



Facultad
de
Ciencias

LA TEORÍA DEL CAOS

(Chaos theory)

Trabajo de Fin de Grado

para acceder al

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autor: Ignacio Altadill Simón

Director: Rafael Granero Belinchón

Septiembre 2023

A mis abuelos Antonio, Chefi, Emi y Pepe.

A mis padres Marta y Nacho.

A mi hermana María.

Resumen

La Teoría del Caos trata con aquellos sistemas deterministas cuyo comportamiento a largo plazo es impredecible, caótico. Se trata de una teoría desafiante que ha ido adquiriendo mayor relevancia entre los científicos durante los últimos años debido a sus múltiples aplicaciones. En este trabajo nos adentraremos de lleno en el corazón de la Teoría del Caos, dando una visión global pero precisa de las bases que la sustentan. Nos embarcaremos en un viaje por la historia para descubrir cómo se ha ido gestando esta teoría, discutiremos la noción de caos determinista y visualizaremos este caos a partir del estudio de un caso muy conocido y de especial interés: el sistema de Lorenz. Finalmente, iremos un paso más allá al examinar un fenómeno aún más impredecible que el propio caos, conocido como “*estocasticidad espontánea*”, el cual se observa en sistemas regidos por ecuaciones cuya solución no es única, de forma que el comportamiento del mismo se define en términos probabilísticos. Este novedoso fenómeno, que algunos científicos han empezado a estudiar a fondo recientemente, podría ser de gran utilidad para comprender un tema tan complejo como es la turbulencia.

Palabras clave: sistema dinámico, caos determinista, atractor, sistema de Lorenz, estocasticidad espontánea.

Abstract

Chaos Theory deals with those deterministic systems whose behaviour in the long term is unpredictable, chaotic. It is a challenging theory which has become more relevant among scientists during the last years due to its multiple applications. In this project we will go straight to the heart of the Chaos Theory, providing an overall view of the basis on which it is supported. We will embark on an historical journey to discover how this theory has been bulding up, we will discuss the notion of deterministic chaos and we will visualise this chaos by studying a very well known system: Lorenz system. Finally, we will go a step further by examining a phenomenon that is even more unpredictable than chaos, known as “*spontaneous stochasticity*”, which is observed in systems with non unique solutions, so that its behaviour is defined in probabilistic terms. This novel phenomenon, which has become an object of deep study by some scientists recently, could be a very useful tool to understand such a complex event like turbulence.

Key words: dynamical system, deterministic chaos, attractor, Lorenz system, spontaneous stochasticity

Índice

1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.2. Contexto histórico de la Teoría del Caos	2
1.3. Introducción a los sistemas dinámicos	6
2. Caos determinista	8
2.1. Qué es el caos determinista	8
2.2. Exponentes de Lyapunov	9
2.3. Atractores	10
2.4. Introducción a la teoría de bifurcaciones	16
2.4.1. Bifurcación tridente	17
2.4.2. Bifurcación de Hopf	19
3. Ejemplo: El sistema de Lorenz	22
3.1. Propiedades del sistema	22
3.1.1. Existencia de las soluciones	22
3.1.2. No linealidad	24
3.1.3. Simetría	24
3.1.4. Disipación	24
3.2. Puntos de equilibrio	26
3.2.1. Estabilidad de los puntos de equilibrio	27
3.3. Exponentes de Lyapunov	36
4. Estocasticidad espontánea	38
5. Conclusiones	45
A. Anexo I	50
B. Anexo II	50
C. Anexo III	52
D. Anexo IV	53

1. Introducción

1.1. Motivación

“El verdadero viaje de descubrimiento no consiste en buscar nuevos paisajes, sino en mirar con nuevos ojos.”

- MARCEL PROUST

El intento por dar una explicación racional a todo aquello que nos rodea es una característica inherente al ser humano. A lo largo de la historia, la manera en que se entiende el mundo ha ido evolucionando, condicionada por la aparición y el desarrollo de nuevas teorías científicas. Decía el novelista y crítico francés Marcel Proust que para descubrir hace falta investigar con nuevos ojos, y esto es precisamente lo que ocurre cuando se elabora una nueva teoría, una nueva rama por la que seguir avanzando. Claro ejemplo de esto es la aparición de la Mecánica Cuántica o de la Teoría de la Relatividad en el siglo XX, las cuales supusieron grandes revoluciones científicas, cambiando nuestra concepción del mundo.

En este contexto, se podría decir que el surgimiento de la Teoría del Caos nos ha proporcionado “nuevos ojos”, que han supuesto un cambio en la forma de abordar problemas de todo tipo. El desarrollo de modelos teóricos basados en esta teoría ha proporcionado herramientas para estudiar y entender ciertos comportamientos complejos, que van desde el funcionamiento del cerebro o del corazón hasta la predicción del tiempo meteorológico. Y es que esta teoría cuenta con numerosas aplicaciones en diversos campos de la ciencia, como son la economía, la biología, la física, la meteorología o la psicología.

Asimismo, la Teoría del Caos es un claro ejemplo de que el conocimiento humano tiene límites. Nos vuelve a recordar que el Universo no nos muestra todas sus cartas y que nuestra habilidad para predecir el futuro está limitada, incluso en el caso en que ese futuro se pudiera predecir a partir de leyes totalmente deterministas.

1.2. Contexto histórico de la Teoría del Caos

Posiblemente, la gran mayoría de científicos atribuyen el nacimiento de esta teoría al matemático y meteorólogo americano Edward Norton Lorenz. No obstante, si bien el papel que tuvo en su desarrollo es indiscutible, la noción que se tiene actualmente no se entendería sin la aportación de otros grandes científicos, algunos de ellos incluso previos a Lorenz. Es necesario, por tanto, embarcarse en un viaje por la historia que nos ayude a comprender cómo se ha gestado una de las teorías más desafiantes de la ciencia: la Teoría del Caos.

La dinámica nace a mediados del siglo XVII con Isaac Newton, quien, basándose en los trabajos anteriores de Galileo Galilei e impulsado por el afán de comprender las trayectorias de los planetas descritas por Kepler, enuncia, de forma matemática, la ley de la gravitación universal y las leyes de la dinámica, las cuales sustentarían las bases de la Mecánica durante los siglos posteriores, hasta la aparición en el siglo XX de la Relatividad y la Mecánica Cuántica. Para expresar estas leyes, Newton hace uso del cálculo diferencial. Y con él se abría paso la descripción de distintos sistemas dinámicos a partir de ecuaciones diferenciales, que relacionan las magnitudes y sus razones de cambio. Las ecuaciones de Navier-Stokes para describir el movimiento de un fluido viscoso, la ecuación del calor, las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo o la ecuación de onda son algunos ejemplos de la importancia que han tenido las ecuaciones diferenciales para entender los distintos fenómenos que se producen a nuestro alrededor.

La teoría de Newton fue posteriormente desarrollada por, entre otros, el matemático francés Pierre Simon de Laplace, quien llevó a la ciencia newtoniana a una conclusión extrema. Defendía que las leyes de Newton eran universales, es decir, aplicables a todas las partículas del universo, deterministas y reversibles. De hecho, Laplace sostenía que si existiese una “inteligencia” que conociera en un momento dado todas las fuerzas que controlan la naturaleza, así como las condiciones momentáneas de todas las entidades que la componen, con la capacidad para someter todos estos datos a análisis, entonces podría predecir con total certeza el futuro y el pasado de todas estas entidades [1]. No obstante, tras la aparición en el siglo XIX de la Mecánica Estadística de la mano de físicos como Maxwell, Boltzmann o Gibbs, y, especialmente, con el nacimiento en el siglo XX de la Mecánica Cuántica (principio de incertidumbre, naturaleza probabilística...), el determinismo laplaciano ha sido en gran parte desacreditado.

Por otro lado, desde que en el año 1687, en sus *Principia*, Newton propusiera una serie de ecuaciones diferenciales para modelizar el comportamiento de dos masas que se atraen gravitacionalmente, uno de los retos que han intentado abordar distintos físicos y matemáticos ha sido el llamado “*problema de los n -cuerpos*”, basado en intentar determinar los movimientos individuales en el espacio de n cuerpos que interactúan mutuamente bajo la ley de la gravitación universal. Después de que Leonhard Euler resolviera por completo el problema para dos cuerpos en 1744, los esfuerzos se empezaría a centrar en resolver el problema para tres cuerpos. Entre los numerosos científicos que se aventuraron a abordar este reto, el papel de uno de ellos fue especialmente relevante, pues su estudio acerca de dicho problema pondría la primera piedra bajo la que se construiría la posteriormente conocida como “Teoría del Caos”. Hablamos del matemático y físico francés Henri Poincaré.



Figura 1: Jules Henri Poincaré



Figura 2: Edward Norton Lorenz.

A finales del siglo XIX, era común la organización de competiciones matemáticas con premios para buscar soluciones a algunos problemas específicos. En 1885, se convocó un concurso internacional patrocinado por el rey de Suecia y Noruega, Oscar II, y promovido por el matemático sueco Mittag-Leffler. La prueba constaba de cuatro preguntas, de las cuales la primera de ellas estaba precisamente relacionada con el problema de los n cuerpos [2]. Poincaré, quien estaba muy interesado en la cuestión fundamental de la estabilidad del Sistema Solar, no dudó en participar en el concurso, motivado especialmente por la primera pregunta. Poincaré intentó abordar el problema general de los tres cuerpos, pero la dificultad del mismo le llevó a centrarse en un problema más “*restringido*” de los tres cuerpos. Finalmente, el 20 de enero de 1889 se le declararía ganador de dicho concurso por su memoria “*Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique*”.

Sin embargo, a finales de ese mismo año Poincaré se percató de un grave error cometido en su memoria, lo que le lleva a corregir su trabajo por completo antes de que se publicara finalmente en la prestigiosa *Acta Mathematica* meses después. No en vano, este error haría que Poincaré descubriera las trayectorias homoclínicas, lo que le llevó a la descripción, por primera vez, de forma matemática, del comportamiento caótico en un sistema dinámico [3]. Concretamente, en el libro *Science et Méthode*, publicado en 1914, Poincaré expone la sensibilidad de las condiciones iniciales y la impredecibilidad del sistema para un caso particular del problema de los tres cuerpos y propone, a continuación, que este problema se puede dar en otros ámbitos como la meteorología o incluso en el juego de la ruleta [4].

“Puede suceder que pequeñas diferencias en las condiciones iniciales produzcan grandes diferencias en los fenómenos finales. Un pequeño error en el comienzo conllevará un error enorme al final. La predicción se vuelve imposible, y tenemos un fenómeno fortuito.”

No hay duda por tanto de la relevancia que tuvo el trabajo que llevó a Poincaré a ganar aquel concurso, en el cual se sentarían las bases de los tres volúmenes publicados posteriormente como *“Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste”*, y que le llevaría a describir por primera vez el comportamiento caótico de un sistema dinámico de forma matemática. En palabras del matemático americano George D. Birkhoff, en referencia a la memoria de Poincaré: *“Bajo la dirección del profesor Mittag-Leffler, el Acta Mathematica ha recogido muchos artículos extraordinarios, pero quizá ninguno de una importancia científica tan grande como este.”* [5]

Otra figura a destacar es la del matemático francés Jacques Hadamard quien, a finales del siglo XIX, demostró matemáticamente, por primera vez, que para un cierto sistema dinámico, conocido como billar de Hadamard, una pequeña variación en las condiciones iniciales provoca un cambio notable en la posterior evolución del sistema. Durante el primer cuarto del siglo XX, el trabajo de Poincaré fue continuado por distintos matemáticos, lo que conllevaría a una comprensión mucho más profunda de la Mecánica Clásica. Entre ellos, destacan figuras como Birkhoff, Smale, Moser, Kolmogorov o Arnold, estos dos últimos influenciados también por el trabajo de su compatriota Alexander Liapunov.

A pesar de los avances en la materia, la relevancia de la Teoría del Caos entre la comunidad científica no tuvo excesiva relevancia hasta años más tarde. La aparición de

los ordenadores de alta velocidad en los años 50 supuso una revolución en la ciencia y, en particular, en el campo de los sistemas dinámicos. Los científicos podían experimentar con las ecuaciones que regían ciertos sistemas de una forma nunca vista, incrementando su conocimiento acerca de ellos. Precisamente uno de estos experimentos, realizado por Edward Lorenz, supondría el nacimiento de la Teoría del Caos que conocemos actualmente.

Ya en los años 50, Lorenz estaba interesado en la predicción numérica del tiempo atmosférico a partir del análisis computacional. Para el año 1961, Lorenz había modelado el tiempo atmosférico a partir de un sistema de doce ecuaciones diferenciales y hacía simulaciones del mismo con la ayuda de un ordenador primitivo. Un día de invierno de ese mismo año, quiso examinar una de las simulaciones que había hecho a mayor escala. Así, en vez de empezar la simulación desde el inicio de nuevo, tomó uno de los valores obtenidos en mitad de la simulación original y lo introdujo como condición inicial. Una vez comenzó la simulación se fue de la habitación y, cuando regresó, vio que los resultados no coincidían con lo esperado. Cualquiera se habría esperado que los patrones descritos por ambas simulaciones fueran iguales, pero nada más lejos de la realidad. A la larga, los tiempos que precedían una y otra eran completamente diferentes [6].

El propio Lorenz se dio cuenta de la razón por la que esto había ocurrido. Debido al alto coste computacional, introdujo la condición inicial con solo tres cifras decimales, mientras que los valores que devolvía el ordenador constaban de seis. Lorenz había descubierto la sensibilidad a las condiciones iniciales, lo que se conoce popularmente como “*efecto mariposa*”¹. Posteriormente, él centraría sus esfuerzos en encontrar sistemas más sencillos que siguieran este comportamiento. En 1963, encontró un sistema de tres ecuaciones ordinarias de primer orden, no lineales, que, para ciertos parámetros, exhibía un comportamiento caótico. Este sistema, que surgió de un modelo simplificado de la convección de fluidos atmosféricos, se conoce como sistema de Lorenz. Además, al estudiar de forma gráfica las soluciones del sistema, observó que en algunos casos las trayectorias describían un patrón con una estructura compleja, conocida como atractor de Lorenz (ver Figura 3). Había descubierto los atractores extraños.

¹Este término fue acuñado por James Gleick, quien, en su famoso libro acerca del caos [6], titula una de sus secciones “*El efecto mariposa*”, inspirado en el título de una presentación que dio Lorenz en 1972, “*Does the flap of a butterfly’s wings in Brazil set off a tornado in Texas?*”, acerca de su trabajo reciente sobre pérdida de predecibilidad en sistemas de fluidos con muchas escalas. No obstante, la impredecibilidad que Lorenz describía en ese trabajo era mucho más radical que la mera dependencia del sistema a las condiciones iniciales, por lo que el significado que damos hoy en día al término “*efecto mariposa*” está algo distorsionado (ver Sección 4).



Figura 3: Atractor de Lorenz proyectado en el plano XZ.

Estos resultados obtenidos por Lorenz se recogen en su trabajo de 1963, “*Deterministic Nonperiodic Flow*”. No obstante, hasta varios años después no tendría el reconocimiento que tiene actualmente entre la comunidad científica, concretamente hasta 1971, cuando los matemáticos David Ruelle y Florin Takens propusieron una descripción de los flujos turbulentos basada en atractores extraños. Y es que la década de los 70 supuso un auge de la Teoría del Caos. En 1975, James Yorke y Tien Yien Li introducen el término *caos* en la literatura científica, en su trabajo “*Period Three Implies Chaos*”. Un año después, el biólogo y matemático Robert May introduce el mapa logístico, un sistema caótico discreto. Además, también hicieron grandes aportaciones matemáticos como Mitchell Feigenbaum, quien descubrió constantes universales que gobiernan la transición del movimiento regular al caótico mediante la duplicación del periodo, o Benoît Mandelbrot, quien estudió y popularizó los fractales.

Desde entonces, la Teoría del Caos se sigue estudiando y está presente en una gran variedad de campos. La mecánica de fluidos, la medicina, la economía o la biología son algunos ejemplos de ello. Y es que por suerte, al contrario que lo que ocurrió en épocas anteriores, en la actualidad esta teoría no ha pasado desapercibida, dándole la relevancia que merece.

1.3. Introducción a los sistemas dinámicos

La Teoría del Caos estudia la evolución de los sistemas dinámicos que presentan un comportamiento caótico. Por ello, antes de profundizar en la materia, se va a proceder con una breve introducción que nos ayude a comprender el concepto de sistema dinámico.

Los sistemas dinámicos son aquellos sistemas cuyo estado evoluciona con el tiempo. El valor de una acción en bolsa, el movimiento de los cuerpos celestes, el tiempo atmosférico

en Santander o un péndulo que se balancea son algunos ejemplos de ello. Dado que prácticamente todo lo que nos rodea está en constante evolución, queda clara la importancia de saber lidiar con este tipo de sistemas.

Los sistemas dinámicos se dividen esencialmente en dos grupos, en función de si el tiempo es una variable continua o discreta. En el primer caso, un sistema dinámico continuo n -dimensional se rige por la ecuación diferencial

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad (1)$$

donde $\mathbf{x}=[x_1, \dots, x_n]^T$ es el vector de estados del sistema y $\mathbf{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función que describe la evolución del estado del sistema con el tiempo. Por otro lado, si el tiempo es una variable discreta, la evolución del sistema se rige a partir de una ecuación en diferencias, o mapa iterado, que tiene la siguiente forma:

$$x_t = \mathbf{F}(x_{t-1}) \quad (2)$$

Para estudiar la evolución de un sistema dinámico, generalmente es conveniente introducir un espacio abstracto conocido como **espacio de fases**, X . Cada punto del espacio de fases se corresponde con un único estado del sistema, de forma que la evolución de un sistema se puede ver como una trayectoria en el espacio de fases. En este contexto, se puede dar una definición rigurosa de sistema dinámico [7].

Definición 1.1. Un **sistema dinámico** es una terna $[X, T, \phi]$ compuesta por un espacio de fases X , que puede ser un espacio métrico, un espacio topológico o una variedad con alguna estructura diferencial; un monoide T , con la operación aditiva generalmente; y una función de evolución o flujo del sistema $\phi : T \times X \rightarrow X$ que es una aplicación que verifica:

- ϕ es una aplicación continua
- $\phi(0, x) = x, \forall x \in X$
- $\phi(t, \phi(n, x)) = \phi(t + n, x), \forall x \in X$ y $\forall t, n \in T$

Generalmente, denotaremos a la aplicación $\phi : T \times X \rightarrow X$ como $\phi_t : X \rightarrow X$, donde $t \in T$. Si se trata de un sistema dinámico discreto, $T = \mathbb{N}$ o \mathbb{Z} , y si es continuo, $T = \mathbb{R}$.

En particular, en este trabajo estudiaremos el sistema de Lorenz, que es posiblemente el sistema dinámico caótico más conocido.

2. Caos determinista

2.1. Qué es el caos determinista

Cuando uno habla de “*caos*” se le vienen a la cabeza conceptos como “*desastre*” o “*desorden*”. No obstante, en el campo de las ciencias el término “*caos*” adquiere una connotación algo diferente. De hecho, siquiera existe una definición única del caos aceptada por la comunidad científica en su totalidad y diversos matemáticos, físicos y científicos se aventuran a definirlo de diversas formas. Pese a ello, se puede afirmar que la idea básica que caracteriza a un sistema caótico es la incapacidad para predecir su comportamiento a largo plazo, debido a que tiene una dependencia muy sensible a las condiciones iniciales.

Un **sistema determinista** es aquel cuyo comportamiento está regido por ecuaciones deterministas. Si se conoce completamente el estado inicial, es posible determinar los futuros estados del sistema de forma única. Es decir, si dos copias idénticas de un mismo sistema se encuentran en el mismo estado en un instante de tiempo, estarán en el mismo estado en cualquier instante de tiempo futuro.

A priori, es lógico pensar que si un sistema es determinista es posible conocer su evolución en cualquier instante de tiempo futuro. No obstante, en muchas ocasiones esto no ocurre, ya que el comportamiento a largo plazo del sistema determinista se vuelve impredecible. La razón es que, en la práctica, las condiciones iniciales del sistema son necesariamente aproximaciones, pues no es posible conocerlas con exactitud infinita. Imaginemos que se trata de un número irracional, por ejemplo. Así, en algunos sistemas no lineales, estos errores iniciales crecerán exponencialmente con el tiempo, lo que se conoce como sensibilidad a las condiciones iniciales, haciendo imposible la predicción del comportamiento del sistema a largo plazo. Estos sistemas se conocen como **sistemas caóticos**, y sus soluciones se caracterizan por presentar una alta irregularidad y aperiodicidad.

El término *caos* referido a este contexto fue acuñado por primera vez por los matemáticos Yorke y Li en 1975, en su trabajo “*Period Three Implies Chaos*”. En 1989, Robert L. Devaney propone otra definición de caos en “*An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*”, que es la que daremos en este trabajo por ser una de las más empleadas [8].

Definición 2.1. Sea X un espacio métrico y sea $\phi : X \rightarrow X$ una aplicación continua. Se dice que un sistema es **caótico** si cumple las siguientes condiciones:

I) La aplicación $\phi : X \rightarrow X$ es **topológicamente transitiva**. Esto es

$$\forall U, V \subset X, \exists n \in \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ tal que } \phi^n(U) \cap V \neq \emptyset$$

II) La aplicación $\phi : X \rightarrow X$ tiene **dependencia sensitiva a las condiciones iniciales**. Esto es, $\exists \delta > 0$ tal que $\forall x \in X$ y $\forall V \subset X$ entorno de x , se verifica que

$$\exists y \in V \text{ y } n \in \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ tal que } |\phi^n(x) - \phi^n(y)| > \delta.$$

III) El conjunto de **puntos periódicos de ϕ es denso**² en el atractor.

Las nociones que se recogen en esta definición pueden ser difíciles de entender, por lo que trataremos de dar una explicación intuitiva con el objetivo de arrojar algo de luz sobre estos conceptos. Por un lado, la sensibilidad a las condiciones iniciales refleja el hecho de que, en un sistema caótico, dos trayectorias que inicialmente están muy próximas acabarán comportándose de una forma muy distinta a largo plazo. Por otro lado, el hecho de que la aplicación sea topológicamente transitiva implica que el atractor caótico es irreducible, es decir, no se puede descomponer en conjuntos abiertos disjuntos invariantes bajo la acción del flujo. Esto quiere decir que si iteramos la función ϕ un número determinado de veces, esto es, si se deja evolucionar el sistema un tiempo suficiente, se puede acceder a cualquier punto del atractor desde cualquier otro. Finalmente, que el conjunto de puntos periódicos sea denso en el atractor significa que cualquier punto del espacio está arbitrariamente cerca de una órbita periódica. Se trata de un elemento de regularidad. Años más tarde, en 1992, se demostró que las condiciones i) y iii) implican la condición ii) [9].

2.2. Exponentes de Lyapunov

En los sistemas caóticos, la sensibilidad a las condiciones iniciales se mide a partir de los **exponentes de Lyapunov**, que cuantifican la estabilidad o inestabilidad de las trayectorias en el espacio de fases al sufrir una pequeña perturbación. Supongamos que se tienen dos trayectorias que inicialmente están muy próximas, separadas una distancia $\delta \epsilon_0$. Entonces, la distancia entre ellas diverge en el tiempo como

²Un conjunto $U \subset V$ es denso en V si cada punto de V está arbitrariamente cerca de un punto de U .

$$\delta\epsilon(t) \approx \delta\epsilon_0 e^{\lambda t}$$

donde λ es el exponente de Lyapunov. Es decir, esta magnitud mide la tasa de separación entre dos trayectorias inicialmente muy cercanas en el espacio de fases. En un sistema con un espacio de fases n -dimensional, existen n exponentes de Lyapunov, $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, ordenados de mayor a menor. Esto se conoce como espectro de Lyapunov. Indican la tasa de separación de dos trayectorias en función de la dirección del vector de separación inicial. Si se considera una esfera infinitesimal n -dimensional de condiciones iniciales, esta evolucionará a un n -elipsoide cuyos ejes se contraen, expanden o se mantienen constantes en función de los exponentes asociados. La existencia de los exponentes de Lyapunov, bajo ciertas condiciones, la asegura el teorema de Oseledec [10].

Si un exponente de Lyapunov es positivo, las trayectorias divergen. Si, por el contrario, es negativo, las trayectorias convergen. Si la suma de los exponentes es negativa, entonces el sistema disipa energía y las trayectorias convergen a un atractor, que es un espacio cuya dimensión es menor a la del espacio de fases. Aunque el sistema contraiga el volumen, esto no significa que lo haga en todas las direcciones, sino que algunas pueden ser expandidas y otras contraídas por el flujo. Esto implica que, incluso en un sistema disipativo, las trayectorias pueden ser inestables dentro del atractor. Esta inestabilidad se manifiesta generalmente por la sensibilidad a las condiciones iniciales del sistema, de forma que dos trayectorias inicialmente muy próximas en el atractor tienen una tasa de separación exponencial. En ese caso, se dice que el atractor es “extraño” y el sistema es caótico.

2.3. Atractores

Qué es un atractor

A estas alturas, parece razonable preguntarse qué le ocurre a la trayectoria descrita por un sistema dinámico si evoluciona un tiempo largo. En un sistema disipativo, la región del espacio de fases que atrae a las trayectorias vecinas se conoce como **atractor**. Se trata por tanto de un subconjunto del espacio de fases, es decir, de un conjunto de estados, a los que tiende a evolucionar el sistema, en función de las condiciones iniciales. Aunque no existe una definición universalmente aceptada, vamos a definirlo de un modo más riguroso.

Definición 2.2. Sea X el espacio de fases de un sistema dinámico disipativo y sea $\phi_t :$

$X \rightarrow X$ la transformación que describe el movimiento. Se dice que $A \subset X$ es un **atractor** si verifica las siguientes condiciones:

- $\exists U$ entorno de A , llamado **cuenca de atracción** de A , tal que $\forall V$ abierto con $A \subset V$, $\exists T_0$ tal que $\phi_t(U) \subset V$, $\forall t > T_0$
- $\phi_t(A) = A$, $\forall t > 0$
- $\nexists S \subset A$ subconjunto propio no vacío que satisfaga las dos propiedades anteriores.

Es decir, un atractor es un conjunto invariante del espacio de fases que atrae a todas las trayectorias que se encuentran inicialmente dentro de la cuenca de atracción. Además, se considera que el atractor también debe cumplir el requisito de ser irreducible, es decir, una trayectoria deberá visitar todos los puntos del atractor con el paso del tiempo. Por ello, la unión dos atractores disjuntos no se considera un atractor [11].

En los sistemas conservativos, aquellos en los que se conserva la energía mecánica, el teorema de Liouville garantiza que el volumen de cualquier región del espacio de fases se conserva bajo la evolución temporal hamiltoniana y, por tanto, no aparecen atractores. Por tanto, nos centraremos en estudiar los sistemas disipativos. En ellos, el volumen del espacio de fases tiende a ser cero, es decir, converge a un subespacio cuya dimensión es menor que la del espacio de fases, que es precisamente el atractor.

Tipos de atractores

Hay distintos tipos de atractores. El más simple de todos ellos es aquel en el que la trayectoria queda atraída por un punto fijo, sobre el que se establece con el tiempo.

Definición 2.3. Sea X el espacio de fases y $\phi_t : X \rightarrow X$ la aplicación que describe a un sistema dinámico. Sea $p \in X$ tal que $\phi_t(p) = p$, $\forall t > 0$. Entonces se dice que p es un **punto fijo** del sistema. Además, se tiene que

- p es un punto fijo **estable** si $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que para toda trayectoria de una solución del sistema, $\hat{\phi}_t(x)$, con $\|\hat{\phi}_{t_0}(x) - p\| < \delta$, entonces $\|\hat{\phi}_t(x) - p\| < \epsilon$, $\forall t > t_0$. En caso de que esto no suceda, p es un punto fijo **inestable**.
- p es un punto fijo **atractor** si $\exists a \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que para toda trayectoria de una solución del sistema, $\hat{\phi}_t(x)$, con $\|\hat{\phi}_{t_0}(x) - p\| < a$, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\phi}_t(x) = p$.

- p es un punto fijo **asintóticamente estable** si es estable y atractor.
- p es un punto fijo **repulsor** si $\exists \epsilon > 0, \delta > 0$ tal que para toda trayectoria de una solución del sistema, $\hat{\phi}_t(x)$, con $\|\hat{\phi}_{t_0}(x) - p\| < \delta$, $\exists \hat{t}$ tal que $\|\hat{\phi}_{\hat{t}}(x) - p\| > \epsilon$.

Es decir, un punto fijo es estable si trayectorias inicialmente próximas al punto se mantienen próximas a él bajo la evolución temporal. Y es atractor si esas trayectorias acaban convergiendo a dicho punto. Imaginemos por ejemplo un oscilador armónico amortiguado, sobre el que actúan fuerzas de rozamiento o fricción, es decir, fuerzas disipativas, de forma que va perdiendo su energía mecánica hasta que queda en reposo en el punto de equilibrio. En este caso, el punto fijo es asintóticamente estable y, de hecho, la cuenca de atracción es todo el espacio de fases. Por otro lado, un punto fijo es repulsor si las trayectorias que inicialmente están próximas se separan en algún momento del punto (aunque luego pueden volver a acercarse). Cabe destacar además que un punto repulsor es inestable, pero no se tiene por qué cumplir la implicación opuesta, ya que con que el punto repela a una única trayectoria ya es inestable.

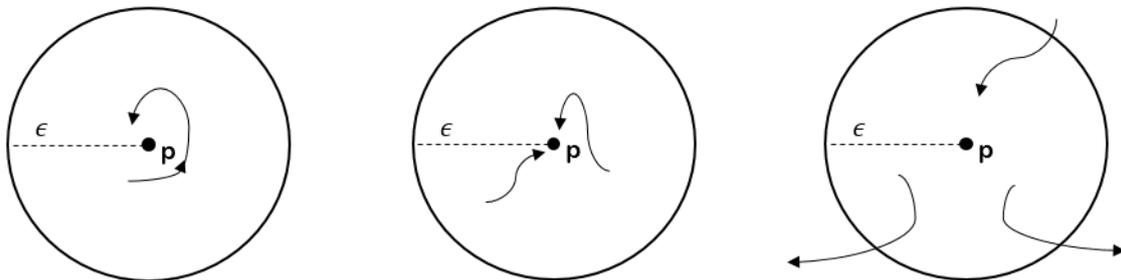


Figura 4: A la izquierda, punto fijo estable. La distancia entre las trayectorias y el punto fijo es menor que ϵ para $t > t_0$. En mitad, punto fijo asintóticamente estable. Es estable y atrae a las trayectorias. A la derecha, punto fijo inestable. Algunas trayectorias son repelidas por el punto en algún momento.

Otro atractor simple es el **ciclo límite**.

Definición 2.4. Un **ciclo límite** es una trayectoria cerrada aislada, es decir, una trayectoria cerrada cuyas trayectorias vecinas no son cerradas, sino que se acercan o se alejan del ciclo límite en forma de espiral.

En función de si las trayectorias vecinas se acercan o alejan del ciclo límite, se tendrá un ciclo estable o inestable, respectivamente.

Definición 2.5. Sea y una solución del sistema que es un ciclo límite. Entonces se dice que y es un **ciclo límite estable** si $\exists \delta > 0, t_0 \in \mathbb{R}$ tal que para toda trayectoria $\phi_t(x_0)$

con $\|\phi_{t_0}(x_0) - y\| < \delta$, es decir, para toda trayectoria en la vecindad de y , \exists una sucesión $(t_n) \rightarrow \infty$ tal que $(\phi_{t_n}(x_0)) \rightarrow y$. Si por el contrario, para toda trayectoria $\phi_t(x_0)$ en la vecindad de y , \exists una sucesión $(t_n) \rightarrow -\infty$ tal que $(\phi_{t_n}(x_0)) \rightarrow y$, se dice que el ciclo límite es **inestable**. En el caso de que alguna trayectoria se acerque al ciclo cuando $t \rightarrow \infty$ y otra cuando $t \rightarrow -\infty$, se dice que el ciclo es **semiestable**.

En la Figura 5 se representan los tres casos.



Figura 5: A la izquierda, ciclo límite estable. Las trayectorias vecinas se acercan a él. En medio, ciclo límite inestable. Las trayectorias vecinas se alejan de él. A la derecha, ciclo límite semiestable. Algunas trayectorias vecinas se alejan y otras se acercan a él. Imagen obtenida de [12].

Un ejemplo de sistema dinámico que alcanza un ciclo límite es el oscilador de Van der Pol. Cabe destacar que el ciclo límite descrito por un oscilador armónico ideal, en el cual no hay pérdida de energía, no sirve como ejemplo de atractor, puesto que las trayectorias vecinas no son atraídas sino que describen otra órbita periódica diferente.

Definición 2.6. Sea $[X, T, \phi]$ un sistema dinámico. Se dice que una trayectoria $\phi_t(x)$ es **periódica** si $\exists t_1, t_2$, con $t_1 \neq t_2$, tal que $\phi_{t_1}(x) = \phi_{t_2}(x)$. En tal caso, será una trayectoria de periodo un múltiplo de $t_2 - t_1$.

Si una trayectoria es periódica no trivial (no tenemos en cuenta los puntos fijos), se representa por una curva cerrada simple y se dice que es una órbita cíclica.

Al estar tratando con sistemas autónomos, el estado del sistema queda completamente determinado por su estado anterior. Es por ello que una trayectoria no se puede cortar a sí misma (aunque pueda cerrarse en sí misma). En consecuencia, en un espacio de fases bidimensional, el punto fijo y el ciclo límite son los dos únicos atractores posibles. Para encontrar otro atractor es necesario tener en cuenta al menos una tercera dimensión. En este caso, surge un atractor con forma toroidal, llamado **toro biperiódico**, debido a la superposición de dos ciclos límite independientes con distintas periodicidades. Las trayectorias se enroscan en las direcciones longitudinal y latitudinal del toro con distintas

frecuencias f_1 y f_2 , de tal forma que si el ratio f_1/f_2 es un número racional se tendrá un movimiento periódico y la trayectoria se cerrará en sí misma tras un número entero de rotaciones, y si, por el contrario, es un número irracional, la trayectoria continuará dando vueltas alrededor del toro indefinidamente, estando arbitrariamente cerca de cerrarse en sí misma, pero nunca lo hará [13]. En ese caso, se dice que el movimiento es **cuasi-periódico**.

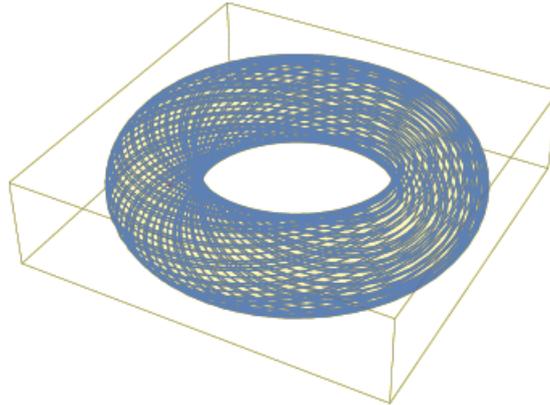


Figura 6: Trayectoria densa en la superficie de un toro con frecuencias f_1 y f_2 tal que f_1/f_2 es irracional. Imagen obtenida de [14].

Además, se pueden encontrar atractores tipo toro de mayores dimensiones en un espacio de fases de dimensiones más grandes, donde hay movimientos periódicos múltiples.

Los atractores que se han presentado anteriormente tienen la particularidad de que corresponden a movimientos regulares. Las órbitas permanecen próximas bajo la evolución temporal y, por tanto, es posible predecir los estados posteriores del sistema. No obstante, también aparecen atractores en los sistemas deterministas caóticos, conocidos como atractores extraños, que se presentan a continuación.

Atractores extraños

El término “*atractor extraño*” fue acuñado por primera vez por Ruelle y Takens en su trabajo de 1971 “*On the Nature of Turbulence*”, en el que estudiaban los flujos turbulentos.

Definición 2.7. Se dice que un **atractor extraño** es un atractor que tiene dimensión fractal, es decir, no entera. Además, se dice que el atractor extraño es **caótico** si se verifica que las trayectorias que describe el sistema se ven atraídas por el atractor, pero son inestables en él, es decir, muestran sensibilidad a las condiciones iniciales.

En la definición anterior, se ha puesto en evidencia la distinción entre atractores extraños caóticos y no caóticos. En el primer caso, el sistema es sensible a las condiciones

iniciales y, por tanto, tendrá, al menos, un exponente de Lyapunov positivo. En lo que respecta a los atractores extraños no caóticos, se trata de atractores extraños, en el sentido que tienen una geometría fractal (aunque algunos autores los consideran extraños por no ser diferenciables a trozos), pero que no exhiben dependencia sensible a las condiciones iniciales. Estos últimos fueron introducidos en 1984 cuando Grebogi, Ott, Pelikan y Yorke construyeron sistemas dinámicos con atractores extraños pero no caóticos [15]. Desde entonces, todavía no se ha formulado con precisión la definición de este tipo de atractores y su existencia no se ha probado rigurosamente, por lo que la mayoría de los resultados obtenidos acerca de estos atractores se basan en el análisis numérico [16]. Por esta razón, en el presente trabajo nos centraremos en los atractores caóticos.

Para entender lo que es un atractor extraño es necesario comprender qué es la dimensión fractal. El término “*fractal*”, que deriva del latín “*fractus*”, roto, fue propuesto por el matemático Benoît Mandelbrot en 1975, quien lo definió en [17] de la siguiente manera:

Definición 2.8. Un **fractal** es un conjunto cuya dimensión de Hausdorff-Besicovitch es estrictamente mayor que su dimensión topológica.

No entraremos en detalles ni definiciones rigurosas, aunque sí intentaremos dar una visión intuitiva de lo que quiere decir la definición anterior. Por un lado, la dimensión topológica es la dimensión “usual”. Así, la dimensión topológica de un punto es igual a cero, la de una curva es uno, la de una superficie es dos y la de un sólido es tres. Por otro lado, la dimensión de Hausdorff-Besicovitch es algo más compleja de entender. Un modo simple e intuitivo de entender este concepto es el siguiente, basado en averiguar cuánto llena el espacio la figura que se está estudiando³. Supongamos que se tiene un segmento de longitud 1 y un cuadrado de lados 1×1 . Si se tiene un cuadrado de lados $1/n$, harían falta n cuadrados de ese tipo para cubrir el segmento, y n^2 cuadrados para cubrir el cuadrado de lados 1×1 . Los exponentes a los que se eleva n indican cómo llena el espacio esa figura, es decir, su dimensión. Si se está tratando con curvas, los cuadrados de lado $1/n$ se pueden sustituir por bolas y si se está tratando con objetos tridimensionales, por esferas. De esta forma, para una figura en un espacio d -dimensional, sea $N(n)$ el número de “bolas d -dimensionales” de radio n veces más pequeño que la figura, la dimensión de

³El método que se expone para calcular la dimensión es el del conteo de cajas. El valor obtenido a partir de este método corresponde a la dimensión de Minkowski-Bouligand y no a la de Hausdorff-Besicovitch. No obstante, para muchos fractales, concretamente los que cumplen la condición de conjunto abierto, estas dimensiones coinciden, por lo que es adecuado para introducirlo de forma intuitiva.

Hausdorff-Besicovitch, D , vendrá dada por

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(N(n))}{\log(n)}$$

donde el límite se toma para evitar solapamientos y poder recubrir la figura exactamente. Un ejemplo de una curva fractal es el copo de nieve de Koch, representado en 7, cuya dimensión de Hausdorff es $\ln(4)/\ln(3) \approx 1.26$. Es decir, tiene un perímetro infinito, pero encierra un área finita. Llena el espacio más que una línea, pero menos que un cuadrado.

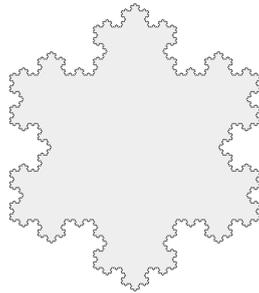


Figura 7: Copo de nieve de Koch. Curva con $D \approx 1.26$, autosimilar y no diferenciable en ningún punto.

Por último, es razonable preguntarse cómo pueden divergir las trayectorias mientras están confinadas a un atractor extraño, a una región acotada. Lo que ocurre es que la acción del flujo toma un elemento de volumen del espacio de fases, lo estira en ciertas direcciones y lo contrae en otras, causando la divergencia local responsable de la impredecibilidad. Posteriormente, pliega el elemento de volumen para que quede confinado al atractor, dando lugar a la convergencia de las trayectorias. Por ello, se dice que es un sistema localmente inestable, aunque globalmente estable. Este mecanismo de estirar y plegar, conocido también como la transformación del panadero, hace que dos puntos inicialmente próximos se separen y que, al plegar el espacio, se produzca la mezcla, dando lugar a un atractor caótico con dimensión fractal. Uno de los atractores extraños más conocidos, si no el que más, es el atractor de Lorenz, que se presenta en la siguiente sección.

2.4. Introducción a la teoría de bifurcaciones

A la hora de estudiar la estabilidad del sistema de Lorenz nos vamos a topar con la noción de bifurcación. Por tanto, para entender de antemano este concepto, se va a dar una idea sobre lo que es una bifurcación y los tipos de bifurcaciones que aparecerán.

En un sistema dinámico, se dice que una **bifurcación** tiene lugar cuando, al cambiar ligeramente un parámetro de control, el comportamiento cualitativo del sistema cambia de una forma abrupta. Los valores del parámetro de control para los que eso ocurre se denominan puntos de bifurcación. La teoría de bifurcaciones trata de caracterizar dónde y qué ocurre en estas transiciones. Se estudiarán dos tipos de bifurcaciones: la bifurcación tridente y la bifurcación de Hopf.

2.4.1. Bifurcación tridente

La **bifurcación tridente** aparece por la simetría inherente al problema que se está estudiando. Los puntos de equilibrio aparecen o desaparecen en pares simétricos. Esta bifurcación se llama **supercrítica** si se crea un par de puntos fijos estables en el punto de bifurcación y existen después de la bifurcación, mientras que el otro punto fijo pasa de ser estable a inestable. Si, por el contrario, un par de puntos fijos inestables existe antes del punto de bifurcación y desaparece después, y el otro punto crítico pasa de ser estable a ser inestable, entonces la bifurcación tridente se dice **subcrítica**. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 2.1. Se tiene la siguiente ecuación diferencial en una dimensión:

$$f = \frac{dx}{dt} = \mu x - x^3 \quad (3)$$

En primer lugar, se puede comprobar fácilmente que se trata de una función simétrica respecto al eje x , ya que la ecuación no cambia bajo la transformación $x \rightarrow -x$. Veamos cuáles son las soluciones de equilibrio, es decir, aquellas tal que Ec.(3) = 0. Esto es,

$$\mu x - x^3 = x(\mu - x^2) = 0$$

Con ello, vemos que las soluciones de equilibrio dependen del valor de μ . Para cualquier valor de μ , se tiene que $x_0 = 0$ es un punto de equilibrio. Además, si $\mu > 0$, entonces $x_{1,2} = \pm\sqrt{\mu}$ también son puntos de equilibrio. Por tanto, para $\mu \leq 0$ existe una única solución real, mientras que para $\mu > 0$ hay tres.

Vamos a proceder a analizar la estabilidad linealizando la Ec.(3) alrededor de los puntos de equilibrio. Sea ϵ la perturbación alrededor de un punto de equilibrio x_p , se tiene

$$\frac{d\epsilon}{dt} = (\mu - 3x_p^2)\epsilon$$

Para $x_p = 0$, se verifica $d\epsilon/dt = \mu\epsilon$. Por tanto, resolviendo esta EDO se tiene que

$$\epsilon(t) = \epsilon(0)e^{\mu t}$$

De esta forma, para valores de $\mu < 0$, la perturbación decae exponencialmente rápido y x_0 será un punto estable, mientras que si $\mu > 0$ será un punto inestable. En el caso de que $\mu = 0$, se tiene la siguiente ecuación:

$$\frac{dx}{dt} = -x^3$$

En este caso el único punto de equilibrio es $x = 0$. La EDO anterior se puede resolver por separación de variables fácilmente del siguiente modo:

$$\int \frac{-1}{x^3} dx = \int t dt \quad \implies \quad \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2x(0)^2} = t \quad \implies \quad x(t) = \frac{1}{\sqrt{2t + 1/x(0)^2}}$$

Con ello, se ve que la función decae para cualquier $x(0)$, ya que $x \rightarrow 0$ si $t \rightarrow \infty$, aunque no de manera exponencial. Luego para $\mu = 0$, el punto de equilibrio $x_0 = 0$ es estable.

Por otro lado, si $\mu > 0$, además del $x_0 = 0$ aparecen otros dos puntos de equilibrio, $x_{1,2} = \pm\sqrt{\mu}$. Si volvemos a aplicar el análisis de estabilidad previo alrededor de estos puntos se tiene que

$$\epsilon(t) = \epsilon(0)e^{-2\mu t}$$

y dado que $\mu > 0$ la perturbación decae exponencialmente rápido y se tienen dos puntos estables. Por todo ello, se concluye que el punto $\mu = 0$ es un punto de bifurcación. Con el objetivo de poder visualizar el comportamiento de la Ec.(3) se ha representado dicha ecuación para cierto valor de $\mu < 0$, para $\mu = 0$ y para un valor de $\mu > 0$, y se han marcado los puntos críticos en cada caso (en rojo si son estables y en azul si son inestables).

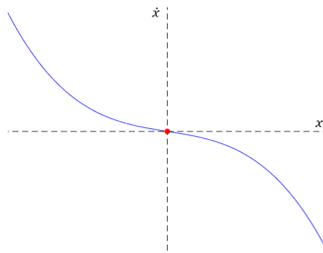


Figura 8: $\dot{x} = \mu x - x^3$ para $\mu < 0$.

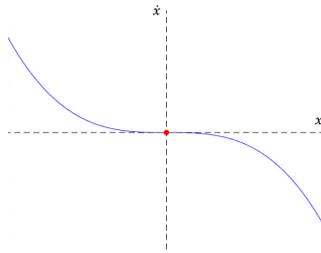


Figura 9: $\dot{x} = -x^3$, es decir, para $\mu = 0$.

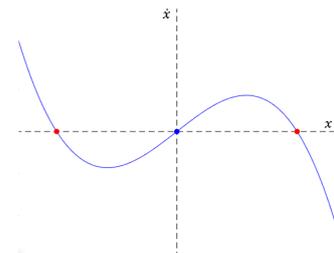


Figura 10: $\dot{x} = \mu x - x^3$ para $\mu > 0$.

A partir de las gráficas anteriores es posible saber si un punto es estable o no. Por ejemplo, en la Figura 9 se observa que a la izquierda del punto de equilibrio la función \dot{x} es positiva. Por tanto, los valores de x a la izquierda del punto crecen con el tiempo hasta que llegan al punto. Por otro lado, la función \dot{x} es negativa a la derecha del punto de equilibrio, de forma que si inicialmente el valor de x está a la derecha del punto, su valor va a decrecer hasta llegar a dicho punto. Es decir, el punto de equilibrio es estable. El mismo razonamiento se puede utilizar para ver que un punto es inestable, ya que se ve que las trayectorias cercanas al punto en ese caso se alejan del mismo.

Con todo ello, es posible construir el diagrama de la bifurcación tridente, el cual se representa en la Figura 11. Por último, cabe destacar que en este caso se ha estudiado un ejemplo de bifurcación tridente supercrítica. Un ejemplo de bifurcación tridente subcrítica aparece si en la Ec.(3) se cambia el signo que precede al término x^3 , de un “-” a un “+”.

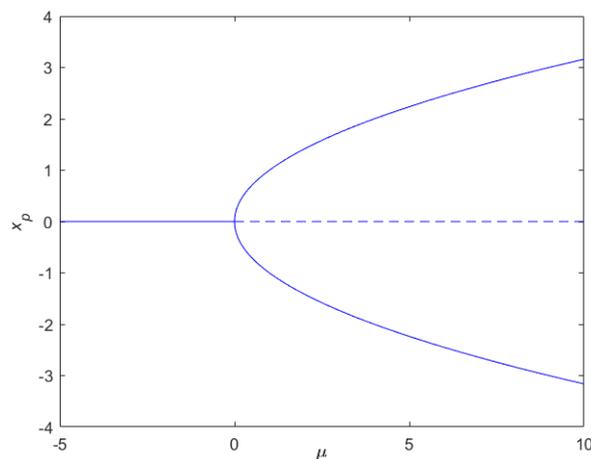


Figura 11: Diagrama de bifurcación de la Ec.(3). La línea continua representa una solución estable y la discontinua una inestable. Se observa que el punto $\mu = 0$ es un punto de bifurcación, en el cual se pasa de tener una solución estable a tres soluciones, dos estables y una inestable, por lo que es una bifurcación tridente supercrítica. El diagrama tiene forma de tridente, de ahí el nombre de esta bifurcación.

2.4.2. Bifurcación de Hopf

La **bifurcación de Hopf** ocurre cuando un par de autovalores complejos conjugados cruzan el eje imaginario del plano complejo. En ese momento, una solución periódica o ciclo límite aparece o desaparece al variar el parámetro de control. Cuando un punto de equilibrio estable cambia su estabilidad y aparece un ciclo límite estable rodeando al punto inestable, la bifurcación de Hopf se dice **supercrítica**. Si el ciclo límite es inestable y rodea a un punto de equilibrio estable, y a partir del punto de bifurcación el ciclo límite desaparece y el punto de equilibrio pasa a ser inestable, se dice **subcrítica**.

Veamos un ejemplo en el que aparece una bifurcación de Hopf supercrítica.

Ejemplo 2.2. Se tiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales en dos dimensiones:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + x(\mu - x^2 - y^2) \\ \frac{dy}{dt} = x + y(\mu - x^2 - y^2) \end{cases} \quad (4)$$

Se puede ver fácilmente que el punto $(0, 0)$ es un punto de equilibrio, $\forall \mu$. Vamos a estudiar la estabilidad en ese punto. Para ello, al tratarse de un sistema bidimensional, hay que obtener el jacobiano del sistema, que, evaluado en el punto $(0,0)$, tiene la siguiente forma:

$$J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} \mu - 3x^2 - y^2 & -1 - 2xy \\ 1 - 2xy & \mu - 3y^2 - x^2 \end{pmatrix}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}$$

Los autovalores de la matriz anterior se obtienen resolviendo la ecuación $(\mu - \lambda)^2 + 1 = 0$. Por tanto, los autovalores son $\lambda = \mu \pm i$. Podemos concluir que para $\mu < 0$ los dos autovalores se encuentran a la izquierda del eje imaginario del plano complejo y para $\mu > 0$, a su derecha. En el momento en que $\mu = 0$ los autovalores cruzan el eje imaginario, por lo que este es el punto de bifurcación, en el cual se producirá la bifurcación de Hopf.

Para continuar con el análisis, vamos a pasar las Ecs.(4) a coordenadas polares, (r, θ) . Por un lado, sabemos que $r^2 = x^2 + y^2$. Así, si derivamos respecto a t a ambos lados de la ecuación, se llega a $r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y}$. Y sustituyendo las Ecs.(4) en esta ecuación se tiene:

$$\begin{aligned} r\dot{r} &= x(-y + x(\mu - x^2 - y^2)) + y(x + y(\mu - x^2 - y^2)) = \\ &= -xy + x^2(\mu - r^2) + xy + y^2(\mu - r^2) = r^2(\mu - r^2) \end{aligned}$$

Finalmente, dividiendo por r a ambos lados de la ecuación se tiene que $\dot{r} = \mu r - r^3$. Por otro lado, sabemos que $\theta = \arctan(y/x)$. Sea $f = \arctan(y/x)$, siguiendo la regla de la cadena es posible obtener $\dot{\theta}$ como

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{df}{dx}\dot{x} + \frac{df}{dy}\dot{y} = \frac{-y/x^2}{1 + (y/x)^2}\dot{x} + \frac{1/x}{1 + (y/x)^2}\dot{y} = \frac{-y\dot{x}}{r^2} + \frac{x\dot{y}}{r^2} = \\ &= \frac{-y(-y - xr^2) + x(x - yr^2)}{r^2} = \frac{x^2 + y^2}{r^2} = 1 \end{aligned}$$

donde en el antepenúltimo paso se han sustituido las Ecs.(4) en \dot{x} y \dot{y} . Con ello, se tiene

que las Ecs.(4) en coordenadas polares son las siguientes:

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = \mu r - r^3 \\ \frac{d\theta}{dt} = 1 \end{cases}$$

Veamos lo que ocurre cuando $\mu < 0$. Podemos observar que la ecuación en r es igual a la que se tenía en el ejemplo que hemos visto para la bifurcación tridente. Por tanto, para $\mu < 0$ se tiene que el origen es un punto de equilibrio estable, ya que el radio r decae de forma exponencial. Además, al ser $\dot{\theta} = 1$, este decaimiento seguirá una forma espiral, girando a una frecuencia constante. Para valores de $\mu > 0$, el origen $r = 0$ pasa a ser inestable y aparece una solución de equilibrio que es el círculo de radio $r = \sqrt{\mu}$. Precisamente en la Figura 10 se representa la ecuación $\dot{r} = \mu r - r^3$ para $\mu > 0$ (aunque en vez de r es x). Podemos ver, por un lado, que $\dot{r} < 0$ para $r > \sqrt{\mu}$. Por otro lado, $\dot{r} > 0$ para $r \in (0, \sqrt{\mu})$. Con ello, se verifica que el origen pasa a ser un punto inestable y que la órbita con $r = \sqrt{\mu}$ es estable. Finalmente, cuando $\mu = 0$, r decae oscilando hacia cero, aunque no lo hace de forma exponencial (ver el caso de $\mu = 0$ en el Ejemplo 2.1), y por tanto el origen es un punto estable. La bifurcación de Hopf se produce en el punto $\mu = 0$.

En las Figuras 12, 13 y 14 se observa lo que ocurre cuando $\mu < 0$, cuando $\mu = 0$ y cuando $\mu > 0$, respectivamente⁴. En el primer caso se ve que las órbitas decaen exponencialmente oscilando en forma de espiral, con una frecuencia constante, hacia el origen, que es estable. En el segundo caso se observa que el origen es un punto estable y que las órbitas decaen hacia él oscilando, aunque de forma no exponencial. Finalmente, en el tercer caso se ve que el origen es inestable y que existe un ciclo límite estable.

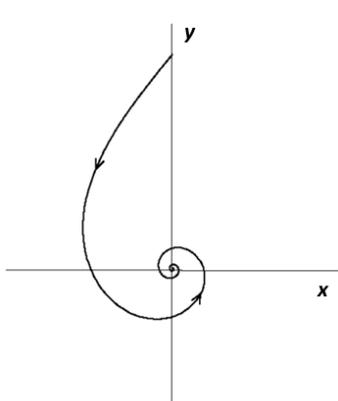


Figura 12: Retrato de fase para $\mu < 0$.

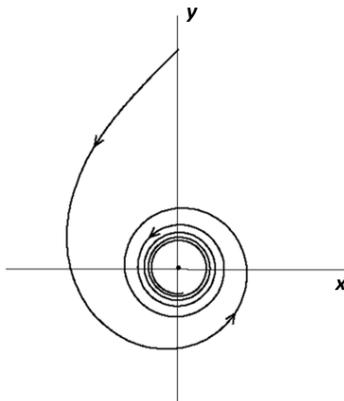


Figura 13: Retrato de fase para $\mu = 0$.

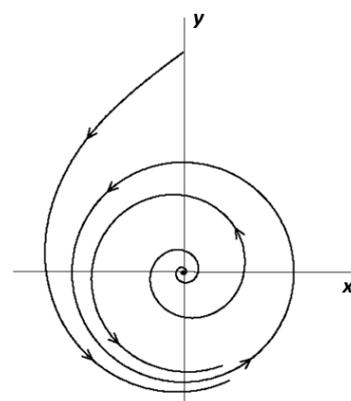


Figura 14: Retrato de fase para $\mu > 0$.

⁴Imágenes obtenidas de [18].

3. Ejemplo: El sistema de Lorenz

El sistema de Lorenz fue descubierto por el matemático y meteorólogo americano Edward Lorenz en 1963, en su intento por predecir el tiempo meteorológico a partir de un modelo simplificado de la convección de los fluidos atmosféricos [19]. El espacio de fases del sistema es tridimensional, (x, y, z) . Por un lado, la variable x mide la intensidad de la convección (el movimiento circulatorio del fluido). Si $x > 0$ el flujo de convección circula en sentido horario y si $x < 0$, en sentido antihorario. Por otro lado, la variable y mide la diferencia de temperatura entre las corrientes ascendentes y descendentes, mientras que z mide lo que se desvía de la linealidad el gradiente vertical de la temperatura.

El sistema de Lorenz es un sistema dinámico determinista de EDOs de la forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = \rho x - y - xz \\ \dot{z} = xy - \beta z \end{cases} \quad (5)$$

donde σ , ρ y β son parámetros de control no negativos y adimensionales. En particular, σ es el cociente entre la viscosidad y la conductividad térmica del fluido, conocido como número de Prandtl. Por su parte, ρ es el número de Rayleigh, R_a , normalizado con respecto a su valor crítico, R_c . Y, por último, β es un factor geométrico relacionado con el tamaño del sistema. Trabajaremos con los valores típicos de estas magnitudes, empleados tanto por Lorenz como por la mayoría de investigadores: $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ y ρ variable.

3.1. Propiedades del sistema

3.1.1. Existencia de las soluciones

Supongamos que se tiene el siguiente problema de valores iniciales:

$$y' = f(y(t), t), y(t_0) = y_0 \quad (6)$$

El siguiente teorema asegura la existencia y unicidad de soluciones de la EDO anterior.

Teorema 3.1. Sean f y $\frac{\partial f}{\partial y}$ funciones continuas en un rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$, tal que $(t_0, y_0) \in R$. Entonces en un intervalo $[t_0 - h, t_0 + h] \subset [a, b]$, con $h > 0$, hay una solución $y(t)$ del PVI dado en 6, y es única.

El sistema de Lorenz está formado por tres funciones suaves, es decir, infinitamente diferenciables, y por tanto existe una solución local en el tiempo $(x(t), y(t), z(t))$. No obstante, al ser ecuaciones diferenciales no lineales, puede ser que no tengan una solución global, ya que podría existir un tiempo finito τ tal que $|(x(t), y(t), z(t))| \rightarrow \infty$ para $t \rightarrow \tau$. Veamos un ejemplo de esto:

Ejemplo 3.1. Se tiene la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{dy}{dt} = y^2, t > 0$$

Supongamos que la condición inicial es $y(0) = a$, con $a > 0$. Se trata de una función continua y cuya derivada parcial es continua, y por tanto la solución existe y es única. Esta solución es la siguiente:

$$y(t) = \frac{1}{\tau - t}$$

donde $\tau = 1/a$. Por tanto, la solución existe y es única en el intervalo temporal $0 < t < \tau$, ya que cuando $t \rightarrow \tau^-$, $y(t) \rightarrow \infty$, es decir, la solución “*explota*” (*blows up*).

Lo que haremos para asegurar la existencia global de las soluciones del sistema de Lorenz será demostrar que existe una región acotada de tal forma que todas las trayectorias entran en dicha región y permanecen en ella. Es decir, sea $x(t)$ una trayectoria del sistema, demostraremos que existe una región Y tal que $\exists t_0$ con $x(t_0) \in Y$, y $x(t) \in Y, \forall t > t_0$.

Lema 3.2. Las trayectorias del sistema de Lorenz entran y no escapan de la esfera S definida como $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z - \sigma - \rho)^2 \leq C\}$ para cierta constante C , es decir, están acotadas.

Demostración. Sea $V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + (z - \sigma - \rho)^2)$ una función de Lyapunov (ver Anexo A). Sea $(x(t), y(t), z(t))$ una solución del sistema de Lorenz, entonces se tiene que

$$\frac{dV}{dt}(x(t), y(t), z(t)) = x\dot{x} + y\dot{y} + (z - \sigma - \rho)\dot{z} = -\sigma x^2 - y^2 - \beta(z - \frac{1}{2}(\sigma + \rho))^2 + \frac{\beta}{4}(\sigma + \rho)^2$$

donde la última igualdad surge de sustituir las ecuaciones dadas en 5. Por tanto, V es una función decreciente en la región complementaria a R , donde

$$R := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{dV}{dt}(x, y, z) \geq 0\}$$

$$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sigma x^2 + y^2 + \beta(z - \frac{1}{2}(\sigma + \rho))^2 \leq \frac{\beta}{4}(\sigma + \rho)^2\}$$

Por tanto, tomando la esfera $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z - \sigma - \rho)^2 \leq C\}$, con C lo suficientemente grande como para que $R \subset S$, cualquier trayectoria que empiece en S permanecerá con el tiempo en S , y por tanto está acotada. Además, si dicha trayectoria empieza fuera de S , como $R \subset S$, se tiene que $dV/dt < 0$ y por tanto se ven atraídas hasta que están en el interior de R , de donde no pueden escapar. \square

Con ello, se concluye que la solución del sistema de Lorenz existe y es global.

3.1.2. No linealidad

Se trata de un sistema no lineal, debido a la aparición de los términos cuadráticos xz y xy en la segunda y en la tercera ecuación, respectivamente.

3.1.3. Simetría

Veamos que el sistema de Lorenz es invariante ante la simetría $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$. Si sustituimos en el sistema x por $-x$, y por $-y$ y z la mantenemos fija, se tiene

$$\begin{cases} -\dot{x} &= -\sigma(y - x) \\ -\dot{y} &= -\rho x + y + xz \\ \dot{z} &= xy - \beta z \end{cases}$$

con lo cual es el mismo sistema, pues si en las dos primeras ecuaciones se multiplica por un signo menos a ambos lados de la igualdad, ambas se quedan igual, y la tercera ya tiene la misma forma. Por tanto, si (x_0, y_0, z_0) es una solución del sistema, también lo será $(-x_0, -y_0, z_0)$.

3.1.4. Disipación

Veamos que el sistema de Lorenz es un sistema disipativo y, por tanto, que los volúmenes en el espacio de fases se contraen bajo el flujo. En este caso, el volumen tiende a ser cero y converge a un atractor de dimensión menor que la del espacio de fases.

Proposición 3.1. El sistema de Lorenz, descrito en Ec.(5), disipa el volumen.

Demostración. Supongamos que $S(t)$ es una superficie arbitraria en el espacio de fases, que encierra un volumen $V(t)$. $S(t)$ puede estar formada por un conjunto de condiciones iniciales para trayectorias, por ejemplo. Veamos cómo varía ese volumen bajo la evolución temporal.

Sea $\vec{x} = (x, y, z)$ el vector de posición y $\vec{u} = \dot{\vec{x}}$ la velocidad en el espacio de fases. Sea \vec{n} el vector unitario normal a $S(t)$ que apunta hacia fuera de la superficie. El teorema de transporte de Reynolds nos dice que

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \mathbf{f} \, dV = \int_{V(t)} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \, dV + \int_{S(t)} (\vec{u} \cdot \vec{n}) \mathbf{f} \, dA$$

donde \mathbf{f} puede ser una función escalar, vectorial o un tensor. Si tomamos en la ecuación anterior la función $\mathbf{f} = 1$, la cual es continua y derivable, se tiene la siguiente expresión:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} dV = \int_{S(t)} (\vec{u} \cdot \vec{n}) \, dA$$

El término de la izquierda de la ecuación anterior se corresponde con la derivada temporal de $V(t)$, es decir, con $\dot{V}(t)$. Si además aplicamos el teorema de la divergencia al término de la derecha se llega a

$$\dot{V}(t) = \int_{S(t)} \vec{u} \cdot \vec{n} \, dA = \int_{V(t)} \nabla \cdot \vec{u} \, dV$$

Ahora, teniendo en cuenta que la divergencia de \vec{u} es

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = -(\sigma + 1 + \beta)$$

se concluye que $\dot{V} = -(\sigma + 1 + \beta)V$ y, por tanto,

$$V(t) = V(0)e^{-(\sigma+1+\beta)t}$$

Dado que σ y β son parámetros no negativos, el sistema de Lorenz disipa volumen. \square

Por tanto, se concluye que el volumen se contrae, y además lo hace de forma exponencial. Las trayectorias convergen a un conjunto límite de dimensión menor que 3, que

conoceremos a continuación al estudiar la estabilidad de los puntos fijos. No obstante, se pueden sacar algunas conclusiones previas a su estudio. En primer lugar, se sabe que no hay soluciones cuasiperiódicas. Si hubiera una solución de ese tipo, su trayectoria debería estar recorriendo la superficie de un toro indefinidamente, sin llegar a cerrarse, y el toro sería invariante bajo el flujo. Es decir, el volumen del toro no cambiaría, lo cual hemos visto que no puede ocurrir. Además, no pueden existir puntos fijos repulsores ni ciclos límite repulsores. De ser así, el volumen de una pequeña superficie que encierre al repulsor aumentaría al cabo de un tiempo, ya que las trayectorias son repelidas por él.

El hecho de que haya una región que acota a las trayectorias del sistema, tal como se probó en la Sección 3.1.1, unido a que el sistema disipa volumen, da evidencia de la existencia de un conjunto de atracción global, de dimensión menor a la del espacio de fases, y cuya dimensión será fractal cuando las trayectorias diverjan (atractor extraño).

3.2. Puntos de equilibrio

En primer lugar, veamos cuáles son los puntos fijos del sistema. Los puntos de equilibrio (x, y, z) serán aquellos que verifiquen

$$(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (0, 0, 0)$$

Sustituyendo esto en las ecuaciones 5 del sistema se obtiene de la primera de ellas que $x = y$, y queda el siguiente sistema:

$$0 = \rho x - x - xz$$

$$0 = x^2 - \beta z$$

De la segunda ecuación de este sistema se obtiene que $z = (1/\beta)x^2$ y, por tanto, de la primera ecuación se deriva la siguiente igualdad: $0 = x(\rho - 1) - (1/\beta)x^3 = x(\rho - 1 - (1/\beta)x^2)$. Por tanto, los puntos fijos tendrán coordenadas $x = 0$ y, para $\rho > 1$, x igual a las soluciones de la ecuación de segundo grado $(\rho - 1 - (1/\beta)x^2)$, que son $\pm\sqrt{\beta(\rho - 1)}$. De esta forma, se tiene que los puntos de equilibrio del sistema son los siguientes:

$$p_1 = (0, 0, 0)$$

$$p_2 = (\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1)$$

$$p_3 = (-\sqrt{\beta(\rho - 1)}, -\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1)$$

donde $\rho > 1$ para que p_2 y p_3 sean puntos de equilibrio. Si $\rho < 1$, entonces estos puntos no tendrían sentido desde el punto de vista físico. En el punto de equilibrio p_1 el fluido está en reposo y el calor se transfiere por conducción. Los otros dos puntos representan una convección que circula de manera constante. Cabe destacar que se trata de tres puntos críticos aislados, ya que existe un entorno de cada punto para el cual no hay ningún otro punto crítico. Este entorno puede ser, por ejemplo, para $\beta = 8/3$ (es decir, $\beta > 1$), $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = (\rho - 1)/4\}$.

3.2.1. Estabilidad de los puntos de equilibrio

Para analizar la estabilidad de los puntos críticos del sistema se van a linealizar las ecuaciones de Lorenz entorno a estos puntos. A partir de los autovalores del jacobiano del sistema será posible conocer su estabilidad [20]. La justificación de llevar a cabo una linealización para analizar la estabilidad, así como el motivo por el que los autovalores del jacobiano nos revelan la información que buscamos, se puede encontrar en el Anexo B.

Sea $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la función que describen las ecuaciones de Lorenz recogidas en la Ec.(5). Sea $\mathbf{\Gamma} = (x, y, z)$ un vector del espacio de fases del sistema tridimensional. Se tiene que la matriz jacobiana de F es la siguiente:

$$DF(\mathbf{\Gamma}) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho - z & -1 & -x \\ y & x & -\beta \end{pmatrix} \quad (7)$$

Estudiaremos los diferentes casos existentes en función del valor del parámetro ρ . El desarrollo matemático se acompaña con gráficas realizadas a partir de un código de Matlab de elaboración propia, con el objetivo de visualizar el comportamiento que siguen las soluciones del sistema de Lorenz en cada caso.

Caso 1: $0 < \rho < 1$

En este caso, el único punto crítico es $p_1 = (0, 0, 0)$. Para analizar la estabilidad, linealizamos entorno a p_1 y obtenemos el polinomio característico del jacobiano. Sus raíces

serán los autovalores de la matriz. Así, sustituyendo $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ en 7, se tiene que

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\sigma - \lambda & \sigma & 0 \\ \rho & -1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\beta - \lambda \end{pmatrix}$$

y se deriva que $p(\lambda) = -\lambda^3 - \lambda^2(\beta + \sigma + 1) - \lambda(\sigma + \sigma\beta + \beta + \rho\sigma) + \rho\sigma\beta - \beta\sigma = (\beta + \lambda)(-\lambda^2 - \lambda\sigma - \lambda - \sigma - \rho\sigma)$. Por tanto, una de las raíces es $r_1 = -\beta$. Y las otras dos son soluciones de la ecuación de segundo grado $-\lambda^2 - \lambda(\sigma + 1) - \sigma(1 + \rho)$, que son

$$r_{2,3} = \frac{-(\sigma + 1) \pm \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4\rho\sigma}}{2}$$

Si sustituimos $\sigma = 10$ y $\beta = 8/3$ se tiene que $r_1 = -8/3$, $r_{2,3} = (-11 \pm \sqrt{81 + 40\rho})/2$. Como $0 < \rho < 1$, se tiene que $r_2 < 0$ y $r_3 < -11$ y, por tanto, las tres raíces son negativas. Con ello, se concluye que en este caso el punto crítico p_1 es asintóticamente estable. Además, se puede probar que es un atractor global (ver Anexo A). Si consideramos la siguiente función de Lyapunov:

$$V(x, y, z) = \frac{x^2}{2\sigma} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2}$$

entonces, se puede comprobar que⁵

$$\frac{dV}{dt} = - \left(x - \frac{\rho + 1}{2} y \right)^2 - \left(1 - \left(\frac{\rho + 1}{2} \right)^2 \right) y^2 - \beta z^2 \quad (8)$$

donde

$$1 - \left(\frac{\rho + 1}{2} \right)^2 = \frac{4 - \rho^2 - 2\rho - 1}{4} > \frac{4 - 1^2 - 2 \cdot 1 - 1}{4} = 0$$

ya que $0 < \rho < 1$. Por tanto, todos los términos de la Ec.(8) contribuyen negativamente, de lo que se deriva que $dV/dt < 0$ y el origen es un atractor global. En la Figura 15 se ha representado una trayectoria para $\rho=0.5$, que empieza en el punto $(2, 5, 0.5)$, la cual se ve que es atraída por el origen, tal como preveíamos.

⁵Los cálculos que nos han llevado a esta igualdad no se han plasmado en el trabajo por simplificar, pero se anima al lector a comprobarlos si así lo desea.

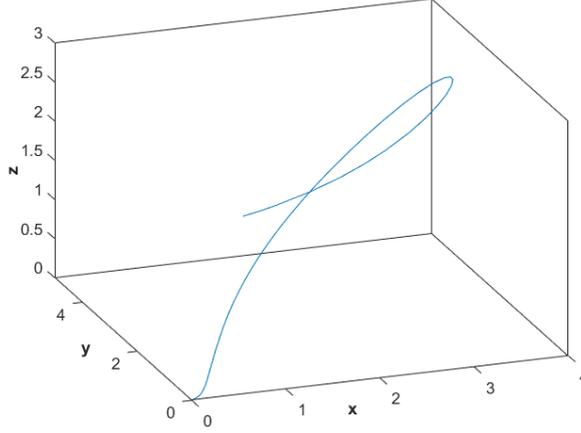


Figura 15: Solución del sistema de Lorenz para $\rho = 0,5$, con condición inicial en el punto $(2, 5, 0.5)$. Verifica que el origen es globalmente asintóticamente estable.

Caso 2: $1 < \rho < \rho_H$

Si $1 < \rho < \rho_H$, además del punto crítico $p_1 = (0, 0, 0)$, aparecen también los puntos críticos $p_{2,3} = (\pm\sqrt{\beta(\rho-1)}, \pm\sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho-1)$.

En primer lugar, si analizamos entorno a p_1 , teniendo en cuenta las raíces que obtuvimos para el anterior caso, y que en este caso el término $\sqrt{81 + 40\rho} > 11$ se deriva que $r_1 = -8/3$, $r_2 > 0$ y $r_3 < -11$. Por tanto, se tienen dos autovalores negativos y uno positivo, y se concluye que $p_1 = (0, 0, 0)$ es un punto de silla, pasa a ser inestable.

Debido a la simetría del problema, demostrada en la sección 3.1.3, estudiaremos únicamente el punto crítico $p_2 = (\sqrt{\beta(\rho-1)}, \sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho-1)$, ya que las propiedades de p_3 se derivan de las de p_2 . El jacobiano evaluado en p_2 es el siguiente:

$$DF(p_2) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{\beta(\rho-1)} \\ \sqrt{\beta(\rho-1)} & \sqrt{\beta(\rho-1)} & -\beta \end{pmatrix} \quad (9)$$

Del mismo modo que antes, se obtiene que el polinomio característico es $p(\lambda) = \det(DF(p_2) - \lambda I) = (\sigma + \lambda)(1 + \lambda)(-\beta - \lambda) - \sigma\beta(\rho - 1) - \beta(\rho - 1)(\sigma + \lambda) + \sigma(\beta + \lambda) = -\lambda^3 - \lambda^2(\beta + \sigma + 1) - \lambda\beta(\sigma + \rho) - 2\beta\sigma(\rho - 1)$. Por tanto, habrá que buscar los λ tal que

$$\lambda^3 + \lambda^2(\beta + \sigma + 1) + \lambda\beta(\sigma + \rho) + 2\beta\sigma(\rho - 1) = 0 \quad (10)$$

Intentaremos obtener la información que necesitamos de los λ sin calcular su valor explícito. En primer lugar, sabemos por el Teorema Fundamental del Álgebra que este polinomio,

al tener grado 3, tendrá tres raíces. Además, dado que los coeficientes del polinomio son reales, si una de las raíces es un número complejo, entonces el conjugado de ese número también será una raíz, es decir, las raíces complejas aparecen a pares. Por tanto, existe al menos una raíz real, λ_1 . Por otro lado, se tiene que

$$p'(\lambda) = 3\lambda^2 + 2\lambda(\beta + \sigma + 1) + \beta(\sigma + \rho)$$

y dado que $\beta > 0$, $\sigma > 0$ y $\rho > 1$, entonces $p'(\lambda) > 0$, $\forall \lambda \geq 0$. Además, $p(0) = 2\beta\sigma(\rho - 1) > 0$. Por esta razón, si las tres raíces son reales, las tres tendrán que ser negativas. Por ahora, al menos de λ_1 , que sabemos que es real, podemos concluir que también es negativa.

Si representamos el polinomio característico $p(\lambda)$ para $\rho = 1.05$ por ejemplo, vemos que el polinomio tiene tres raíces reales, tal como muestra la Figura 16. Por otro lado, para $\rho = 1.5$, se puede observar en la Figura 17 que el polinomio corta al eje x solo una vez y, por tanto, tiene dos raíces complejas. Es posible obtener el valor de ρ para el cual $p(\lambda)$ pasa de tener tres raíces reales a una raíz real y dos complejas, calculando el momento en el que el mínimo de la función tiene coordenada $y = 0$. Así, se ha obtenido que ese valor es $\rho \approx 1,3456$ (ver Anexo C para más información).

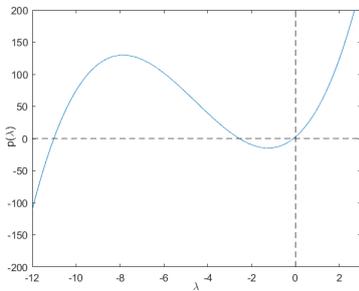


Figura 16: $p(\lambda)$ descrito en 10 para $\rho=1.05$. Se ve que la función corta tres veces al eje x ; hay tres raíces reales negativas.

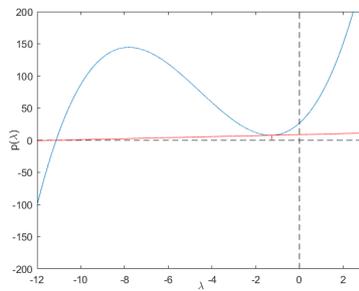


Figura 17: $p(\lambda)$ descrito en 10 para $\rho=1.50$. En rojo, recta tangente a la curva que pasa por el punto $(\lambda_1, 0)$.

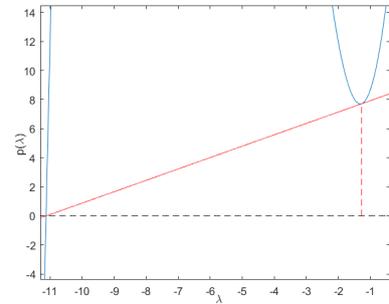


Figura 18: Vista ampliada de la recta tangente descrita en la Figura 17. La parte real de las raíces complejas es negativa.

Por otro lado, nos interesa saber la parte real de las raíces complejas para ver si los puntos críticos son estables o inestables. Se puede ver en la misma Figura 17 que la parte real de las raíces complejas es negativa⁶ y, por tanto, se tiene que ambos puntos críticos son estables. A partir de este método también se ha comprobado que a medida que ρ aumenta, la parte real de las raíces complejas aumenta su valor. De este modo, existe un

⁶La parte real coincide con la coordenada x del punto de tangencia entre la curva y la recta que pasa por el punto $(\lambda_1, 0)$ y es tangente a la curva, donde λ_1 es la raíz real de la curva (ver [21]).

valor de ρ a partir del cual estas raíces pasan a tener parte real positiva. A ese valor de ρ lo llamaremos ρ_H y veremos posteriormente que $\rho_H \approx 24.737$. Podemos concluir que para valores de ρ con $1 < \rho < \rho_H$, el origen es inestable y los otros dos puntos críticos, p_2 y p_3 , son estables. En la Figura 19 se ha representado una solución del sistema para $\rho = 10$ con condición inicial en el punto $(0.1, 0.1, 0.1)$. Se observa que el origen es inestable y que el sistema evoluciona a uno de los puntos críticos estables.

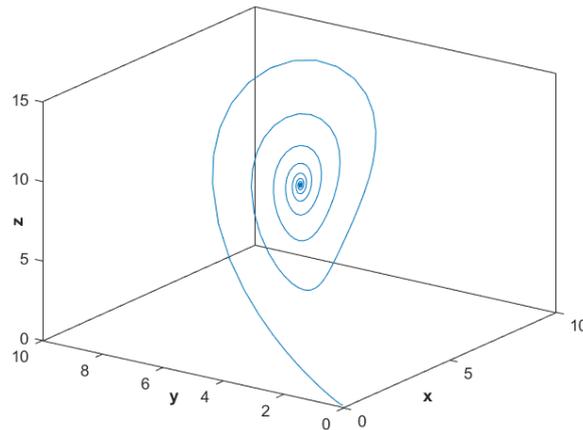


Figura 19: Solución del sistema de Lorenz para $\rho = 10$, con condición inicial en el punto $(0.1, 0.1, 0.1)$. El sistema evoluciona hacia uno de los puntos estables.

Caso 3: $\rho = 1$

Se ha visto que para $\rho < 1$ el único punto de equilibrio existente es el origen, que además es estable, y en el momento en que $\rho > 1$ aparece un par de puntos críticos estables, mientras que el origen se vuelve inestable. Por tanto, podemos concluir que en $\rho = 1$ hay una bifurcación tridente supercrítica, la cual aparece debido a la simetría del problema, demostrada en la Sección 3.1.3.

Caso 4: $\rho = \rho_H$

Como vimos en la sección 2.4.2, una bifurcación de Hopf ocurre cuando los autovalores cruzan el eje imaginario. Cuando analizamos el caso de $\rho > 1$, vemos que aparecían raíces complejas con parte real negativa, y que esa parte real negativa iba creciendo a medida que aumentaba ρ . Por tanto, la pregunta que nos hacemos es en qué valor de ρ las raíces pasarán a tener parte real positiva. Para ello, hay que analizar en qué momento las raíces del polinomio característico son puramente imaginarias, es decir, tienen parte real igual a cero. Veamos para qué valores de ρ se verifica que $\lambda = \pm ai$, donde $a \in \mathbb{R}$. Sustituyendo

$\lambda = ai$ en la Ec.(10), se tiene:

$$(ai)^3 + (ai)^2(\beta + \sigma + 1) + (ai)\beta(\sigma + \rho) + 2\beta\sigma(\rho - 1) = 0$$

Si resolvemos por separado la parte real y la parte imaginaria tenemos lo siguiente:

$$a^2(\beta + \sigma + 1) = 2\beta\sigma(\rho - 1) \qquad a^3 = a\beta(\sigma + \rho)$$

De la ecuación de la derecha se deriva que $a^2 = \beta(\sigma + \rho)$ y sustituyendo este término en la ecuación de la izquierda se obtiene el valor de ρ que buscamos, que llamaremos ρ_H

$$\rho_H = \frac{\sigma(\beta + \sigma + 1) + 2\sigma}{-(\beta + \sigma + 1) + 2\sigma} = \frac{\sigma(\beta + \sigma + 3)}{\sigma - \beta - 1} \approx 24.737$$

Se ha visto que en el caso en que $1 < \rho < \rho_H$ el origen es un punto inestable y los puntos p_2 y p_3 son estables, mientras que si $\rho > \rho_H$, las raíces complejas pasan a tener parte real positiva y, por tanto, p_2 y p_3 pasan a ser inestables. Es decir, en el momento en que $\rho = \rho_H$ hay una bifurcación de Hopf, que además es subcrítica.

Caso 5: $\rho > \rho_H$

En el caso en que $\rho > \rho_H$ los tres puntos críticos son inestables. Además, se demostró en la Sección 3.1.1 que las trayectorias no tienden a infinito, sino que quedan confinadas en una región del espacio. Por ello, a partir de este momento se observa un comportamiento caótico del sistema y las trayectorias quedan confinadas al atractor de Lorenz.

En primer lugar, es razonable preguntarse cómo es la transición al caos, es decir, cómo el sistema pasa de no ser caótico a serlo. En la Figura 20 se muestra una solución del sistema para $\rho = 23$ ($< \rho_H$). Asimismo, se ha representado en la Figura 21 la evolución en el tiempo de la coordenada x de dicha solución. Lo que se observa es que previamente a evolucionar a una espiral estable alrededor de uno de los puntos críticos, el sistema se comporta de una forma irregular y aperiódica, alternando secuencias de giro entre ambos puntos. Este es el paso previo al caos.

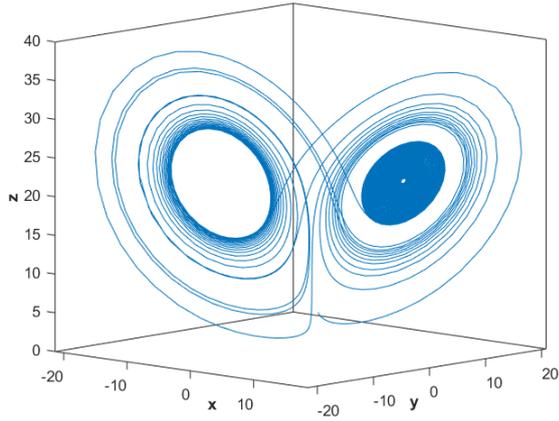


Figura 20: Solución del sistema de Lorenz para $\rho = 23$, con condición inicial en el punto $(0.5, 0.5, 5)$. El sistema sigue una trayectoria irregular antes de evolucionar hacia uno de los puntos estables en forma de espiral.

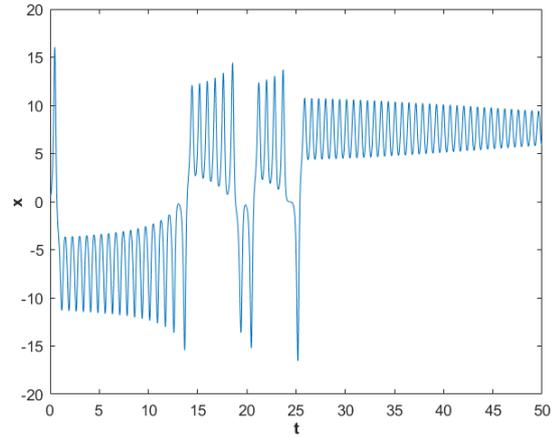


Figura 21: Evolución de la coordenada x en el tiempo de la trayectoria descrita en la Figura 20. El sistema alterna secuencias de giro entre los dos puntos estables antes de estabilizarse alrededor de uno de ellos.

No obstante, a pesar de que la trayectoria no es caótica ya que el movimiento deja de ser aperiódico en algún instante de tiempo, para $\rho = 23$ el sistema ya muestra una alta sensibilidad a las condiciones iniciales. En la Figura 22 se ha representado la trayectoria anterior y otra trayectoria separada inicialmente de esta una distancia de $1.e-6$ en el eje y . En la Figura 23 se muestra la evolución de las coordenadas x de cada trayectoria. Se ve que durante los primeros instantes de tiempo las dos trayectorias coinciden, pero que llega un momento en que las trayectorias son completamente distintas, hasta el punto de estabilizarse alrededor de puntos críticos distintos.

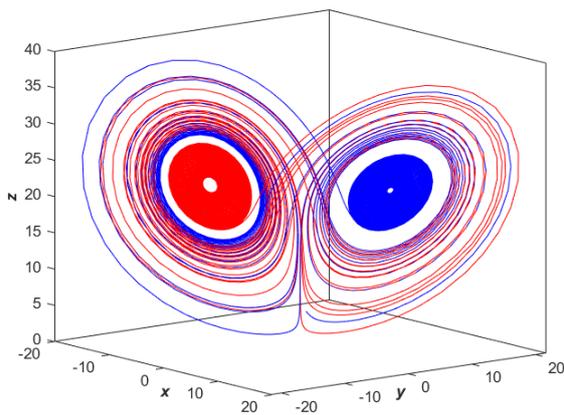


Figura 22: Solución del sistema de Lorenz para $\rho = 23$, con condición inicial en el punto $(0.5, 0.5, 5)$, en azul, y con condición inicial en el punto $(0.5, 0.5 + 1.e-6, 5)$, en rojo.

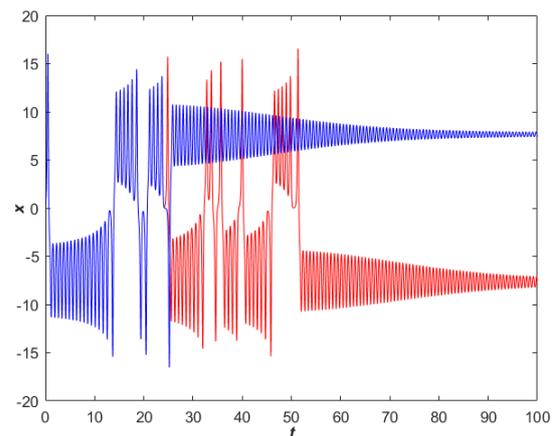


Figura 23: Evolución de la coordenada x en el tiempo de las dos trayectorias descritas en la Figura 22. Se pone de manifiesto la sensibilidad a las condiciones iniciales del sistema.

A continuación, se muestra el comportamiento del sistema para $\rho = 30$. En este caso los tres puntos son inestables y aparece el caos. En las Figuras 24 y 25 se observa que el sistema sigue una trayectoria acotada que alterna secuencias de giro alrededor de los dos focos inestables. El movimiento es completamente caótico. La forma que se observa es el conocido atractor de Lorenz.

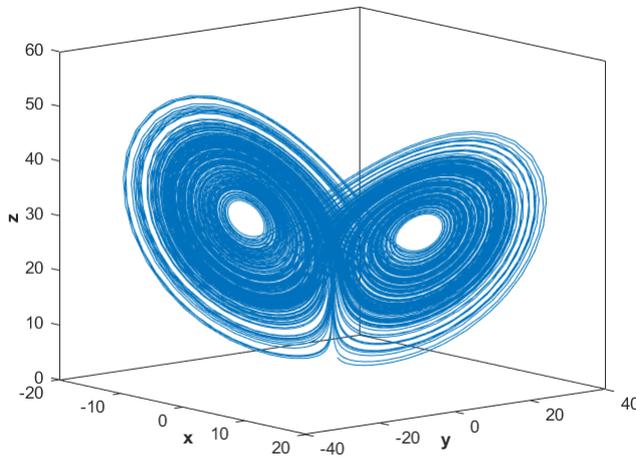


Figura 24: Solución del sistema de Lorenz para $\rho = 30$, con condición inicial en el punto $(0.5, 0.5, 5)$. Se ve cómo las trayectorias quedan confinadas en el atractor de Lorenz. El movimiento es caótico.

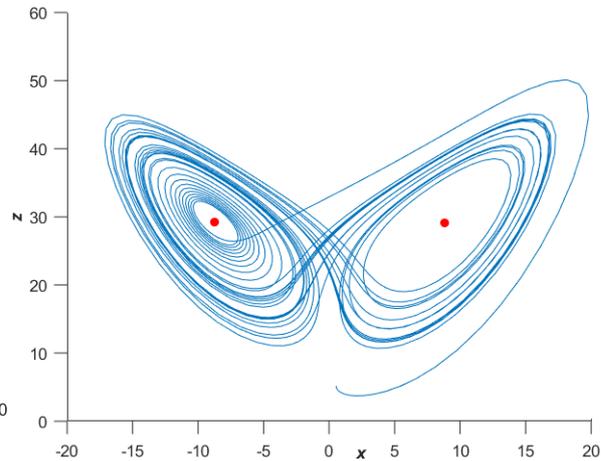


Figura 25: Proyección en el plano xz de la trayectoria descrita en la Figura 24, aunque se ha dejado evolucionar menos tiempo. Se ve que la solución gira entorno a los dos puntos críticos, marcados en color rojo, de forma aleatoria.

El número de veces que gira alrededor de uno de los focos antes de pasar al otro es totalmente aleatorio, igual que lanzar una moneda al aire. Esto se aprecia en la Figura 26, en la que se muestra la evolución de la coordenada x de dos trayectorias inicialmente muy cercanas. Se ve que el número de giros alrededor de un punto y otro es aleatorio. Además, se pone de manifiesto la sensibilidad a las condiciones iniciales del sistema.

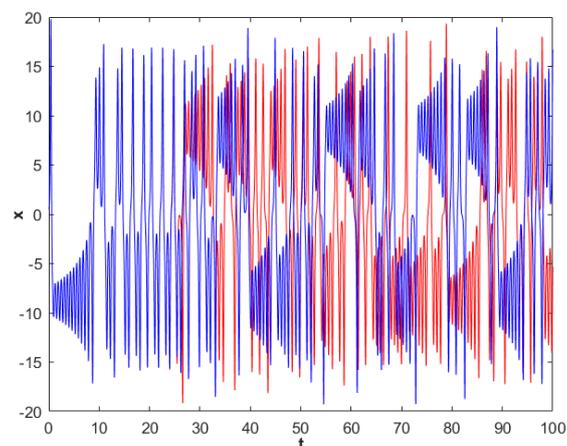


Figura 26: Solución del sistema de Lorenz para $\rho = 30$, con condición inicial en el punto $(0.5, 0.5, 5)$, en azul, y con condición inicial en el punto $(0.5+1.e-8, 0.5, 5)$, en rojo. Se pone de manifiesto la sensibilidad a las condiciones iniciales del sistema.

Por otro lado, en las Figuras 27 y 28 se ha representado la evolución del sistema para $\rho = 30$ cuando las condiciones iniciales están muy lejos de los puntos fijos. En la primera, se ha dejado evolucionar la trayectoria durante un tiempo $T=[0\ 250]$ ⁷, mientras que en la segunda se la ha dejado evolucionar un tiempo $T=[0\ 1]$. Con esto, se pretende exponer que las trayectorias decaen hacia el atractor exponencialmente rápido.

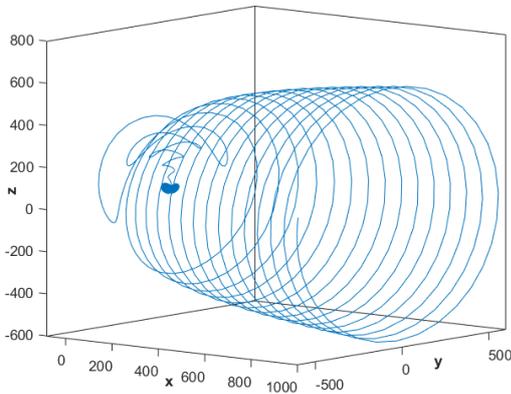


Figura 27: Solución del sistema de Lorenz para $\rho = 30$, con condición inicial en el punto $(1000, -600, 100)$, a la que se ha dejado evolucionar un tiempo $T=[0\ 250]$.

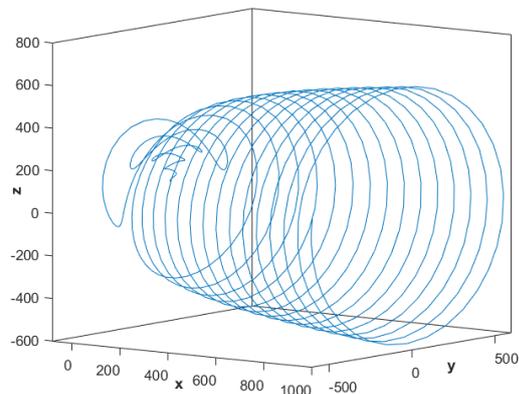


Figura 28: Solución del sistema de Lorenz para $\rho = 30$, con condición inicial en el punto $(1000, -600, 100)$, a la que se ha dejado evolucionar un tiempo $T=[0\ 1]$.

Al seguir “jugando” con los valores de ρ , se ha visto que para ciertos valores de $\rho \gg 1$, las trayectorias dejan de ser caóticas y siguen un comportamiento periódico. Es decir, hay ciertos valores de ρ para los cuales se deja de observar el caos. En particular, se ha visto que para $\rho = 150$, por ejemplo, las soluciones convergen a una órbita de periodo doble, como se refleja en la Figura 29.

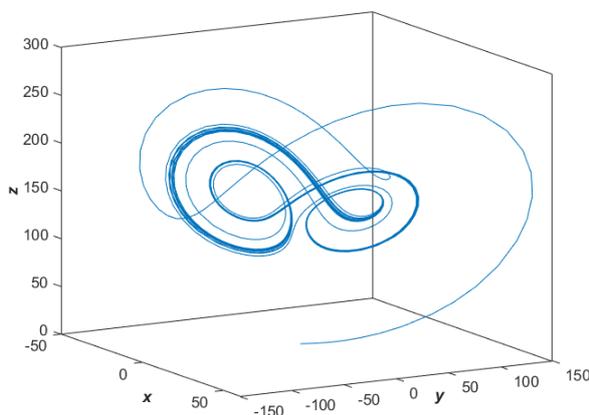


Figura 29: Solución del sistema de Lorenz para $\rho = 150$, con condición inicial en el punto $(1, 1, 1)$. La solución converge a una órbita de periodo doble.

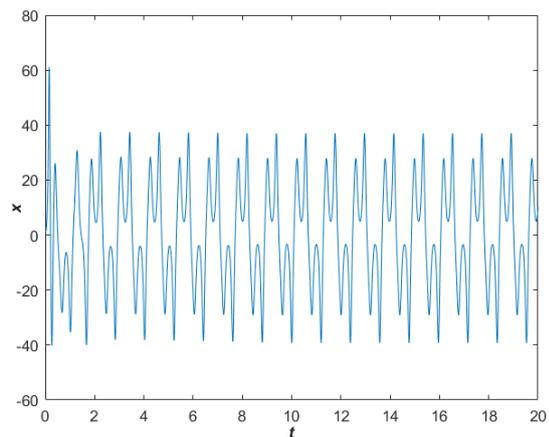


Figura 30: Evolución de la coordenada x en el tiempo de la trayectoria descrita en la Figura 29. Se aprecia el comportamiento de periodo doble.

⁷Un tiempo $T=[0\ 250]$ representa 250 unidades de tiempo.

Al aumentar aún más el valor de ρ , para $\rho = 500$ por ejemplo, se observa un ciclo límite globalmente atractor. Se ha representado en la Figura 31, en azul, una solución del sistema con condición inicial en $(1, 1, 1)$ y se ve que converge a una órbita periódica. También se ha representado en rojo otra solución, con condición inicial cerca de uno de los puntos críticos inestables, y se ve que la trayectoria acaba convergiendo finalmente a la misma órbita periódica. En este trabajo no se ha entrado a analizar por qué ocurre este hecho, pero una explicación analítica se puede encontrar en [22].

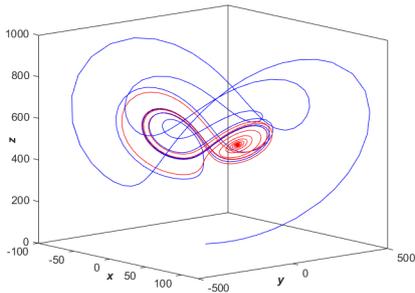


Figura 31: Solución del sistema de Lorenz para $\rho = 500$, con condición inicial en el punto $(1, 1, 1)$, en azul, y en el punto $(36.47, 36.47, 499)$, en rojo. Ambas soluciones convergen a un ciclo límite estable.

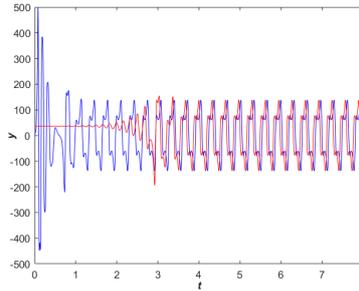


Figura 32: Evolución de la coordenada y en el tiempo de las dos trayectorias representadas en la Figura 31. A partir de $t \approx 3.5$, ambas soluciones convergen al ciclo límite estable.

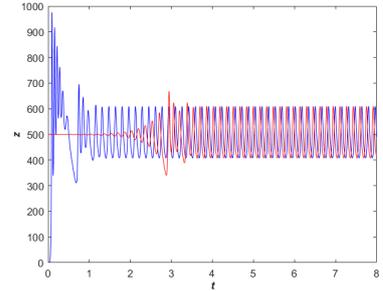


Figura 33: Evolución de la coordenada z en el tiempo de las dos trayectorias representadas en la Figura 31. A partir de $t \approx 3.5$, ambas soluciones convergen al ciclo límite estable.

3.3. Exponentes de Lyapunov

Hemos visto que para ciertos valores de ρ , a partir de que $\rho > \rho_H$, ciertas trayectorias presentan una alta irregularidad y aperiodicidad. Además, hemos visto que, en ese caso, el sistema tiene una alta sensibilidad a las condiciones iniciales. Como ya introdujimos previamente en la Sección 2.2, la forma más común de cuantificar la divergencia entre dos trayectorias es a partir de los exponentes de Lyapunov.

A partir de un programa propio realizado en Matlab se han calculado los exponentes de Lyapunov para distintos valores de ρ . En las Figuras 34 y 35 se han representado los tres exponentes de Lyapunov en función del tiempo que se ha dejado evolucionar el sistema, para $\rho = 20$ y para $\rho = 28$, respectivamente. Sabemos que la definición del exponente de Lyapunov requiere que $t \rightarrow \infty$ y lo que vemos en las gráficas es que mientras $t \rightarrow \infty$, los exponentes de Lyapunov convergen a ciertos valores. En primer lugar, para $\rho = 20$ se tiene que $\lambda_1 = -0.1512$, $\lambda_2 = -0.1546$ y $\lambda_3 = -13.3622$. Como ya intuíamos, para este valor de ρ el sistema no es caótico ya que los tres exponentes son negativos. Por otro lado, para $\rho = 28$

se tiene que $\lambda_1=0.9079$, $\lambda_2=-0.0209$ y $\lambda_3=-14.5571$, por lo que el sistema es caótico ya que el exponente máximo de Lyapunov es positivo y por tanto las trayectorias divergen. Esto, unido al hecho de que el sistema es disipativo, tal como probamos en la Sección 3.1.4, sugiere que las trayectorias convergen a un atractor extraño, que es precisamente el atractor de Lorenz. En 2002, el matemático australiano Warwick Tucker probó a partir de métodos numéricos que las propiedades que exhibe el atractor de Lorenz se corresponden con las de un atractor extraño, lo cual supuso la resolución del problema número 14 de la lista de problemas de Smale [23]. Se estima que la dimensión de Hausdorff del atractor de Lorenz, para $\rho = 28$, $\sigma = 10$ y $\beta = 8/3$, es $D \approx 2.06$, es decir, es un fractal [24].

Cabe destacar además que, en ambos casos, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \approx -13.67$, lo cual coincide con el resultado obtenido en la Sección 3.1.4, donde vimos que el volumen se contraía como $e^{-(\sigma+1+\beta)} \approx e^{-13.67}$.

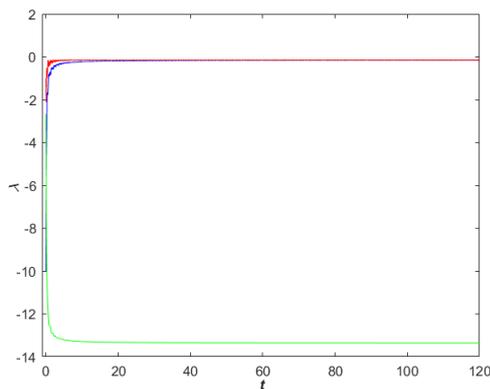


Figura 34: Exponentes de Lyapunov para $\rho = 20$. La gráfica converge a los siguientes valores: $\lambda_1 = -0.1512$, $\lambda_2 = -0.1546$ y $\lambda_3 = -13.3622$.

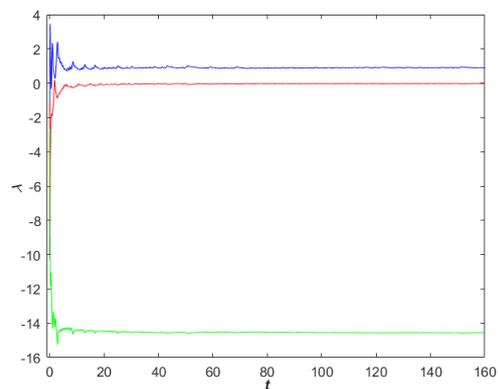


Figura 35: Exponentes de Lyapunov para $\rho = 28$. La gráfica converge a los siguientes valores: $\lambda_1 = 0.9079$, $\lambda_2 = -0.0209$ y $\lambda_3 = -14.5571$.

Finalmente, se han calculado también los exponentes de Lyapunov para sistemas de Lorenz con otros valores de ρ . Cabe destacar que, por ejemplo, para $\rho = 200$, se ha obtenido $\lambda_1 = -0.035$, $\lambda_2 = -0.734$ y $\lambda_3 = -12.894$. Con ello, se verifica que para ciertos valores de $\rho \gg 1$ el sistema vuelve a no ser caótico.

4. Estocasticidad espontánea

Qué es la estocasticidad espontánea

En el contexto de la dinámica de fluidos ideales se suele tratar con ecuaciones en derivadas parciales que son invariantes bajo transformaciones de escala espacio-temporales. Una característica de este tipo de ecuaciones es que sus soluciones pueden no ser únicas o no estar globalmente definidas. Esto sucede cuando la función que describe el sistema es no Lipschitz continua, por lo que la unicidad de las soluciones no se puede asegurar. Generalmente, en estos casos, para obtener un problema globalmente bien definido lo que se hace es regularizar dicho problema, es decir, introducir términos (viscosidad, fluctuaciones térmicas...) a microescalas, de forma que al estudiar el límite cuando estos términos desaparecen se tenga una solución físicamente relevante del sistema ideal a macroescala (ver, por ejemplo, [25], [26]). Muchos estudios acerca del tema sugieren que la dinámica turbulenta es estocástica incluso cuando el ruido es pequeño y se limita a escalas pequeñas, y que el comportamiento estocástico de las soluciones sigue estando presente en el límite en que el ruido desaparece. Es decir, al regularizar el problema, este queda bien definido, en términos probabilísticos, y se obtiene una solución única aleatoria. Al hacer el límite en que desaparecen esos términos se llega a que la solución sigue siendo probabilística, y además es independiente de la regularización ([27], [28], [29], [30]).

Estas soluciones límite se conocen como **espontáneamente estocásticas** y representan una distribución de probabilidad no trivial universal en el espacio de soluciones deterministas no únicas de la ecuación diferencial. Analicemos esto con más detalle. En primer lugar, un proceso estocástico es aquel cuyo comportamiento no es determinista, sino aleatorio. En estos casos, el sistema pasa de ser determinista a ser estocástico en un tiempo infinitesimal y requiere perturbaciones infinitesimales para aparecer, de ahí que se denomine estocasticidad “espontánea”. Si, por el contrario, la función que describe el flujo tuviera una solución única determinista, al regularizar el problema se convergería en el límite a una delta de Dirac. El hecho de que sea una probabilidad “no trivial” quiere decir que no se converge a una delta de Dirac. Por otro lado, el hecho de que sea “universal” hace referencia a que las propiedades estadísticas del flujo son independientes del tipo de regularización, excepto a escalas y tiempos muy pequeños.

Una manifestación de la estocasticidad espontánea es la estocasticidad espontánea la-

grangiana, observada en trayectorias lagrangianas de partículas que se mueven en un flujo turbulento. En este caso, dos partículas divergen en tiempos finitos a estados distintos, independientemente de su separación inicial (incluso si están en la misma posición inicial). Se verá un ejemplo posteriormente en esta sección. Otra manifestación de ella es la estocasticidad espontánea euleriana, que se observa en el campo de velocidades que describe el flujo. En este caso, un ruido infinitesimalmente pequeño a escalas muy pequeñas activa la evolución estocástica del campo a escalas y tiempos finitos. El comportamiento del sistema es completamente determinista hasta que se alcanza una singularidad, “*blow up time*”, a partir de la cual se produce la estocasticidad espontánea [31].

Orígenes de la noción de estocasticidad espontánea

Tal como comenta el matemático americano Gregory L. Eyink en el congreso celebrado recientemente, titulado “*What is Spontaneous Stochasticity and How Far Do We Understand It?*”, los orígenes de la noción de *estocasticidad espontánea* surgen con la publicación del trabajo “*Slow Modes in Passive Advection*” de Bernard, Gawedski y Kupiainen de 1998, donde hablan de “*un comportamiento no determinista de las trayectorias lagrangianas para números de Reynolds altos en flujos turbulentos*” [32]. El término “*estocasticidad espontánea*” para describir este fenómeno sería usado por primera vez unos años después, en 2001, en el trabajo de Falkovich et al. “*Particles and fields in fluid turbulence*” [33].

No obstante, ya en 1968, el propio Edward Lorenz había advertido de este fenómeno en su trabajo “*The predictability of a flow which possesses many scales of motion*” [34], en el que se recogía lo siguiente:

“Se propone que ciertos sistemas de fluidos formalmente deterministas que poseen muchas escalas de movimiento son observacionalmente indistinguibles de sistemas indeterministas; específicamente, que dos estados del sistema que difieren inicialmente un “error observacional” pequeño evolucionarán en dos sistemas que difieren tanto como dos estados del sistema escogidos de forma aleatoria dentro de un intervalo de tiempo finito, que no se puede alargar reduciendo la amplitud del error inicial.”

Lorenz sostenía que a escalas muy pequeñas, debido por ejemplo a la presencia de microorganismos en el agua o de una mariposa en la atmósfera, se crearían perturbacio-

nes que se propagarían posteriormente a las escalas más grandes. Estas perturbaciones proporcionarían una energía suficiente en las escalas muy pequeñas que derivaría de forma drástica en un comportamiento impredecible del flujo. Con ello, propone que ciertos sistemas deterministas con muchas escalas de movimiento son indistinguibles de sistemas indeterministas. Además, y esto es lo realmente destacable, defiende que en estos sistemas, a pesar de que se disminuya el ruido, es decir, el error inicial, el tiempo de predecibilidad no crece, a diferencia de lo que ocurre en un sistema caótico. Por tanto, estamos hablando de un sistema más que caótico.

De hecho, según se recoge en el trabajo de Palmer et al. “*The real butterfly effect*” [35], lo que Edward Lorenz entendía por “efecto mariposa” no se corresponde con la noción de sensibilidad a las condiciones iniciales de los sistemas caóticos que se tiene hoy en día. Más bien pretendía describir la existencia de un tiempo finito absoluto en sistemas de fluidos con muchas escalas de movimiento, independiente de las condiciones iniciales para tiempos largos, a partir del cual el sistema pierde su naturaleza determinística y se hace completamente impredecible. A diferencia de lo que ocurre con el caos determinista, este tiempo no puede alargarse reduciendo la incertidumbre de las condiciones iniciales. Es decir, se trata de una condición mucho más radical que la mera dependencia sensible a las condiciones iniciales.

El propio Lorenz en su trabajo de 1968 estimó los tiempos de predicción para diferentes escalas. A la escala típica en la que se predice el tiempo atmosférico, estimó que el tiempo de predecibilidad sería de un día. No obstante, con los sistemas sofisticados que se tienen actualmente, el tiempo se puede predecir hasta con una semana de antelación. Posiblemente esta predicción excesivamente pesimista de Lorenz, unida al hecho de que el análisis que llevó a cabo no era del todo riguroso, explica por qué el trabajo de 1968 no ha tenido tanta repercusión entre los científicos como sí lo ha hecho el de 1963. No obstante, Lorenz no se equivocaba del todo, pues la estocasticidad espontánea está presente y se ha puesto en evidencia en numerosas ocasiones.

Ejemplo de estocasticidad espontánea

Una manifestación de la estocasticidad espontánea lagrangiana es la difusión de Richardson. En 1926, el científico inglés Lewis Fry Richardson, estudiando el comportamiento de las partículas en flujos turbulentos, como columnas de humo, observó en sus

datos experimentales una manifestación de lo que hoy se conoce como estocasticidad espontánea. Lo que Richardson sugirió al estudiar las partículas en el flujo turbulento era que la distancia cuadrática media entre dos elementos del fluido crecía a razón de t^3 , y era independiente de la distancia de separación inicial, lo que se denomina **difusión de Richardson**. En 2013, Bitane et al. llevaron a cabo una simulación turbulenta en una caja periódica en la que ponían partículas en el flujo a diferentes distancias iniciales [36]. En la Figura 36 se muestran los resultados del estudio, donde se representa la distancia cuadrática media entre dos partículas en el flujo turbulento en función de su separación inicial, para dos números de Reynolds distintos.

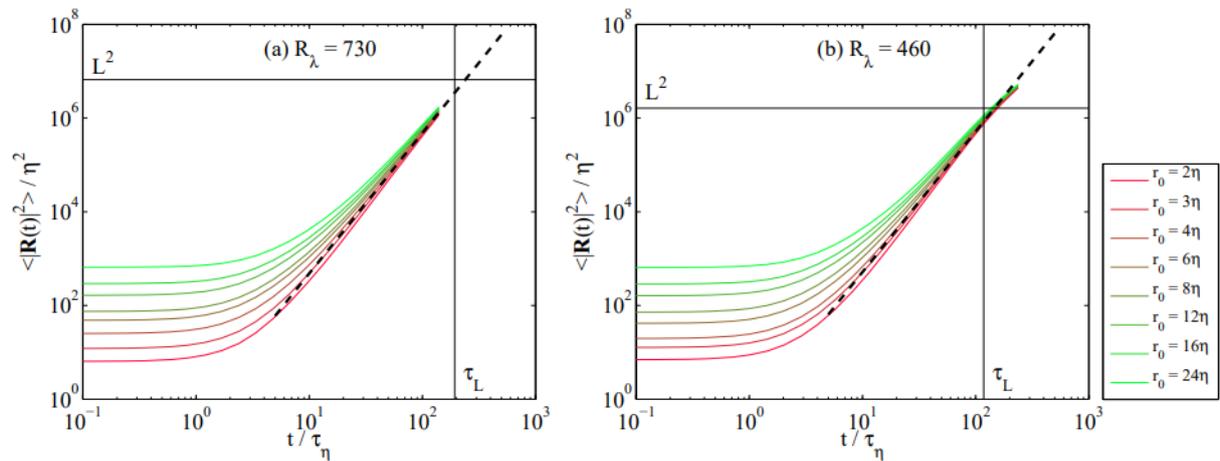


Figura 36: Imagen obtenida de [36]. Se representa la separación cuadrática media entre dos partículas en un flujo turbulento para dos números de Reynolds distintos. La línea discontinua representa el comportamiento predicho por Richardson $\sim t^3$. Los colores que van de verde a rojo representan el hecho de que la separación inicial entre dos partículas se hace más pequeña. La condición inicial se olvida en tiempos finitos y la separación acaba tendiendo a la curva t^3 . A medida que aumenta el número de Reynolds, la distancia entre partículas cuya separación inicial es más pequeña tiende más rápido a la curva t^3 . Por tanto, en el límite en que la viscosidad $\nu \rightarrow 0$, se espera que dos partículas que empiezan en el mismo punto se separen una distancia finita de forma instantánea.

En las dos gráficas se verifica el hecho de que, aunque se disminuya la separación inicial, esta acaba tendiendo a la misma curva $\sim t^3$ predicha por Richardson. Es decir, las partículas olvidan su separación inicial a tiempos finitos. En ambas gráficas se observa el mismo comportamiento, pero hay que tener en cuenta que las magnitudes representadas están adimensionalizadas por escalas que son cada vez más pequeñas a medida que crece el número de Reynolds (ver Anexo D; $\eta \propto \nu^{3/4}$, $\tau_\eta \propto \nu^{1/2}$, y $Re \propto 1/\nu$, de forma que cuanto mayor es Re , menor es η y menor es τ_η). Con ello, se verifica que a medida que aumenta Re (i.e, disminuye la viscosidad) la distancia entre partículas cuya separación inicial es más pequeña tiende más rápido a la curva t^3 , es decir, alcanzan antes una separación

finita independiente de la condición inicial. Por tanto, en el límite en que la viscosidad $\nu \rightarrow 0$, se espera que dos partículas que empiezan en el mismo punto...¡se separen una distancia finita de forma instantánea!

Hoy en día se entiende que este hecho es una manifestación de la estocasticidad espontánea, la cual aparece debido a la rotura de la unicidad de las soluciones de la EDO o EDP que describen el sistema determinista. Al regularizar el problema y hacer desaparecer el ruido que se ha introducido, la no unicidad de las soluciones persiste y las trayectorias deterministas tienen soluciones no únicas estocásticas. De esta forma, dos partículas se separan en tiempos finitos sin importar lo cerca que se encuentran inicialmente, incluso si resuelven el mismo problema de valores iniciales. Esto permite construir una medida de probabilidad bien definida sobre las trayectorias lagrangianas. A pesar de que se rompe el determinismo, con este procedimiento el flujo lagrangiano está bien definido, aunque en un sentido probabilístico.

Veamos un caso en el que no se verifica que la solución de la EDO sea única. Este es posiblemente el ejemplo más utilizado para describir este hecho. La idea se ha obtenido del trabajo de Eyink y Rivas, “*Quantum Spontaneous Stochasticity*” [37].

Ejemplo 4.1. Sea $r(t) = x_1(t) - x_2(t)$ la tasa de separación entre dos partículas en un flujo turbulento. Consideramos el siguiente problema de valores iniciales:

$$\frac{dr}{dt} = \delta u(r) = C(\epsilon r)^{1/3}, \quad r(t_0) = r_0 \quad (11)$$

donde $\delta u(r)$ es la velocidad relativa de las partículas a una separación r , C es una constante y ϵ es la velocidad promedio de disipación de energía por unidad de masa. En primer lugar, observamos que $\frac{\partial}{\partial r}(r^{1/3}) = (1/3)r^{-2/3}$ que no es continua en $r = 0$ y, por tanto, el Teorema 3.1 no nos garantiza la unicidad de las soluciones. Veamos cuál es la solución del problema. Observamos que se puede resolver por separación de variables:

$$\int_{r_0}^{r(t)} \frac{dr}{y^{1/3}} = C\epsilon^{1/3} \int_{t_0}^t dt$$

y se tiene

$$r_1(t) = \left(r_0^{2/3} + \frac{2}{3}C\epsilon^{1/3}(t - t_0) \right)^{3/2}$$

Esta ecuación verifica la ley de Richardson $r^2 \propto t^3$ cuando $(t - t_0) \gg \frac{3}{2C}\epsilon^{-1/3}r_0^{2/3}$, con lo

que es independiente de la separación inicial. Además, en este caso se da que

$$r_1(t) \rightarrow \left(\frac{2}{3} C \epsilon^{1/3} (t - t_0) \right)^{3/2}$$

a medida que $r_0 \rightarrow 0$. Así, dos partículas que empiecen en la misma posición inicial, es decir, con $r_0 = 0$, acabarán separadas una distancia finita en un tiempo finito. Estudiemos el caso en que $r_0 = 0$. En este caso, vemos que $r_2(t) = 0$ también es solución de 11. De hecho, lo que ocurre es que se pueden obtener infinitas soluciones combinando estas dos soluciones $r_1(t)$ y $r_2(t)$. Es decir, podemos estar en el cero un tiempo arbitrario t_1 y luego cambiar a la solución $r_1(t) = \left(\frac{2}{3} C \epsilon^{1/3} (t - t_1) \right)^{3/2}$. De este modo, las soluciones de 11, con $r_0 = 0$, son de la forma:

$$r(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t_0 \leq t \leq t_1 \\ \left(\frac{2}{3} C \epsilon^{1/3} (t - t_1) \right)^{3/2} & \text{si } t > t_1 \end{cases} \quad (12)$$

donde $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \infty$.

Esta situación se puede observar en la Figura 37, en la que se han representado algunas soluciones del problema 11. Se ve cómo la combinación de las dos soluciones mencionadas anteriormente da como resultado una solución del problema, y de esta forma se pueden construir infinitas soluciones del mismo.

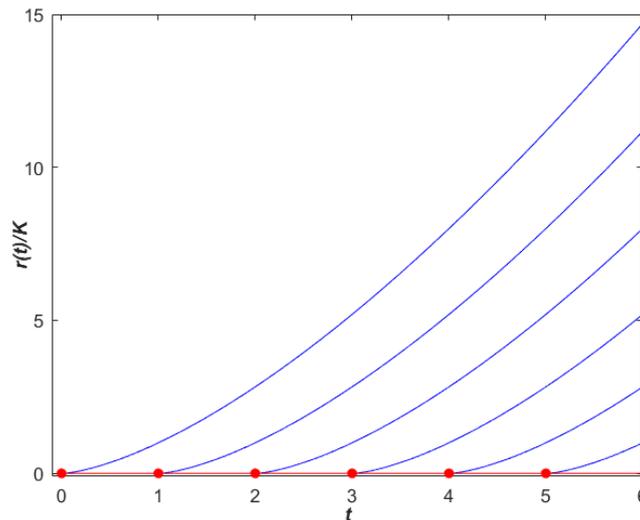


Figura 37: Múltiples soluciones del problema de valores iniciales descrito en 11 para $r_0 = 0$. Estas soluciones son la combinación de $r_2(t) = 0$ y $r_1(t) = \left(\frac{2}{3} C \epsilon^{1/3} (t - t_1) \right)^{3/2}$, es decir, la solución está en el cero hasta un tiempo arbitrario t_1 en el que pasa a comportarse como $r_1(t)$. Los puntos rojos representan los valores de t_1 en cada caso. La magnitud K que divide a $r(t)$ es igual a $\epsilon^{1/2} (2C/3)^{3/2}$. Se ha utilizado para poder observar el comportamiento de las soluciones del problema de valores iniciales 11 con $r_0 = 0$ sin necesidad de hallar C ni ϵ , pues no hace falta tenerlos en cuenta para lo que queremos ver.

Finalmente, para verificar que la función definida a trozos $r(t)$ descrita en 12 describe las infinitas soluciones del problema de valores iniciales 11 para $r_0 = 0$, vamos a probar que es una función derivable. En primer lugar, es trivial ver que la función es continua, ya que ambos trozos son funciones continuas, y ambos son igual a cero para $t = t_1$. Por otro lado, se tiene que la derivada de $r(t)$ es

$$r'(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t_0 \leq t \leq t_1 \\ (\frac{2}{3}C\epsilon^{1/3})^{3/2} \frac{3}{2}(t - t_1)^{1/2} & \text{si } t > t_1 \end{cases} \quad (13)$$

De nuevo, es trivial ver que ambas funciones son continuas, pues la segunda está definida para $t > t_1$ y por tanto la función $\sqrt{t - t_1}$ es continua. Además, ambas funciones son igual a cero en $t = t_1$. Por tanto, se trata de una función derivable $\forall t \in [0, \infty)$ y se concluye que $r(t)$ es solución del problema de valores iniciales 11 para $r_0 = 0$.

5. Conclusiones

En este trabajo se han puesto de manifiesto dos tipos de sistemas deterministas cuyo comportamiento a largo plazo no se puede predecir. Por un lado, los sistemas caóticos, como el sistema de Lorenz, son sistemas no lineales que presentan sensibilidad a las condiciones iniciales, de forma que los errores crecen exponencialmente en el tiempo y su evolución a largo plazo es impredecible. Por otro lado, los sistemas que presentan estocasticidad espontánea son sistemas descritos por ecuaciones cuya solución no es única, de forma que el comportamiento del sistema, a partir de cierto punto, solo se puede predecir en términos probabilísticos.

Aunque tanto el caos como la estocasticidad espontánea hacen que el comportamiento de un sistema sea impredecible, hemos visto que se trata de fenómenos distintos, hecho que ya intuía el propio Edward Lorenz en la década de los 60. Por una parte, un sistema caótico presenta una dependencia continua de las condiciones iniciales, de forma que el horizonte de predictibilidad se puede alargar arbitrariamente reduciendo el error inicial. Además, si dos réplicas del mismo sistema caótico están en el mismo estado inicial, lo estarán en cualquier instante de tiempo futuro. Por el contrario, si un sistema presenta estocasticidad espontánea, este no depende de las condiciones iniciales de forma continua y existe un tiempo absoluto a partir del cual no se puede predecir el comportamiento del sistema, el cual no se puede ampliar reduciendo el error inicial. De hecho, en este caso, dos copias idénticas del mismo sistema pueden acabar en estados futuros diferentes. Es por ello que se trata de un fenómeno aún más impredecible que el caos. No obstante, en este último caso, a pesar de que no es posible predecir el estado futuro del sistema con total exactitud, sí se puede predecir su probabilidad.

Actualmente, la Teoría del Caos está presente en numerosos campos de la ciencia, como pueden ser la física, la medicina, la biología, la psicología, la economía o la meteorología y, en general, en cualquier ámbito en el que se observen sistemas cuyo comportamiento es aparentemente caótico e impredecible. Asimismo, la estocasticidad espontánea, a pesar de ser un fenómeno del que hoy en día no se tiene, ni mucho menos, pleno conocimiento, es de gran relevancia en el estudio de inestabilidades en Mecánica Clásica de Fluidos, como la inestabilidad de Kelvin-Helmoltz o los flujos turbulentos, y puede ser de utilidad para explicar fenómenos como la reconexión magnética o para modelar y predecir la dispersión de contaminantes en los océanos y en la atmósfera. Por tanto, de lo que sí podemos estar

completamente seguros es de que el desarrollo de la Teoría del Caos, así como el estudio de la noción de estocasticidad espontánea, nos brindan la posibilidad de seguir ampliando nuestro conocimiento pues nos proporciona, como apuntamos al inicio del trabajo, “nuevos ojos” con los que seguir investigando.

Referencias

- [1] C. OESTREICHER, *A history of chaos theory*, PhD. Dialogues Clin Neurosci. 9(3): p.279–289. (2007)
- [2] J. BARROW-GREEN, *Oscar II's Prize Competition and the Error in Poincaré's Memoir on the Three Body Problem*. Archive for History of Exact Sciences. Vol. 48, No. 2. p.107-131 (1994)
- [3] C. M. MADRID CASADO, *Historia de la teoría del caos contada para escépticos*. Encuentros multidisciplinares. ISSN-e 1139-9325, Vol. 12, N^o 34. p.16-31 (2010)
- [4] H. POINCARÉ, *Science and Méthod*. T. Nelson and Sons. p.68. (1914)
- [5] G. D. BIRKHOFF, *An extension of Poincaré's last geometric theorem*. Acta Math. 47. p.297-311 (1926).
- [6] J. GLEICK, *Chaos: Making a New Science*. Viking Penguin Inc. (1987)
- [7] F. BALIBREA GALLEGO, *Caos y atractores extraños. Dos problemas no lineales en matemáticas*. Gaceta de la Real Sociedad Matematica Española, Vol. 2, N^o 1. p.99-118 (1999)
- [8] R. L. DEVANEY, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Addison-Wesley. 2nd ed. (1989)
- [9] J. BANKS, J. BROOKS, G. CAIRNS, G. DAVIS, P. STACEY, *On Devaney's Definition of Chaos*. The American Mathematical Monthly 99(4). p.332-334 (1992)
- [10] V. I. OSELEDETS, *Multiplicative ergodic theorem: Characteristic Lyapunov exponents of dynamical systems*, Trudy MMO, 19, p.179-210 (1968)
- [11] J. P. ECKMANN, D. RUELLE, *Ergodic theory of chaos and strange attractors*. Reviews of Modern Physics, Vol. 57, No. 3. Part I. p.622-625 (1985)
- [12] S. H. STROGATZ, *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, CRC Press, 2nd edition, p.198. (2015)
- [13] N. KUMAR, *Deterministic chaos*. Universities Press (1996)

- [14] D. KARTOFEEV, *Lecture 8: Quasi-periodicity, 3-D and higher order systems, 3-D limit-cycle, introduction to chaos, chaotic water wheel, the Lorenz attractor, coursework requirements*. Tallinn University of Technology. (2023)
- [15] C. GREBOGI, E. OTT, S. PELIKAN, J.A. YORKE, *Strange attractors that are not chaotic*, Physica D 13, p.261–268 (1984)
- [16] M.F. DANCA, N. KUZNETSOV, *Hidden Strange Nonchaotic Attractors*. Mathematics, 9, 652. (2021)
- [17] B. B. MANDELBROT, *The Fractal Geometry of Nature*. New York, Freeman. (1983)
- [18] Y. A. KUZNETSOV, *Andronov-Hopf bifurcation*. Scholarpedia, 1(10):1858. (2006)
- [19] E. N. LORENZ, *Deterministic Nonperiodic Flow*. Journal of Atmospheric Sciences, Vol. 20, Issue 2, p.130-148 (1963)
- [20] D. C. JONES, *Stability analysis of the chaotic Lorenz system with a state-feedback controller*. (2009) DOI: 10.31237/osf.io/8469g
- [21] W. BAULDRY, M. J. BOSSE, S. OTEY, *Visualizing Complex Roots*. The Mathematics Enthusiast. Vol. 15, No. 3, Article 9. (2018)
- [22] K. A. ROBBINS, *Periodic Solutions and Bifurcation Structure at High R in the Lorenz Model*. SIAM Journal on Applied Mathematics, Vol. 36, No. 3, p.457-472 (1979)
- [23] W. TUCKER, *A rigorous ODE Solver and Smale's 14th problem*. Foundations of Computational Mathematics 2(1), p.53-117 (2002)
- [24] P. GRASSBERGER, I. PROCACCIA, *Measuring the strangeness of strange attractors*. Physica D: Nonlinear Phenomena, 9(1-2). p.189-208 (1983)
- [25] A. A. MAILYBAEV, A. RAIBEKAS, *Spontaneously stochastic Arnold's cat*. Arnold Mathematical Journal. Vol. 9. p.339–357 (2023)
- [26] N. VALADE, S. THALABARD, J. BEC, *Anomalous Dissipation and Spontaneous Stochasticity in Deterministic Surface Quasi-Geostrophic Flow*. (2022) DOI: arxiv-2210.12366

- [27] A. A. MAILYBAEV, A. RAIBEKAS, *Spontaneous stochasticity and renormalization group in discrete multi-scale dynamics*. Communications in Mathematical Physics, Vol. 401, p.2643–2671 (2023)
- [28] T. D. RIVAS, A. A. MAILYBAEV, A. RAIBEKAS, *Statistical determinism in non-Lipschitz dynamical systems*. (2021) DOI: arXiv:2004.03075
- [29] G. L. EYINK, D. BANDAK, *Renormalization group approach to spontaneous stochasticity*. Physical Review Research, 2(4):043161. (2020)
- [30] S. THALABARD, J. BEC, A. A. MAILYBAEV, *From the butterfly effect to spontaneous stochasticity in singular shear flows*. Communications Physics volume 3, Article number: 122 (2020)
- [31] A. A. MAILYBAEV, *Spontaneous stochasticity of velocity in turbulence models*. (2015) DOI: arXiv:1504.00575
- [32] D. BERNARD, K. GAWEDZKI, A. KUPIAINEN, *Slow Modes in Passive Advection*. Journal of Statistical Physics, 90. p.519–569 (1998)
- [33] G. FALKOVICH, K. GAWEDZKI, M. VERGASSOLA, *Particles and fields in fluid turbulence*. Rev. Mod. Phys. 73, 913 (2001)
- [34] E. N. LORENZ, *The predictability of a flow which possesses many scales of motion*. Tellus, 3. p.289-307 (1968)
- [35] T. N. PALMER, A DÖRING, G. SEREGIN, *The real butterfly effect*. Nonlinearity, 27. R123 (2014)
- [36] R. BITANE, H. HOMANN, J. BEC, *Geometry and violent events in turbulent pair dispersion*. Journal of Turbulence 14(2). p.23-45 (2013)
- [37] G. EYINK, T. D. DRIVAS, *Quantum Spontaneous Stochasticity*. arXiv: Quantum Physics (2015)

A. Anexo I

Funciones de Lyapunov

Las funciones de Lyapunov se emplean a menudo para estudiar la estabilidad de un punto crítico. Una función de Lyapunov se define de la siguiente manera.

Definición A.1. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $\dot{x} = f(x)$. Sea x^* un punto tal que $f(x^*) = 0$. Se dice que $V : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de Lyapunov de f centrada en $x^* \in U$ si verifica

- $V(x) > 0 \forall x \in U \setminus \{x^*\}$
- $V(x^*) = 0$
- $\dot{V}(x) = \nabla V(x) \cdot f(x) \leq 0 \forall x \in U$

En este trabajo se ha utilizado una función de Lyapunov para probar que el punto $(0,0,0)$ del sistema de Lorenz es globalmente asintóticamente estable. Esto se debe a que el teorema de estabilidad de Lyapunov asegura que un punto x^* es globalmente asintóticamente estable si existe una función de Lyapunov para f que verifique la definición anterior y

- $\|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x) \rightarrow \infty$
- $U = \mathbb{R}^n$
- $\dot{V}(x) < 0$ estrictamente $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{x^*\}$

B. Anexo II

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales autónomas

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, z) \\ \dot{y} = g(x, y, z) \\ \dot{z} = h(x, y, z) \end{cases} \quad (14)$$

donde $x = x(t)$, $y = y(t)$ y $z = z(t)$ son funciones que dependen del tiempo. Sea $\bar{x} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ un punto de equilibrio del sistema, es decir, un punto que verifica $f(\bar{x}) = g(\bar{x}) = h(\bar{x}) = 0$

$h(\bar{\mathbf{x}}) = 0$. Para estudiar la estabilidad alrededor de un punto de equilibrio se ha linealizado el sistema alrededor de dicho punto. El motivo por el que este procedimiento para analizar la estabilidad es válido se debe al siguiente teorema, que garantiza que, bajo ciertas condiciones, las soluciones del sistema no lineal alrededor de un punto de equilibrio se comportan de la misma manera que las soluciones obtenidas a partir de la linealización de dicho sistema alrededor del punto.

Teorema B.1. (Hartman-Grobman) Sea $\bar{\mathbf{x}}$ un punto de equilibrio del sistema 14. Sea $DF(\bar{\mathbf{x}})$ la matriz jacobiana del sistema evaluada en $\bar{\mathbf{x}}$, de tal forma que el punto $\bar{\mathbf{x}}$ es hiperbólico, es decir, ningún autovalor de $DF(\bar{\mathbf{x}})$ tiene parte real igual a cero. Entonces, existe un entorno V de $\bar{\mathbf{x}}$ de tal forma que las trayectorias del sistema no lineal en dicho entorno son homeomorfas a las trayectorias del sistema linealizado.

Una vez justificado por qué se linealiza para estudiar la estabilidad, vamos a ver cómo se ha llevado a cabo este proceso de linealización y qué conclusiones se obtienen a partir del mismo. Partimos del sistema descrito en 14. Sea $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ un punto de equilibrio del sistema. Usando el teorema de Taylor, podemos expandir el sistema alrededor de $\bar{\mathbf{x}}$, manteniendo únicamente los términos de primer orden. De esta forma, se tiene lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{pmatrix}_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}} \cdot \begin{pmatrix} x - \bar{x} \\ y - \bar{y} \\ z - \bar{z} \end{pmatrix}$$

Esto también se puede escribir como

$$\dot{\mathbf{x}} = DF(\bar{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \quad (15)$$

Las soluciones que se buscan son de la forma $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{v}e^{\lambda t}$, donde λ es una constante. Si sustituimos esto en la ecuación anterior y derivamos \mathbf{x} en función del tiempo se tiene la siguiente igualdad:

$$\lambda \mathbf{v}e^{\lambda t} = DF(\bar{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{v}e^{\lambda t}$$

o lo que es lo mismo

$$DF(\bar{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{v}e^{\lambda t} - \lambda \mathbf{v}e^{\lambda t} = (DF(\bar{\mathbf{x}}) - \lambda I)\mathbf{v}e^{\lambda t} = 0$$

Como $e^{\lambda t} \neq 0$ para cualquier t finito, la igualdad anterior se puede reducir a $(DF(\bar{\mathbf{x}}) - \lambda I)\mathbf{v} = 0$ y, por tanto, el sistema tendrá una solución no trivial si se verifica que $\det(DF(\bar{\mathbf{x}}) - \lambda I) = 0$. Es por esta razón que buscaremos las raíces del polinomio característico del jacobiano que define el sistema, que serán los autovalores λ_i de la matriz. Además, existirán autovectores \mathbf{v}_i asociados a cada autovalor. De esta forma, se tiene que la solución del sistema linealizado 15 es una combinación de los autovectores que tiene la siguiente forma:

$$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + c_1\mathbf{v}_1e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{v}_2e^{\lambda_2 t} + c_3\mathbf{v}_3e^{\lambda_3 t}$$

siendo c_1, c_2, c_3 constantes. A partir de esta ecuación, podemos ver que si todos los autovalores son reales y negativos, entonces el punto de equilibrio es estable. Si hay alguno con parte real positiva, entonces la solución divergirá en la dirección del autovector asociado y el punto es inestable. Y si alguno tiene parte imaginaria distinta de cero, la solución oscilará en las direcciones asociadas, aunque puede ser que el punto sea estable si todos los autovalores tienen parte real negativa.

C. Anexo III

Para obtener el valor de ρ para el cual el $p(\lambda)$ descrito en Ec.(10) pasa de tener tres raíces reales a una raíz real y dos complejas, se ha calculado el momento en el que el mínimo de la función tiene coordenada $y = 0$. Hay que buscar entonces el valor de ρ tal que

$$p'(\lambda) = 3\lambda^2 + 2\lambda(\beta + \sigma + 1) + \beta(\sigma + \rho) = 0$$

Si resolvemos esta ecuación de segundo grado, sacamos dos valores de λ . Uno corresponderá al máximo y otro al mínimo que se observan en la Figura 16. La raíz de mayor valor corresponde al mínimo, y por tanto, el mínimo está en

$$\lambda = \frac{-(11 + 8/3) + \sqrt{(11 + 8/3)^2 - 8(10 + \rho)}}{3}$$

Lo que buscamos es entonces que, para este valor de λ , $p(\lambda) = 0$, ya que queremos que el mínimo tenga coordenada $y = 0$. Si sustituimos en Ec.(10) esta expresión de λ e igualamos a cero, podemos despejar el valor de ρ . Con la ayuda del programa Wolfram Alpha, se ha obtenido que ese valor es $\rho \approx 1.3456$.

D. Anexo IV

Turbulencia

Un fluido se mueve de forma turbulenta cuando el movimiento de las partículas es desordenado, irregular, impredecible. En un flujo turbulento se asume la aparición de vórtices de distintos tamaños que interactúan entre sí. Estos tamaños se conocen como “escalas de longitud”. Los vórtices de mayor tamaño interactúan con el flujo principal y extraen energía de él. Este rango de escalas se llama rango energético. Estos vórtices son inestables y tienden a dividirse en vórtices más pequeños que a su vez se siguen dividiendo. La energía cinética es transferida cada vez a escalas más pequeñas, lo que se conoce como cascada de energía, hasta que se disipa por la viscosidad a escalas muy pequeñas. El rango en el que la energía cinética se transfiere se conoce como rango inercial, mientras que el rango a partir del cual la energía se disipa es el rango disipativo. Se conoce como escala integral, L , a la escala de los vórtices más grandes, que generalmente viene definida por las condiciones de frontera. Por otro lado, la escala más pequeña a la que pueden existir remolinos se conoce como escala de Kolmogorov, η . A esta escala, las fuerzas inerciales y viscosas se hacen iguales y a partir de ahí la energía cinética es disipada en forma de energía interna debido a la viscosidad. Además de escalas de longitud, cada vórtice también tiene su escala de tiempo, que es el tiempo que tarda el remolino en dar una vuelta. La escala de longitud y de tiempo de Kolmogorov se definen respectivamente como:

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon}\right)^{1/4} \quad \tau_\eta = \left(\frac{\nu}{\epsilon}\right)^{1/2} \quad (16)$$

donde ν es la viscosidad cinemática del fluido y ϵ es la velocidad promedio de disipación de energía por unidad de masa.