \mathbb{R}^+$$

- **Hipótesis 3** Bajo las mismas condiciones que en las hipótesis anteriores, el flujo turbulento tiene una tasa media de disipación de energía por unidad de masa

$$\varepsilon \sim \frac{u_0^3}{\ell_0}$$

Siendo ℓ_0 la escala integral y u_0 la velocidad asociada a la escala integral.

- **Primera hipótesis de similitud**

  A números muy altos, pero no infinitos del número de Reynolds, todas las propiedades estadísticas de las pequeñas escalas están únicamente determinadas por la escala ℓ, la tasa media de disipación de energía ε, y la viscosidad ν.

  Esta hipótesis nos permite obtener de forma más sencilla la relación (2.5) que a números de onda altos es

  $$E(k) = \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} F(\eta k)$$

  donde F es una función adimensional de argumentos adimensionales. Como sabemos el espectro de energía es $E(k) = F(\eta k)\varepsilon^n k^p$ y tiene por dimensiones $[L]^3 [T]^{-2}$, las dimensiones de la tasa media de disipación de energía ε son $[L]^2 [T]^{-3}$ y la dimensión de k es $[L]^{-1}$. Por tanto, $n = 2/3$ y $p = -5/3$.

  Antes de enunciar la segunda hipótesis de similitud, primero definiremos el promedio de una función periódica de período L, que denotaremos por $\langle . \rangle$, para ello suponemos que el flujo se encuentra en una caja de lado L que llamaremos C_L, se define promedio de f como

  $$\langle f \rangle \equiv \frac{1}{L^3} \int_{C_L} f(\mathbf{r}) \mathbf{dr} \tag{2.17}$$

  Donde f es una función periódica arbitraria.

- **Segunda hipótesis de similitud**

  En el límite del número infinito de Reynolds, todas las propiedades estadísticas a pequeña escala están determinadas únicamente por la escala ℓ y la tasa media de disipación de energía ε.

  Considerando el promedio de la función de estructura de segundo grado $\left\langle (\delta \mathbf{u}(\ell))^2 \right\rangle$, definida como el cuadrado del incremento de velocidad, $\left\langle (\delta \mathbf{u}(\ell))^2 \right\rangle = \left\langle (\mathbf{u}(x + r) - \mathbf{u}(x))^2 \right\rangle$, y haciendo un análisis de las dimensiones de esta cantidad se observa que las dimensiones son $[L]^2 [T]^{-2}$ donde $[L]$ y $[T]$ son las unidades de longitud y tiempo respectivamente. Las dimensiones de la tasa media de disipación de energía, ε, son $[L]^2 [T]^{-3}$, con esto y con la hipótesis 2 obtenemos

  $$\left\langle (\delta \mathbf{u}(\ell))^2 \right\rangle = C \varepsilon^{2/3} \ell^{2/3} \tag{2.18}$$

  Siendo C una constante universal adimensional.

  La teoría K41 fue corregida en 1962 por Kolmogorov y Oboukhov ya que Lev Davidovich Landau observó que la tasa de disipación no podía ser global, más tarde diferentes experimentos contrastaron que no se puede suponer que esta tasa de dispación de energía sea idéntica para todas las escalas menores que la escala integral. Es por esto que en la teoría K62 la tasa de disipación de energía depende de la escala ε_ℓ [6].

2.2.2. Ley de los cuatro quintos de Kolmogorov

En el límite del número de Reynolds infinito, el promedio de la función de estructura de tercer orden de una turbulencia homogénea e isótropa, evaluada en la región inercial para pequeños incrementos de ℓ comparados con la escala integral, viene dada en términos de la tasa media de disipación de energía por

$$\left\langle (\delta u(\ell))^3 \right\rangle = -\frac{4}{5}\varepsilon\ell \tag{2.19}$$

Para deducir la ley de los 4/5 Kolmogorov asumió además de la homogeneidad y la isotropía lo siguiente:

1. La fuerza, que se asume que es también estadísticamente homogénea, estadísticamente isótropa y estadísticamente estacionaria solo actúa en las escalas grandes, a partir de números de onda mas grandes que $k_0 = \dfrac{1}{\ell_0}$, siendo ℓ_0 la escala característica la fuerza no contribuye.
$$f_K^{<}(t,r) \simeq f(t,r),\ \ K > k_0 \tag{2.20}$$
Donde $f_K^{<}(t,r)$ es
$$f_K^{<}(t,r) = \sum_{k\leq K} \widehat{f}_k e^{ik\cdot r}$$
Siendo $\widehat{f}_k$ el coeficiente de la serie de Fourier que se define como
$$\widehat{f}_k = \left\langle e^{-ik\cdot r} f(r) \right\rangle$$

2. Para tiempos grandes, la solución de N-S tiende a un estado estadísticamente estacionario con una media de energía por unidad de masa finita.

3. En el infinito número de Reynolds, la media de energía disipada por unidad de masa $\varepsilon(\nu)$ tiende a un límite finito positivo (Hipótesis 3)
$$\lim_{\nu\to 0} \varepsilon(\nu) = \varepsilon \tag{2.21}$$

4. No se asume invariancia de escala (Hipótesis 1 y 2)

Vamos a mencionar dos ecuaciones importantes para deducir la ley de los 4/5. La ecuación global de energía

$$\partial_t \frac{1}{2}\langle u^2\rangle = \langle f(r)\cdot u(r)\rangle + \nu\langle u(r)\cdot \nabla^2 u(r)\rangle \tag{2.22}$$

Donde en este caso $\langle f\rangle$ representa la media de las cantidades de la función f. Además, se asume que se puede integrar por partes el término convectivo, $\partial_t \frac{1}{2}\langle u^2\rangle$ y así poder anularlo, esto es posible y tiene sentido gracias a la conjetura de Onsager [1], esta conjetura nos confirma que

existe una solución débil de la ecuación anterior que conserva la energía.
Y la otra ecuación que utilizaremos es la ecuación scale-by-scale energy

$$\partial_t E_k + \Pi_k = F_k - 2\nu\Omega_k \tag{2.23}$$

En consecuencia del punto 2, en ambas ecuaciones se omiten los términos de derivadas respecto del tiempo, E_k y F_k hacen referencia a la energía acumulada y la energía inyectada acumulada respectivamente. Con esto se obtienen [5]

$$\langle f \cdot u\rangle = -\nu\langle u \cdot \nabla^2 u\rangle = \varepsilon(\nu) \tag{2.24}$$

$$\Pi_k = F_k - 2\nu\Omega_k \tag{2.25}$$

Además,

$$F_k = \langle f_k^< \cdot u\rangle \simeq \langle f \cdot u\rangle = \varepsilon(\nu) \tag{2.26}$$

Y fijado k,

$$\lim_{\nu\to 0} 2\nu\Omega_k = 0 \tag{2.27}$$

Tomando el límite $\nu \to 0$ en (2.25) y utilizando (2.27) se obtiene

$$\lim_{\nu\to 0} \Pi_k = \varepsilon, \tag{2.28}$$

Para una turbulencia homogénea e isótropa el flujo de energía se puede definir en términos de la función de estructura de tercer orden como

$$\Pi_k = -\frac{1}{6\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(k\ell)}{\ell}(1+\ell\partial_\ell)(3+\ell\partial_\ell)(5+\ell\partial_\ell)\frac{S_3(\ell)}{\ell}d\ell \tag{2.29}$$

Con la expresión anterior, (2.28) y considerando el cambio de variable $x = k\ell$ se obtiene

$$\lim_{\nu\to 0} \Pi_k = -\frac{1}{6\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}F\left(\frac{x}{k}\right)dx = \varepsilon \tag{2.30}$$

Donde

$$F(\ell) \equiv (1+\ell\partial_\ell)(3+\ell\partial_\ell)(5+\ell\partial_\ell)\frac{S_3(\ell)}{6\pi\ell} \tag{2.31}$$

Sabiendo que $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx = \frac{\pi}{2}$ y considerando solo las ℓ pequeñas

$$F(\ell) \simeq -\frac{2}{\pi}\varepsilon \tag{2.32}$$

Sustituyendo el anterior resultado en (2.31) se obtiene una ecuación diferencial ordinaria de tercer orden. Considerando $x = ln(\ell)$ como variable independiente y $G = S_3(\ell)/\ell$ como variable dependiente se obtiene

$$-12\epsilon = (1 + \partial_x)(3 + \partial_x)(5 + \partial_x)G \tag{2.33}$$

Operando llegamos a

$$-12\epsilon = 15G(x) + 23G'(x) + 9G''(x) + G'''(x) \tag{2.34}$$

La solución de esta ecuación es

$$G(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-5x} + C_3 e^{-3x} - \frac{4}{5}\varepsilon \tag{2.35}$$

La única solución que tiende a 0 cuando $\ell \to 0$ es cuando $x \to 0$, esto ocurre si $C_1 = C_2 = C_3 = 0$, por lo tanto

$$S_3(\ell) = -\frac{4}{5}\varepsilon\ell$$

Con esto queda probada la ley de los 4/5.

Capítulo 3

Shell models

Los shell models son sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden que se asemejan a las ecuaciones de Navier Stokes en el espacio de Fourier. No se puede considerar que sean una aproximación de la ecuación de Navier Stokes sino que debemos considerarlos como unas ecuaciones estructuralmente similares. Los shell models además describen la cascada de energía y la teoría K41, y son de gran utilidad porque nos permiten resolver de manera numérica algunos ejemplos de flujos turbulentos.
En los shell models, el espacio de los números de onda se divide en segmentos discretos llamados shells, donde cada shell representa un rango específico de valores de números de onda, esto nos permite representar una amplia gama de escalas de la turbulencia. Estos modelos son una simplificación de los campos de velocidades en una variedad de escalas, lo que permite estudiar la transferencia de energía entre diferentes escalas de forma más manejable desde el punto de vista computacional.
En este capítulo nos centraremos en dos shell models, el GOY y el Sabra, explicaremos las ecuaciones que los describen y demostraremos algunas de sus principales características, para ello nos hemos basado en [3].

3.1. Ecuaciones de Navier Stokes

El movimiento de fluidos incompresibles se describe matemáticamente por las ecuaciones de Navier Stokes, las cuales son nombradas en honor al ingeniero y físico Claude-Louis Navier y al físico y matemático George Gabriel Stokes.
Este sistema de ecuaciones está formado por la ecuación del momento, basada en la segunda ley de Newton, la ecuación de incompresibilidad, que considera nula la divergencia de la velocidad, y la ecuación de continuidad, la cual indica que la cantidad de masa que entra en el sistema es igual a la cantidad de masa que sale del sistema.

La expresión matemática de las ecuaciones de Navier Stokes es la siguiente

$$\partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = \nu \Delta u + f \tag{3.1}$$

$$\nabla \cdot u = 0 \tag{3.2}$$

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho u) = 0 \tag{3.3}$$

Donde $\rho, p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ son los campos escalares de la densidad y la presión y $u, f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}^n$ son los campos vectoriales de la velocidad y las fuerzas externas que actúan sobre el fluido. Siendo $\nu \geq 0$ la viscosidad dinámica del fluido y dada una condición inicial $u(x, 0) = u_0$ nuestras incógnitas son u y p.
Para obtener la transformada de Fourier de la ecuaciones de Navier Stokes partiremos de la ecuación del momento (3.1), suponiendo ausencia de fuerzas externas ($f = 0$), y tomando la divergencia a ambos lados de la igualdad se obtiene

$$\nabla \cdot (\partial_t u) + \nabla \cdot ((u \cdot \nabla) \cdot u) + \nabla \cdot \nabla p = \nu \nabla \cdot (\Delta u)$$

Utilizando que $\Delta = \nabla^2$ y que $\nabla \cdot (\partial_t u) = \partial_t(\nabla \cdot u)$ la expresión anterior es equivalente a

$$\partial_t(\nabla u) + \nabla \cdot ((u \cdot \nabla) \cdot u) + \Delta p = \nu \Delta(\nabla \cdot u)$$

Aplicando (3.2) se tiene

$$\Delta p = -\nabla \cdot ((u \cdot \nabla) \cdot u)$$

Tomando el operador inverso laplaciano $(\Delta)^{-1}$ que se define gracias a la función de Green tal cual puede verse en el libro [4] se obtiene

$$p = -(\Delta)^{-1} \nabla \cdot ((u \cdot \nabla) \cdot u)$$

Sustituyendo ahora en (3.1)

$$\partial_t u = \nabla \cdot (\Delta)^{-1} \nabla \cdot ((u \cdot \nabla) \cdot u) - ((u \cdot \nabla) \cdot u) + \nu \Delta u + f$$

Por último, utilizando que $\mathbb{P}((u \cdot \nabla) \cdot u) = (Id - \nabla \cdot (\Delta)^{-1} \nabla)((u \cdot \nabla) \cdot u)$, siendo $\mathbb{P}$ el proyector de Leray, la ecuación (3.1) queda

$$\partial_t u = -\mathbb{P}((u \cdot \nabla) \cdot u)u + \nu \Delta u + f \tag{3.4}$$

Aplicando la transformada de Fourier a la expresión (3.4) se obtiene

$$\partial_t \widehat{u}(\xi) = -\mathbb{P}(\widehat{(u \cdot \nabla) \cdot u}) + \widehat{\nu\Delta u} + \widehat{f}(\xi)$$

Dada una función f, las transformadas de Fourier de su primera y segunda derivada son $\widehat{f'}(\xi) = i\xi\widehat{f}(\xi)$ y $\widehat{f''}(\xi) = -\xi^2\widehat{f}(\xi)$ respectivamente, aplicando esto a la anterior igualdad y sustituyendo la transformada de Fourier del proyector de Leray se tiene

$$\partial_t \widehat{u}_i(\xi) = -\left(\delta_{il} - \frac{\xi_i\xi_l}{|\xi|^2}\right)(\widehat{(u \cdot \nabla) \cdot u})_i - \nu|\xi|^2\widehat{u}_i(\xi) + \widehat{f}(\xi)$$

Donde δ_{il} es la delta de Kronecker que vale 1 si $i = l$ y 0 en otro caso. Finalmente, desarrollando la transformada de Fourier del término $(\widehat{(u \cdot \nabla) \cdot u})$

$$\partial_t \widehat{u}_i(\xi) = -i\xi_j \int_{\mathbb{R}^3} \left(\delta_{il} - \frac{\xi_i\xi_l}{|\xi|^2}\right) \widehat{u}_j(\eta)\widehat{u}_l(\xi - \eta)d\eta - \nu|\xi|^2\widehat{u}_i(\xi) + \widehat{f}(\xi) \tag{3.5}$$

Considerando el flujo en una caja de tamaño L^3 con condiciones de contorno periódicas, la transformada de Fourier se sustituye por una serie de Fourier y la integral de (3.5) se convierte en una suma, en este caso estamos utilizando el convenio de suma de Einstein

$$\partial_t u_i(\mathbf{n}) = -i\,(2\pi/L)\,n_j \sum_{\overline{\mathbf{n}}} \left(\delta_{il} - \frac{n_i\overline{n_l}}{n_jn_j}\right) u_j(\overline{\mathbf{n}})u_l(\mathbf{n} - \overline{\mathbf{n}}) - \nu n_jn_ju_i(\mathbf{n}) + f_i(\mathbf{n}) \tag{3.6}$$

Donde los vectores de onda son $\mathbf{k}(\mathbf{n}) = 2\pi\mathbf{n}/L$. Esta expresión de las ecuaciones de Navier Stokes es el punto de partida de los shell models.

3.2. GOY model

Como paso previo al estudio del GOY model, veremos el Gledzer model (1973), un sistema infinito de ecuaciones diferenciales ordinarias que se define de la siguiente manera

$$\partial_t u_n = A_n u_{n+1}u_{n+2} + B_n u_{n-1}u_{n+1} + C_n u_{n-2}u_{n-1} - \nu_n u_n \delta_{n>N_d} + f_n \tag{3.7}$$

Donde u_n es una sucesión de funciones reales que dependen solo de un parámetro t y como condiciones de contorno se tienen $u_{-1} = u_0 = 0$
Comparando (3.7) y (3.5) se observa que los coeficientes de interacción A_n, B_n, C_n tienen que tener la dimensión de un número de onda, con esto, se redefinen los coeficientes de interacción como $A_n = k_na_n$, $B_n = k_nb_n$, $C_n = k_nc_n$ donde a_n, b_n, c_n son coeficientes de interacción adimensionales y se obtiene

$$\partial_t u_n = k_na_nu_{n+1}u_{n+2} + k_nb_nu_{n-1}u_{n+1} + k_nc_nu_{n-2}u_{n-1} \tag{3.8}$$

Para que esta expresión sea idéntica a la parte no viscosa de (3.7) los coeficientes de interacción deben ser independientes del número de onda n, $a_n = \tilde{a}, b_n = \tilde{b}, c_n = \tilde{c}$, esto no es extraño ya que se impone que en el shell model se tiene que cumplir la invariancia de escala. Con esto, introduciendo la disipación dimensionalmente correcta y las fuerzas externas podemos reescribir la ecuación

$$\partial_t u_n = k_n \left(\tilde{a} u_{n+1} u_{n+2} + \tilde{b} u_{n-1} u_{n+1} + \tilde{c} u_{n-2} u_{n-1} \right) - \nu k_n^2 u_n + f_n \tag{3.9}$$

El shell model se construye de manera que la energía cinética, definida como $E = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n u_n}{2}$ sea un invariante no viscoso, por tanto su derivada temporal se debe anular, suponiendo ausencia de fuerzas y viscosidad, $\nu = f = 0$, y utilizando (3.9) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E &= \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n u_n}{2} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n \frac{d}{dt} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \left(\tilde{a} u_n u_{n+1} u_{n+2} + \tilde{b} u_{n-1} u_n u_{n+1} + \tilde{c} u_{n-2} u_{n-1} u_n \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} k_n \tilde{a} u_n u_{n+1} u_{n+2} + \sum_{n=1}^{\infty} k_n \tilde{b} u_{n-1} u_n u_{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} k_n \tilde{c} u_{n-2} u_{n-1} u_n = 0 \end{aligned} \tag{3.10}$$

El sumatorio comienza con $n = 1$ ya que el término para $n = 0$ es nulo debido a las condiciones de contorno. Modificando los índices de los dos últimos sumatorios y usando las condiciones de contorno se tiene

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} k_n \tilde{b} u_{n-1} u_n u_{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} k_n \tilde{c} u_{n-2} u_{n-1} u_n \\ &= \sum_{j=-1}^{\infty} k_{j+1} \tilde{b} u_j u_{j+1} u_{j+2} + \sum_{j=-2}^{\infty} k_{j+2} \tilde{c} u_j u_{j+1} u_{j+2} \\ &= k_0 \tilde{b} u_{-1} u_0 u_1 + k_1 \tilde{b} u_0 u_1 u_2 + \sum_{j=1}^{\infty} k_{j+1} \tilde{b} u_j u_{j+1} u_{j+2} \\ &+ k_0 \tilde{c} u_{-2} u_{-1} u_0 + k_1 \tilde{c} u_{-1} u_0 u_1 + k_2 \tilde{c} u_0 u_1 u_2 + + \sum_{j=1}^{\infty} k_{j+2} \tilde{c} u_j u_{j+1} u_{j+2} \end{aligned} \tag{3.11}$$

Con esto, aplicado a (3.10) obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(k_n \tilde{a} + k_{n+1} \tilde{b} + k_{n+2} \tilde{c} \right) u_n u_{n+1} u_{n+2} = 0 \tag{3.12}$$

Como podemos tener distintos conjuntos de velocidades iniciales para poder garantizar que la energía sea un invariante no viscoso tiene que cumplirse

$$k_n \tilde{a} + k_{n+1} \tilde{b} + k_{n+2} \tilde{c} = 0 \tag{3.13}$$

Por último se definen los números de onda

$$k_n = k_0\lambda^n \tag{3.14}$$

donde λ es un número mayor que 1 llamado espaciado shell. Esto nos indica que el espacio espectral cubierto por los shells crece exponencialmente con el número shell n. Sustituyendo esta forma de los números de onda en (3.13) se tiene

$$k_n(\tilde{a} + \tilde{b}\lambda + \tilde{c}\lambda^2) = 0 \tag{3.15}$$

Definiendo $a = \tilde{a}$, $b = \tilde{b}\lambda$ y $c = \tilde{c}\lambda^2$ obtenemos

$$a + b + c = 0 \tag{3.16}$$

El GOY model, también conocido como Gledzer-Okhitani-Yamada model se basa en el Gledzer model pero definiendo las velocidades como números complejos. Se utilizan números complejos porque el objetivo es que la velocidad recorra rápidamente todas las partes del atractor, para ello se considera que el número óptimo de grados de libertad por shell debe ser 2 en lugar de 1. El número de grados de libertad se define como la dimensión del atractor [5], el atractor en física se puede definir como un conjunto de estados o valores numéricos a los que tiende a evolucionar un sistema dinámico. Para que la velocidad en un shell dado cambie de signo, tiene que desaparecer en el caso de las velocidades reales, mientras que si la velocidad es compleja puede mantener un módulo constante y cambiar el signo de la parte real.
En la transformada de Fourier de la ecuación de Navier Stokes aparece una i multiplicando debido a que la transformada de Fourier del gradiente ∂_i es ik_i, esto explica que es normal multiplicar por la unidad imaginaria la parte no lineal de la ecuación del shell model. La energía cinética para velocidades complejas se define como $E = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n u_n^*}{2}$ siendo u_n^* el conjugado complejo de u_n con lo que en la ecuación del shell model deben aparecer conjugaciones complejas. De tal manera que la forma final de la ecuación del GOY model es

$$\partial_t u_n = ik_n \left(a u_{n+1} u_{n+2} + \frac{b}{\lambda} u_{n-1} u_{n+1} + \frac{c}{\lambda^2} u_{n-2} u_{n-1} \right)^* - \nu k_n^2 u_n + f_n \tag{3.17}$$

donde a, b y c son constantes reales que verifican $a + b + c = 0$. Dividiendo la ecuación por a y absorbiéndola en la unidad de tiempo y en las constantes de los términos ν y f podemos eliminar la constante a siendo $\overline{\nu} = \frac{\nu}{a}$, $\overline{f_n} = \frac{f_n}{a}$,$\overline{t} = ta$, definiendo $b = -\epsilon$ y sustituyendo en (3.16) obtenemos $c = \epsilon - 1$. Con esto obtenemos la siguiente ecuación para el GOY model

$$\partial_{\overline{t}} u_n = ik_n \left(u_{n+1} u_{n+2} - \frac{\epsilon}{\lambda} u_{n-1} u_{n+1} + \frac{\epsilon - 1}{\lambda^2} u_{n-2} u_{n-1} \right)^* - \overline{\nu} k_n^2 u_n + \overline{f_n} \tag{3.18}$$

3.2.1. Invariantes cuadráticos

En esta sección trataremos de obtener todos los invariantes cuadráticos del GOY shell model, estos invariantes solo se diferencian en la potencia a la que esté elevado el número de onda k_n, es por eso que los invariantes cuadráticos del shell model son de la forma

$$E^{\alpha_i} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} k_n^{\alpha_i}|u_n|^2 \tag{3.19}$$

Donde $i \in \{1, .., p\}$ siendo p el número de invariantes cuadráticos. Para simplificar la notación, a partir de ahora escribiremos α en lugar de α_i.
De manera más generalizada, sabiendo que el número de onda k_n por definición es $k_n = k_0\lambda^n$ los invariantes se pueden expresar como

$$E(\lambda^\alpha) = \frac{1}{2}k_0^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n\alpha}|u_n|^2 \tag{3.20}$$

Como $E(\lambda^\alpha)$ es un invariante su derivada temporal debe ser cero, suponiendo ausencia de fuerzas y viscosidad, $\nu = f = 0$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}E(\lambda^\alpha) &= \frac{1}{2}k_0^\alpha \frac{d}{dt}\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n\alpha} u_n u_n^* \\
&= k_0^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n\alpha} u_n^* \frac{d}{dt} u_n \\
&= k_0^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n\alpha} i k_n u_n^* \left(u_{n+1}u_{n+2} - \frac{\epsilon}{\lambda}u_{n-1}u_{n+1} + \frac{(\epsilon-1)}{\lambda^2}u_{n-2}u_{n-1}\right)^* \\
&= ik_0^\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n\alpha} k_n u_n^* u_{n+1}^* u_{n+2}^* - ik_0^\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{\lambda}\lambda^{n\alpha} k_n u_n^* u_{n-1}^* u_{n+1}^* \\
&+ ik_0^\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\epsilon-1)}{\lambda^2}\lambda^{n\alpha} k_n u_n^* u_{n-2}^* u_{n-1}^* = 0
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Modificando el índice del primer y tercer sumando

$$\begin{aligned}
&ik_0^\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n\alpha} k_n u_n^* u_{n+1}^* u_{n+2}^* + ik_0^\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\epsilon-1)}{\lambda^2} \lambda^{n\alpha} k_n u_n^* u_{n-2}^* u_{n-1}^* \\
&= ik_0^\alpha \sum_{j=-1}^{\infty} \lambda^{(j-1)\alpha} k_{j-1} u_{j-1}^* u_j^* u_{j+1}^* + ik_0^\alpha \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\epsilon-1)}{\lambda^2} \lambda^{(j+1)\alpha} k_{j+1} u_{j+1}^* u_{j-1}^* u_j^* \\
&= ik_0^\alpha \lambda^{-2\alpha} k_{-2} u_{-2}^* u_{-1}^* u_0^* + ik_0^\alpha \lambda^{-\alpha} k_{-1} u_{-1}^* u_0^* u_1^* + ik_0^\alpha \lambda^0 k_0 u_0^* u_1^* u_2^* \\
&+ ik_0^\alpha \sum_{j=2}^{\infty} \lambda^{(j-1)\alpha} k_{j-1} u_{j-1}^* u_j^* u_{j+1}^* + ik_0^\alpha \frac{(\epsilon-1)}{\lambda^2} \lambda^{2\alpha} k_2 u_2^* u_0^* u_1^* \\
&+ ik_0^\alpha \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(\epsilon-1)}{\lambda^2} \lambda^{(j+1)\alpha} k_{j+1} u_{j+1}^* u_{j-1}^* u_j^* \\
&= ik_0^\alpha \sum_{j=2}^{\infty} \lambda^{(j-1)\alpha} k_{j-1} u_j^* u_{j-1}^* u_{j+1}^* + ik_0^\alpha \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(\epsilon-1)}{\lambda^2} \lambda^{(j+1)\alpha} k_{j+1} u_j^* u_{j-1}^* u_{j+1}^*
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Con la expresión anterior y sabiendo que el término para $n = 1$ del segundo sumando de (3.21) es 0 por las condiciones de contorno

$$ik_0^\alpha \sum_{n=2}^{\infty} \left(\lambda^{(n-1)\alpha} k_{n-1} - \frac{\epsilon}{\lambda} \lambda^{n\alpha} k_n + \frac{(\epsilon-1)}{\lambda^2} \lambda^{(n+1)\alpha} k_{n+1} \right) u_n^* u_{n-1}^* u_{n+1}^* = 0 \tag{3.23}$$

Para garantizar que la derivada sea 0, ha de verificarse

$$\lambda^{(n-1)\alpha} k_{n-1} - \frac{\epsilon}{\lambda} \lambda^{n\alpha} k_n + \frac{(\epsilon-1)}{\lambda^2} \lambda^{(n+1)\alpha} k_{n+1} = 0 \tag{3.24}$$

Anteriormente hemos definido los números de onda k_n como $k_n = k_0 \lambda^n$, aplicando está definición a (3.24) llegamos a

$$\begin{aligned}
\lambda^{(n-1)\alpha} k_0 \lambda^{n-1} - \frac{\epsilon}{\lambda} \lambda^{n\alpha} k_0 \lambda^n + \frac{(\epsilon-1)}{\lambda^2} \lambda^{(n+1)\alpha} k_0 \lambda^{n+1} &= k_0 \lambda^n \left(\frac{1}{\lambda} \lambda^{(n-1)\alpha} - \frac{\epsilon}{\lambda} \lambda^{n\alpha} + \frac{(\epsilon-1)}{\lambda} \lambda^{(n+1)\alpha} \right) \\
&= k_0 \lambda^{n-1} \lambda^{(n-1)\alpha} \left(1 - \epsilon \lambda^\alpha + (\epsilon-1) \lambda^{2\alpha} \right) = 0
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Como $k_0 \lambda^{n-1} \lambda^{(n-1)\alpha}$ no se anula, concluimos que la derivada temporal de E^α se anula si

$$1 - \epsilon \lambda^\alpha + (\epsilon-1) \lambda^{2\alpha} = 0 \tag{3.26}$$

Nuestra incógnita es λ^α, haciendo el cambio de variable $\lambda^\alpha = z$, obtenemos

$$1 - \epsilon z + (\epsilon-1) z^2 = 0 \tag{3.27}$$

Las soluciones de esta ecuación son 1 y $(1/\epsilon - 1)$. Por tanto, los dos únicos invariantes cuadráticos se pueden representar como E(1) y $E\left(1/(\epsilon-1)\right)$, el primero es

$$E(1) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^2 \tag{3.28}$$

Siendo $E(1)$ la energía cinética y de lo que se deduce que $\alpha_1 = 0$. El segundo invariante cuadrático es

$$E(1/\epsilon - 1) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\epsilon-1}\right)^n |u_n|^2 \tag{3.29}$$

Donde E$(1/\epsilon - 1)$ es la helicidad y ahora obtendremos el valor de α_2. Hemos obtenido que

$$\lambda^{\alpha_2} = \frac{1}{\epsilon - 1} \tag{3.30}$$

Tomando logartimos a ambos lados de la igualdad

$$\log \lambda^{\alpha_2} = \log\left(\frac{1}{\epsilon-1}\right) \tag{3.31}$$

Aplicando ahora las propiedades de los logarirmos obtenemos

$$\alpha_2 \log \lambda = \log 1 - \log\left(\epsilon - 1\right) \tag{3.32}$$

Despejando obtenemos el valor buscado

$$\alpha_2 = \frac{-\log\left(\epsilon-1\right)}{\log \lambda} \tag{3.33}$$

3.2.2. Existencia de solución del GOY model

Para poder demostrar la existencia de solución del sistema del GOY model primero enunciaremos el principal teorema que vamos a utilizar [7]

Teorema 3.1 (Teorema de Picard en un espacio de Banach) *Sea $O \subseteq B$ un abierto contenido en un espacio de Banach B y sea $F : O \longrightarrow B$ una función que satisface:*

1. *F(X) asigna O a B*
2. *F es una función continua y localmente Lipschitz, es decir, para todo $X \in O$ existe $L > 0$ y un entorno $U_X \subset O$ de X tal que*

$$\|F(\widetilde{X}) - F(\widehat{X})\|_B \leq L\|\widetilde{X} - \widehat{X}\|_B \quad \forall \widetilde{X}, \widehat{X} \in U_X$$

Entonces para todo $X_0 \in O$, existe un tiempo T tal que el sistema

$$\frac{dX}{dt} = F(X) \qquad X|_{t=0} = X_0$$

tiene una única solución local $X \in C^1\left[(-T, T); O\right]$

Para poder demostrar de manera más sencilla la existencia de soluciones, utilizaremos el teorema de Picard y después estudiaremos las soluciones obtenidas, que veremos que forman un sucesión de Cauchy.
Suponiendo ausencia de fuerzas y proyectando el sistema del GOY model a un sistema finito de orden N, donde suponemos $u_j = 0 \quad \forall j > N$ se obtiene P_N

$$\begin{cases} \partial_t u_n^N = ik_n \left(a u_{n+1}^N u_{n+2}^N + \dfrac{b}{\lambda} u_{n-1}^N u_{n+1}^N + \dfrac{c}{\lambda^2} u_{n-2}^N u_{n-1}^N \right)^* - \nu k_n^2 u_n^N \\ u_{-1}^N = 0 \\ u_0^N = 0 \\ u_{N+1}^N = 0 \\ u_{N+2}^N = 0 \\ u_n^N(0) = P_N u^{(0)} = u(0) \qquad \text{si} \quad 1 \leq n \leq N \end{cases} \tag{3.34}$$

Primero veremos que P_N tiene solución aplicando el Teorema de Picard, para ello definimos

$$F(u^N) = ik_n \left(a u_{n+1}^N u_{n+2}^N + \frac{b}{\lambda} u_{n-1}^N u_{n+1}^N + \frac{c}{\lambda^2} u_{n-2}^N u_{n-1}^N \right)^* - \nu k_n^2 u_n^N$$

$$B = l^2 = \left\{ u_n \quad : \quad \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^2 < +\infty \right\}$$

con norma $\|u_n\|_B = (\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^2)^{1/2}$ y producto escalar $(u,v)_B = \sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n^*$
Definimos también

$$O = \{u_n \in l^2 \quad con \quad \|u\|_{l^2} \leq 4\|P_N u^{(0)}\|_{l^2}\}$$

y el espacio

$$H = \left\{ u_n \in l^2 \quad con \quad \sum_{n=1}^{\infty} k_n^2 |u_n|^2 < +\infty \right\}$$

y la norma de H definida como $\|u_n\|_H = (\sum_{n=1}^{\infty} k_n^2 |u_n|^2)^{1/2}$
Para poder aplicar el Teorema de Picard a la función $F(u^N)$ primero debemos demostrar que es una función Lipschitz, para ello comprobaremos que cada término de la función es Lipschitz

$$\begin{aligned}
&\|ik_n(au_{n+1}^N u_{n+2}^N)^* - k_n(av_{n+1}^N v_{n+2}^N)^*\|_B \\
&= \|k_n(au_{n+1}^N u_{n+2}^N) - k_n(av_{n+1}^N v_{n+2}^N) + k_n a u_{n+1}^N v_{n+2}^N - k_n a u_{n+1}^N v_{n+2}^N\|_B \\
&\leq |k_{N+2}|\|(au_{n+1}^N u_{n+2}^N) - (av_{n+1}^N v_{n+2}^N) + a u_{n+1}^N v_{n+2}^N - a u_{n+1}^N v_{n+2}^N\|_B \\
&= |k_{N+2}||a|\|u_{n+1}^N(u_{n+2}^N - v_{n+2}^N) + v_{n+2}^N(u_{n+1}^N - v_{n+1}^N)\|_B \\
&\leq |k_{N+2}||a| \left(\|u_{n+1}^N(u_{n+2}^N - v_{n+2}^N)\|_B + \|v_{n+2}^N(u_{n+1}^N - v_{n+1}^N)\|_B\right) \\
&\leq |k_{N+2}||a| \left(\|u_{n+1}^N\|_{l^\infty}\|u_{n+2}^N - v_{n+2}^N\|_B + \|v_{n+2}^N\|_{l^\infty}\|u_{n+1}^N - v_{n+1}^N\|_B\right) \\
&\leq |k_{N+2}||a|\|u_n^N\|_{l^\infty}\|v_n^N\|_{l^\infty}\|u_n^N - v_n^N\|_B
\end{aligned} \tag{3.35}$$

$$\begin{aligned}
&\|ik_n(\frac{b}{\lambda}u_{n-1}^N u_{n+1}^N)^* - k_n(\frac{b}{\lambda}v_{n-1}^N v_{n+1}^N)^*\|_B \\
&= \|k_n(\frac{b}{\lambda}u_{n-1}^N u_{n+1}^N) - k_n(\frac{b}{\lambda}v_{n-1}^N v_{n+1}^N) + k_n\frac{b}{\lambda}u_{n-1}^N v_{n+1}^N - k_n\frac{b}{\lambda}u_{n-1}^N v_{n+1}^N\|_B \\
&\leq |k_{N+2}|\|(\frac{b}{\lambda}u_{n-1}^N u_{n+1}^N) - (\frac{b}{\lambda}v_{n-1}^N v_{n+1}^N) + \frac{b}{\lambda}u_{n-1}^N v_{n+1}^N - \frac{b}{\lambda}u_{n-1}^N v_{n+1}^N\|_B \\
&= |k_{N+2}||\frac{b}{\lambda}|\|u_{n-1}^N(u_{n+}^N - v_{n+1}^N) + v_{n+1}^N(u_{n-1}^N - v_{n-1}^N)\|_B \\
&\leq |k_{N+2}||\frac{b}{\lambda}| \left(\|u_{n-1}^N(u_{n+1}^N - v_{n+1}^N)\|_B + \|v_{n+1}^N(u_{n-1}^N - v_{n-1}^N)\|_B\right) \\
&\leq |k_{N+2}||\frac{b}{\lambda}| \left(\|u_{n-1}^N\|_{l^\infty}\|u_{n+1}^N - v_{n+1}^N\|_B + \|v_{n+1}^N\|_{l^\infty}\|u_{n-1}^N - v_{n-1}^N\|_B\right) \\
&\leq |k_{N+2}||\frac{b}{\lambda}|\|u_n^N\|_{l^\infty}\|v_n^N\|_{l^\infty}\|u_n^N - v_n^N\|_B
\end{aligned} \tag{3.36}$$

$$
\begin{aligned}
&\|ik_n(\frac{c}{\lambda^2}u_{n-2}^N u_{n-1}^N)^* - k_n(\frac{c}{\lambda^2}v_{n-2}^N v_{n-1}^N)^*\|_B \\
&= \|k_n(\frac{c}{\lambda^2}u_{n-2}^N u_{n-1}^N) - k_n(\frac{c}{\lambda^2}v_{n-2}^N v_{n-1}^N) + k_n\frac{c}{\lambda^2}u_{n-2}^N v_{n-1}^N - k_n\frac{c}{\lambda^2}u_{n-2}^N v_{n-1}^N\|_B \\
&\leq |k_{N+2}|\|(\frac{c}{\lambda^2}u_{n-2}^N u_{n-1}^N) - (\frac{c}{\lambda^2}v_{n-2}^N v_{n-1}^N) + \frac{c}{\lambda^2}u_{n-2}^N v_{n-1}^N - \frac{c}{\lambda^2}u_{n-2}^N v_{n-1}^N\|_B \\
&= |k_{N+2}||\frac{c}{\lambda^2}|\|u_{n-2}^N(u_{n-1}^N - v_{n-1}^N) + v_{n-1}^N(u_{n-2}^N - v_{n-2}^N)\|_B \qquad (3.37) \\
&\leq |k_{N+2}||\frac{c}{\lambda^2}|\left(\|u_{n-2}^N(u_{n-1}^N - v_{n-1}^N)\|_B + \|v_{n-1}^N(u_{n-2}^N - v_{n-2}^N)\|_B\right) \\
&\leq |k_{N+2}||\frac{c}{\lambda^2}|\left(\|u_{n-2}^N\|_{l^\infty}\|u_{n-1}^N - v_{n-1}^N\|_B + \|v_{n-1}^N\|_{l^\infty}\|u_{n-2}^N - v_{n-2}^N\|_B\right) \\
&\leq |k_{N+2}||\frac{c}{\lambda^2}|\|u_n^N\|_{l^\infty}\|v_n^N\|_{l^\infty}\|u_n^N - v_n^N\|_B
\end{aligned}
$$

$$\|\nu k_n^2 u_n^N - \nu k_n^2 v_n^N\|_B \leq |\nu||k_{N+2}^2|\|u_n^N - v_n^N\|_B \qquad (3.38)$$

Para obtener estas desigualdades, se ha utilizado la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Hemos acotado los k_n por k_{N+2} ya que por definición, $k_n = k_0\lambda^n$ con lo que $k_{N+2} = k_0\lambda^{N+2}$ va a ser siempre una cota superior de todos los k_n porque $\lambda^n \leq \lambda^{N+2}$ para cualquier $n \in [1, N]$. Con esto se ha demostrado que cada término es Lipschitz, por tanto podemos concluir

$$\|F(u_n^N) - F(v_n^N)\|_B = L\|u_n^N - v_n^N\|_B \quad \text{con} \quad L = L(N, \|u_n^N\|_B, \|v_n^N\|_B) = L(N, O) \qquad (3.39)$$

Y entonces P_N tiene solución hasta un tiempo de existencia T_N en el intervalo $[0, T]$, una vez demostrado que existe solución, veremos una cota para la parte no viscosa de $F(u_n^N)$ utilizando la idea de [2]

$$
\begin{aligned}
&\|ik_n\left(au_{n+1}^N u_{n+2}^N + \frac{b}{\lambda}u_{n-1}^N u_{n+1}^N + \frac{c}{\lambda^2}u_{n-2}^N u_{n-1}^N\right)^*\|_B^2 \\
&= \sum_{n=1}^{N}|k_n\left(au_{n+1}^N v_{n+2}^N + \frac{b}{\lambda}u_{n-1}^N v_{n+1}^N + \frac{c}{\lambda^2}u_{n-2}^N v_{n-1}^N\right)^*|^2 \leq C_1^2\|u_n^N\|_H^2\|v_n^N\|_B^2
\end{aligned} \qquad (3.40)
$$

Donde $C_1 = |a + \frac{b}{\lambda} + \frac{c}{\lambda^2}|$. A continuación daremos una estimación para el tiempo de existencia del sistema. Tomando el producto escalar de la ecuación de P_N y el conjugado de u_n^N obtenemos

$$\frac{1}{2}\partial_t\|u_n^N\|_B^2 = -\nu\|u_n^N\|_H^2 \qquad (3.41)$$

Ya que el otro sumando se anula por como está definido el shell model. De (3.41) se deduce

$$\frac{1}{2}\partial_t\|u_n^N\|_B^2 \leq 0 \qquad (3.42)$$

Lo que nos indica que la solución de P_N pertenece a B para cualquier tiempo t. Por como hemos definido el espacio B, sabemos que integrando

$$\|u_n^N\|_B^2 \leq \|u(0)\|_B^2 \qquad \forall t > 0 \tag{3.43}$$

Con esto queda claro que fijado un m en el intervalo $[0, T]$, el lim $\sup_{s\to T_N^-} |u(s)|_B^2 < \infty$, luego el intervalo de existencia más grande de nuestro problema es $[0, T)$, integrando (3.43) en el intervalo $[0, T]$ obtenemos

$$\|u_n^N(T)\|_B^2 + \nu \int_0^T \|u_n^N(s)\|_H^2 ds \leq \|u(0)\|_B^2 \tag{3.44}$$

A continuación vamos a dar un cota uniforme para $\|u_n^N(t)\|_H^2 \quad \forall t \in [0, T]$. Haciendo el producto escalar de la ecuación (3.77) con $k_n^2 u_n^N$ y utilizando las desigualdades de Cauchy-Schwarz y Young

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\partial_t \|u_n^N\|_H^2 + \nu \|k_n^2 u_n^N\|_H^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} i k_n \left(a u_{n+1}^N u_{n+2}^N + \frac{b}{\lambda} u_{n-1}^N u_{n+1}^N + \frac{c}{\lambda^2} u_{n-2}^N u_{n-1}^N \right)^* k_n^2 u_n^N \\ &\leq C_1 \|u_n^N\|_H \|u_n^N\|_B \|k_n^2 u_n^N\|_H \leq \frac{C_1^2}{2\nu} \|u_n^N\|_H^2 \|u_n^N\|_B^2 + \frac{\nu}{2} \|k_n^2 u_n^N\|_H^2 \end{aligned} \tag{3.45}$$

Multiplicando la desigualdad anterior por dos y agrupando términos obtenemos entonces

$$\partial_t \|u_n^N\|_H^2 + \nu \|k_n^2 u_n^N\|_H^2 \leq \frac{C_1^2}{\nu} \|u_n^N\|_H^2 \|u_n^N\|_B^2 \tag{3.46}$$

De donde se tiene

$$\partial_t \|u_n^N\|_H^2 - \frac{C_1^2}{\nu} \|u_n^N\|_B^2 \|u_n^N\|_H^2 \leq 0 \tag{3.47}$$

Multiplicando por el factor integrante $e^{\left(-\frac{C_1^2}{\nu} \int_{t_0}^t \|u_n^N(s)\|_B^2 ds\right)}$, para algún $0 \leq t_0 \leq t$

$$e^{\left(-\frac{C_1^2}{\nu} \int_{t_0}^t \|u_n^N(s)\|_B^2 ds\right)} \partial_t \|u_n^N\|_H^2 - e^{\left(-\frac{C_1^2}{\nu} \int_{t_0}^t \|u_n^N(s)\|_B^2 ds\right)} \frac{C_1^2}{\nu} \|u_n^N\|_B^2 \|u_n^N\|_H^2 \leq 0 \tag{3.48}$$

La expresión anterior es igual a

$$\partial_t \left(e^{\left(-\frac{C_1^2}{\nu} \int_{t_0}^t \|u_n^N(s)\|_B^2 ds\right)} \|u_n^N\|_H^2 \right) \leq 0 \tag{3.49}$$

Integrando ahora entre t_0 y t

$$e^{\left(-\dfrac{C_1^2}{\nu}\int_{t_0}^{t}\|u_n^N(s)\|_B^2 ds\right)}\|u_n^N(t)\|_H^2 - e^{\left(-\dfrac{C_1^2}{\nu}\int_{t_0}^{t}\|u_n^N(s)\|_B^2 ds\right)}\|u_n^N(t_0)\|_H^2 \leq 0 \tag{3.50}$$

Sabiendo que $e^{\left(-\dfrac{C_1^2}{\nu}\int_{t_0}^{t}\|u_n^N(s)\|_B^2 ds\right)}\|u_n^N(t_0)\|_H^2 \leq \|u_n^N(t_0)\|_H^2$ y despejando $\|u_n^N(t)\|_H^2$

$$\|u_n^N(t)\|_H^2 \leq e^{\left(\dfrac{C_1^2}{\nu}\int_{t_0}^{t}\|u_n^N(s)\|_B^2 ds\right)}\|u_n^N(t_0)\|_H^2 \tag{3.51}$$

Una vez conseguida una cota para $\|u_n^N(t)\|_H^2$, previamente hemos demostrado que la norma de B decae por tanto la norma de H decae también y entonces sabemos que la cota para $\|u_n^N(t_0)\|_H^2$ es cuando $t_0 = 0$, $\|u_n^N(t_0)\|_H^2 \leq \|u(0)\|_H^2$ y además la cota para $\|u_n^N(t)\|_B^2$ es (3.43), aplicando estas cotas obtenemos

$$\|u_n^N(t)\|_H^2 \leq e^{\left(\dfrac{C_1^2}{\nu}(t-t_0)\|u(0)\|_B^2\right)}\|u(0)\|_H^2 \tag{3.52}$$

Por último, sabemos que $t - t_0 \leq T$ luego nuestra cota es

$$\|u_n^N(t)\|_H^2 \leq e^{\left(\dfrac{C_1^2}{\nu}T\|u(0)\|_B^2\right)}\|u(0)\|_H^2 \tag{3.53}$$

Acabamos de demostrar que nuestro problema P_N tiene una única solución y además que está formada por una sucesión acotada en B y en H. Ahora veamos que esta sucesión es una sucesión de Cauchy. Para ello tomaremos u_n^N y v_n^M, con $M > N$ que sabemos que

$$\begin{aligned}\partial_t u_n^N &= ik_n(au_{n+1}^N u_{n+2}^N + \frac{b}{\lambda}u_{n-1}^N u_{n+1}^N + \frac{c}{\lambda^2}u_{n-2}^N u_{n-1}^N)^* - \nu k_n^2 u_n^N \\ \partial_t v_n^M &= ik_n(av_{n+1}^M v_{n+2}^M + \frac{b}{\lambda}v_{n-1}^M v_{n+1}^M + \frac{c}{\lambda^2}v_{n-2}^M v_{n-1}^M)^* - \nu k_n^2 v_n^M\end{aligned} \tag{3.54}$$

Ahora veremos su diferencia que denotamos por $w_n = u_n^N - v_n^M$, entonces

$$w_n = \begin{cases} u_n^N - v_n^M \text{ si } n \leq N \\ -v_n^M \text{ si } n > N \end{cases} \tag{3.55}$$

Desarrollando los términos anteriores tenemos

$$\partial_t w_n = ik_n \begin{cases} a(u_{n+1}^N u_{n+2}^N - v_{n+1}^M v_{n+2}^M)^* + \dfrac{b}{\lambda}(u_{n-1}^N u_{n+1}^N - v_{n-1}^M v_{n+1}^M)^* + \\ \dfrac{c}{\lambda^2}(u_{n-2}^N u_{n-1}^N - v_{n-2}^M v_{n-1}^M)^* - \nu k_n^2 (u_n^N - v_n^M) \quad \text{si } n \leq N \\ -\left(a(v_{n+1}^M v_{n+2}^M) + \dfrac{b}{\lambda}(v_{n-1}^M v_{n+1}^M) + \dfrac{c}{\lambda^2}(v_{n-2}^M v_{n-1}^M)\right)^* + \nu k_n^2 v_n^M \text{ si } n > N \end{cases} \tag{3.56}$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} &u_{n-1}^N u_{n+1}^N - v_{n-1}^M v_{n+1}^M = u_{n-1}^N u_{n+1}^N - v_{n-1}^M v_{n+1}^M + u_{n-1}^N v_{n+1}^M - u_{n-1}^N v_{n+1}^M = \\ &u_{n-1}^N (u_{n+1}^N - v_{n+1}^M) + v_{n+1}^M (u_{n-1}^N - v_{n-1}^M) = u_{n-1}^N w_{n+1} + v_{n+1}^M w_{n-1} \end{aligned} \tag{3.57}$$

Haciendo el producto escalar de (3.56) con w_n a los términos con $n \leq N$ y aplicando la expresión anterior, que se puede usar de manera análoga para lo tres sumandos, se obtiene

$$\begin{aligned} &\partial_t \|w_n\|_B^2 = \|ik_n(a(u_{n+1}^N w_{n+2} w_n + v_{n+2}^M w_{n+1} w_n) + \frac{b}{\lambda}(u_{n-1}^N w_{n+1} w_n + v_{n+1}^M w_{n-1} w_n) + \\ &\frac{c}{\lambda^2}(u_{n-2}^N w_{n-1} w_n + v_{n-1}^M w_{n-2} w_n))^* - \nu k_n^2 w_n w_n^* \|_B^2 \leq C_1(\|k_n u_n^N\|_{\ell^\infty} + \|k_n v_n^M\|_{\ell^\infty})\|w_n\|_B^2 \end{aligned} \tag{3.58}$$

Multiplicando por el factor integrante $e^{-(\int_0^t C_1(\|k_n u_n^N(s)\|_{\ell^\infty} + \|k_n v_n^M(s)\|_{\ell^\infty})ds)}$, que para facilitar la escritura denotamos por $e^{-(\int_0^t C_1 p(s)ds)}$ e integrando obtenemos

$$e^{(-\int_0^t C_1 p(s)ds)}\|w_n(t)\|_B^2 - e^{(-\int_0^t C_1 p(s)ds)}\|w_n(0)\|_B^2 \leq 0 \tag{3.59}$$

Despejando y sabiendo que $e^{(-\int_0^t C_1 p(s)ds)}\|w_n(0)\|_B^2 \leq \|w_n(0)\|_B^2$ obtenemos lo siguiente

$$\|w_n\|_B^2 \leq e^{\int_0^t C_1(\|k_n u_n^N\|_{\ell^\infty} + \|k_n v_n^M\|_{\ell^\infty})dt}\|w_n(0)\|_B^2 \tag{3.60}$$

Por lo tanto, tomando N y M suficientemente grandes, la expresión de la derecha se hace cada vez un valor tan pequeño como se quiera.

Centrándonos ahora en los términos con $n > N$, la expresión de la derecha, como solo involucra términos de la sucesión v_n^M, sabemos que está acotada por las cotas realizadas anteriormente, luego haciendo el producto escalar con el conjugado de v_n^M de la expresión para $n > N$ obtenemos

$$\frac{1}{2}\partial_t \|w_n\|_B^2 = -\nu \|v_n^M\|_H^2 \tag{3.61}$$

Entonces $\frac{1}{2}\partial_t \|w_n\|_B^2 \leq 0$ por lo tanto si integramos esta expresión entre 0 y t

$$\|w_n\|_B^2 \leq \|v_n(0)\|_B^2 \tag{3.62}$$

Por lo tanto acabamos de demostrar que la diferencia de nuestras dos sucesiones tomadas a medida que aumentemos la N y la M es cada vez menor luego se trata de una sucesión de Cauchy, como estamos en un espacio de Banach, esta sucesión converge a un límite dentro de ese mismo espacio

$$\lim_{N\to\infty} u_n^N = u \tag{3.63}$$

Así el límite anterior será la solución de nuestro GOY model, por lo tanto u es un vector de dimension infinita que en cada posición i contiene la solución del shell número i.
Una vez probada la existencia de solución, vamos a demostrar la unicidad, para ello suponemos que hay dos soluciones distintas que denotamos por u_n y v_n. Para esta demostración también denotamos $w_n = u_n - v_n$ para facilitar la escritura.

$$\begin{aligned} &\partial_t w_n = ik_n(a(u_{n+1}u_{n+2} - v_{n+1}v_{n+2}) + \frac{b}{\lambda}(u_{n-1}u_{n+1} - v_{n-1}v_{n+1}) + \\ &\frac{c}{\lambda^2}(u_{n-2}u_{n-1} - v_{n-2}v_{n-1}))^* - \nu k_n^2(u_n - v_n) \end{aligned} \tag{3.64}$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} &u_{n+1}u_{n+2} - v_{n+1}v_{n+2} = u_{n+1}u_{n+2} - v_{n+1}v_{n+2} + u_{n+1}v_{n+2} - u_{n+1}v_{n+2} = \\ &u_{n+1}(u_{n+2} - v_{n+2}) + v_{n+2}(u_{n+1} - v_{n+1}) = u_{n+1}w_{n+2} + v_{n+2}w_{n+1} \end{aligned} \tag{3.65}$$

Aplicando esta igualdad para todos los términos no lineales y realizando el producto escalar w_n se obtiene

$$\begin{aligned} &\partial_t \|w_n\|_B^2 = \|ik_n(a(u_{n+1}w_{n+2} + v_{n+2}w_{n+1})w_n + \frac{b}{\lambda}(u_{n-1}w_{n+2} + v_{n-1}w_{n+1})w_n + \\ &\frac{c}{\lambda^2}(u_{n-2}w_{n-1} + v_{n-1}w_{n-2})w_n)^* - \nu k_n^2 w_n w_n^*\|_B^2 \leq C_1(\|k_n u_n\|_{\ell^\infty} + \|k_n v_n\|_{\ell^\infty})\|w_n\|_B^2 \end{aligned} \tag{3.66}$$

Haciendo el mismo procedimiento de multiplicar por el factor integrante $e^{-\int_0^t C_1(\|k_n u_n(s)\|_{\ell^\infty} + \|k_n v_n(s)\|_{\ell^\infty} ds)}$ y después integrar se obtiene

$$\|w_n\|_B^2 \leq e^{\int_0^t C_1(\|k_n u_n^N\|_{\ell^\infty} + \|k_n v_n^M\|_{\ell^\infty})dt}\|w_n(0)\|_B^2 \tag{3.67}$$

Como u y v son ambas soluciones, el dato inicial es el mismo para ambas, es decir, $u_n(0) = v_n(0)$ y entonces $w_n(0) = u_n(0) - v_n(0)$ es 0 por lo tanto u_n y v_n son iguales. En conclusión, al suponer que había dos soluciones distintas hemos llegado a que la diferencia de ambas soluciones es cero luego las soluciones son idénticas por lo que queda probada así la unicidad de solución del GOY.

3.3. Sabra model

En secciones anteriores hemos visto las ecuaciones del Gledzer model y cómo obtener las ecuaciones del GOY shell model a partir de ellas y también hemos demostrado la existencia de solución del mismo. En esta sección nos centraremos en otro shell model muy conocido, el Sabra model [8]. La principal diferencia entre el GOY y el Sabra se encuentra en el número de conjugaciones complejas que se presentan en los términos que se encuentran multiplicados por la unidad imaginaria, por tanto en el Sabra shell model las velocidades u_n verifican las siguientes ecuaciones

$$\partial_t u_n = i\left(ak_{n+1}u_{n+1}^* u_{n+2} + bk_n u_{n-1}^* u_{n+1} - ck_{n-1}u_{n-2}u_{n-1}\right) - \nu k_n^2 u_n + f_n \tag{3.68}$$

Donde k_n son los números de onda, ν es la viscosidad cinemática y f_n son números complejos que representa la fuerza externa. Como en el GOY, las condiciones de contorno son $u_{-1} = u_0 = 0$ y los coeficientes a,b,c verifican

$$a + b + c = 0$$

En algunos artículos en los que se analiza el Sabra shell model cabe destacar la manera de definir los números de onda como una sucesión de Fibonacci $k_n = k_{n-1} + k_{n-2}$, por tanto, el espaciado shell es el número áureo, ya que al tomar dos números de onda consecutivos, k_{n-1} y k_n su división $k_n/k_{n-1} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ cuando $n \to \infty$. También es posible definir los números de onda como en el GOY, es decir , $k_n = k_0\lambda^n$. Por lo tanto, podemos tomar los coeficientes $a = 1$, $b = -\dfrac{\epsilon}{\lambda}$ y $c = \dfrac{\epsilon - 1}{\lambda^2}$, y así obtener

$$\partial_t u_n = ik_{n+1}\left(u_{n+1}^* u_{n+2} - \frac{\epsilon}{\lambda}u_{n-1}^* u_{n+1} - \frac{\epsilon-1}{\lambda^2}u_{n-2}u_{n-1}\right) - \nu k_n^2 u_n + f_n \tag{3.69}$$

Esta forma de escribir la ecuación del Sabra model nos permite ver mejor las similitudes con el GOY, pero también se puede observar como el número de onda que multiplica a la expresión ahora es k_{n+1} en lugar de k_n.

3.3.1. Invariantes cuadráticos

Centrándonos ahora en los invariantes cuadráticos, vamos a demostrar que, efectivamente, son los mismos que en el GOY model. Para ello partiremos de las ecuaciones del Sabra en el caso no viscoso y con ausencia de fuerzas externas, $\nu = f = 0$. Como en el GOY los invariantes son de la forma

$$E(\lambda^\alpha) = \frac{1}{2} k_0^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n\alpha} |u_n|^2 \tag{3.70}$$

Veamos ahora que aplicando la definición de la energía, $E = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n u_n^*}{2}$ y utilizando que al ser un invariante, su derivada temportal ha de ser cero obtenemos también dos invariantes.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}E(\lambda^\alpha) &= \frac{1}{2} k_0^\alpha \frac{d}{dt} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n\alpha} u_n u_n^* \\
&= k_0^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n\alpha} u_n^* \frac{d}{dt} u_n \\
&= k_0^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n\alpha} u_n^* i k_{n+1} \left(u_{n+1}^* u_{n+2} - \frac{\epsilon}{\lambda} u_{n-1}^* u_{n+1} - \frac{\epsilon - 1}{\lambda^2} u_{n-2} u_{n-1} \right) \\
&= i k_0^\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n\alpha} k_{n+1} u_n^* u_{n+1}^* u_{n+2} - i k_0^\alpha \frac{\epsilon}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n\alpha} k_{n+1} u_n^* u_{n-1}^* u_{n+1} \\
&- i k_0^\alpha \frac{\epsilon - 1}{\lambda^2} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n\alpha} k_{n+1} u_n^* u_{n-2} u_{n-1} = 0
\end{aligned} \tag{3.71}$$

Repitiendo el procedimiento de modificar los índices de los dos primeros sumatorios y utilizando las condiciones de contorno se obtiene

$$\begin{aligned}
& i k_0^\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n\alpha} k_{n+1} u_n^* u_{n+1}^* u_{n+2} - i k_0^\alpha \frac{\epsilon}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n\alpha} k_{n+1} u_n^* u_{n-1}^* u_{n+1} \\
&= i k_0^\alpha \sum_{j=-2}^{\infty} \lambda^{(j-2)\alpha} k_{j-1} u_{j-2}^* u_{j-1}^* u_j - i \frac{\epsilon}{\lambda} k_0^\alpha \sum_{j=-1}^{\infty} \lambda^{(j-1)\alpha} k_j u_{j-1}^* u_{j-2}^* u_j \\
&= i k_0^\alpha \sum_{j=3}^{\infty} \lambda^{(j-2)\alpha} k_{j-1} u_{j-2}^* u_{j-1}^* u_j - i \frac{\epsilon}{\lambda} k_0^\alpha \sum_{j=3}^{\infty} \lambda^{(j-1)\alpha} k_j u_{j-1}^* u_{j-2}^* u_j
\end{aligned} \tag{3.72}$$

Por lo tanto la ecuación que ha de verificarse es

$$i k_0^\alpha \sum_{n=3}^{\infty} \left(-\lambda^{(n-2)\alpha} k_{n-1} + \frac{\epsilon}{\lambda} \lambda^{(n-1)\alpha} k_n - \frac{\epsilon - 1}{\lambda^2} \lambda^{(n)\alpha} k_{n+1} \right) u_n^* u_{n-1} u_{n-2} = 0 \tag{3.73}$$

Para que la expresión anterior se anule se debe cumplir

$$\lambda^{(n-2)\alpha} k_{n-1} - \frac{\epsilon}{\lambda} \lambda^{(n-1)\alpha} k_n + \frac{\epsilon - 1}{\lambda^2} \lambda^{(n)\alpha} k_{n+1} = 0 \tag{3.74}$$

Aplicando la definición de los números de onda, $k_n = k_0\lambda^n$, obtenemos

$$\begin{aligned}&\lambda^{(n-2)\alpha}\lambda^{n-1}k_0 - \frac{\epsilon}{\lambda}\lambda^{(n-1)\alpha}\lambda^n k_0 + \frac{\epsilon-1}{\lambda^2}\lambda^{(n)\alpha}k_0\lambda^{n+1}\\ &= \lambda^{(n-2)\alpha}k_{n-1}\left(1-\epsilon\lambda^\alpha + (\epsilon-1)\lambda^{2\alpha}\right) = 0\end{aligned} \tag{3.75}$$

Como sabemos que $\lambda^{(n-2)\alpha}k_{n-1}$ no se anula, se tiene que cumplir

$$1-\epsilon\lambda^\alpha + (\epsilon-1)\lambda^{2\alpha} = 0 \tag{3.76}$$

Haciendo el cambio de variable $\lambda^\alpha = z$ obtenemos una ecuación de segundo grado que tiene por soluciones $z_1 = 1$ y $z_2 = (1/\epsilon - 1)$, las mismas que en el GOY, por lo que podemos concluir que los invariantes cuadráticos son los mismos para ambos modelos.

3.3.2. Existencia de solución del Sabra model

De manera análoga a la realizada para el GOY, vamos a probar la existencia y unicidad de solución para este modelo. En este caso también suponemos ausencia de fuerzas externas es decir consideramos $f_n = 0$ para toda n.

Primero, para poder aplicar el Teorema de Picard (3.1) debemos proyectar las ecuaciones del Sabra en un sistema de orden finito N, que denotaremos por Q_N

$$\begin{cases}\partial_t u_n^N = i\left(ak_{n+1}(u_{n+1}^N)^* u_{n+2}^N + k_n b(u_{n-1}^N)^* u_{n+1}^N - k_{n-1}cu_{n-2}^N u_{n-1}^N\right) - \nu k_n^2 u_n^N\\ u_{-1}^N = 0\\ u_0^N = 0\\ u_{N+1}^N = 0\\ u_{N+2}^N = 0\\ u_n^N(0) = P_N u^{(0)} = u(0) \qquad \text{si} \quad 1\le n\le N\end{cases} \tag{3.77}$$

Utilizando los espacios definidos para el GOY

$$B = l^2 = \left\{u_n \quad : \quad \sum_{n=1}^{\infty}|u_n|^2 < +\infty\right\} \quad \text{con norma} \quad \|u_n\|_B = \left(\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|^2\right)^{1/2}$$

y su producto escalar definido como $(u,v)_B = \sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n^*$ y también los espacios

$$O = \left\{u_n \in l^2 \quad con \quad \|u\|_{l^2} \le 4\|P_N u^{(0)}\|_{l^2}\right\}$$

Y el espacio

$$H = \left\{ u_n \in l^2 \quad \text{con} \quad \sum_{n=1}^{\infty} k_n^2 |u_n|^2 < +\infty \right\} \quad \text{con norma} \quad \|u_n\|_H = \left(\sum_{n=1}^{\infty} k_n^2 |u_n|^2 \right)^{1/2}$$

Una vez definido nuestro sistema Q_N, un cálculo idéntico al GOY nos lleva a concluir que la parte derecha de la igualdad es una función Lipschtiz y por tanto podemos concluir aplicando el Teorema de Picard que nuestro sistema tiene una solución para un tiempo T_N en el intervalo $[0, T]$.
Ahora vamos que acotar nuestra sucesión, para ello acotaremos el término no viscoso aplicando la definición dada de los números de onda $k_n = k_0 \lambda^n$

$$\begin{aligned} &\|i \left(a k_{n+1} (u_{n+1}^N)^* u_{n+2}^N + k_n b (u_{n-1}^N)^* u_{n+1}^N - k_{n-1} c u_{n-2}^N u_{n-1}^N \right) \|_B^2 \\ &= \sum_{n=1}^{N} | \left(a k_{n+1} (u_{n+1}^N)^* u_{n+2}^N + k_n b (u_{n-1}^N)^* u_{n+1}^N - k_{n-1} c u_{n-2}^N u_{n-1}^N \right) |^2 \\ &\leq \left(|a|\lambda + |b| - |c|\lambda^{-1} \right)^2 \|u_n^N\|_H^2 \|u_n^N\|_B^2 \end{aligned} \tag{3.78}$$

Denotamos a $(|a|\lambda + |b| - |c|\lambda^{-1})$ por C_2. A continuación daremos una estimación para el tiempo de existencia del sistema, tomando el producto escalar de la ecuación de Q_N y el conjugado de u_n^N nos lleva a

$$\frac{1}{2} \partial_t \|u_n^N\|_B^2 \leq 0 \tag{3.79}$$

Lo que nos indica que la solución de P_N pertenece a B para cualquier tiempo t. Por como hemos definido el espacio O, sabemos que integrando

$$\|u_n^N\|_B^2 \leq \|u(0)\|_B^2 \qquad \forall t > 0 \tag{3.80}$$

Con esto obtenemos que el intervalo de existencia más grande de nuestro problema es $[0, T)$, ya que para cada tiempo de existencia fijado en ese intervalo la norma siempre va a estar acotada. Para calcular una cota uniforme para $\|u_n^N(t)\|_H^2 \quad \forall t \in [0, T]$ podemos utilizar la cota del GOY, pero en este caso la constante C_1 la cambiamos por C_2

$$\|u_n^N(t)\|_H^2 \leq e^{\left(\frac{C_2^2}{\nu} T \|u(0)\|_B^2 \right)} \|u(0)\|_H^2 \tag{3.81}$$

Al igual que con el otro shell model, la solución a nuestro problema Q_N es única y además está formada por una sucesión acotada en B y en H. Ahora veamos que esta sucesión es una sucesión de Cauchy, para ello tomaremos al igual que realizamos en el GOY dos sucesiones u_n^N

y v_n^M, con $M > N$ que en este caso son

$$\begin{aligned} \partial_t u_n^N &= i(ak_{n+1}(u_{n+1}^N)^* u_{n+2}^N + k_n b(u_{n-1}^N)^* u_{n+1}^N - k_{n-1} c u_{n-2}^N u_{n-1}^N) - \nu k_n^2 u_n^N \\ \partial_t v_n^M &= i(ak_{n+1}(v_{n+1}^M)^* v_{n+2}^M + k_n b(v_{n-1}^M)^* v_{n+1}^M - k_{n-1} c v_{n-2}^M v_{n-1}^M) - \nu k_n^2 v_n^M \end{aligned} \tag{3.82}$$

Su diferencia $w_n = u_n^N - v_n^M$ es

$$w_n = \begin{cases} u_n^N - v_n^M \text{ si } n \leq N \\ - v_n^M \text{ si } n > N \end{cases} \tag{3.83}$$

Desarrollando los términos anteriores y sabiendo que verifican Q_N tenemos

$$\partial_t w_n = i \begin{cases} k_{n+1} a((u_{n+1}^N)^* u_{n+2}^N - (v_{n+1}^M)^* v_{n+2}^M) + k_n b((u_{n-1}^N)^* u_{n+1}^N - (v_{n-1}^M)^* v_{n+1}^M) - \\ k_{n-1} c(u_{n-2}^N u_{n-1}^N - v_{n-2}^M v_{n-1}^M) - \nu k_n^2 (u_n^N - v_n^M) \quad \text{si } n \leq N \\ -(k_{n+1} a(v_{n+1}^M)^* v_{n+2}^M + k_n b(v_{n-1}^M)^* v_{n+1}^M - k_{n-1} c v_{n-2}^M v_{n-1}^M) + \nu k_n^2 v_n^M \text{ si } n > N \end{cases} \tag{3.84}$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} &(u_{n-1}^N)^* u_{n+1}^N - (v_{n-1}^M)^* v_{n+1}^M = (u_{n-1}^N)^* u_{n+1}^N - (v_{n-1}^M)^* v_{n+1}^M + (u_{n-1}^N)^* v_{n+1}^M - \\ &(u_{n-1}^N)^* v_{n+1}^M = (u_{n-1}^N)^* (u_{n+1}^N - v_{n+1}^M) + v_{n+1}^M (u_{n-1}^N - v_{n-1}^M) = (u_{n-1}^N)^* w_{n+1} + v_{n+1}^M w_{n-1}^* \end{aligned} \tag{3.85}$$

Y también que

$$\begin{aligned} &u_{n-2}^N u_{n-1}^N - v_{n-2}^M v_{n-1}^M = u_{n-2}^N u_{n-1}^N - v_{n-2}^M v_{n-1}^M + u_{n-2}^N v_{n-1}^M - u_{n-2}^N v_{n-1}^M = \\ &u_{n-2}^N (u_{n-1}^N - v_{n-1}^M) + v_{n-1}^M (u_{n-2}^N - v_{n-2}^M) = u_{n-2}^N w_{n-1} + v_{n-1}^M w_{n-2} \end{aligned} \tag{3.86}$$

Haciendo el producto escalar de (3.84) con w_n a los términos con $n \leq N$, aplicando las igualdades anteriores y después integrando como hemos calculado para el GOY obtenemos

$$\|w_n\|_B^2 \leq e^{\int_0^t C_1(\|k_n u_n^N\|_{\ell^\infty} + \|k_n v_n^M\|_{\ell^\infty})dt} \|w_n(0)\|_B^2 \tag{3.87}$$

Tomando N y M suficientemente grandes, la expresión de la derecha se hace cada vez un valor tan pequeño como se quiera.

Veamos ahora en los términos con $n > N$, la expresión de la derecha como solo involucra términos de la sucesión v_n^M sabemos que está acotada por las cotas realizadas anteriormente, luego haciendo el producto escalar con el conjugado de v_n^M de la expresión para $n > N$ y calculando la integral igual que en el modelo anterior obtenemos

$$\|w_n\|_B^2 \leq \|v_n(0)\|_B^2 \tag{3.88}$$

Entonces la diferencia de nuestras dos sucesiones tomadas a medida que aumentemos la N y la M es cada vez menor luego se trata de una sucesión de Cauchy, como estamos en un espacio de Banach, esta sucesión converge a un límite dentro de ese mismo espacio

$$\lim_{N\to\infty} u_n^N = u \tag{3.89}$$

Este límite será la solución del Sabra model. Una vez probada la existencia de solución vamos a demostrar la unicidad, estos cálculos son análogos a los realizados para el GOY. Supongamos que existen dos soluciones distintas u_n y v_n y denotamos $w_n = u_n - v_n$, por lo tanto

$$\partial_t w_n = i(k_{n+1}a((u_{n+1})^* u_{n+2} - (v_{n+1})^* v_{n+2}) + k_n b((u_{n-1})^* u_{n+1} - (v_{n-1})^* v_{n+1}) - \\ k_{n-1}c(u_{n-2}u_{n-1} - v_{n-2}v_{n-1})) - \nu k_n^2 (u_n - v_n) \tag{3.90}$$

Las expresiones (3.85) y (3.86) las podemos aplicar para N y M infinitos, luego aplicando estas igualdades y realizando el producto escalar con w_n se obtiene

$$\partial_t \|w_n\|_B^2 = \|i(k_{n+1}a((u_{n+1})^* w_{n+2} + v_{n+2}(w_{n+1})^*) w_n^* + k_n b((u_{n-1})^* w_{n+2} + v_{n-1}(w_{n+1})^*) w_n^* + \\ k_{n-1}c(u_{n-2}w_{n-1} + v_{n-1}w_{n-2})) w_n^* - \nu k_n^2 w_n w_n^* \|_B^2 \leq C_2(\|k_n u_n\|_{\ell^\infty} + \|k_n v_n\|_{\ell^\infty}) \|w_n\|_B^2 \tag{3.91}$$

Multiplicando por el factor integrante $e^{-\int_0^t C_2(\|k_n u_n(s)\|_{\ell^\infty} + \|k_n v_n(s)\|_{\ell^\infty} ds)}$ y después integrando se obtiene

$$\|w_n\|_B^2 \leq e^{\int_0^t C_1(\|k_n u_n^N\|_{\ell^\infty} + \|k_n v_n^M\|_{\ell^\infty}) dt} \|w_n(0)\|_B^2 \tag{3.92}$$

Como u y v son ambas soluciones el dato inicial es el mismo para ambas y $w_n(0) = u_n(0) - v_n(0)$ es 0, por lo tanto u_n y v_n son iguales y entonces la norma de w_n al cuadrado es cero, por lo tanto $u_n = v_n$ y hemos demostrado que la solución del Sabra es única.

Capítulo 4

Simulaciones numéricas

En este capítulo realizaremos una serie de simulaciones numéricas con el programa MATLAB, en el capítulo anterior demostramos la existencia de solución del GOY y del Sabra, ahora vamos a verificar númericamente que las soluciones de estos dos shell models cumplen la teoría K41 y por tanto modelan la turbulencia.
Primero nos centraremos en el GOY model, recordamos que las ecuaciones de este shell moden son

$$\partial_t u_n = ik_n \left(au_{n+1}u_{n+2} + \frac{b}{\lambda}u_{n-1}u_{n+1} + \frac{c}{\lambda^2}u_{n-2}u_{n-1} \right)^* - \nu k_n^2 u_n + f_n \tag{4.1}$$

Para poder realizar estas simulaciones debemos truncar este sistema de ecuaciones hasta un orden N ya que de lo contario no sería posible realizar el cálculo porque estaríamos ante un sistema de infinitas ecuaciones. Estas EDOs dependen de ciertos parámetros, para estas simulaciones hemos utilizado valores muy habituales en el estudio de estos dos shell models [8]
$\nu = 0{,}00002$
$k_0 = 0{,}0002$
$\lambda = 2$
$a = 1$
$b = -0{,}5$
$c = -0{,}5$
A continuación se muestra el código utilizado para resolver el GOY model, para ello utilizamos la función ODE 45, esta función utiliza los métodos númericos de Runge-Kutta de cuarto y quinto orden, unos métodos iterativos muy eficaces para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias en un intervalo de tiempo determinado.
Hemos tomado un tiempo de 50 unidades y hemos considerado que las fuerzas solo se aplican a los shells número 1 y 2.

```
function du = goy_model(t, u)
    N=26;
    nu = 0.00002;
    k0 = 0.0002;
    a = 1;
    b = -0.5;
    c = -0.5;
    lambda = 2;
    du = zeros(N, 1);
    f=zeros(N,1);
    u(1)=0; %u(1) es el u0 del shell model
    du(1)=0;
    du(2)=0.001;
    du(3)=0.001;
    u(N+1)=0;
    u(N+2)=0;
    for n=4:N
    du(n)= 1i*k0*(lambda^(n))*conj(a*u(n+1)*u(n+2)+...
        (b/lambda)*u(n-1)*u(n+1)+...
        (c/lambda^(2))*u(n-2)*u(n-1))-nu*((k0^2)*(lambda^(2*n)))*
          u(n)+f(n);
    end
end
```

Este código nos proporciona una función que modela las ecuaciones del sistema P_N, que recordemos era el sistema GOY pero truncado hasta un cierto shell para así tener un sistema finito, en este estudio hemos tomado un sistema de tamaño 26. A continuación hemos aplicado el ODE45 a esta función tomando como condiciones iniciales las dadas en P_N. El shell 0, nuestro u0(1) en el programa, ha der ser 0 para verificar la condicion $u_0^N = 0$ y también para que se verifique $u_{N+1}^N = u_{N+2}^N = 0$ hemos tomado u0(N+1)=u0(N+2), para el resto de valores hemos considerado un valor de ncos(n) para así obtener un número no muy grande para que el método númerico converja.
Una vez realizado este cálculo para poder comprobar que este sistema modela la turbulencia veremos si se verifica la ley del espectro de Kolmogorov, es decir, que el espectro de energía de la solución cumpla la cascada de energía y decaiga con una pendiente de aproximadamente -5/3. Para representar el espetro hemos tomado el logaritmo del módulo al cuadrado de las velocidades y veremos como varía en función del número de shell. Representar el logaritmo nos facilita la observación de esta disminución de energía y nos ayuda a resaltar picos o regiones

con mayor energía, que con una representación lineal no serían tan evidentes.
A continuación mostramos la gráfica obtenida, podemos observar como la energía decae a medida que avanza el número de shell.

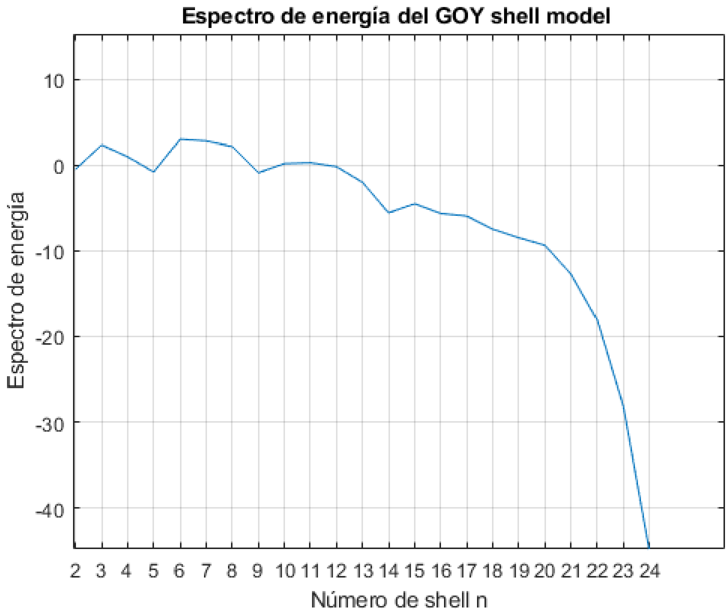

Figura 4.1: Espectro de energía GOY con fuerza 0.001

Para representar esta gráfica hemos considerado una fuerza externa de valor 0.001, para ver cuánto influye la fuerza en nuestro modelo vamos a tomar ahora una fuerza de 0.01.

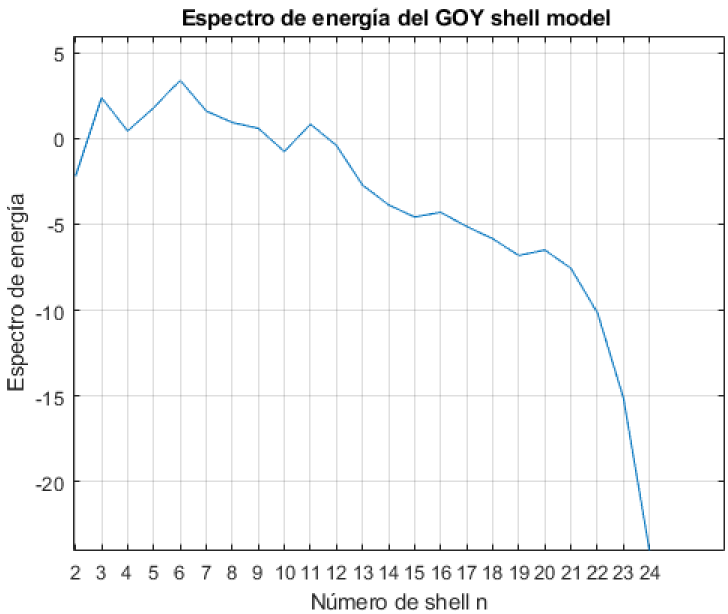

Figura 4.2: Espectro de energía GOY con fuerza 0.01

Se puede apreciar como al cambiar la fuerza nuestra gráfica es distinta, bien es cierto que la energía sigue decayendo y verifica la cascada de energía, pero esta gráfica presenta muchos picos, que nos hace ver como la energía tiene subidas y bajadas que no debería tener.
Ahora analizaremos el Sabra shell model, este modelo tiene como ecuaciones

$$\partial_t u_n = i\left(ak_{n+1}u_{n+1}^* u_{n+2} + bk_n u_{n-1}^* u_{n+1} - ck_{n-1}u_{n-2}u_{n-1}\right) - \nu k_n^2 u_n + f_n \tag{4.2}$$

El código utilizado en este caso es prácticamente idéntico al código del GOY, la única diferencia se encuentra en la expresión de las derivadas, que es lo que principalmente diferencia a un modelo del otro.

```
function du = sabra_model(t, u)
    N=24;
    nu = 0.00002;
    k0 = 0.0002;
    a = 1;
    b = -0.5;
    c = -0.5;
    lambda = 2;
    du = zeros(N, 1);
    f=zeros(N,1);
    u(1)=0;
    du(1)=0;
    du(2)=0.001;
    du(3)=0.001;
    u(N+1)=0;
    u(N+2)=0;
    for n=4:N
    du(n)=1i*(k0*(lambda^(n+1))*a*conj(u(n+1))*u(n+2)+...
        b*k0*(lambda^(n))*conj(u(n-1))*u(n+1)-...
        c*k0*(lambda^(n-1))*u(n-2)*u(n-1))-nu*((k0^2)*(lambda^(2*
           n)))*u(n)+f(n);
    end
end
```

Al igual que en el modelo anterior, para poder comprobar que en este caso también se modela la turbulencia vamos a ver cómo se comporta el espectro de energía en este shell model, para ello vamos representar el logaritmo del módulo al cuadrado de las velocidades que se obtienen al utilizar el ODE 45 junto al código anterior.

En el estudio del GOY definimos unas condiciones iniciales que usaremos también para este modelo ya que el sistema finito Q_N, el Sabra truncado, tiene las mismas condiciones que el sistema finito del GOY y como ya mencionamos para el otro modelo, el código que utilizamos en MATLAB es una representación de esos sistemas truncados definidos en el capítulo anterior. Al realizar estos cálculos hemos obtenidos la siguiente gráfica

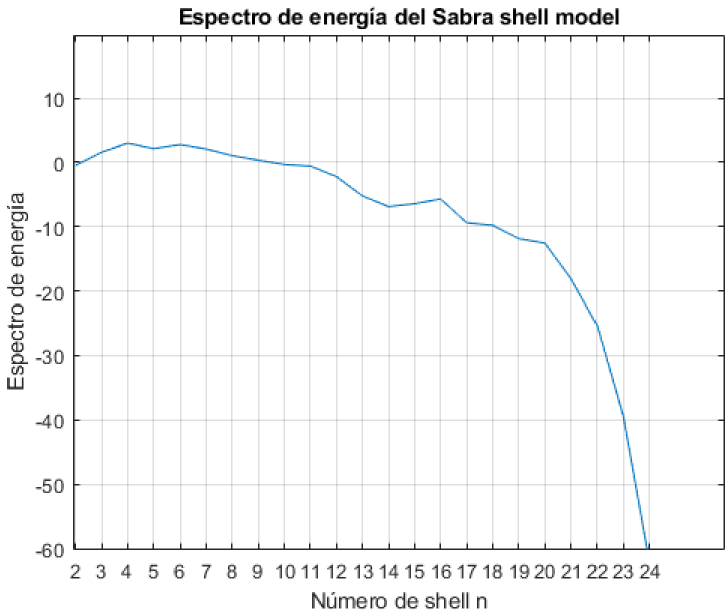

Figura 4.3: Espectro de energía Sabra con fuerza 0.001

En esta gráfica podemos apreciar como el espectro de energía también decae a medida que avanza el número de shell. Para este caso hemos tomado que la fuerza que se aplica tiene un valor de 0.001. Por buscar una diferencia con la gráfica obtenida para el GOY esta tiene picos más suaves.

Ahora vamos a realizar el mismo cálculo pero en lugar de tomar una fuerza de 0.001, tomaremos una fuerza de 0.01, aunque parezca un cambio pequeño la gráfica obtenida ahora es más irregular en cuanto a subidas y bajadas. Es cierto que el espectro de energía sigue cumpliendo la teoría K41 y decae a medida que avanzamos en el número de shell, vemos a continuación la gráfica obtenida para esta nueva fuerza.

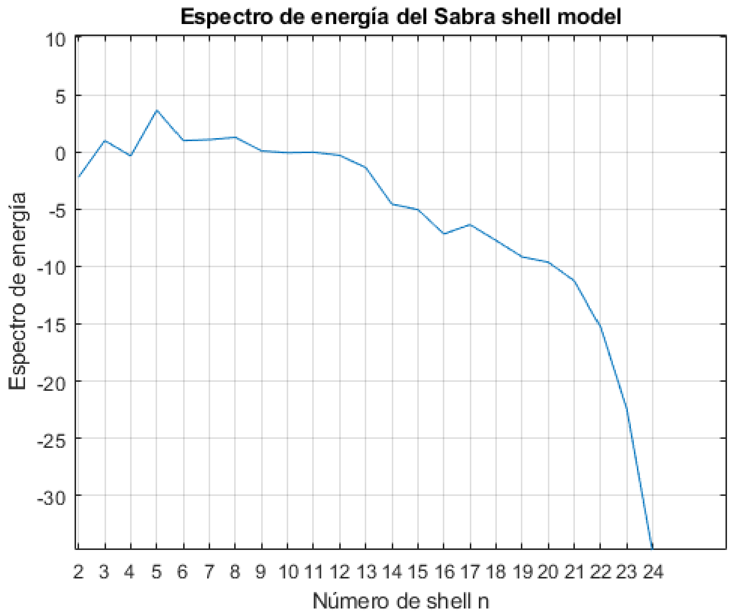

Figura 4.4: Espectro de energía Sabra con fuerza 0.01

Como habíamos mencionado esta gráfica tiene más cambios en cuanto a subidas y bajadas del espectro. Por esto, aunque podemos ver que la energía decae, esta en ciertos puntos vuelve a subir lo que resulta extraño.

Podemos concluir que ambos métodos funcionan correctamente y modelan este fenómeno tan complicado como es la turbulencia. Pero hay que tener especial cuidado a la hora de decidir los valores introducidos, para casi todos los parámetros como por ejemplos los valores de la viscosidad y del espaciado de los shells hemos utilizado valores que están contrastados en diversos estudios que son eficaces para la turbulencia en tres dimensiones pero hemos podido observar como por ejemplo variando la fuerza, el espectro de energía tiene subidas y bajadas cuando por la teoría K41 debería siempre ir descendiendo y no tener momentos de subida, es por eso que, aunque los shell models son una herramienta muy útil hay que tener bastante precaución a la hora de definir los parámetros y valores iniciales utilizados en cada modelo.

Bibliografía

[1] T.Buckmaster, V.Vicol *Convex integration and phenomenologies in turbulence* EMS Surveys in Mathematical Sciences, 6(1-2), 143-263, 2019.

[2] P.Constantin, B.Levant, E. S. Titi *Analytic study of shell models of turbulence* Physica D 219 ,120–41,2006.

[3] P.Ditlevsen *Turbulence and Shell Models.* Cambridge University Press,Cambridge, 2010.

[4] L.C.Evans *Partial differential equations.* American Mathematical Society, 1998.

[5] U.Frisch. *Turbulence: The legacy of A. N. Kolmogorov.* Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[6] C.Granero *Turbulencia y multifractalidad ochenta años después de la teoría de Kolmogorov 1941*, Revista Española de Física, 35(1), 15-19, 2021

[7] A.J.Majda, A.L.Bertozzi. *Vorticity and Incompressible Flow.* Cambridge

[8] D.Vincenzi, J.D.Gibbon *How close are shell models to the 3D Navier–Stokes equations?.* Nonlinearity, 34 (8), 5821-5843,2021.