Facultad
de
Ciencias

El Teorema de Sharkovsky

The Sharkovsky Theorem

Trabajo de fin de Grado
para acceder al
Grado en Matemáticas

Autor: Jorge Delgado Bilbao
Director: Jesús Araujo Gómez
Septiembre-2023

Índice

1 Introducción **5**

2 Nociones y Resultados principales **7**

3 Intervalos, ciclos y cubrimiento **8**

4 Ejemplo: periodo 3 **12**

5 Las sucesiones de Štefan **14**

6 Construcción de sucesión de Štefan **23**

7 Prueba del Teorema *Forcing* de Sharkovsky **30**

8 Prueba del Teorema de Realización de Sharkovsky **36**

1 Introducción

Los primeros resultados acerca de lo que hoy en día conocemos como Teorema de Sharkovsky datan de los años cincuenta y fueron escritos por W.A. Coppel en su artículo *The solutions of equation by iteration* [1].

Posteriormente, Sharkovsky demostró su resultado y lo publicó en los años sesenta, incluyendo todos los resultados de W.A. Coppel y daba a entender que no conocía su trabajo.

En 1975 se publica un artículo muy famoso, *Period three implies chaos*, de T.-L. Li y J.A. Yorke, el cual incluye el resultado de que la presencia de un punto periódico de periodo 3 implica la presencia de puntos periódicos de todos los periodos.
Algún tiempo después Yorke asistió a una conferencia en Berlín Este y en un momento dado se le acerco Sharkovsky, también presente. A pesar de la dificultad para comunicarse puesto que no tenían ninguna lengua en común, con cierta ayuda, Sharkovsky logra transmitirle que él había probado los resultados acerca de puntos periódicos en intervalos cerrados más de 10 años antes. Además, los resultados de Sharkovsky eran todavía más amplios, ya que introdujo el orden que lleva su nombre en los números naturales, en el cual 3 es el primer número, así como que la presencia de un periodo m en una función continua f implica la presencia de periodo l en f para cualquier l mayor que m en dicho orden.

El incidente entre estos dos matemáticos llevó a Sharkovsky al reconocimiento global por su trabajo, y condujo igualmente a la aparición de múltiples trabajos posteriores con el objetivo de simplificar la prueba.
Nos concentraremos en una de las pruebas dadas recientemente, dada en *The Sharkovsky Theorem: Natural Direct Proof* [6]. Otras pruebas modernas pueden verse en [3], [4], [5] y [7].

Resumen

El teorema de Sharkovsky es un resultado sobre sistemas dinámicos discretos. Establece la existencia de un orden en el conjunto de los números naturales tal que, dada cualquier función de un intervalo en sí mismo, el hecho de que haya un punto de cierto periodo garantiza la existencia de puntos de periodo igual a cualquier número mayor que el anterior (respecto a dicho orden). Además, nos garantiza el recíproco, es decir, dado un número n existe una función con un punto de periodo n y, por tanto, de los siguientes periodos que aparecen en el orden.

En este trabajo se tratará principalmente de introducir las herramientas necesarias para una prueba directa de dicho resultado.

Palabras clave: Sistema dinámico discreto, punto periódico, ciclo, Ω-intervalo, sucesión de Štefan, Teorema de Sharkovsky.

Abstract

The Sharkovsky Theorem is a result about discrete dynamical systems. It provides an ordering of $\mathbb{N}$ under which any function of a interval into itself with a point of any period has periodic points of any bigger periods (according to the order). Moreover, it guarantees that the converse also holds: given any $n \in \mathbb{N}$ there is a function having a point with period n and, consequently, points with the following period given by the order.

In this work we will introduce the tools to prove the theorem.

Keywords: discrete dynamical system, periodic point, cycle, Ω-interval, Štefan sequence, Sharkovsky Theorem.

2 Nociones y Resultados principales

Definición Se denomina orden de Sharkovsky al siguiente orden sobre $\mathbb{N}$,

$$3 \prec 5 \prec 7 \prec ...$$

$$\prec 2.3 \prec 2.5 \prec 2.7 \prec ...$$

$$\prec 2^2.3 \prec 2^2 5 \prec 2^2.7 \prec ...$$

$$... \prec 2^3 \prec 2^2 \prec 2 \prec 1$$

El orden de Sharkovsky define un orden total sobre $\mathbb{N}$ pero no es buen orden, es decir, no todo subconjunto propio tiene mínimo. Por otra parte, tiene la siguiente propiedad:

$$l \prec r \Longleftrightarrow 2l \prec 2r$$

Sharkovsky demostró que este orden describe qué números pueden ser periodos de una función continua en un intervalo.

Lo que hoy en día conocemos como Teorema de Sharkovsky es la unión de dos resultados más pequeños: el Teorema *Forcing* de Sharkovsky y el Teorema de Realización de Sharkovsky.

Teorema *Forcing* de Sharkovsky: Si m es un periodo de f y $m \prec l$, entonces l también es un periodo de f.

Definición Se dice que un conjunto $T \subset \mathbb{N}$ es una cola del orden de Sharkovsky si, para cualesquiera $s \notin T$ y $t \in T$, se cumple que $s \prec t$.

Teorema de Realización de Sharkovsky: Toda cola del orden de Sharkovsky es un conjunto de periodos para alguna función continua de un intervalo en sí mismo.

3 Intervalos, ciclos y cubrimiento

Notación 1 *A lo largo de este trabajo, $I, J \subset \mathbb{R}$ serán intervalos y f será una función continua de un intervalo en si mismo.*
Para cualquier función continua f, dado x un elemento sobre el que está definido f, definiremos $f^n(x)$ inductivamente para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, es decir,

$$f^0(x) = x \text{ y } f^{n+1}(x) = f(f^n(x)).$$

Definición 1 *Supongamos que $f : \mathscr{I} \longrightarrow \mathscr{I}$. Un punto $p \in \mathscr{I}$ se dice punto periódico si existe un entero positivo n tal que $f^n(p) = p$.*
Se dice que un elemento $p \in \mathscr{I}$ es periódico de periodo n si $f^n(p) = p$ y se satisface que $p \neq f^k(p)$ para todo $1 \leq k < n$.
Si f tiene un punto periódico de periodo m, entonces diremos que m es un periodo de f.

Observación 1 *A los puntos periódicos de periodo 1, se les denomina puntos fijos de la función.*

Definición 2 *A la sucesión $x, f(x), f^2(x), f^3(x), ...$ se le denomina f-órbita de x, o simplemente órbita de x.*

Observación 2 *Si un término se repite en la sucesión $(f^n(x))$, entonces estamos ante un punto periódico.*

Definición 3 *Decimos que un intervalo I cubre a un intervalo J si existe una función continua $f : \mathscr{I} \to \mathscr{I}$ tal que $J \subset f(I)$. Se denota como $I \xrightarrow{f} J$ (o, más generalmente $I \to J$).*

Lema 1 *Sea $I = [a_1, a_2]$. Si $[a_1, a_2] \xrightarrow{f} [a_1, a_2]$, entonces f tiene un punto fijo.*

Demostración. Sean $b_1, b_2 \in [a_1, a_2]$ donde $f(b_1) = a_1$ y $f(b_2) = a_2$. Sea $g(x) := f(x) - x$ que es continua. Entonces

$$g(b_1) = f(b_1) - b_1 \leq 0 \text{ y } g(b_2) = f(b_2) - b_2 \geq 0.$$

Por lo tanto, por el Teorema del valor intermedio, concluimos que existe $x \in [b_1, b_2]$ tal que $g(x) = f(x) - x = 0$, es decir, f tiene un punto fijo. ■

Definición 4 *Sean $J_0, J_1, ..., J_{n-1}$ intervalos. Se denomina bucle o n-bucle a la cadena de aplicaciones $J_0 \xrightarrow{f} J_1 \xrightarrow{f} ... \xrightarrow{f} J_{n-1} \xrightarrow{f} J_0$.*

Definición 5 *Sea $J_0 \xrightarrow{f} J_1 \xrightarrow{f} ... \xrightarrow{f} J_{n-1} \xrightarrow{f} J_0$ un bucle. Decimos que un punto $x \in J_0$ sigue el bucle si $f^i(x) \in J_i$ para todo $0 \leq i < n$ y $f^n(x) = x$.*

Lema 2 *Sean I, J intervalos cerrados y acotados con $I \xrightarrow{f} J$. Entonces existe un intervalo cerrado y acotado $K \subset I$ tal que $f(K) = J$.*

Demostración. Como J es cerrado y acotado tiene la forma $J = [a, b]$, donde $a, b \in \mathbb{R}$. Además, como $J \subset f(I)$, existen $p, q \in I$ con $a = f(p)$ y $b = f(q)$, luego $J = [f(p), f(q)]$. A continuación estudiaremos los tres casos posibles:

- *Caso $p = q$.* Como $J = \{f(p)\}$ es cerrado y acotado, basta tomar $K = \{p\}$, que es obviamente cerrado y acotado.

- *Caso $p < q$.* Consideramos el conjunto

$$f^{-1}(f(p)) \cap [p, q].$$

  Se tiene que $f(p)$ es cerrado: consiste en un único punto. Por otra parte, $f^{-1}(f(p))$ es también cerrado por ser f continua. Luego $f^{-1}(f(p)) \cap [p, q]$ es igualmente cerrado por ser intersección de cerrados, y acotado por ser intersección de un conjunto con un intervalo acotado.
  Por consiguiente, existe

$$r := \max(f^{-1}(f(p)) \cap [p, q]),$$

  es decir, r es el "último" punto de $[p, q]$ en el que $f(r) = f(p)$.
  Sea ahora s el "primer" punto después de r donde $f(s) = f(q)$, es decir,

$$s = \min(f^{-1}(f(q)) \cap [r, q])$$

  cuya existencia se puede probar como antes. Por tanto, queda definido el intervalo cerrado y acotado $[r, s]$.

  La función f, al ser continua, envía conexos en conexos, es decir, intervalos en intervalos, con ello $f([r, s])$ es un intervalo que contiene a $f(r)$ y $f(s)$. Por ello, contiene al intervalo

$$[f(r), f(s)] = [f(p), f(q)],$$

es decir, $J \subset f([r, s])$.

Ahora veamos que $f([r, s]) \subset J$.
Supongamos que existe $c \in [r, s]$ tal que $d := f(c) \notin J$. Tenemos dos posibilidades: o bien $f(c) < f(r)$ ó bien $f(c) > f(s)$. Veamos que la primera posibilidad no puede darse.

- Si $f(c) < f(r)$, entonces $f(r) \in (f(c), f(s))$. Ahora, teniendo en cuenta que $c \in [r, s]$ y que f es continua, por el Teorema del valor intermedio, sabemos que existe $b \in [c, s]$ tal que $f(b) = f(r) = f(p)$. Con esto

$$b \in (f^{-1}(f(p))) \cap [p, q]$$
$$\text{y}$$
$$b > r := \max(f^{-1}(f(p)) \cap [p, q]),$$

  lo cual es absurdo.
- La otra posibilidad es que $f(c) > f(s)$, con lo cual $f(s) \in [f(r), f(c)]$ y, argumentamos de manera similar a lo anterior. Teniendo en cuenta que f es continua, que $c \in [r, s]$, y por el Teorema del valor intermedio, existe $a \in [r, c]$ tal que $f(a) = f(s) = f(q)$. Deducimos que

$$a \in (f^{-1}(f(q)) \cap [r, q]$$
$$\text{y}$$
$$a < s = \min(f^{-1}(f(q) \cap [r, q])),$$

  lo cual es absurdo.

Concluimos que $f([r, s]) = J$.

- *Caso* $p > q$. Análogo al caso $p < q$.

Tomando $K = [r, s]$, tenemos que $f(K) = J$. ■

Notación 2 *En la situación* $I \xrightarrow{f} J$, *escribiremos* $I \rightarrowtail J$ *cuando* $f(I) = J$.

Lema 3 *Si $J_0, J_1, ..., J_{n-1}$ son intervalos cerrados y acotados, y $J_0 \xrightarrow{f} J_1 \xrightarrow{f} ... \xrightarrow{f} J_{n-1} \xrightarrow{f} J_0$ es un bucle, entonces existe un punto de x que sigue el bucle.*

Demostración. Utilizando Lema 2 de manera inductiva para $0 \leq i < n$, existe $K_i \subset J_i$ tal que

$$K_0 \rightarrowtail K_1 \rightarrowtail K_2 \rightarrowtail ... \rightarrowtail K_{n-1} \rightarrowtail J_0.$$

Por tanto, todo $x \in K_0$ satisface que $f^i(x) \in K_i \subset J_i$ para $0 \leq i < n$ y $f^n(x) \in J_0$. Como $K_0 \subset J_0 = f^n(K_0)$, sabemos por Lema 1 que f^n tiene un punto fijo x. Claramente, tal x sigue el bucle. ■

Definición 6 *Decimos que un bucle $J_0 \xrightarrow{f} J_1 \xrightarrow{f} ... \xrightarrow{f} J_{n-1} \xrightarrow{f} J_0$ es elemental si todo punto que sigue el bucle tiene periodo n.*

Proposición 1 *Para todo bucle elemental existe un punto periódico de periodo n.*

Observación 3 *Nótese que, en principio, podría ser que el conjunto de puntos que siguen el bucle fuera vacío (y con ello todos tendrían periodo n). Nos dice la proposición que tal conjunto es no vacío.*

Lema 4 *Sea $J_0 \xrightarrow{f} J_1 \xrightarrow{f} ... \xrightarrow{f} J_{n-1} \xrightarrow{f} J_0$ un bucle. Supongamos que ningún extremo de J_0 sigue el bucle y que el interior de J_0 es disjunto con los intervalos $J_1, ..., J_{n-1}$, es decir, $\text{int}(J_0) \bigcap \bigcup_{i=1}^{n-1} J_i = \emptyset$. Entonces el bucle es elemental.*

Demostración. Supongamos que $x \in J_0$ sigue el bucle. Entonces x no es un extremo de J_0, con lo que $x \in \text{Int}(J_0)$. Por otra parte, si $0 < i < n$, entonces $f^i(x) \notin \text{int}(J_0)$ porque está en J_i, y $\text{int}(J_0) \bigcap J_i = \emptyset$. Deducimos así que, si $0 < i < n$, entonces $f^i(x) \neq x$. Por lo tanto x tiene periodo n. ■

Notación 3 *Supongamos que f está definida en $\mathscr{I}$. Dado $x \in \mathscr{I}$, denotamos la órbita o ciclo de x como $\Omega(x) = \{f^n(x) : n = 0, 1, 2, ...\}$. Por otra parte, Ω será el conjunto de todos los $\Omega(x)$, es decir, $\Omega = \{\Omega(x) : x \in \mathscr{I}\}$.*

Definición 7 *Dado un ciclo finito $\Omega(x)$, si card$(\Omega(x)) = m$ entonces decimos que $\Omega(x)$ es un m-ciclo.*

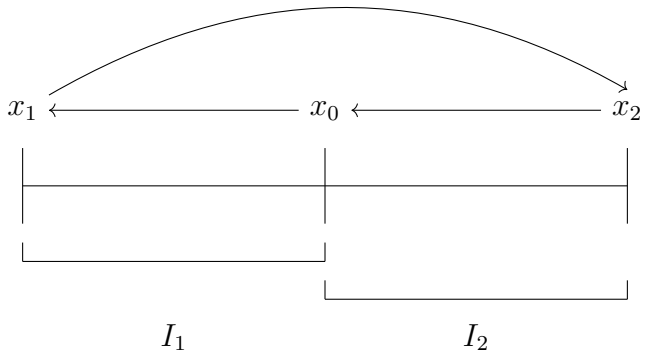
Definición 8 *Sea I un intervalo cerrado y acotado contenido en $\mathscr{I}$ y sea $x \in \mathscr{I}$. Supongamos que existen n, $m \in \mathbb{N}$ tales que $I = [f^n(x), f^m(x)]$. Entonces diremos que I es un $\Omega(x)$-intervalo (de f).*
Por otra parte, decimos que un intervalo I es un Ω-intervalo si existe $x \in \mathscr{I}$ tal que I es un $\Omega(x)$-intervalo.

Aclaración: De ahora en adelante, los intervalos considerados serán Ω-intervalos.

4 Ejemplo: periodo 3

Ahora vamos a introducir el ejemplo más famoso del Teorema de Sharkovsky: periodo 3 implica todos los periodos.

Ejemplo 1 *Sea $I = [x_1, x_2]$ un intervalo. Consideramos un 3-ciclo tal que $f(x_0) = x_1$, $f(x_1) = x_2$ y $f(x_2) = x_0$ donde $x_0 \in I$ con $x_0 \neq x_1$ y $x_0 \neq x_2$. Obviamente $x_1 < x_0 < x_2$ y denominamos $I_1 = [x_1, x_0]$ y $I_2 = [x_0, x_2]$. Observamos que x_0, x_1 y x_2 tienen periodo 3.*



Tenemos que

$$\Omega(x_0) = \{x_0, x_1, x_2\} = I \cap \Omega(x_0) = f(I \cap \Omega(x_0))$$

y, por tanto,

$$I = [x_1, x_2] = [f(x_0), f(x_1)] = [f(x_0), f^2(x_0)]$$

es un $\Omega(x_0)$-intervalo.
Del mismo modo,

$$I_2 = [x_0, x_2] = [f(x_2), f(x_1)] = [f^3(x_0), f^2(x_0)]$$

y

$$I_1 = [x_1, x_0] = [f(x_0), f(x_2)] = [f(x_0), f^3(x_0)]$$

son $\Omega(x_0)$-intervalos.

Sabemos que, como x_0, $x_1 \in I_1$, entonces $f(x_0)$, $f(x_1) \in f(I_1)$. Además, como la imagen de un intervalo por una aplicación continua es un intervalo, $f(I_1)$ es un intervalo, de donde deducimos que $[f(x_0), f(x_1)] \subset f(I_1)$, es decir, $I \subset f(I_1)$. Por tanto, como $I_1, I_2 \subset I$, tenemos que $I_1 \subset f(I_1)$ y $I_2 \subset f(I_1)$, es decir,

$$I_1 \xrightarrow{f} I_1 \text{ y } I_1 \xrightarrow{f} I_2 \ .$$

Argumentando del mismo modo, x_0, $x_1 \in I_2$, $[f(x_0), f(x_2)] = I_1 \subset f(I_2)$ y por consiguiente

$$I_2 \xrightarrow{f} I_1.$$

Ahora veamos que cualquier número natural es periodo de f.
Como $I_1 \xrightarrow{f} I_1$, por Lema 1, I_1 contiene un punto fijo de f, es decir, f tiene un punto de periodo 1.
Dado el bucle

$$I_1 \xrightarrow{f} I_2 \xrightarrow{f} I_1$$

sabemos, por Lema 3, que existe $x \in I_1$ que sigue el bucle y, por está razón, $f^2(x) = x$, es decir, tal punto tiene que tener periodo menor o igual que 2. Como los extremos x_0, x_1 tienen periodo 3 no siguen el bucle. Ahora, como los extremos no siguen el bucle y como $\text{int}(I_1) \bigcap I_2 = \emptyset$, por Lema 4, el bucle es elemental, con lo que todo elemento que lo sigue tiene exactamente periodo 2.
En otras palabras: hemos deducido que 1,2 y 3 son periodos de f.

A continuación construimos un bucle, a partir del cual deduciremos que todo $l \in \mathbb{N}$, $l > 3$, es periodo de f. Consideremos el bucle donde hay $l - 1$ copias de I_1:

$$I_2 \xrightarrow{f} \underbrace{I_1 \xrightarrow{f} ... \xrightarrow{f} I_1}_{\text{l-1 copias de } I_1} \xrightarrow{f} I_2,$$

que es elemental para $l > 3$: existe un punto que sigue el bucle por Lema 3 y, como hay l flechas, dicho punto tiene periodo menor o igual que l.
Veamos ahora que los extremos no siguen el bucle. En primer lugar, si l no es múltiplo de 3, los extremos no siguen el bucle porque tienen periodo 3. Por otra parte, si l es múltiplo de 3, observamos que los extremos de I_2, x_0 y x_2, no tienen tres iteraciones consecutivas en I_1, dado que $f^2(x_0) = x_2$ y $f^3(x_2) = x_2$. Por tanto, los extremos no siguen el bucle.
Ahora, como $\text{int}(I_1) \bigcap I_2 = \emptyset$, por Lema 4, el bucle es elemental. Finalmente, concluimos que f tiene un punto periódico de periodo l para todo $l > 3$.

De esta manera hemos visto un caso especial del Teorema de Sharkovsky: La presencia de periodo 3 implica que existe punto periódico de periodo n para todo $n \in \mathbb{N}$. Compárese con el artículo de Li y Yorke [2].

5 Las sucesiones de Štefan

Notación 4 *A partir de ahora, consideramos un escenario fijo donde, en particular, $\Omega(x)$ será un m-ciclo para un cierto $m \geq 2$ prefijado.*

Dado x, denotamos por $T(x)$ al conjunto

$$T(x) := \{s \in \Omega(x) : f(s) > s\},$$

y consideramos:

$$p(x) := \max T(x).$$

En general, escribiremos T y p en lugar de $T(x)$ y $p(x)$, una vez que consideremos x fijo.
Si denotamos por $\Omega'(x)$ al conjunto

$$\Omega'(x) := \{s \in \Omega(x) : s > p\},$$

vemos que $\Omega'(x)$ es no vacío, ya que $f(p) \in \Omega'(x)$ ($f(p) > p$ por definición). Además, como $\Omega(x)$ tiene un número finito de elementos, concluimos que $\Omega'(x)$ es finito y, así, existe

$$q := \min \Omega'(x).$$

Es decir, p es el punto 'más a la derecha' de $\Omega(x)$ para el cual $f(p) > p$ y q es el punto inmediatamente a la derecha de p en $\Omega(x)$.

Definimos el centro de $\Omega(x)$ por

$$c := (p + q)/2$$

(nótese que $c \notin \Omega(x)$).

Para cada $s \in \Omega(x)$, denotamos por Ω_s a la intersección de $\Omega(x)$ y el intervalo cerrado y acotado con extremos s y c. Así, si $s \leq p$,

$$\Omega_s = \Omega(x) \cap [s, c] = \Omega(x) \cap [s, p]$$

porque en $(p, c]$ no hay puntos de $\Omega(x)$. Del mismo modo si $s > p$,

$$\Omega_s = \Omega(x) \cap [c, s] = \Omega(x) \cap (p, s]$$

porque en (p, c) no hay puntos de $\Omega(x)$.

Nota 1 *Es evidente que $\Omega_s \subset [c, s]$ o $\Omega_s \subset [s, c]$.*

Definición 9 *Decimos que un punto $s \in \Omega(x)$ cambia de lado si c está entre s y $f(s)$.*

En particular, el punto p cambia de lado: sabemos por definición que $p < c$ y que $q > c$. Además, sabemos (porque $f(p) \in \Omega'(x)$) que $f(p) \geq q$ lo que implica que $f(p) > c$. Por tanto, $p < c$ y $f(p) > c$, es decir, p cambia de lado.

Veamos que el punto q también cambia de lado. Probémoslo por reducción al absurdo. Supongamos que no cambia de lado, entonces $f(q)$ esta en $[c, \infty]$ es decir $f(q) > c$. Distingamos dos casos y veamos que no pueden ocurrir.

- Si $f(q)$ pertenece a $[q, \infty]$ entonces $f(q) > q$, pero no puede ser porque $q > p$ y entraría en contradicción con la definición de p.
- Si $f(q)$ pertenece a $[c, q]$ de nuevo esto no puede ocurrir porque $f(q)$ está en $\Omega(x)$ y $f(q) < q$, lo que entraría en contradicción con la definición de q.

Por tanto, $f(q) < c$ en cualquier caso y esto implica que q cambia de lado.

Definición 10 *Una sucesión (finita) de puntos $x_0, x_1, ..., x_n$ de $\Omega(x)$ se denomina sucesión de Štefan si:*

Š1 $\{x_0, x_1\} = \{p, q\}$.

Š2 *Las subsucesiones (x_{2j}) y (x_{2j+1}) son estrictamente monótonas y se alejan de c. Además, una de ellas está contenida en $(-\infty, c)$ y la otra en (c, ∞).*

Š3 *Si $1 \leq j \leq n-1$, entonces x_j cambia de lado y $x_{j+1} \in \Omega_{f(x_j)}$.*

Š4 *x_n no cambia de lado.*

Por la condición Š3, tenemos que, para $j < n$, $c < f(x_j)$ si $x_j < c$ y $c > f(x_j)$ si $x_j > c$. Además, por definición tenemos que $x_{j+1} \in \Omega_{f(x_j)}$ (también el caso $j = 0$ por definición de p y q) y, con ello, $c < x_{j+1} \leq f(x_j)$ si $x_j < c$ y $c \geq x_{j+1} > f(x_j)$ si $x_j > c$.
Por otra parte, se deduce inmediatamente de Š2 que los puntos $x_0, x_1, ..., x_n$ son distintos dos a dos.

Notación 5 *Dada una sucesión de Štefan, $x_0, x_1, ..., x_n$, los elementos que están a la izquierda de c serán los de índice par, y los que están a la derecha serán los de índice impar. Esto simplemente será un recurso para simplificar las demostraciones posteriores dado que el caso inverso es análogo.*

Dada la sucesión de Štefan $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$, definimos los $\Omega(x)$-intervalos $I_0, I_1, ..., I_{n-1}$ de la manera siguiente: para $1 \leq j < n$, definimos el intervalo I_j como

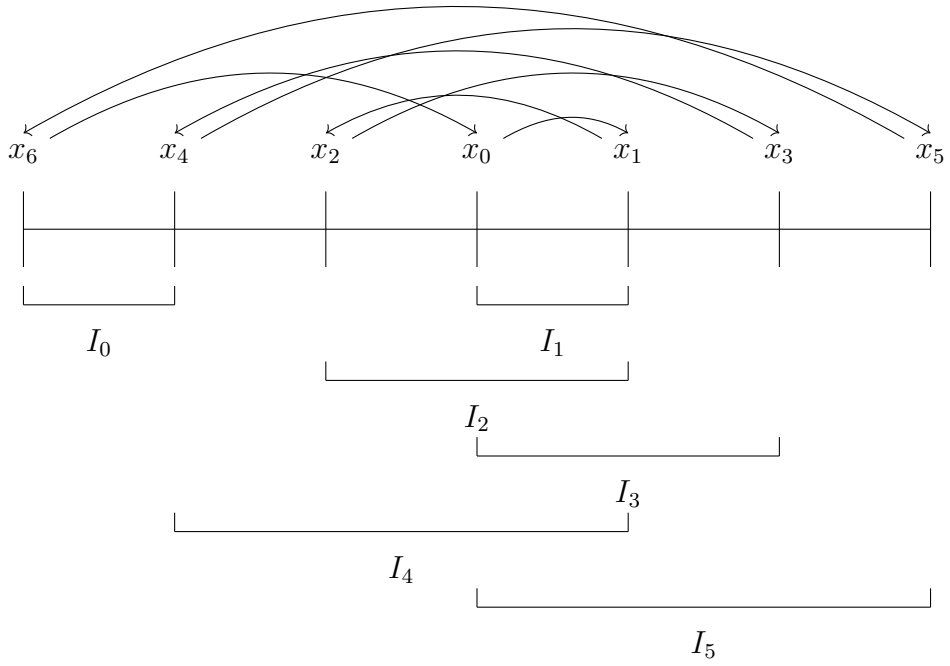
$$I_j \text{ es el intervalo más pequeño que contiene a } x_0, x_1 \text{ y } x_j,$$

mientras que I_0 se define como

I_0 es el $\Omega(x)$-intervalo cuyos extremos son x_n y x_{n-2}.

Deducimos de Š2 que, como x_n y x_{n-2} pertenecen al mismo lado y son los puntos más alejados de c por ese lado, dado j, los intervalos I_j son de la forma $[x_0, x_j]$ o $[x_j, x_1]$ y, entonces, $\text{int}(I_0) \cap I_j = \emptyset$ si $1 \leq j < n$.

Ejemplo 2 *Observamos que el ejemplo de periodo 3 introducido tambien tiene una sucesión de Štefan, pero parece conveniente introducir uno un poco mas sofisticado. Por tanto, para ver un ejemplo de una sucesión de Štefan, consideramos el 7-ciclo siguiente:*



Obviamente $\Omega(x_0)$ es un 7-ciclo. Veamos que $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ es una sucesión de Štefan.

1. *Vemos que, por definición de p, el punto más a la derecha que cumple que $f(x) > x$ es x_0. Por tanto, $x_0 = p$ y $x_1 = q$, el punto inmediatamente a la derecha que pertenece a $\Omega(x_0)$. Por consiguiente, $\{x_0, x_1\} = \{p, q\}$, es decir, se satisface Š1.*

2. *Observamos que los x_{2j} se alejan de c y están contenidos en $(-\infty, c)$. Además, ocurre lo mismo con los x_{2j+1} que están contenidos en (c, ∞). Por consiguiente, se satisface Š2.*

3. *Dado $1 \leq j \leq 5$ se cumple que x_j cambia de lado. Además, como $f(x_j) = x_{j+1}$ se satisface que $x_{j+1} \in \Omega_{f(x_j)}$. Por tanto, se cumple Š3.*

4. *Finalmente, como x_6 no cambia de lado se cumple Š4.*

Además de ver que es una sucesión de Štefan, se observa que los intervalos I_j se han obtenido como hemos indicado anteriormente.

Lema 5 *Si I_j es como lo hemos definido antes, para todo $j \neq 0$ tenemos que $\Omega_{f(x_j)} \subset f(I_j)$; además $\Omega_{f(x_0)} \subset f(I_j)$ si j es impar y $\Omega_{f(x_1)} \subset f(I_j)$ si j es par.*

Demostración. Como I_j es un intervalo y f es continua, sabemos que $f(I_j)$ es un intervalo.

Como $x_j \in I_j$ por definición, sabemos que $f(x_j) \in f(I_j)$. Ahora distingamos dos casos:

- Si j es par, $x_j < x_0$, y entonces $I_j = [x_j, x_1]$ y $f(x_j), f(x_1) \in f(I_j)$. Utilizando Š3, x_1 cambia de lado. Por tanto $f(x_1) < c$. Del mismo modo, por Š3, x_j cambia de lado, de donde deducimos que $f(x_j) > c$. Con ello, podemos ver que $[f(x_1), f(x_j)] \subset f(I_j)$. Finalmente, como $f(x_1) < c$ tenemos que

  $$[c, f(x_j)] \subset [f(x_1), f(x_j)] \subset f(I_j),$$

  de donde se puede concluir (véase Nota 1) que $\Omega_{f(x_j)} \subset f(I_j)$.
  Del mismo modo, como $f(x_j) > c$, tenemos que

  $$[f(x_1), c] \subset [f(x_1), f(x_j)] \subset f(I_j)$$

  y, por tanto, $\Omega_{f(x_1)} \subset f(I_j)$.

- Si j es impar, $x_j > x_1$, y así $I_j = [x_0, x_j]$ y $f(x_0), f(x_j) \in f(I_j)$. Como $x_0 = p$ se tiene que $f(x_0)$ cambia de lado. Así $f(x_0) > c$. Además, por Š3 $f(x_j)$ cambia de lado, por lo cual $f(x_j) < c$. Por tanto podemos ver que $[f(x_j), f(x_0)] \subset f(I_j)$. Para concluir, como $f(x_0) > c$ (porque $f(p) \geq q$), tenemos que,

$$[f(x_j), c] \subset [f(x_j), f(x_0)] \subset f(I_j),$$

de donde deduce que $\Omega_{f(x_j)} \subset f(I_j)$.
Argumentando del mismo modo, como $f(x_j) < c$, tenemos que

$$[c, f(x_0)] \subset [f(x_j), f(x_0)] \subset f(I_j)$$

y. por tanto, $\Omega_{f(x_0)} \subset f(I_j)$.

■

Proposición 2 *Si tomamos I_j como lo hemos definido antes, tenemos las siguientes relaciones:*

1. $I_j \xrightarrow{f} I_1$ *para todo* j *con* $j \in \{0, 1, 2..., n-1\}$.
2. $I_1 \xrightarrow{f} I_2... \xrightarrow{f} I_{n-1} \xrightarrow{f} I_0$
3. $I_0 \xrightarrow{f} I_{n-1}, I_{n-3}, ...$

Demostración. (1) Probaremos que $I_j \xrightarrow{f} I_1$ para $j = 0, ..., n-1$, que se simplifica en demostrar que $f(I_j)$ contiene a x_0 y x_1.
Como I_j es un intervalo y f es continua, sabemos que $f(I_j)$ es un intervalo.

- Si $j = 1$, como los extremos x_0 y x_1 de I_1 coinciden con p y q por Š1, tenemos que, están en lados opuestos de c. Además, por Š3 y porque $x_0 = p$ (hemos visto que p cambia de lado anteriormente) ambos cambian de lado. Como x_0 y $x_1 \in I_1$ entonces

  $$f(x_0) \text{ y } f(x_1) \in f(I_1).$$

  Por Š3 sabemos que $x_2 \in \Omega_{f(x_1)}$ y que $x_1 \in \Omega_{f(x_0)}$. Por Lema 5,

  $$\Omega_{f(x_1)} \subset f(I_1) \text{ y } \Omega_{f(x_0)} \subset f(I_1),$$

  con lo que

  $$x_2 \in f(I_1) \text{ y } x_1 \in f(I_1).$$

Con ello, como $x_0 > x_2$ por Š2,

$$[x_0, x_1] \subset [x_2, x_1] \subset f(I_1),$$

es decir, $I_1 \subset f(I_1)$.

- Si $j = 2, ..., n-1$, podemos suponer que j es impar sin pérdida de generalidad, dado que que si j es par la demostración es análoga. Ahora, argumentado del mismo modo que en el caso $j = 1$, por Š3 y porque p cambia de lado, los extremos de I_j (x_0 y x_j) están en lados opuestos con respecto a c y ambos cambian de lado. Como x_j y $x_0 \in I_j$ entonces

  $$f(x_j) \text{ y } f(x_0) \in f(I_j).$$

  Utilizando Š3 sabemos que $x_{j+1} \in \Omega_{f(x_j)}$ y por definición de p y q que $x_1 \in \Omega_{f(x_0)}$. Por Lema 5,

  $$\Omega_{f(x_j)} \subset f(I_j) \text{ y } \Omega_{f(x_0)} \subset f(I_j).$$

  Por consiguiente, como I_j es un intervalo también lo es $f(I_J)$ y

  $$[x_{j+1}, x_1] \subset f(I_j).$$

  Finalmente, por Š2,

  $$x_0, x_1 \in [x_{j+1}, x_1]$$

  y concluimos que

  $$x_0, x_1 \in f(I_j),$$

  y así $I_1 \subset f(I_j)$.

- Si $j = 0$, los extremos de I_0 están en el mismo lado y por Š4 solo uno de los extremos cambia de lado. En cualquier caso $f(I_0)$ contiene puntos de $\Omega(x)$ en ambos lados de c (en particular $f(x_n)$ y $f(x_{n-2})$).

Podemos suponer que n es par para facilitar la demostración, dado que el caso n impar es análogo. Como $f(x_n) \in \Omega(x)$ y $f(x_n) \leq c$, se tiene que $f(x_n) \leq p$. Por lo tanto, $f(x_n) \leq x_0$. Por otra parte, como ya hemos visto repetidamente, por Š3

$$f(x_{n-2}) \geq x_{n-1} > c.$$

Así,

$$x_0, x_1 \in [f(x_n), f(x_{n-2})] \subset f(I_0),$$

es decir, $I_1 \subset f(I_0)$.

(2) Para ver que $I_j \xrightarrow{f} I_{j+1}$, basta ver que $f(I_j)$ contiene a x_0, x_1 y x_{j+1} para $1 \leq j \leq n-1$. Hemos visto que $x_0, x_1 \in f(I_j)$, luego solo falta ver que $x_{j+1} \in f(I_j)$. Deducimos de Š3 que $x_{j+1} \in \Omega_{f(x_j)}$ y de Lema 5 que $\Omega_{f(x_j)} \subset f(I_j)$, lo que implica que $x_{j+1} \in f(I_j)$.
El caso $I_{n-1} \to I_0$, es análogo.

(3) Es suficiente ver que $f(I_0)$ contiene a x_0, x_1 y a todos los puntos $x_{n-1}, x_{n-3}, ...$ de $\Omega(x)$, que están en el lado opuesto de c respecto de x_n. Ya hemos visto en (1) que $x_0, x_1 \in f(I_0)$. Por otra parte, x_{n-2} está en I_0 y se sigue de Š3 que $f(x_{n-2})$ está por lo menos tan lejos de c como x_{n-1}, el cual está más lejos de c que $x_{n-3}, x_{n-5}, ...$ por Š2. Con esto, como $f(x_{n-2}) \in f(I_0)$ concluimos que los puntos $x_{n-1}, x_{n-3}, ...$ están en $f(I_0)$.

■

Ahora vamos a introducir lo que se conoce como el orden de Sharkovsky.

Definición 11 *Se denomina orden de Sharkovsky al siguiente orden sobre* $\mathbb{N}$*,*

$$3 \prec 5 \prec 7 \prec ...$$

$$\prec 2.3 \prec 2.5 \prec 2.7 \prec ...$$

$$\prec 2^2.3 \prec 2^25 \prec 2^2.7 \prec ...$$

$$... \prec 2^3 \prec 2^2 \prec 2 \prec 1$$

Como ya dijimos en su momento, este orden define un orden total sobre $\mathbb{N}$. Sin embrago, no es buen orden, es decir, no todo subconjunto propio tiene mínimo. Además, tiene la siguiente propiedad de la que haremos uso:

$$l \prec r \Longleftrightarrow 2l \prec 2r$$

Proposición 3 *Supongamos que el m-ciclo $\Omega(x)$ contiene una sucesión de Štefan. Dado $l \in \mathbb{N}$, si $m \prec l$, entonces f tiene un l-bucle elemental de $\Omega(x)$-intervalos y en consecuencia, contiene un punto periódico de periodo l.*

Demostración. Supongamos que la sucesión de Štefan tiene longitud $n+1$. Si $m \prec l$, podemos distinguir tres casos:

1. Si $l = 1$, consideramos el bucle

$$I_1 \xrightarrow{f} I_1,$$

que existe por Proposición 3. Veamos que es elemental. El bucle tiene longitud 1, 'solo hay una f'. Nótese que, en este caso, un punto sigue el bucle si $f(x) = x \in I_1$, es decir, es un punto fijo. Como todo punto que sigue el bucle es un punto fijo, no puede tener periodo distinto de 1. Por tanto, todos los puntos que siguen el bucle tienen periodo 1, que es la longitud del bucle, es decir, el bucle es elemental.

2. Si $l \leq n$ y es par, por Proposición 3 podemos considerar el bucle

$$I_0 \xrightarrow{f} I_{n-l+1} \xrightarrow{f} I_{n-l+2} \xrightarrow{f} ... \xrightarrow{f} I_{n-1} \xrightarrow{f} I_0.$$

Veamos que los extremos de I_0 no siguen el bucle: x_n y x_{n-2} son puntos de periodo m porque pertenecen a $\Omega(x)$ y como la longitud del ciclo es l y $l \leq n < m$ no pueden seguir el bucle. Ahora, usando el Lema 4 como $Int(I_0) \cap I_j = \emptyset$, si $1 \leq j \leq n$, el bucle es elemental.

3. Si $n \leq l \neq m$, al igual que en el caso anterior, por Proposición 3, consideramos el bucle

$$I_0 \xrightarrow{f} I_1 \xrightarrow{f} I_1 \xrightarrow{f} ... \xrightarrow{f} I_1 \xrightarrow{f} I_2 \xrightarrow{f} ... \xrightarrow{f} I_{n-1} \xrightarrow{f} I_0$$

con $r \geq 1$ repeticiones de I_1 y por tanto el bucle tiene longitud $l = n - 1 + r$. Los extremos de I_0, x_n y x_{n-2}, tienen periodo m (puesto que pertenecen a $\Omega(x)$). Veamos que no pueden seguir el bucle. Distingamos dos casos en el que $n \leq l < m$ y el caso en el que $l > m$.

- El caso $n \leq l < m$ sigue el mismo argumento que el apartado anterior. Como los extremos tienen periodo m no siguen el bucle y por tanto, por Lema 4, $Int(I_0) \cap I_j = \emptyset$ si $1 \leq j \leq n$. Por consiguiente, el bucle es elemental.
- Para el caso $l > m$, basta con ver que no puede haber iteraciones consecutivas de los elementos x_n y x_{n-2} en I_1. Por definición de sucesión de Štefan, $f(x_n) < x_0$ (si n es par) o $f(x_n) > x_1$ (si n es impar) y por tanto $f(x_n) \notin [x_0, x_1]$. Del mismo modo como $f(x_{n-2}) > x_1$ o $f(x_{n-2}) < x_0$, se tiene $f(x_{n-2}) \notin [x_0, x_1]$. Por consiguiente, como $f(x_n) \notin I_1$ y $f(x_{n-2}) \notin I_1$, los extremos de I_0 no siguen el bucle.

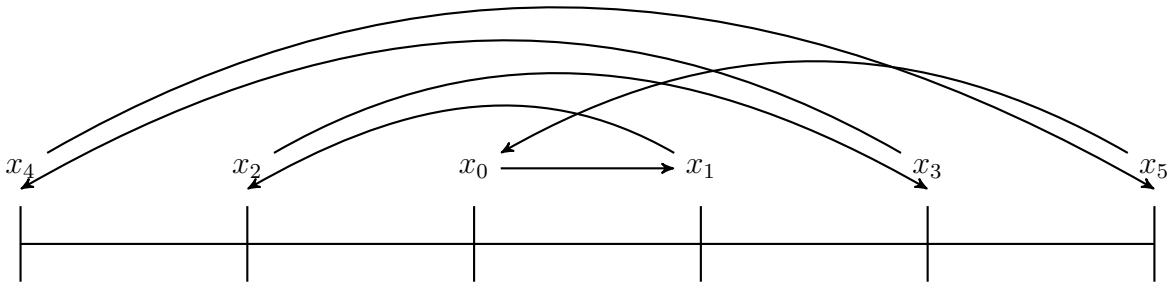
Por lo tanto, como $Int(I_0) \cap I_j = \emptyset$ si $1 \leq j \leq n - 1$, por Lema 4, el bucle es elemental.
La existencia de un punto de periodo l viene ahora garantizado por la definición de bucle elemental.

■

6 Construcción de sucesión de Štefan

Observamos que, si todo ciclo tiene una sucesión de Štefan, el Teorema de Sharkovsky sería consecuencia inmediata de la Proposición 3.

Sin embargo, podemos ver fácilmente que no todo ciclo tiene una sucesión de Štefan simplemente considerando el siguiente 6-ciclo:



donde $f(x_0) = x_1$, $f(x_1) = x_2$, $f(x_2) = x_3$, $f(x_3) = x_4$, $f(x_4) = x_5$, $f(x_5) = x_0$ y por tanto $\Omega(x_0) = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$. Como todos los puntos cambian de lado, no existe sucesión de Štefan, ya que no se cumple Š4.

En la siguiente proposición veremos que el ejemplo anterior refleja el problema que determina la inexistencia de sucesiones de Štefan de un ciclo

Proposición 4 *Un ciclo con más de un punto contiene una sucesión de Štefan salvo que todos los puntos cambien de lado.*

Para poder demostrar la Proposición 4, necesitamos introducir un lema y ciertos conjuntos que nos serán de utilidad.

Notación 6 *Sea $\Omega(x)$ un m-ciclo con $m \geq 2$. Denotamos por M al conjunto que satisface:*

1. *M es un $\Omega(x)$-intervalo.*
2. *El intervalo $[p, q]$ está contenido en M.*
3. *Si $y \in \Omega(x) \cap M$ y $z \in \Omega_y$, entonces z cambia de lado.*
4. *Si $y \in \Omega(x) \backslash M$, entonces existe $z \in \Omega_y$ que no cambia de lado.*

5. *Si existe M' que cumpla 1, 2, 3 y 4 con $M \subset M'$ entonces $M = M'$.*

En adelante, haremos uso habitual de la siguiente propiedad (equivalente a Propiedad 3, asumiendo que M es un intervalo).

Nota 2 *Todo elemento de $\Omega(x) \cap M$ cambia de lado.*

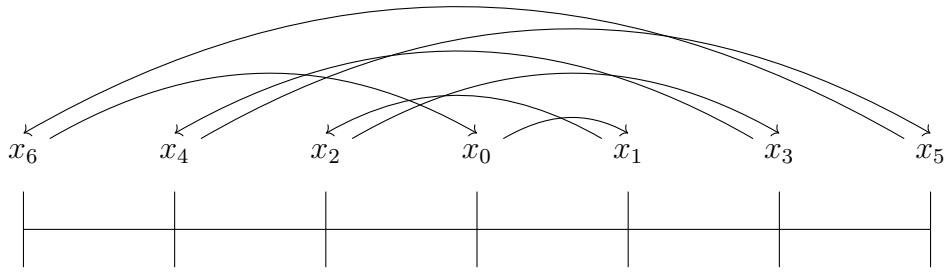
Notación 7 *Ahora denotamos $S \subset \Omega(x)$ como el conjunto de los elementos $y \in \Omega(x) \cap M$ que f manda más lejos de c que ningún otro punto de Ω_y. En otras palabras, podemos ver el conjunto S como el conjunto que contiene todo elemento que satisface las dos siguientes condiciones:*

1. *$y \in \Omega(x) \cap M$*
2. *$\Omega_{f(w)} \subset \Omega_{f(y)}$ para todo $w \in \Omega_y$.*

Nótese que la definición de S tiene sentido porque, si $w \in \Omega_y$, como $y \in M$, ambos cambian de lado por la condición 3 de la definición de M. Así, $f(w)$ y $f(y)$ están en el mismo lado respecto de c, y las distancias a c no pueden ser iguales porque entonces $\Omega(x)$ no sería un ciclo.

Veamos que p y q están en S:
p y q están en $\Omega(x)$ y, por definición, en M. Obviamente $\Omega_p = [p, c] \cap \Omega(x)$ y, por definición de q, entre p y q no hay ningún elemento de $\Omega(x)$. Con ello $\Omega_p = \{p\}$. Por consiguiente, para todo $w \in \Omega_p$, se satisface que $\Omega_{f(w)} \subset \Omega_{f(p)}$ con lo cual $p \in S$. De manera análoga q es el único elemento de Ω_q. Por tanto, se satisface que, si $w \in \Omega(q)$, entonces $\Omega_{f(w)} \subset \Omega_{f(q)}$.

Ejemplo 3 *De nuevo consideramos el 7-ciclo de Ejemplo 2*



Para ver cómo son los conjunto M y S en este caso, consideraremos que el único ciclo existente es el mencionado.
El conjunto M es un $\Omega(x_0)$-intervalo, por lo tanto debe tener como extremos a dos elementos de $\Omega(x_0)$. Además x_6 no puede estar contenido por condición 4, y $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ deben estar en M por condición 3. Por consiguiente, $M = [x_4, x_5]$. Además, como $f(x_j) = x_{j+1}$, se tiene que $S = M \cap \Omega(x)$, es decir, $S = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$.

Notación 8 *A continuación, construiremos una aplicación $\sigma : S \to \Omega(x)$ con la propiedad de que envía cada elemento de una sucesión de Štefan a su siguiente. Para ello, como $S \subset \Omega(x) \cap M$, todo $y \in S$ cambia de lado. Con ello, para asegurarnos de que y y $\sigma(y)$ están en lados opuestos de c, siempre elegiremos $\sigma(y) \in \Omega_{f(y)}$. Más concretamente, si $y \in S$, entonces $f(y) \in \Omega(x)$, y analizamos la dos posibilidades:*

1. *Si $f(y) \notin M$, tomaremos $\sigma(y)$ igual a cualquier punto de $\Omega_{f(y)}$ que no cambie de lado (lo cual puede hacerse por la condición 4). En este caso $\sigma(y)$ no cambia de lado y, por tanto, no pertenece a M, luego tampoco pertenece a S.*

2. *Si $f(y) \in M$, tomaremos como $\sigma(y)$ el punto de $\Omega_{f(y)}$ cuya imagen está más alejada de c, es decir, $f(\Omega_{f(y)}) \subset \Omega_{f(\sigma(y))}$.*

Veamos que, en el caso 2, $\sigma(y) \in S$. Sabemos que $f(y), c \in M$. Ahora supongamos que $f(y) > c$, con lo que $[c, f(y)] \subset M$ por ser M un intervalo. Por tanto, $\Omega_{f(y)} \subset M$, de donde deducimos que $\sigma(y)$ pertenece a M. Ahora como $\sigma(y) \in \Omega_{f(y)}$ tenemos que obviamente $\sigma(y) \in \Omega(x)$. Para ver que $\sigma(y)$ está en S solo queda ver que, dado $w \in \Omega_{\sigma(y)}$ entonces $\Omega_{f(w)} \subset \Omega_{f(\sigma(y))}$ lo que es equivalente a que $f(w) \in \Omega_{f(\sigma(y))}$. Así, dado $w \in \Omega_{\sigma(y)}$, como $\sigma(y) \in \Omega_{f(y)}$, tenemos que

$$\Omega_{\sigma(y)} \subset \Omega_{f(y)},$$

y así

$$w \in \Omega_{f(y)}.$$

Con ello,

$$f(w) \in f(\Omega_{f(y)}) \subset \Omega_{f(\sigma(y))}.$$

En este segundo caso, como y y $\sigma(y)$ están en lados opuestos de c y $\sigma(y) \in M$, tenemos que, por definición, $\sigma^2(y)$ está en el mismo lado que y.
Esto último, unido al hecho de que, como veremos, como consecuencia de Lema 7, $\sigma^2(y)$ esta más lejos de c que y, resulta crucial para que se cumpla Š2.

Lema 6 *Si $A \subset \Omega(x)$ satisface que $f(A) \subset A$, entonces $A = \emptyset$ o $A = \Omega(x)$.*

Demostración. Supongamos que $A \neq \emptyset$. Recordemos que $\Omega(x)$ es un m-ciclo. Denotemos como n al cardinal de A y como t al cardinal de $f(A)$. Como $A \subset \Omega(x)$ tenemos que $n \leq m$. Del mismo modo, como $f(A)$ esta contenido en A tenemos que $t \leq n$. Veamos que se tiene que dar la igualdad entre t y n, es decir, $t = n$.

- Supongamos que $t < n$. Entonces existen dos elementos $a, b \in A$ con $a \neq b$ tales que $f(a) = f(b)$. Ahora, como $a, b \in \Omega(x)$ existe

  $$p \in \mathbb{N} \text{ con } 1 \leq p < m \text{ tal que } f^p(a) = b,$$

  pero esto implica que

  $$f^p(f(a)) = f^{p+1}(a) = f(b) = f(a),$$

  lo cual es absurdo, ya que hemos encontrado un ciclo de longitud $p < m$ en $\Omega(x)$.

Por consiguiente, como $f(A) \subset A$ y $t = n$ entonces $f(A) = A$ y, así, f es biyectiva.
Veamos que como f es biyectiva se tiene que A es un j-ciclo con $j \leq n$.
Dado $a_1 \in A$, como $f(A) = A$, existe

$$a_2 \in A \text{ tal que } f(a_2) = a_1.$$

Del mismo modo, como

$$a_2 \in A \text{ existe } a_3 \in A \text{ tal que } f(a_3) = a_1$$

y, por tanto,

$$f^2(a_3) = a_1.$$

De este modo construimos

$$a_1, a_2, ...a_n, a_{n+1}, \text{ con } f(a_k) = a_{k-1}.$$

Como f es biyectiva y A tiene n puntos, los $n+1$ puntos no pueden ser diferentes dos a dos. Por tanto, existen k y j con

$$a_k = a_{k+j}, \text{ es decir, } f^j(a_{k+j}) = a_k,$$

con lo cual encontramos en A un j-ciclo con $j \leq n$. Finalmente, como en $\Omega(x)$ no puede haber ciclos de longitud menor que m, deducimos que $n = m$, concluyendo que $A = \Omega(x)$. ■

Lema 7 *Si existe un $y \in S$ tal que $\sigma^2(y) \in \Omega_y$, entonces todos los puntos de $\Omega(x)$ cambian de lado.*

Demostración. Dado $y \in S$, para que este definido $\sigma^2(y)$, se ha de tener en primer lugar que $\sigma(y)$ pertenezca a S y, por tanto, $\sigma(y)$ se obtiene mediante el caso 2. Además, como, por hipótesis, $\sigma^2(y)$ está en Ω_y y, por otra parte, $y \in M$ y M es un intervalo, entonces $\sigma^2(y)$ está en M. Por consiguiente, como $\sigma^2(y)$ está en M, necesariamente ha de obtenerse mediante el caso 2 y, por tanto, $\sigma^2(y)$ está en S. En resumen, tenemos que $\sigma(y)$ y $\sigma^2(y)$ están en S y se obtienen a partir del caso 2. Por ello, como $\sigma(y)$ se obtiene por el caso 2,

$$f(\Omega_{f(y)}) \subset \Omega_{f(\sigma(y))} \tag{1}$$

y como $\sigma^2(y)$ también se obtiene por el caso 2,

$$f(\Omega_{f(\sigma(y))}) \subset \Omega_{f(\sigma^2(y))}. \tag{2}$$

Como, por hipótesis, tenemos que $\sigma^2(y) \in \Omega_y$,

$$\Omega_{\sigma^2(y)} \subset \Omega_y.$$

Por otra parte, como $y \in S$, $f(y)$ dista de c más que $f(w)$ para todo $w \in \Omega_y$. Ahora aplicando f a ambos lados, y teniendo esto en cuenta,

$$\Omega_{f(\sigma^2(y))} \subset \Omega_{f(y)}. \tag{3}$$

Si combinamos (2) y (3), obtenemos que

$$f(\Omega_{f(\sigma(y))}) \subset \Omega_{f(y)}. \tag{4}$$

Ahora haciendo la unión (1) y (4) obtenemos que

$$f(\Omega_{f(y)}) \cup f(\Omega_{f(\sigma(y))}) \subset \Omega_{f(y)} \cup \Omega_{f(\sigma(y))},$$

es decir,

$$f(\Omega_{f(y)} \cup \Omega_{f(\sigma(y))}) \subset \Omega_{f(y)} \cup \Omega_{f(\sigma(y))}.$$

Ahora por Lema 6, el único subconjunto invariante por f no vacío de $\Omega(x)$ es el propio $\Omega(x)$. Por consiguiente, $\Omega(x) = \Omega_{f(y)} \cup \Omega_{f(\sigma(y))}$. Finalmente, como $f(y)$ y $f(\sigma(y))$ están en M (porque $\sigma(y)$ y $\sigma^2(y)$ pertenecen a S), por condición 3, todo $z \in \Omega_{f(y)} \cup \Omega_{f(\sigma(y))}$ cambia de lado. Así, habiendo situado todos los elementos de $\Omega(x)$ en $\Omega_{f(y)}$ o en $\Omega_{f(\sigma(y))}$, tenemos que todos ellos cambian de lado.

■

Ya hemos introducido todo lo necesario para demostrar Proposición 4, que incluimos aquí:

Demostración de Proposición 4. Supongamos que existe un punto de $\Omega(x)$ que no cambia de lado. Veamos que esto implica que existe una sucesión de Štefan.
Como existe un punto que no cambia de lado, por Lema 7, sabemos que $\sigma^2(y) \notin \Omega_y$ para todo $y \in S$. Por consiguiente, no puede suceder simultáneamente que $\sigma(p) = q$ y $\sigma(q) = p$, es decir, si se cumpla uno de los dos casos el otro no se cumple. Por lo tanto, podemos elegir $\{x_0, x_1\} = \{p, q\}$ y $x_2 := \sigma(x_1) \neq x_0$. Para construir la sucesión, elegiremos $x_{i+1} = \sigma(x_i)$ mientras $x_i \in S$ (veremos luego que está sucesión ha de ser finita). Probemos que esta construcción nos proporciona una sucesión de Štefan.

1. La elección de $\{x_0, x_1\} = \{p, q\}$ verifica Š1.

2. Por como están elegidos x_0 y x_1, sabemos que están en lados opuestos. Como $x_1 \in S$ cambia de lado, x_2 está en el mismo lado que x_0. Como, por definición, $\Omega_{x_0} = \{x_0\}$ y $x_2 \neq x_0$ se tiene que $x_2 \notin \Omega_{x_0}$. Las sucesiones "pares" e "impares" están en lados opuestos de c porque x y $\sigma(x)$ están en lados opuestos de c. Ahora, el Lema 7 muestra que $x_{i+2} = \sigma^2(x_i) \notin \Omega_{x_i}$, es decir, cada dos iteraciones nos alejamos más de c. Por consiguiente, se verifica Š2.

   Como los puntos de la sucesión se van alejando de c y $\Omega(x)$ es finito, necesariamente la sucesión es finita, es decir, la sucesión será $x_0, x_1, ..., x_n$.

3. Notemos que para $1 \leq j < n$ tenemos que $x_j \in S \subset M$, y, por tanto, x_j cambia de lado. Finalmente, $x_{j+1} = \sigma(x_j) \in \Omega_{f(x_j)}$ por la definición de σ y, por consiguiente, tenemos Š3.

4. Tenemos que la imagen del último término x_n viene dada necesariamente por la primera parte de la definición de σ; en caso contrario, x_n no sería el último, dado que $\sigma(x_n) = x_{n+1}$ estaría en S. Por eso, x_n no cambia de lado y se verifica Š4.

■

La combinación de Proposiciones 3 y 4 nos da un nuevo resultado.

Proposición 5 *Si un m-ciclo $\Omega(x)$ contiene un punto que no cambia de lado, entonces para cada $l \in \mathbb{N}$ con $m \prec l$ existe un l-bucle elemental de Ω-intervalos.*

7 Prueba del Teorema *Forcing* de Sharkovsky

Teorema 1 ***(Teorema Forcing de Sharkovsky)*** *Si m es un periodo de f y $m \prec l$, entonces l también es un periodo de f.*

A continuación, definiremos la relación Ω-forzada. Para ello, dado un $\Omega(x)$-intervalo I, consideramos el $\Omega(x)$-intervalo cerrado H que tiene como extremos los puntos 'más a la izquierda' y 'más a la derecha' de $f(I \cap \Omega(x))$. Más concretamente:

Definición 12 *Sea I un $\Omega(x)$-intervalo. Sea H el intervalo $[f^{n+1}(x), f^{m+1}(x)]$ donde $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $f^{n+1}(x), f^{m+1}(x) \in f(I \cap \Omega(x))$ con $f^{n+1}(x) \leq f^t(x)$ y $f^{m+1}(x) \geq f^t(x)$ para todo $f^t(x) \in f(I \cap \Omega(x))$. Dado un Ω-intervalo J con $I \xrightarrow{f} J$, decimos que la relación $I \xrightarrow{f} J$ es Ω-forzada si $J \subset H$.*

En lo que sigue necesitaremos una variación en Proposición 5 que tenga en cuenta que la relación de cubrir sea Ω-forzada. Para ello, basta con ver que las relaciones dadas en la prueba de Proposición 3 son Ω-forzadas, puesto que Proposición 5, se basa en Proposición 3.
Vamos a introducir la Proposición 3 modificada.

Proposición 6 *Supongamos que el m-ciclo $\Omega(x)$ contiene una sucesión de Štefan. Dado $l \in \mathbb{N}$, si $m \prec l$, entonces f tiene un l-bucle elemental de $\Omega(x)$-intervalos* ***donde cada relación es Ω-forzada*** *y, en consecuencia, contiene un punto periódico de periodo l.*

Demostración. Para ver que las relaciones son Ω-forzadas, simplemente basta usar que los intervalos I_j están formados por elementos de la sucesión de Štefan. Ahora, lo que tenemos que ver es que los bucles de la prueba de Proposición 3 son Ω-forzados en todos los casos (seguimos con la notación dada en la prueba de dicha proposición).

- Consideremos el bucle

$$I_1 \xrightarrow{f} I_1$$

Tenemos que $I_1 = [x_0, x_1]$. Sabemos que, como $x_0 = p$ y $f(p) \geq q$, se tiene que

$$f(x_0) \geq x_1.$$

Ahora, como x_1 es un elemento de la sucesión de Štefan, satisface Š3. Por tanto,

$$f(x_1) < x_2$$

lo que implica que

$$[x_2, x_1] \subset [f(x_1), f(x_0)].$$

Ahora, denotamos como H_1 el intervalo cuyos extremos son los más alejados de $f(I_1 \cap \Omega(x))$. Tenemos que como $I_1 \cap \Omega(x) = \{x_0, x_1\}$, entonces

$$H_1 = [f(x_1), f(x_0)].$$

Y, como por Š2 $[x_0, x_1] \subset [x_2, x_1]$ concluimos que

$$[x_0, x_1] \subset H_1,$$

es decir, la relación es Ω-forzada

- Supongamos que n es par (si n es impar, la demostración es análoga). Ahora consideramos el bucle (con l par)

$$I_0 \xrightarrow{f} I_{n-l+1} \xrightarrow{f} I_{n-l+2} \xrightarrow{f} ... \xrightarrow{f} I_{n-1} \xrightarrow{f} I_0 \ ,$$

que a su vez la dividiremos en tres subcasos.

1. $I_0 \xrightarrow{f} I_{n-l+1}$
   Sabemos que $I_0 = [x_n, x_{n-2}]$ y $I_{n-l+1} = [x_0, x_{n-l+1}]$. Sabemos por Š4 que x_n no cambia de lado y, por definición de p, que

   $$f(x_n) < x_0.$$

   Además por Š3 tenemos que

   $$f(x_{n-2}) > x_{n-1}.$$

   Ahora, como l es par, obviamente

   $$x_{n-1} > x_{n-l+1}.$$

   Por consiguiente

   $$[x_0, x_{n-l+1}] \subset [f(x_n), f(x_{n-2})].$$

   Denotamos como H_2 el intervalo cuyos extremos son los más alejados de $f(I_0 \cap \Omega(x))$ y tenemos que

   $$[f(x_n), f(x_{n-2})] \subset H_2$$

   y, por tanto,

   $$[x_0, x_{n-l+1}] \subset H_2$$

   con lo que la relación es Ω-forzada.

2. Veamos como caso general que, para $1 \leq j < n$, tenemos que

$$I_j \xrightarrow{f} I_{j+1}$$

es Ω-forzada. Supongamos de manera general que j es impar, el caso de j par es análogo.
Sabemos que $I_j = [x_j, x_1]$ y $I_{j+1} = [x_0, x_{j+1}]$. Como hemos visto en el primer caso

$$f(x_0) \geq x_1.$$

Ahora, una vez más por Š3,

$$f(x_j) > x_{j+1}.$$

Vamos a denotar por H_3 el intervalo cuyos extremos son los más alejados de $f(I_j \cap \Omega(x))$. Tenemos que

$$[f(x_j), f(x_0)] \subset H_3$$

y finalmente uniendo ambos resultados

$$[x_{j+1}, x_1] \subset H_3.$$

3. El caso $I_{n-1} \xrightarrow{f} I_0$ es análogo al anterior.

- Ahora, en el bucle considerado,

$$I_0 \xrightarrow{f} I_1 \xrightarrow{f} I_1 \xrightarrow{f} ... \xrightarrow{f} I_1 \xrightarrow{f} I_2 \xrightarrow{f} ... \xrightarrow{f} I_{n-1} \xrightarrow{f} I_0,$$

vemos que la única relación que resta por ver que es Ω-forzada es

$$I_0 \xrightarrow{f} I_1$$

Esto se deduce inmediatamente del hecho de que $I_1 \subset I_{n-l+1}$ y que, por otra parte, acabamos de ver que $I_0 \xrightarrow{f} I_{n-l+1}$ es Ω-forzada.

■

Proposición 7 *Si un m-ciclo $\Omega(x)$ contiene un punto que no cambia de lado, entonces para cada $l \in \mathbb{N}$ con $m \prec l$ existe un l-bucle elemental de Ω-intervalos* ***donde cada relación es Ω-forzada.***

Observamos que la prueba del Teorema *Forcing* de Sharkovsky se deriva de Proposiciones 1 y 8 (enunciada a continuación).

Proposición 8 *Un m-ciclo $\Omega(x)$ tiene un l-bucle elemental Ω-forzado de Ω-intervalos para cada $m \prec l$.*

Demostración. Procedemos a demostrarlo por inducción sobre m.

1. El caso $m = 1$ es obvio, ya que basta observar que no existe ningún elemento más grande que 1 en el orden de Sharkovsky.

2. Fijamos ahora m y supongamos que la hipótesis es cierta para todo ciclo menor que m. Sea $\Omega(x)$ un m-ciclo. Distinguimos dos casos:

   - *Existe algún elemento de $\Omega(x)$ que no cambia de lado.* Entonces el resultado se sigue de Proposición 7.
   - *Todo elemento de $\Omega(x)$ cambia de lado.* Vamos a denotar $L = \min \Omega(x)$ y $R = \max \Omega(x)$ y seguiremos con Notación 4. Entonces Ω_L contiene todos los elementos de $\Omega(x)$ que están a la izquierda de c (menores que c) y Ω_R contiene a todos los elementos que están a la derecha de c (mayores que c).
     Veamos que f intercambia Ω_R y Ω_L. Como todos los elementos de $\Omega(x)$ cambian de lado, todo elemento que está a la izquierda de c pasa a estar a la derecha por f y todo elemento que esté a la derecha de c pasa a la izquierda. Por otra parte, $f(\Omega(x)) = \Omega(x)$, con lo que f es suprayectiva y, como $\Omega(x)$ es finito, es inyectiva. Por tanto, las aplicaciones $f|\Omega_L : \Omega_L \to \Omega_R$ y $f|\Omega_R : \Omega_R \to \Omega_L$ son ambas biyectivas y así f intercambia Ω_R y Ω_L. De aquí deducimos que

     $$card(\Omega_L) = card(\Omega_R),$$

     es decir, $\Omega(x)$ tiene el mismo número de elementos a la izquierda de c que a la derecha de c. Por consiguiente, m es par.
     Como m es par, dada la propiedad del orden de Sharkovsky $s \prec r \iff 2s \prec 2r$, tenemos que

     $$m \prec l \text{ si y solo si } l = 1 \text{ o } l = 2k \text{ con } m/2 \prec k.$$

Por lo tanto, en el caso $l = 1$ necesitamos ver que f tiene un 1-bucle elemental, es decir, un punto fijo y, en el otro caso, un $2k$-bucle Ω-forzado elemental de Ω-intervalos para cada $m/2 \prec k$.

- Para ver que f tiene un 1-bucle elemental tomamos el $\Omega(x)$-intervalo central, es decir, $[p, q]$ donde obviamente $p = \max \Omega_L$ y $q = \min \Omega_R$. El intervalo $[p, q]$ por f se cubre a si mismo, ya que ambos cambian de lado por f y por definición de p y q no existe ningún elemento de $\Omega(x)$ que pertenezca al intervalo (p, q). Entonces, por Lema 1. f tiene un punto fijo, es decir, un 1-bucle elemental. Además, obviamente $[p, q]$ es un $\Omega(x)$-intervalo.
- Para encontrar el $2k$-bucle elemental, primero observemos que, para la segunda iteración, f^2, Ω_L y Ω_R son ciclos de longitud $m/2$. Como $m/2 < m$, por hipótesis de inducción para f^2, ambos tienen un k-bucle elemental Ω-forzado de $\Omega(x)$-intervalos para cada $m/2 \prec k$.
  Sin pérdida de generalidad, podemos trabajar con Ω_R siendo la demostración análoga para Ω_L .
  Sabemos que existe un k-bucle elemental para f^2
  $$R_0 \xrightarrow{f^2} R_1 \xrightarrow{f^2} R_2 \xrightarrow{f^2} R_3 \xrightarrow{f^2} ... \xrightarrow{f^2} R_{k-1} \xrightarrow{f^2} R_0,$$
  donde cada R_i está en Ω_R.
  A continuación, por comodidad de notación tomaremos $R_k := R_0$ en caso necesario. Para cada i, sea R'_i el intervalo cerrado más pequeño que contenga a $f(R_i \cap \Omega(x)) \subset \Omega_L$. Estos son conjuntos finitos de puntos y, por ello, son $\Omega(x)$-intervalos. Además, por construcción, tenemos que
  $$\text{las relaciones } R_i \xrightarrow{f} R'_i \text{ son } \Omega\text{-forzadas para todo } 0 \leq i \leq k.$$
  La parte restante de la prueba consiste en demostrar que esto proporciona el $2k$-bucle elemental Ω-forzado siguiente:
  $$R_0 \xrightarrow{f} R'_0 \xrightarrow{f} R_1 \xrightarrow{f} R'_1 \xrightarrow{f} ... \xrightarrow{f} R_{k-1} \xrightarrow{f} R'_{k-1} \xrightarrow{f} R_0.$$
  Para ver que esto es un bucle Ω-forzado veamos que la relación $R'_i \xrightarrow{f} R_{i+1}$ es Ω-forzada.
  Como $R_i \xrightarrow{f^2} R_{i+1}$ es Ω-forzado, existen a_i y $b_i \in R_i \cap \Omega_R$ tales que

el intervalo cerrado con extremos $f^2(a_i)$ y $f^2(b_i)$ contiene a R_{i+1}. Por otra parte,

$$a'_i := f(a_i) \text{ y } b'_i := f(b_i)$$

están en $R'_i \cap \Omega(x)$. Adaptando la notación, tenemos que $f(a'_i) = f^2(a_i)$ y $f(b'_i) = f^2(b_i)$, es decir, el intervalo cerrado de extremos $f(a'_i)$ y $f(b'_i)$ contiene a R_{i+1}, como se requiere.
Solo queda ver que el bucle es elemental.
Consideramos un punto periódico x de periodo k que sigue el bucle por f^2. Ahora consideramos la orbita de x por f, y se tiene que k puntos de su orbita están en Ω_R. Como los intervalos en el bucle de f están en lados alternativos de c, hay iteraciones de x por f. Por tanto, existen otros k puntos que están en Ω_L, y la órbita tiene longitud $2k$. Por eso, x tiene periodo $2k$ respecto de f y el bucle es elemental.

■

8 Prueba del Teorema de Realización de Sharkovsky

Definición 13 *Se dice que un conjunto $T \subset \mathbb{N}$ es una cola del orden de Sharkovsky si, para cualesquiera $s \notin T$ y $t \in T$, se cumple que $s \prec t$.*

Por definición del orden de Sharkovsky, el conjunto de periodos de una función continua es una cola del orden de Sharkovsky.

Teorema 2 ***(Teorema de Realización de Sharkovsky)*** *Toda cola del orden de Sharkovsky es un conjunto de periodos para alguna función continua de un intervalo en sí mismo.*

Demostración. Consideremos la función $f : [0,1] \to [0,1]$ (llamada "tent map") descrita de la siguiente forma:

$$f(x) := \begin{cases} 2x & si \quad x \leq 1/2 \\ \\ 2 - 2x & si \quad x > 1/2 \end{cases}$$

Obviamente, para todo $x \in [0,1]$, $0 \leq f(x) \leq 1$.
Veamos que el conjunto $C = \{2/7, 4/7, 6/7\}$ es un 3-ciclo. Tenemos que

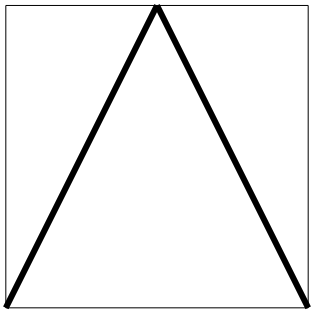


Figure 1: "Tent map" $f : [0, 1] \to [0, 1]$

$$f(2/7) = 4/7,$$
$$f(4/7) = 2 - 2 \cdot 4/7 = 2 - 8/7 = 6/7$$

y, por último,

$$f(6/7) = 2 - 2 \cdot 6/7 = 2 - 12/7 = 2/7.$$

Por tanto, C es un 3-ciclo. Además, por Teorema *Forcing* de Sharkovsky, como existe un 3-ciclo, están todos los demás ciclos del orden de Sharkovsky, es decir, dado cualquier $n \in \mathbb{N}$ entonces n es un periodo de f.
Ahora, a partir de f definimos las funciones $f_\lambda(x) = \min(\lambda, f(x))$ donde λ, $x \in [0, 1]$, es decir,

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \min(\lambda, 2x) & si \quad x \leq 1/2 \\ \\ \min(\lambda, 2 - 2x) & si \quad x > 1/2 \end{cases}.$$

Analicemos los dos casos extremos, $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$:

- Si $\lambda = 0$, entonces $f_0(x) = \min(0, f(x)) = 0$ para todo $x \in [0, 1]$. Por tanto, f_0 solo tiene como periodo al 1, que viene determinado por el punto fijo 0.
- Si $\lambda = 1$, entonces $f_1(x) = \min(1, f(x)) = f(x)$ para todo $x \in [0, 1]$. Por tanto, como $f_1 = f$, por lo indicado anteriormente, los periodos de f_1 son todos los números naturales.

Veamos que, cuando pasamos de f_0 a f_1 variando λ, pasamos por todos los posibles números de periodos de f. Para ello, consideremos la siguiente Afirmación.

Afirmación 1 *Todo ciclo S de f_λ en $[0,\lambda)$ es un ciclo para $f_1 = f$ y todo ciclo S de f_1 en $[0,\lambda]$ es un ciclo para f_λ.*

Demostración de Afirmación 1. En primer lugar, para cualquier $x \in [0,1]$, si $f_\lambda(x)$ está en $[0,\lambda)$ entonces, por definición, $f(x)$ está en $[0,\lambda)$. Por ello, dado un ciclo $S \subset [0,\lambda)$ de f_λ, se tiene que S también es un ciclo de f.
Del mismo modo, dado $x \in [0,1]$ si $f(x)$ está en $[0,\lambda]$ entonces, por definición de f_λ, $f_\lambda(x)$ está en $[0,\lambda]$. Por tanto, dado un ciclo $S \subset [0,\lambda]$ de f también es un ciclo de f_λ. ■

Ahora definimos la aplicación $h : \mathbb{N} \to [0,1]$ como:

$$h(m) := \min\{\max S : S \text{ es un } m\text{-ciclo de } f\}.$$

Veamos que la función h ordena los números naturales en el orden de Sharkovsky, donde los conjuntos $f_{h(m)}$ se corresponden con las colas de Sharkovsky. Observemos que, a partir de la definición de h, podemos deducir ciertas propiedades:

1. Si $h(l) < \lambda$, existe un l-ciclo S de f con $\max S < \lambda$ (y viceversa), es decir, existe un l-ciclo S de f con $S \subset [0,\lambda)$. Por Afirmación 1, S es un l-ciclo de f_λ, es decir, existe un l-ciclo de f_λ en $[0,\lambda)$.

2. La órbita de $h(m)$ es un m-ciclo para $f_{h(m)}$. Es una consecuencia directa de la definición de $h(m)$ y Afirmación 1: por definición la órbita de $h(m)$ es un m-ciclo para f contenido en $[0,h(m)]$; ahora, por Afirmación 1, es también un m-ciclo para $f_{h(m)}$.

3. Todos los demás ciclos de $f_{h(m)}$ están en $[0,h(m))$: en primer lugar, $f_{h(m)} \leq h(m)$, luego todo ciclo de $f_h(m)$ está contenido en $[0,h(m)]$; por otra parte, si el punto $h(m)$ pertenece al ciclo, entonces estamos ante la órbita de $h(m)$ porque todos los ciclos son disjuntos.

Ahora gracias a estas propiedades podemos concluir la siguiente Afirmación.

Afirmación 2 *Para todo $l, m \in \mathbb{N}$*

$$h(l) < h(m) \iff m \prec l$$

Demostración de Afirmación 2. Veamos primero la implicación de derecha a izquierda.
La combinación de Propiedad 2 con el Teorema *Forcing* de Sharkovsky nos indica que $f_{h(m)}$ tiene un l-ciclo para todo $m \prec l$. Gracias a Propiedad 3 sabemos que este ciclo está en el intervalo $[0, h(m))$. Finalmente, se deduce de esto último y de Propiedad 1 que $h(l) < h(m)$.
Para terminar veamos la implicación de izquierda a derecha.
Si no se satisface $m \prec l$, como $\prec$ es un orden total, $l \prec m$, y siguiendo la primera parte de la prueba, concluimos que $h(m) \prec h(l)$, lo que es absurdo. ■

Para concluir, tenemos que la combinación de Propiedades 1, 2 y Afirmación 2 nos proporciona el resultado deseado: dado un numero natural m, la aplicación h nos da un valor $h(m)$ en $[0, 1]$ que, por Propiedad 2, $h(m)$ es un m-ciclo en $f_{h(m)}$. Ahora, por Afirmación 2 tenemos que para todo número natural l del orden de Sharkovsky tal que $m \prec l$, $h(l) < h(m)$. Finalmente, por Propiedad 1 para todo $h(l)$ tal que $h(l) < h(m)$, tenemos que existe un l-ciclo en $f_{h(m)}$. Por tanto, el conjunto de periodos de $f_{h(m)}$ es la cola de Sharkovsky que empieza en m.

El conjunto de las potencias de 2 es la única cola del orden de Sharkovsky que difiere de las otras, dado que no tiene inicio.
Tenemos que $h(2^\infty) := \sup_k h(2^k) > h(2^k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ por Afirmación 2, así que $f_{h(2^\infty)}$ tiene 2^k-ciclos para todo k por Propiedad 1. Supongamos que $f_{h(2^\infty)}$ también tiene un m-ciclo donde m no es potencia de 2. Por Teorema *Forcing* de Sharkovsky también tiene un $2m$-ciclo. Además, los m-ciclos y los $2m$-ciclos son disjuntos y, por tanto, al menos uno de ellas está contenido en $[0, h(2^\infty))$ y, por ello, en $[0, h(2^k))$ para algún $k \in \mathbb{N}$, lo que contradice a Afirmación 2 y Propiedad 1. ■

Bibliografía

[1] W.A. Coppel, *The solutions of equations by iteration*. Proc. Cambridge Philos. Soc. 51 (1955) 41-43.

[2] T.-Y. Li, J.A. Yorke, *Period three implies chaos*. Amer. Math. Monthly 82 (1975) 985-992.

[3] L. Alsedà, J. Llibre, M. Misiurewicz. *Combinatorial Dynamics and Entropy in Dimension One,* 2nd ed, Advanced Series in Nonlinear Dynamics, Vol. 5, World Scientific, River Edge, NJ, 2000.

[4] B.-S. Du, *A Simple Proof of Sharkovsky's Theorem*. Amer. Math. Monthly 111 (2004) 595-599.

[5] B.-S. Du, *A Simple Proof of Sharkovsky's Theorem Revisited*. Amer. Math. Monthly 114 (2007) 152-154.

[6] K. Burns, B. Hasselblatt. *The Sharkovsky Theorem: A Natural Direct Proof*. Amer. Math. Monthly 118 (2011) 229-244.

[7] Caroline M. Edmaier, *Sharkovsky's Theorem A direct proof and further observations*. Bachelorthesis, Universidad de Heidelberg (2019).