



**Facultad
de
Ciencias**

**Geometría convexa y equilibrio en
subastas**
(Convex geometry and equilibrium in auctions)

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autora: Paula Vieira Guerra
Director: Francisco Santos Leal
Septiembre - 2023

Índice general

1. Introducción	1
2. Introducción a la teoría de politopos	4
2.1. Politopos	4
2.2. Caras de politopos	8
2.3. Dualidad de politopos	12
3. Otras nociones sobre politopos	18
3.1. Subdivisiones poliédricas	18
3.2. Suma de Minkowski y subdivisiones mixtas	24
3.2.1. Suma de Minkowski	24
3.2.2. Subdivisiones mixtas	26
3.3. Unimodularidad y descomposición entera	31
4. Subastas, precios y valoraciones	36
4.1. Paquetes, valoraciones y precios	36
4.2. Conjunto de demanda. Equilibrio competitivo y equilibrio de precios	37
4.3. Valoración y demanda agregada	38
5. Equilibrio y subdivisiones regulares	42
5.1. Conjuntos de demanda como celdas de una subdivisión regular . . .	42
5.2. El Teorema de Unimodularidad	47

Agradecimientos

Primero de todo me gustaría dar las gracias a la Universidad de Cantabria, tanto a sus profesores como a todas las personas involucradas en la universidad, por haberme dado la oportunidad de estudiar lo que quería y por haberme transmitido tantos conocimientos y tanta pasión por las matemáticas. Gracias también por todas las experiencias, tanto buenas como malas, porque de algo se tiene que aprender y por todas las personas que he podido conocer en este trayecto tan importante de mi vida.

Gracias en especial a mi director del TFG, Paco, por haber accedido a dirigirme este trabajo y por haberme ayudado a escoger un tema acorde con mis gustos. Gracias por tu paciencia en todas las horas de revisión, por tu disponibilidad para ello y por todos los conocimientos que he adquirido.

Gracias a mi familia, en especial a mis padres quienes, sin saber casi nada acerca de las matemáticas, han aguantado 4 años escuchándome hablar de ellas. Gracias por haberme dejado estudiar lo que quería aún teniéndome que ir tan lejos de casa y gracias por el apoyo incondicional en todas las decisiones que he ido tomando a lo largo de la carrera. Gracias a mi hermano, que aunque todavía es muy pequeño como para entender algo sobre esta memoria espero que en un futuro pueda leerla y entender la mayoría de cosas.

Gracias a mis amigos de Zamora, que aunque han sido muy complicados estos 4 años sin ellos, siempre les sentía cerca. Gracias por preguntarme mil veces acerca del TFG sin saber aún de qué lo estaba haciendo y gracias por escucharme hablar de la carrera aún sin entender nada de lo que decía. Y, sobretodo, gracias por estar siempre ahí.

Gracias a todas las personas que he conocido en la carrera, especialmente a mi grupo de juegos y risas, por ayudarme a integrarme desde los primeros días de la universidad y por ser el mejor grupo de estudio que conozco, porque estoy segura que sin ellos no hubiese acabado la carrera en 4 años. Gracias por el apoyo tanto dentro como fuera de la universidad, espero poder seguir manteniendo esta amistad durante años, por muy distintas que sean las vidas que estemos viviendo. Gracias por los ratos en la cafetería, ya sea repasando para un examen o jugando a las cartas. Gracias por haberos convertido en mi segunda familia.

Resumen

En teoría económica una subasta es un proceso en el que el subastador ofrece un cierto número de “paquetes” y varios agentes establecen sus ofertas e intereses sobre los mismos. El subastador debe entonces buscar un “equilibrio competitivo” en el que se consiga satisfacer de la mejor manera posible los intereses de todos los agentes.

Una de las maneras de abordar este problema pasa por técnicas de Combinatoria Geométrica y Geometría Convexa: se trata de buscar una triangulación del “espacio de demanda” con ciertas propiedades.

En este trabajo se hace primero una introducción a la teoría de politopos, triangulaciones y subdivisiones mixtas, para luego explicar su relación con el problema de subastas y demostrar el Teorema de Unimodularidad del Equilibrio de Walras, que garantiza la existencia de solución del problema siempre que las funciones de valoración dadas por los agentes cumplan ciertas propiedades de unimodularidad.

Palabras clave: *politopo, suma de Minkowski, subdivisión poliédrica, triangulación, subasta, equilibrio de Walras.*

Abstract

In economic theory, an auction is a process in which an auctioneer presents a set of “packages”, and various agents submit their bids and interests for these packages. The auctioneer’s goal is to find a “competitive equilibrium” that maximizes the satisfaction of all participating agents.

One way to approach this problem involves techniques from Geometric Combinatorics and Convex Geometry. Specifically, it entails finding a triangulation of the “demand space” with specific properties.

This work first provides an introduction to the theory of polytopes, triangulations and mixed subdivisions. It then explains their relationship with the auction problem and proves the Unimodularity Theorem of Walras’ Equilibrium, which guarantees the existence of a solution to the problem as long as the valuation functions provided by the agents satisfy certain unimodularity properties.

Key words: *polytope, Minkowski sum, polyhedral subdivision, triangulation, auction, Walras’ equilibrium.*

Capítulo 1

Introducción

Este trabajo tiene dos partes. La primera estudia algunos conceptos y resultados de geometría discreta: politopos y sus subdivisiones poliédricas, sumas de Minkowski y sus subdivisiones mixtas. La segunda introduce un modelo de subastas en las que un subastador decide la mejor distribución de ciertos productos entre varios agentes y muestra cómo algunas propiedades del modelo, sobre todo la existencia de “equilibrio”, se pueden estudiar a través de subdivisiones.

Yendo más en detalle, la estructura de la memoria es como sigue.

El Capítulo 2 es una introducción a la teoría de politopos. Los politopos son los principales objetos de estudio dentro de la geometría discreta y convexa. Se pueden definir como la generalización a cualquier dimensión de los polígonos (bidimensionales) o los poliedros (tridimensionales). Aunque suene algo extraño es algo que todos conocemos ya que los politopos de dimensión 0, 1, 2 o 3 son lo que todos llamamos punto, segmento, polígono o poliedro, pero que no sabríamos reconocer por el nombre de politopo. La definición formal es que un politopo es la envolvente convexa de un conjunto finito de puntos.

Los politopos son objetos muy combinatorios, que se pueden entender como la combinación de politopos de diferentes dimensiones a los que llamamos caras. La estructura de caras de los politopos se estudian en la Sección 2.2. Mencionemos aquí que, siendo un politopo P , las caras más importantes a la hora de trabajar son las de dimensiones “muy pequeñas” o “muy grandes”:

- Las *vértices* son las caras de dimensión 0 del politopo P .
- Las *aristas* son las caras de dimensión 1 de P .
- Las *facetas* son las caras de dimensión $\dim(P) - 1$. En el caso del polígono (dimensión 2) y del poliedro (dimensión 3) las facetas son lo que llamamos aristas y caras, respectivamente.

Como ejemplo de politopo se puede dar el más básico, llamado *símplice*. El *símplice*, definido de manera poco formal, es el análogo en n dimensiones de un triángulo y de un tetraedro, de forma que el 2-*simplex* es el propio triángulo y el 3-*simplex* es el tetraedro. Es el politopo más sencillo posible (de ahí su nombre)

porque tiene solo $n + 1$ vértices, que es el mínimo número de puntos necesario para que su envolvente convexa tenga dimensión n . De hecho, podemos definir símplice como envolvente convexa de cualquier conjunto de puntos afínmente independiente.

Este Capítulo 2 termina definiendo y estudiando el concepto de politopos *duales*. Intuitivamente el dual de un politopo es otro politopo cuyas facetas se corresponden con los vértices del primero y viceversa, como ocurre con el cubo y el octaedro o con el icosaedro y el dodecaedro. Pero la definición precisa necesita que el politopo tenga una propiedad especial: que contenga al origen de coordenadas en su interior.

El Capítulo 3 continua estudiando aspectos de la teoría de politopos, pero se centra en cosas más específicas, que se incluyen porque serán las que necesitaremos para la segunda parte. En concreto se estudian tres aspectos:

- La Sección 3.1 estudia las subdivisiones poliédricas, o sea, las maneras de dividir un politopo en politopos más pequeños. En particular nos interesarán las subdivisiones *regulares* que se obtienen levantando los vértices del politopo dado a una dimensión más y tomando la envolvente convexa de los puntos levantados.
- La Sección 3.2 estudia la suma de Minkowski de dos o más politopos y sus subdivisiones mixtas, que son las subdivisiones “compatibles” con la suma de Minkowski, es decir, subdivisiones cuyas celdas son a su vez sumas de Minkowski de celdas de los politopos individuales.
- La Sección 3.3 estudia la unimodularidad de los conjuntos de vectores y su relación con la propiedad de descomposición entera de politopos. En ella se enunciarán y demostrarán varios teoremas importantes de cara a la segunda parte.

En la segunda parte del trabajo (Capítulos 4 y 5) describimos un modelo de subastas basado en las siguientes ideas: en la subasta se tiene un conjunto de objetos a distribuir entre varios agentes. Antes de comenzar la subasta los agentes envían al subastador la valoración que dan a cada “paquete”, es decir, a cada posible conjunto de objetos. Con esta información el subastador decide el precio de cada objeto y la asignación de paquetes a los agentes, con el objetivo de satisfacer las condiciones de demanda de cada uno. Si lo consigue, decimos que se ha “alcanzado el equilibrio”.

El modelo en sí se describe en el Capítulo 4.

En el siguiente y último capítulo se muestran algunas relaciones de este modelo con la teoría de subdivisiones que se introdujo en la primera parte. En concreto:

- En la Sección 5.1 se muestra que las valoraciones de cada agente producen una subdivisión regular de un cierto politopo (el politopo de posibles paquetes) y que el conjunto de demanda de ese agente es una celda de esa subdivisión. El conjunto de demanda depende de los precios que establezca el subastador, y dependiendo de los precios nos saldrá una celda u otra.
- Del mismo modo, las valoraciones agregadas de todos los agentes producen una subdivisión mixta de la suma de Minkowski de los politopos individuales, y la “demanda agregada” es una celda de dicha subdivisión.

- Con estas ideas se llega al resultado principal de la memoria, el Teorema de Unimodularidad (Teorema 5.8) que dice que si los vectores arista de todas las subdivisiones regulares de los agentes forman un conjunto unimodular, entonces está garantizada la existencia de equilibrio.

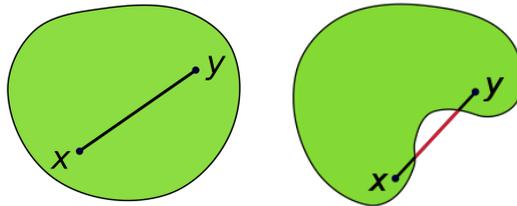
Capítulo 2

Introducción a la teoría de politopos

La mayoría de definiciones, ejemplos y teoremas que se muestran en esta Sección se han extraído de *Lectures in Geometric Combinatorics* de Rekha R. Thomas [6].

2.1. Politopos

Definición 2.1. Un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^d$ es **convexo** si para cualquier par de puntos p y q en S , el segmento que los une, $\{\lambda p + (1 - \lambda)q : 0 \leq \lambda \leq 1\}$, está contenido en S .



(a) Conjunto convexo. (b) Conjunto no convexo.

Figura 2.1: ([9])

Definición 2.2. Un **hiperplano** en \mathbb{R}^d es un conjunto

$$H := \{x \in \mathbb{R}^d : a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_dx_d = b\}$$

donde $a_1, \dots, a_d, b \in \mathbb{R}$. Dicho de una forma más simple, un hiperplano es un “plano” cuya dimensión es una menos de donde se encuentra.

Ejemplo 2.3. Un hiperplano en \mathbb{R}^2 es una línea. En \mathbb{R}^3 es un plano.

Definición 2.4. Dados $p_1, \dots, p_t \in \mathbb{R}^d$, llamamos **combinación convexa** a cualquier punto de la forma $\sum_{i=1}^t \lambda_i p_i$ donde $\lambda_i \geq 0$, para todo $i = 1, \dots, t$ y $\sum_{i=1}^t \lambda_i = 1$.

Se denomina **envolvente convexa** al conjunto de todas las combinaciones convexas de p_1, \dots, p_t . Se denota como $\text{conv}(\{p_1, \dots, p_t\})$.

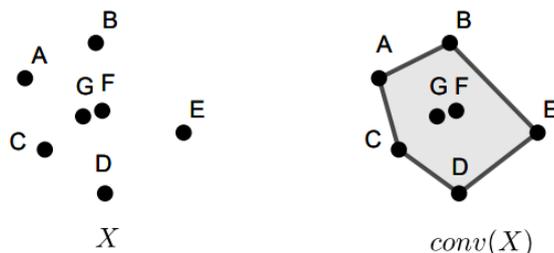


Figura 2.2: Envolverte convexa.

Proposición 2.5. Un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^d$ es convexo si y sólo si cualquier combinación convexa de puntos de S está en S .

Demostración. Se demuestra por doble implicación:

\Leftarrow) La definición de convexo se puede reescribir como “ S es convexo si para todo $p, q \in S$ las combinaciones convexas de p y q están en S ”. Por tanto, esta implicación es directa de la definición.

\Rightarrow) Se tiene que demostrar que si las combinaciones convexas de dos puntos de S están en S entonces las de t puntos también, para todo $t \in \mathbb{N}$. Se demuestra por inducción sobre t .

El caso base, $t = 2$, es la hipótesis. Supuesto para t puntos se demuestra para $t + 1$.

Para ello, suponemos que se tiene una combinación convexa:

$$p = \lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_t s_t + \lambda_{t+1} s_{t+1},$$

con $\lambda_i \geq 0 \forall i$, $\sum \lambda_i = 1$, $s_1, \dots, s_{t+1} \in S$.

Llamamos

$$\mu = \sum_{i=1}^t \lambda_i = 1 - \lambda_{t+1}, \quad q = \sum_{i=1}^t \frac{\lambda_i}{\mu} s_i,$$

entonces q está escrito como combinación convexa de s_1, \dots, s_t y, por hipótesis de inducción, $q \in S$.

Para comprobar que q está escrito como combinación convexa de s_1, \dots, s_t hace falta ver que $\sum_{i=1}^t \frac{\lambda_i}{\mu} = 1$ con $\frac{\lambda_i}{\mu} \geq 0 \forall i$, ya que por suposición se tiene que $s_i \in S$.

Como $\mu = \sum_{i=1}^t \lambda_i$, basta con sustituir μ para obtener $\sum_{i=1}^t \frac{\lambda_i}{\mu} = 1$.

La otra condición también es directa ya que $\mu = \sum_{i=1}^t \lambda_i$ y, por hipótesis de inducción, se tiene que $\lambda_i \geq 0$, entonces $\mu \geq 0$.

Por otro lado,

$$p = \mu q + \lambda_{t+1} s_{t+1},$$

por lo que, por definición de conjunto convexo, se tiene que $p \in S$.

□

Corolario 2.6. *Para todo S , $\text{conv}(S)$ es convexo. Si, además, S es convexo, entonces $\text{conv}(S) = S$.*

Demostración. $\text{conv}(S)$ es convexo por la Proposición anterior.

Si S es un convexo, entonces $S = \text{conv}(S)$ ya que, por definición de conjunto convexo, cualquier combinación convexa de puntos de S está en S y como $\text{conv}(S)$ es el conjunto de todas las combinaciones convexas, $\text{conv}(S) \subseteq S$. El otro contenido es directo de la definición de envolvente convexa.

□

Lema 2.7. *Sean $S, P \in \mathbb{R}^d$,*

$$S \subseteq P \implies \text{conv}(S) \subseteq \text{conv}(P)$$

Demostración. Sea $x \in \text{conv}(S)$, se quiere probar que $x \in \text{conv}(P)$. Para ello se va intentar a escribir x como $x = \sum_{i=1}^t \lambda_i p_i$, con $p_1, \dots, p_t \in P$.

Por definición de envolvente convexa, x se puede escribir como $x = \sum_{i=1}^q \lambda_i s_i$, con $s_1, \dots, s_q \in S$, $\lambda_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^q \lambda_i = 1$.

Como $s_1, \dots, s_q \in S \subseteq P$ (por hipótesis), x está ya escrito como $x = \sum_{i=1}^q \lambda_i s_i$, con $s_1, \dots, s_q \in P$, $\lambda_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^q \lambda_i = 1$. □

Lema 2.8. *Toda intersección de conjuntos convexas es un conjunto convexo.*

Por tanto, dado un $S \in \mathbb{R}^d$, $\text{conv}(S)$ es el conjunto convexo más pequeño que contiene a S .

Demostración. Sean $\{S_i\}_{i \in I}$ una familia de conjuntos convexas y sea $S = \bigcap_{i \in I} S_i$. Se quiere ver que S es convexo. O sea, dados $p, q \in S$ y dado un $\lambda \in [0, 1]$ se quiere ver que $\lambda p + (1 - \lambda)q$ está en S .

Como $p, q \in S$, se tiene que $p, q \in S_i$ para todo i . Como cada S_i es convexo, se tiene que $\lambda p + (1 - \lambda)q \in S_i$ para todo i y, por tanto, $\lambda p + (1 - \lambda)q \in S$.

Para ver que $\text{conv}(S)$ es el conjunto más pequeño que contiene a S , primero se tiene que probar que $S \subseteq \text{conv}(S)$. Como $\text{conv}(S)$ son todas las combinaciones convexas de los puntos de S , en sí también estarán contenidos los propios puntos. Por ello, $S \subseteq \text{conv}(S)$.

Falta probar que dicho conjunto es el más pequeño. Para ello, sea K un conjunto convexo que contiene a S , por el Lema 2.7 se tiene que $S \subseteq K \implies \text{conv}(S) \subseteq \text{conv}(K) = K$ (por ser K convexo) y, por lo tanto, se tiene que $\text{conv}(S) \subseteq K$. □

Lema 2.9. *Todo convexo que contiene a S , contiene a $\text{conv}(S)$.*

Demostración. Sea P un convexo que contiene a S , es decir, $S \subseteq P$, por el Lema 2.7 se tiene que $\text{conv}(S) \subseteq \text{conv}(P)$ y, como P es convexo, por el Corolario 2.6, se tiene que $\text{conv}(P) = P$, por lo que $\text{conv}(S) \subseteq P$. □

Definición 2.10. Un **politopo (convexo)** es la envolvente convexa de un conjunto finito de puntos en \mathbb{R}^d .

Ejemplo 2.11. El n -ágono regular, que es un polígono regular de n lados iguales, es a su vez un politopo en \mathbb{R}^2 . Los politopos más simples son los llamados **símplices**.

Definición 2.12. Un **símplice o símplex** es la envolvente convexa de un conjunto de puntos afínmente independiente. Dicho de una forma más simple, es el análogo en n dimensiones de un triángulo.

Ejemplo 2.13. En la Figura 2.3 se pueden ver los cuatro primeros n -símplices.

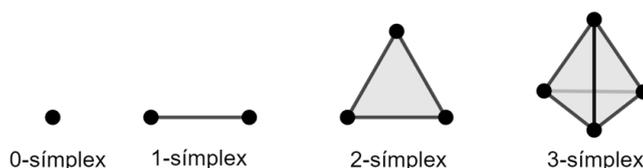


Figura 2.3: Símplices.

Definición 2.14. Un **poliedro** en \mathbb{R}^d es cualquier conjunto obtenido como la intersección de un número finito de semiespacios en \mathbb{R}^d . Matemáticamente, se representa como:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^d : Ax \leq b\}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$ y $b \in \mathbb{R}^m$.

Ejemplo 2.15. Los poliedros más conocidos son los sólidos platónicos: el tetraedro (4 caras), el hexaedro o cubo (6 caras), el octaedro (8 caras), el dodecaedro (12 caras) y el icosaedro (20 caras). Dichos poliedros son a su vez politopos en \mathbb{R}^3 .



Figura 2.4: Sólidos platónicos. ([9])

Teorema 2.16 (Teorema fundamental de la teoría de politopos). *Todo politopo es un poliedro acotado. Todo poliedro acotado es un politopo.*

Es decir, dado un politopo $P = \text{conv}(p_1, \dots, p_t) \subseteq \mathbb{R}^d$ un politopo, siempre se puede escribir con desigualdades como:

$$P = \begin{cases} q_1 x \leq b_1 \\ \vdots \\ q_s x \leq b_s \end{cases}$$

con $q_i \in \mathbb{R}^d$, $b_i \in \mathbb{R} \forall i$.

El proceso de pasar de una definición por envolvente convexa a una por desigualdades es lo que se llama **calcular una envolvente convexa** y se puede hacer, entre otros métodos, por **eliminación de Fourier-Motzkin**.

Definición 2.17. Sean $p_1, \dots, p_t \in \mathbb{R}^d$. Una **combinación afín** es una combinación de la forma $\sum_{i=1}^t \lambda_i p_i$ tal que $\sum_{i=1}^t \lambda_i = 1$.

Se denomina **cubierta afín** al conjunto de todas las combinaciones afines de p_1, \dots, p_t y se denota como $\text{aff}(\{p_1, \dots, p_t\})$.

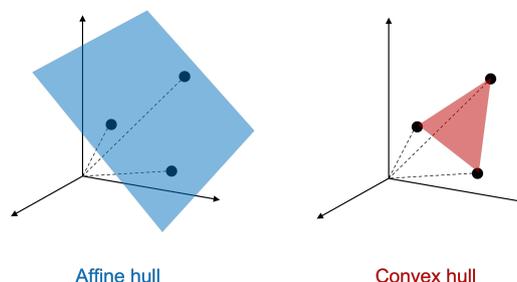


Figura 2.5: Cubierta afín y envolvente convexa. ([7])

Ejemplo 2.18. La cubierta afín de tres puntos p , q y r en \mathbb{R}^d es el plano que pasa por ellos. Sin embargo, en el caso de la envolvente convexa es el triángulo que forman dichos puntos. Ver Figura 2.5.

Definición 2.19. La **dimensión de un politopo** P es la dimensión de su cubierta afín.

Ejemplo 2.20. Veamos algunos politopos y sus dimensiones:

Los politopos de dimensión 0 son los puntos.

En la Figura 2.6, se puede observar un politopo de dimensión 1 llamado segmento, de dimensión 2 llamado polígono y de dimensión 3, que es lo que en lenguaje habitual se llama poliedro.

En la misma figura, se puede observar un politopo de dimensión 4 llamado polícoro y un politopo de dimensión 5.

Ejemplo 2.21. Las tres construcciones más básicas de politopos con P como base son la pirámide, el prisma y la bipirámide sobre P . En este caso, el politopo P escogido como base es el hexágono.

2.2. Caras de politopos

Dado cualquier vector $c \in \mathbb{R}^d$, se obtiene una función lineal dual $\phi_c : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $x \rightarrow c \cdot x$, donde $c \cdot x$ es el producto escalar de c y x . En optimización, a

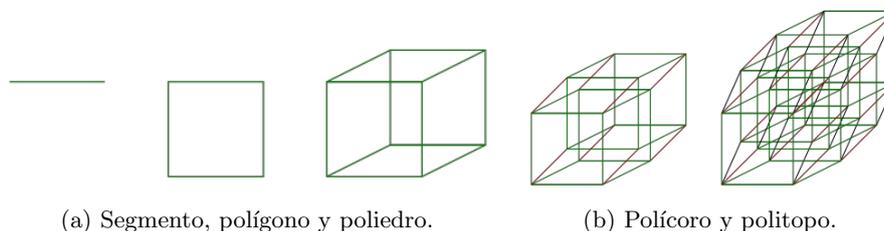


Figura 2.6: ([9])

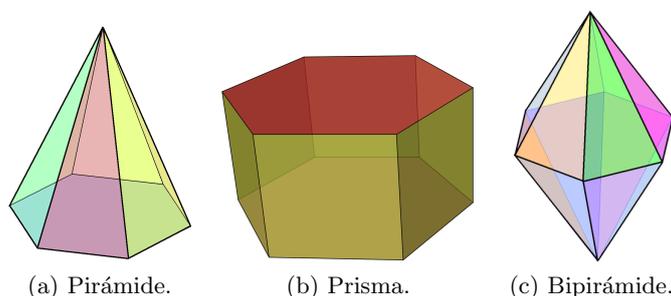


Figura 2.7: ([9])

veces es interesante el máximo (o mínimo) valor de esta función sobre un politopo $P = \{x \in \mathbb{R}^d : Ax \leq b\} \subset \mathbb{R}^d$, llevando al programa lineal:

$$\text{máx}\{c \cdot x : x \in P\} = \text{máx}\{c \cdot x : Ax \leq b, x \in \mathbb{R}^d\} \quad (2.1)$$

Para $c \in \mathbb{R}^d$, $m_c(P) \in \mathbb{R}$ es el máximo valor de la función lineal $\phi_c(x)$ sobre P y se denomina **valor óptimo** del programa lineal (2.1).

Ejemplo 2.22. Sea $C_2 = [0, 1]^2$ el cuadrado unidad, con sus esquinas numeradas como en la Figura 2.8. Sea $\phi_{(2,1)}(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$ una función lineal, dicha función toma el máximo valor en la esquina $(1, 1)$ del cuadrado y en ningún otro sitio (Figura 2.8 (a)).

Por otra parte, la función $\phi_{(1,0)}(x) = x_1$ toma el valor máximo en la arista etiquetada como 23 (Figura 2.8 (b)).

Definición 2.23. Sea $c \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, el hiperplano $H_c(P) := \{x \in \mathbb{R}^d : c \cdot x = m_c(P)\}$ se denomina **hiperplano de apoyo o hiperplano soporte** de P .

Para cada $m \geq m_c(P)$, la inecuación $c \cdot x \leq m$ se dice que es **válida** para P si todos los $x \in P$ satisfacen la inecuación.

Ejemplo 2.24. Las rectas $H_{(2,1)}(C_2) = \{(x_1, x_2) : 2x_1 + x_2 = 3\}$ y $H_{(1,0)}(C_2) = \{(x_1, x_2) : x_1 = 1\}$ son hiperplanos de apoyo de C_2 .

La inecuación $x_1 \leq 2$ es válida para C_2 pero no es un hiperplano de apoyo.

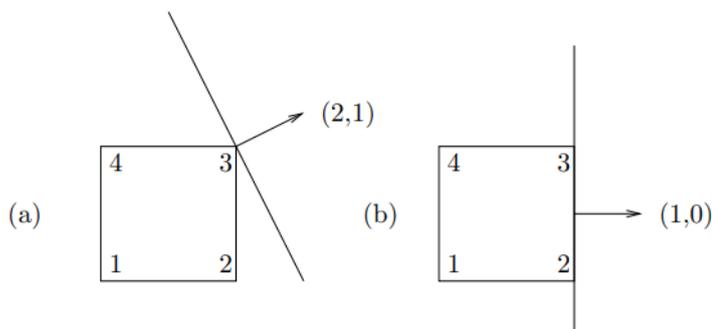


Figura 2.8: [6]

Definición 2.25. Una **cara de un politopo** P es la intersección de dicho politopo con un hiperplano de apoyo de P . Es decir, la cara de P en la dirección $c \neq 0$ es la intersección $\text{cara}_c(P) := H_c(P) \cap P$.

Estas son las caras no triviales de P . Por convenio, se considera que P y \emptyset son también caras de P , son las llamadas caras triviales de P . En cierto modo, P es la cara que corresponde al tomar $c = 0$, de modo que $H_0(P) = \{x \in \mathbb{R}^d : 0x_1 + \dots + 0x_d = 0\} = \mathbb{R}^d$ y $\text{cara}_0(P) = P \cap H_0(P) = P$. Nótese que $H_0(P)$ no es un hiperplano en \mathbb{R}^d .

Observación 2.26. Sean $c \in \mathbb{R}^d$ y $m \in \mathbb{R}$. Si $c \cdot x \leq m$ es válida para P , entonces $P \cap \{c \cdot x = m\}$ es una cara de P (quizá vacía).

Lema 2.27. Toda cara de un politopo P es a su vez un politopo.

Demostración. Si $S = \{p_1, \dots, p_n\}$ y $P = \text{conv}(S)$, para cada vector $c \in \mathbb{R}^d$ se tiene que:

$$\text{cara}_c(P) = \text{conv}(S \cap H_c(P)).$$

⊆) Sea $x \in \text{cara}_c(P)$, veamos que $x \in \text{conv}(S \cap H_c(P))$.

Por definición se tiene que $\text{cara}_c(P) = P \cap H_c(P)$.

Denotamos $m = m_c(P) = \max_{x \in P} \{c \cdot x\}$. Como $x \in P = \text{conv}(S)$, por definición de envolvente convexa, x se puede escribir como $x = \sum_{i=1}^N \lambda_i p_i$, con $p_1, \dots, p_N \in S$, $\lambda_i \geq 0$ y $\sum \lambda_i = 1$. Se calcula $c \cdot x$:

$$c \cdot x = \sum_{i=1}^N \lambda_i c \cdot p_i \leq \sum_{i=1}^N \lambda_i m = m \quad (2.2)$$

La última desigualdad se da por ser m el máximo de los puntos en P , la igualdad se da por ser $\sum \lambda_i = 1$.

Se quiere llegar a que $x \in \text{conv}(S \cap H_c(P))$, es decir, $x = \sum_{i=1}^N \lambda_i p_i$, con $p_1, \dots, p_N \in (S \cap H_c(P))$ y $\sum \lambda_i = 1$. Se tiene que $p_1, \dots, p_N \in S$ por lo que falta demostrar que $p_1, \dots, p_N \in H_c(P)$.

Sin pérdida de generalidad, suponemos que todos los $\lambda_i > 0$, ya que los λ_i que sean cero significan que en realidad el punto p_i no se usa en la combinación convexa.

Se ha denotado $m = \max_{x \in P} \{c \cdot x\}$, por lo que la desigualdad de la ecuación (2.2) se da en cada sumando ($\lambda_i c \cdot p_i \leq \lambda_i m$). Por otro lado, como se tiene que $x \in H_c(P)$, se cumple que $c \cdot x = m$ y, por tanto, se tiene la igualdad entre los sumatorios de la ecuación (2.2). Además, los λ_i son positivos, por lo que cada sumando es igual al otro ($\lambda_i c \cdot p_i = \lambda_i m$) y como hemos supuesto los $\lambda_i > 0$, se puede dividir cada sumando entre λ_i :

$$\frac{1}{\lambda_i} \lambda_i c \cdot p_i = \frac{1}{\lambda_i} \lambda_i m \implies c \cdot p_i = m$$

Tenemos que $c \cdot p_i = m \implies p_i \in H_c(P) \forall i$ y, por ello, $x \in \text{conv}(S \cap H_c(P))$.

⊇) Sea $x \in \text{conv}(S \cap H_c(P))$, veamos que $x \in \text{cara}_c(P)$. Por definición de $\text{cara}_c(P)$ hay que ver que $x \in P$ y $x \in H_c(P)$.

$S \cap H_c(P) \subseteq S \implies \text{conv}(S \cap H_c(P)) \subseteq \text{conv}(S) = P$. Como $x \in \text{conv}(S \cap H_c(P)) \subseteq \text{conv}(S) = P$, $x \in P$.

De la misma manera,

$S \cap H_c(P) \subseteq H_c(P) \implies \text{conv}(S \cap H_c(P)) \subseteq \text{conv}(H_c(P)) = H_c(P)$. Como $x \in \text{conv}(S \cap H_c(P)) \subseteq H_c(P)$, $x \in H_c(P)$.

Y, por lo tanto, $x \in (P \cap H_c(P)) = \text{cara}_c(P)$.

□

Definición 2.28. La dimensión de una cara de P es la dimensión de la cara como un politopo.

a) Las caras de P con dimensión k se llaman k -caras. Las 0-caras se llaman **vértices**, las 1-caras se llaman **aristas** y las $(\dim(P)-1)$ -caras se llaman **facetas**. La cara vacía de P se define con dimensión -1.

b) El número de k -caras de P se denota como $f_k(P)$.

c) El vector de caras (f -vector) de P es el vector:

$$f(P) := (f_{-1}(P), f_0(P), f_1(P), \dots, f_{\dim(P)}(P))$$

Ejemplo 2.29. En la Figura 2.9 se puede ver el cuadrado unidad, C_2 , cuyos vértices son $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ y $(0, 1)$. El politopo $\text{conv}(\{(0, 0), (1, 0)\})$ es una arista de C_2 . Esta arista es a su vez una faceta de C_2 . La única 2-cara de C_2 es C_2 en sí. El vector de caras de C_2 es $f(C_2) = (1, 4, 4, 1)$.

Nótese que los puntos en $\text{cara}_c(P)$ son las soluciones óptimas del programa lineal 2.1. Por eso se llama a $\text{cara}_c(P)$ la cara óptima de P en la dirección c .

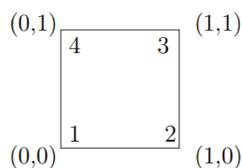


Figura 2.9: Cuadrado unidad C_2 . [6]

Ejemplo 2.30. En un símplice de dimensión n todas las caras son símplices y además cada subconjunto de vértices nos da una cara. Como hay en total $n + 1$ vértices el f -vector del símplice (Δ_n) es la $n + 2$ fila de coeficientes del triángulo de Pascal. Es decir,

$$f - vector(\Delta_n) = \left(\binom{n+1}{0}, \binom{n+1}{1}, \dots, \binom{n+1}{n}, \binom{n+1}{n+1} \right).$$

Por ejemplo, Δ_2 tiene 3 vértices, entonces

$$f - vector(\Delta_2) = \left(\binom{3}{0}, \binom{3}{1}, \binom{3}{2}, \binom{3}{3} \right) = (1, 3, 3, 1)$$

Dichos números combinatorios son el número de cara vacía (siempre uno), 0-cara, 1-cara y 2-cara (siempre uno) en dimensión 2 respectivamente.

Ya definido lo que son los vértices de un politopo, se puede ver el Teorema 2.16 de otra manera: todo politopo se puede expresar como desigualdades de un poliedro acotado y todo poliedro acotado es la envolvente convexa de un mínimo número finito de puntos llamados vértices.

2.3. Dualidad de politopos

Definición 2.31. Si $P = \text{conv}(a_1, \dots, a_m) \subseteq \mathbb{R}^d$ es un politopo que contiene al origen en su interior, entonces se llama **dual de P** al politopo

$$Q := \{x \in \mathbb{R}^d : a_i x \leq 1; \forall i = 1, \dots, m\}$$

Observación 2.32. Sea P un politopo en \mathbb{R}^d . Que P contenga al origen en su interior significa que su definición por desigualdades se puede escribir como

$$P = \{x \in \mathbb{R}^d : b_i x \leq 1; \forall i = 1, \dots, l\}$$

En efecto, P se puede escribir según sus desigualdades como:

$$P = \begin{cases} \tilde{b}_1 x \leq c_1 \\ \vdots \\ \tilde{b}_l x \leq c_l \end{cases}$$

Como P contiene al origen, las desigualdades se tienen que dar también para dicho punto, es decir, $c_i \geq 0 \forall i$. Además, dicho c_i no puede ser cero porque de serlo el

origen no estaría en el interior del politopo sino en su borde, por lo que se tiene que $c_i > 0 \forall i$. Entonces, dividiendo entre c_i , se tiene que:

$$P = \begin{cases} b_1 x \leq 1 \\ \vdots \\ b_l x \leq 1 \end{cases}$$

con $b_i = \frac{\tilde{b}_i}{c_i} \forall i$.

En particular, el Q de la definición también contiene al origen en su interior. Vamos a ver más adelante que el dual de Q vuelve a ser P , o sea, que $Q = \text{conv}(b_1, \dots, b_l)$, siendo l el número de desigualdades de P .

Definición 2.33. Una **función afín** es una función lineal con un término constante añadido.

Sea $c \in \mathbb{R}^n$, se tiene que f es una función afín:

$$f(c) = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n + c_0$$

Lema 2.34 (Lema de Farkas). Sean $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Uno y sólo uno de los dos sistemas siguientes tiene solución:

$$(I) \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (II) \begin{cases} cA \geq 0 \\ cb < 0 \end{cases}$$

Es decir, o existe un vector $x \in \mathbb{R}^d$ para (I) o existe un vector fila $c \in \mathbb{R}^m$ para (II).

Demostración. La demostración del Lema de Farkas se encuentra en ‘Lectures on Polytopes’ de Günter M.Ziegler, Proposition 1.8 (Farkas lemma II) [10]. \square

Corolario 2.35. Sean $P = \text{conv}(a_1, \dots, a_m) \subseteq \mathbb{R}^d$ y $p \in \mathbb{R}^d$. Entonces pasa una y sólo una de estas dos cosas:

$$(I) p \in P \quad (II) \exists f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R} \text{ afín con } f(a_i) \geq 0 \forall i \text{ y } f(p) < 0$$

La demostración del Corolario consiste simplemente en interpretarlo como una versión geométrica del Lema de Farkas 2.34.

Demostración. Dados $a_1, \dots, a_m, p \in \mathbb{R}^d$, tomemos $A \in \mathbb{R}^{(d+1) \times m}$ y $b \in \mathbb{R}^{d+1}$ del siguiente modo:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_m \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}$$

Queremos ver que con esta notación, el (I) del Lema y del Corolario son equivalentes entre sí, y lo mismo para el (II) del Lema y del Corolario.

(I) Por definición de envolvente convexa, el (I) del Corolario es equivalente a que p se pueda escribir como $p = \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i$ con $\lambda_i \geq 0 \forall i$ y $\sum \lambda_i = 1$. Por como se han tomado A y b ,

$$p \in P \iff \exists \lambda_1, \dots, \lambda_m \text{ tal que } A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = b, \text{ con } \lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$$

Por lo tanto, se ha probado que (I) del Corolario 2.35 es equivalente a (I) del Lema 2.34.

(II) A cada $c = (c_1, \dots, c_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1}$ le asociamos la función afín $f(x_1, \dots, x_d) = c_1x_1 + \dots + c_dx_d + c_{d+1}$.

Entonces, sea $p \in \mathbb{R}^d$, se tiene que

$$f(p) < 0 \iff c_1p_1 + \dots + c_dp_d + c_{d+1} < 0 \iff cb < 0$$

con $c \in \mathbb{R}^{d+1}$.

Por otro lado, si $a_i = (a_{i1}, \dots, a_{id})$,

$$f(a_i) \geq 0 \forall i \iff c_1a_{i1} + \dots + c_da_{id} + c_{d+1} \geq 0, \forall i \iff cA \geq 0$$

con $c \in \mathbb{R}^{d+1}$.

Por lo tanto, queda demostrado que (II) del Corolario 2.35 es equivalente a (II) del Lema 2.34.

□

Corolario 2.36 (Teorema de dualidad). *Sea P un politopo que contiene al origen entonces el dual del dual de P es el propio P . Dicho de manera más formal, sea*

$$P = \text{conv}(a_1, \dots, a_m) = \{x \in \mathbb{R}^d : b_ix \leq 1, i = 1, \dots, l\}$$

Entonces,

$$\text{conv}(b_1, \dots, b_l) = \{x \in \mathbb{R}^d : a_ix \leq 1, i = 1, \dots, m\}$$

Demostración. Se demuestra por doble contenido:

⊆) Sea $q \in \text{conv}(b_1, \dots, b_l) \implies q = \lambda_1b_1 + \dots + \lambda_lb_l$, con $\lambda_i \geq 0 \forall i$ y $\sum \lambda_i = 1$.

Sea $a_i \in P$, $a_iq = \sum_{j=1}^l \lambda_j a_i b_j \leq \sum \lambda_j = 1$, por la definición de dual de P (Definición 2.31).

⊇) Probémoslo por contrarrecíproco. Supongamos que $q \notin \text{conv}(b_1, \dots, b_l)$.

Por el Corolario 2.35, como se tiene que $q \notin \text{conv}(b_1, \dots, b_l)$, se da la equivalencia (II), entonces se tiene que cumplir que existe un vector fila $-c \in \mathbb{R}^d, c_0 \in \mathbb{R}$ (es decir, una función afín dada por dicho vector) tal que:

$$\begin{cases} -cb_i + c_0 \geq 0 \forall i \\ -cq + c_0 < 0 \end{cases} \implies \begin{cases} -cb_i \geq -c_0 \forall i \\ -cq < -c_0 \end{cases} \implies \begin{cases} cb_i \leq c_0 \forall i \\ cq > c_0 \end{cases}$$

Vamos a ver que c_0 tiene que ser positivo. Si $c_0 \leq 0$, tendríamos $cb_i \leq 0$ para todo i . Por tanto, c , y cualquier múltiplo positivo de c , estaría en P (ya que $cb_i \leq 0 \leq 1$). Eso es imposible porque P es acotado, por lo tanto $c_0 > 0$.

Como c_0 es positivo, dividiendo por c_0 tenemos un vector \tilde{c} tal que:

$$\begin{cases} \tilde{c}b_i \leq 1 \forall i \\ \tilde{c}q > 1 \end{cases}$$

con $\tilde{c} = \frac{c}{c_0}$.

La primera desigualdad nos dicen que \tilde{c} está en P y, por tanto, se puede escribir como combinación convexa de los a_i , es decir, $\tilde{c} = \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i$. La segunda desigualdad dice que $\tilde{c}q = \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i q > 1$, entonces $a_i q > 1$ para algún a_i .

□

Ejemplo 2.37. Sea P el cuadrado

$$P = \text{conv}\{(1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1)\}$$

entonces el dual de P es el politopo Q definido como:

$$\begin{aligned} Q &= \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq 1; -x_1 \leq 1; x_2 \leq 1; -x_2 \leq 1\} = \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x_1 \leq 1; -1 \leq x_2 \leq 1\} \end{aligned}$$

En la Figura 2.10 se puede ver el politopo P (a) y su dual Q (b).

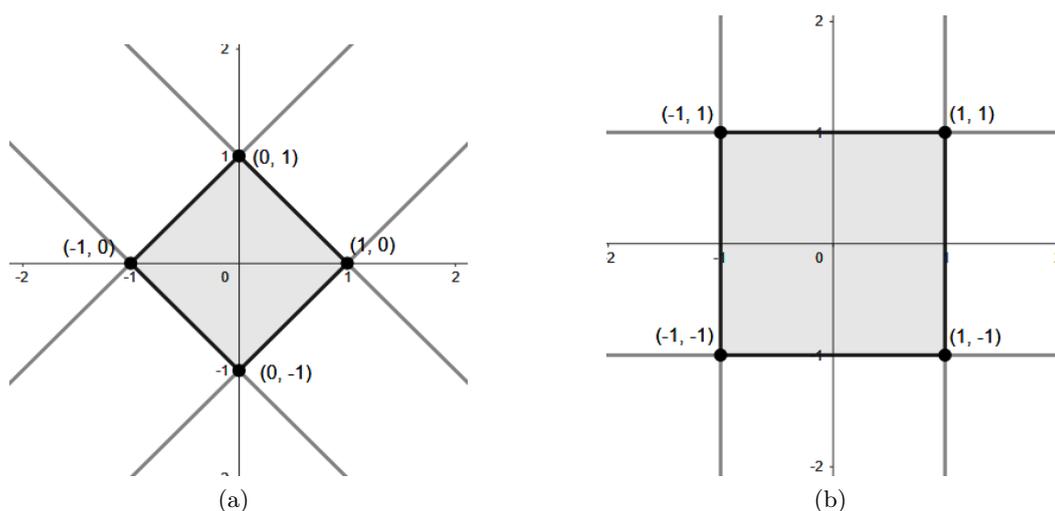


Figura 2.10: Politopo P y su dual Q .

En el siguiente ejemplo vemos que hacer una traslación a P no cambia la combinatoria de su dual pero sí que cambia la geometría (ángulos, longitudes, ...). Aunque queda fuera del alcance de este trabajo, se puede decir que lo que se conserva por dualidad es la geometría proyectiva. O sea, si P_2 se puede obtener de P_1 por una transformación proyectiva, sus duales también.

Ejemplo 2.38. Sea el politopo

$$R = \text{conv} \left\{ \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right), \left(\frac{3}{2}, \frac{-1}{2} \right), \left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2} \right), \left(\frac{-1}{2}, \frac{3}{2} \right) \right\}$$

entonces su dual, S , se define como:

$$S = \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 \leq 2 \\ 3x_1 - x_2 \leq 2 \\ -x_1 + 3x_2 \leq 2 \\ -x_1 - x_2 \leq 2 \end{cases}$$

En la Figura 2.11 se puede observar el politopo R (a) y su dual S (b).

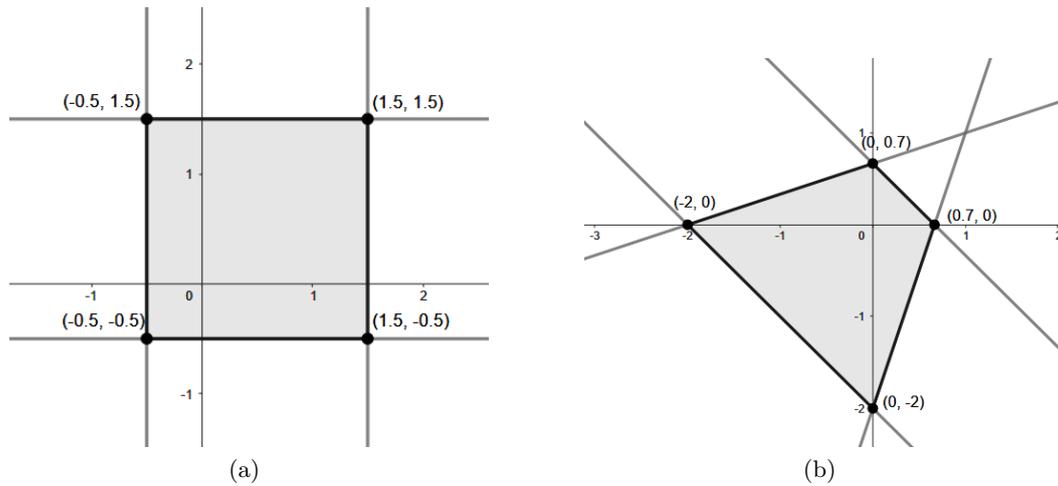


Figura 2.11: Politopo R y su dual S .

Ejemplo 2.39. Sea el politopo $P = \text{conv}\{(1, 1), (1, 0), (0, 0), (0, 1)\}$, se va a intentar calcular su dual Q .

$$Q = \begin{cases} x_1 \leq 1 \\ x_2 \leq 1 \\ x_1 + x_2 \leq 1 \end{cases}$$

Sin embargo, como el politopo P no contiene al origen en su interior, su “dual” Q no es un politopo ya que no está acotado.

En la Figura 2.12 se puede ver el politopo P (a) y Q (b), cuya figura es la intersección de las desigualdades escritas arriba.

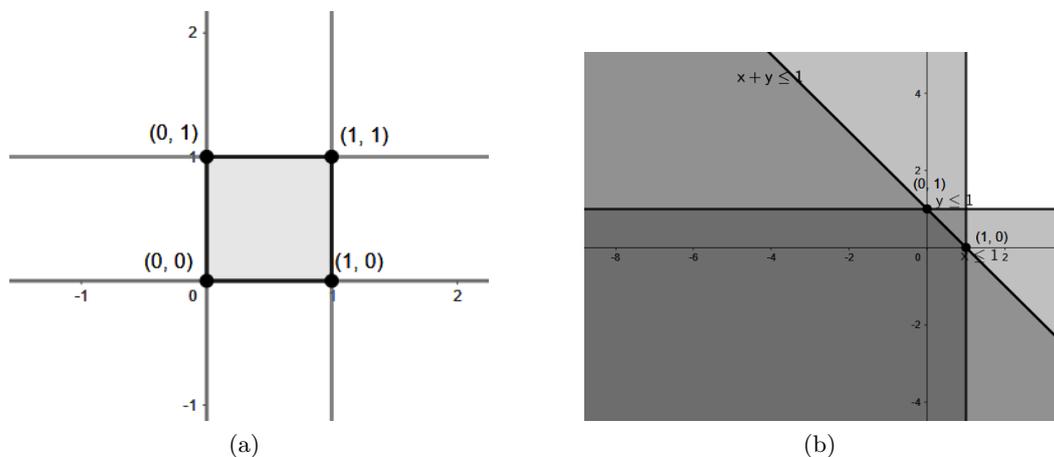


Figura 2.12: Polítopo P y no polítopo Q .

Teorema 2.40. Sean P y Q polítopos duales uno del otro. Dado un $c \in \mathbb{R}^d$, se tiene que

$$c \in P \iff cx \leq 1 \text{ es válida en } Q$$

Demostración. Se demuestra por doble implicación.

Para la implicación de izquierda a derecha se va a utilizar la definición de dual. Sea $P = \text{conv}\{a_1, \dots, a_m\}$, su dual Q está definido como $Q = \{x \in \mathbb{R}^d : a_i x \leq 1, i = 1, \dots, m\}$. Entonces, dado un $c \in P$ tenemos que $c = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m$, con $\lambda_i \geq 0$ y $\sum \lambda_i = 1$.

Por tanto, para todo $x \in Q$:

$$cx = \lambda_1 a_1 x + \dots + \lambda_m a_m x \leq \lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1.$$

Para la implicación de derecha a izquierda se va a utilizar el Teorema de dualidad. Sea P un polítopo que contenga al origen en su interior, su definición por desigualdades es $P = \{x \in \mathbb{R}^d : b_i x \leq 1, i = 1, \dots, l\}$, entonces $Q = \text{conv}\{b_1, \dots, b_l\}$.

Si $cx \leq 1$ es válida en Q , entonces $cb_i \leq 1 \forall i$ (por ser b_i los vértices de Q) y se tiene que $c \in P$. □

Observación 2.41. Los vértices de P se corresponden con las facetas de su dual Q , y viceversa. De hecho, los posets ('partially ordered set') de caras de P y Q son opuestos: hay una biyección entre las caras de dimensión i de P y las de dimensión $d - i - 1$ de Q y la biyección invierte las relaciones de contenido.

Capítulo 3

Otras nociones sobre politopos

3.1. Subdivisiones poliédricas

Definición 3.1. Sea A un conjunto finito de puntos en \mathbb{R}^d . Una **celda de A** es cualquier subconjunto B de A cuya envolvente convexa tiene la dimensión de $\text{conv}(A)$.

Obsérvese que dos subconjuntos $B, B' \subset S$ distintos los consideramos celdas distintas incluso si tienen la misma envolvente convexa.

Cuando hablamos de celdas, llamamos caras de B a los subconjuntos de la forma $B \cap F$ donde F es una cara de $\text{conv}(B)$.

Ejemplo 3.2. En la Figura 3.1, se pueden observar varias celdas de una configuración de puntos cuya envolvente convexa es un hexágono P . Algunas de esas celdas son $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 3, 4, 6\}$, $\{1, 4, 6, 7, 8\}$ y $\{1, 3, 6\}$.

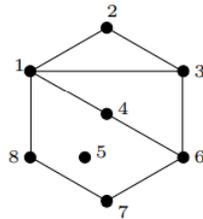


Figura 3.1: Celdas del hexágono. [6]

Definición 3.3. Sea $P = \text{conv}(A)$ un politopo en \mathbb{R}^d . Una **subdivisión poliédrica de A** es cualquier familia S de celdas de A tal que:

- La unión de los $\text{conv}(B)$ con $B \in S$ es todo P .
- $B \cap B'$, es una cara común de B y B' para cada par de celdas $B, B' \in S$.

Si A coincide con el conjunto de vértices de P decimos que es una **subdivisión poliédrica de P** .

Aquellas subdivisiones cuyas celdas son todas símplices se llaman **triangulaciones de P** .

Definición 3.4. S_1 *refina a* S_2 si cada celda de S_1 está contenida en una de S_2 . Es decir, si una celda de S_2 está formada por la unión de varias celdas de S_1 . Se denota como $S_1 \preceq S_2$.

Ejemplo 3.5. Sea el politopo P un hexágono y la configuración de ocho puntos A de la Figura 3.2, veamos cuales de las siguientes figuras forman una subdivisión.

La Figura 3.2 (a), no es una subdivisión. En el triángulo inferior, se puede tomar como celda $\{5, 6, 7, 8\}$ o $\{6, 7, 8\}$. En el primer caso, se tiene la cara $\{5, 6, 8\}$ pero no $\{5, 8\}$ por lo que $\{1, 5, 8\}$ y $\{5, 6, 7, 8\}$ no se intersectan en una cara común. En el segundo caso, $\{1, 5, 8\}$ y $\{6, 7, 8\}$ no se intersectan en una cara común. Por lo tanto, no es una subdivisión.

En la Figura 3.2 (b), tomando las facetas

$$\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 6, 4\}, \{1, 4, 6, 7, 8\}$$

se tiene una subdivisión de A . Algunas no-caras de esta subdivisión son $\{5\}$ y $\{1, 4\}$.

La Figura 3.2 (c) es un refinamiento de la (b) y además es una triangulación.

Sin embargo, si se hubiese tomado en la Figura 3.2 (b) las facetas

$$\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 6\}, \{1, 6, 7, 8\}$$

seguiría siendo una subdivisión pero la Figura 3.2 (c) no sería un refinamiento de ella ya que el vértice 4 no pertenece a la subdivisión.

La Figura 3.2 (d) es una triangulación pero no es un refinamiento de la (c) ya que el vértice 5 no está presente en la subdivisión (c).

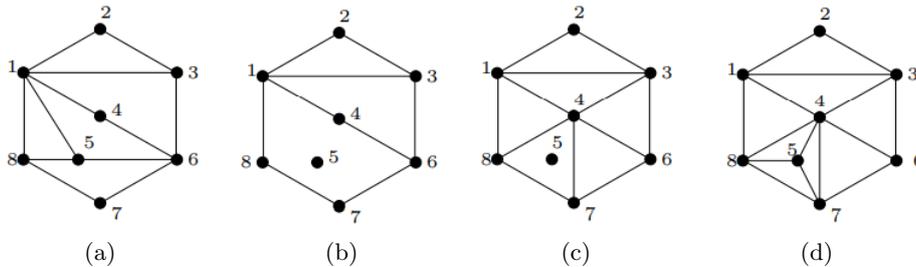


Figura 3.2: Subdivisiones y no subdivisiones. [6]

Definición 3.6. Sea $A \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto finito. Llamamos **función de levantamiento en A** a cualquier aplicación $\alpha : A \rightarrow \mathbb{R}$. La configuración levantada de A por α es

$$\tilde{A} := \{(a, \alpha(a)) : a \in A\} \subseteq \mathbb{R}^{d+1}.$$

Una faceta F de $\text{conv}(\tilde{A})$ decimos que es inferior si $F = \text{cara}_c(\text{conv}(\tilde{A}))$ para un c cuya última coordenada sea negativa.

La **subdivisión regular de A** producida por α es

$$\{B \subset A : \tilde{B} = F \cap \tilde{A} \text{ para alguna faceta inferior } F \text{ de } \tilde{A}\}.$$

Observación 3.7. Otra manera de decir que una faceta F de $\text{conv}(\tilde{A})$ es inferior es que, con respecto a la coordenada $d + 1$, el hiperplano que contiene a F esté por debajo de \tilde{A} .

Notación 3.8. Normalmente tendremos los puntos de A etiquetados por $\{1, \dots, n\}$, o sea, $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. En ese caso abreviaremos $\alpha(a_i)$ como α_i , y pensaremos en α como un vector de \mathbb{R}^n . En este sentido, hablar de funciones de levantamiento y de vectores de levantamiento es lo mismo.

Ejemplo 3.9. En la Figura 3.3 se pueden observar dos subdivisiones regulares diferentes. Nótese que la subdivisión de la derecha es un refinamiento de la subdivisión de la izquierda.

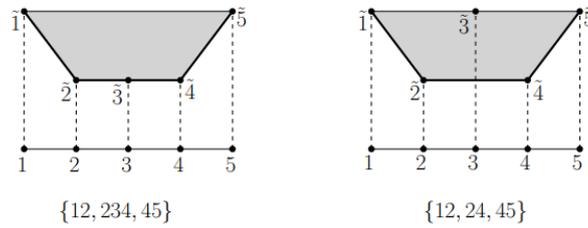


Figura 3.3: Subdivisión regular de dimensión 1. [4]

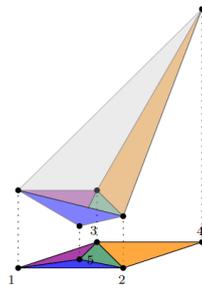


Figura 3.4: Triangulación regular. [4]

En la Figura 3.4 se puede observar una subdivisión regular dada por el vector de levantamiento $(4, 3, 3, 15, 2)$.

Observación 3.10. Vamos a ver mediante un ejemplo cómo “calcular” en casos sencillos en el plano qué subdivisión regular produce un levantamiento dado.

Consideremos el levantamiento del cuadrado de la Figura 3.5. Queremos saber cuál de las dos diagonales del cuadrado aparece en la subdivisión regular dada. Para ello, hay que ver qué segmento de los dos que forman las diagonales del cuadrado queda por encima en el levantamiento correspondiente, para esto último basta con estudiar los levantamientos que las dos diagonales ($\text{diag}(s_1)$ y $\text{diag}(s_2)$ de la Figura 3.5) inducen en el punto de intersección.

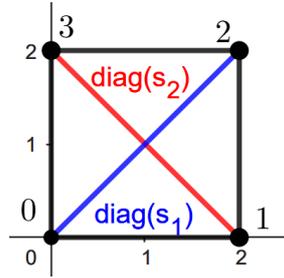


Figura 3.5: Subdivisión regular.

El punto p de intersección, expresado como combinación convexa de los extremos de la diagonal $\text{diag}(s_1)$ viene dado por:

$$p = \frac{1}{2} \cdot (0, 0) + \frac{1}{2} \cdot (2, 2)$$

Expresado en la diagonal $\text{diag}(s_2)$ viene dado por:

$$p = \frac{1}{2} \cdot (2, 0) + \frac{1}{2} \cdot (0, 2).$$

Estas expresiones nos dan los siguientes valores w_1 y w_2 para los dos levantamientos de p :

$$w_1 = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 2$$

$$w_2 = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 3$$

Como se tiene que $w_1 = 1 < 2 = w_2$, el punto (p, w_1) está por debajo del (p, w_2) y, por tanto, la diagonal visible es $\text{diag}(s_1)$ (por tomar en la definición de subdivisión regular la faceta inferior).

Definición 3.11. Sea α un vector que define una función de levantamiento, se dice que α es **afín** si es la restricción A de una función afín.

Es decir, sea $\alpha : A \rightarrow \mathbb{R}$ la función de levantamiento, se dice que el vector α es **afín** si existe una función afín $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\alpha = f|_A$.

Lema 3.12. Si $\alpha - \beta$ es un vector de levantamiento afín, entonces α y β dan la misma subdivisión regular.

Demostración. Sea

$$f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto cx + b$$

la función afín tal que

$$f(a) = \alpha(a) - \beta(a), \quad \forall a \in A.$$

Se quiere ver que si $B \subset A$ es cara inferior del levantamiento α , con vector normal $(v, -1)$, entonces B también es cara inferior del levantamiento β , con vector normal $(v - c, -1)$.

Si B es cara inferior del levantamiento α , con vector normal $(v, -1)$, entonces $v \cdot a - \alpha(a)$ se maximiza exactamente en B .

Ahora, sumando y restando $\beta(a)$ a dicha expresión, se tiene que:

$$\begin{aligned} v \cdot a - \alpha(a) + \beta(a) - \beta(a) &= v \cdot a - (\alpha(a) - \beta(a)) - \beta(a) \\ &= v \cdot a - f(a) - \beta(a) \\ &= v \cdot a - c \cdot a - b - \beta(a) \\ &= (v - c) \cdot a - \beta(a) - b. \end{aligned}$$

Como b es una constante, en efecto el funcional $(v - c, -1)$ se maximiza, para el levantamiento β , exactamente en B , es decir, que B también es cara inferior del levantamiento de β con vector normal $(v - c, -1)$. \square

Ejemplo 3.13. En la Figura 3.6 se puede ver una triangulación no regular.

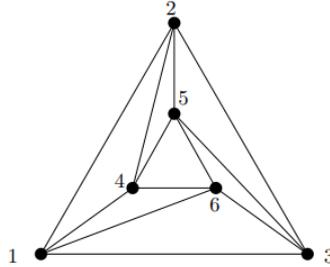


Figura 3.6: Subdivisión no regular. [4]

Demostración. Se va a demostrar por contradicción que la subdivisión de la Figura 3.6 no es regular, para ello supongamos que existe un vector de levantamiento α que define esa subdivisión.

Vamos a ver que se puede asumir sin pérdida de generalidad que $\alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = 0$. Para ello, tómesese el vector de levantamiento afín β que coincide con α en los puntos 4, 5 y 6. Entonces $\alpha - \beta$ es cero en esos tres puntos y, por el Lema 3.12, la subdivisión que define sigue siendo la misma, ya que como $\alpha - (\alpha - \beta) = \beta$, que es un vector de levantamiento afín, se tiene que α y $\alpha - \beta$ dan la misma subdivisión regular.

Por tanto, suponemos que $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, 0, 0, 0)$. Para que la arista 16 esté en la subdivisión es necesario que $\alpha_1 < \alpha_3$. Usando el mismo argumento para las aristas 35 y 24 se obtiene una contradicción ya que $\alpha_1 < \alpha_3 < \alpha_2 < \alpha_1$. Por lo tanto, no existe un vector de levantamiento para esta subdivisión y por ello la subdivisión no es regular. [4] \square

Terminamos esta sección con dos lemas sobre subdivisiones que se usarán en el Capítulo 5. El primero nos dice que cualquier celda de una subdivisión regular se puede convertir en la cara inferior “horizontal” del levantamiento.

Lema 3.14. *Dada una subdivisión regular S de un conjunto A y dada una celda C de A , existe un levantamiento w_C de A que produce S como subdivisión regular y que se minimiza en C . Es decir, tal que los puntos de A donde w_C alcanza su mínimo son exactamente C .*

Demostración. Sea $w : A \rightarrow \mathbb{R}$ un levantamiento cualquiera que produce S como subdivisión regular. Sea $\tilde{A} := \{(a, w(a)) : a \in A\}$ el conjunto levantado. Como C es una celda de S , existe una función lineal en \mathbb{R}^{d+1} cuyo mínimo en \tilde{A} se alcanza en C . Como C es cara inferior del levantamiento, sin pérdida de generalidad, esa función es de la forma $f(x_1, \dots, x_{d+1}) = c \cdot x - x_{d+1}$, donde $x = (x_1, \dots, x_d)$. Tomamos entonces como levantamiento $w_C(a) := w(a) - c \cdot a$ para cada $a \in A$. Entonces el levantamiento w_C sigue produciendo la misma subdivisión por el Lema 3.12 (porque la diferencia entre w_C y w es lineal), pero por construcción se tiene que el valor de w_C en cada punto de A coincide con el valor de $-f$ en el punto correspondiente de \tilde{A} . Por tanto, w_C se minimiza en C . \square

En los ejemplos hemos visto que una subdivisión regular de A puede no usar todos los puntos de la configuración. Es decir, puede haber puntos que no están en ninguna celda, entendida como subconjunto de A . Esto tiene que ver con que el levantamiento sea convexo o no.

Recuérdese que una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es **convexa** si para toda combinación convexa $a = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k$ se tiene que

$$f(a) \leq \lambda_1 f(a_1) + \dots + \lambda_k f(a_k).$$

Decimos que un **levantamiento** $\alpha : A \rightarrow \mathbb{R}$ es **convexo** si es la restricción a A de una función convexa.

Lema 3.15. *Si $\alpha : A \rightarrow \mathbb{R}$ es un vector de levantamiento convexo, entonces la subdivisión regular de A producida por α usa todos los puntos de A .*

Demostración. Vamos a probar el contrarrecíproco: supongamos que $a \in A$ es un punto que no se usa en la subdivisión regular S producida por α . Sea C la celda de S que contiene a a y sean a_1, \dots, a_k los vértices de C , podemos escribir a como combinación convexa de los a_i :

$$a = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k.$$

Sea \tilde{C} la cara de \tilde{A} que se proyecta sobre C . Sus vértices son $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_k$, con $\tilde{a}_i = (a_i, \alpha(a_i))$.

Sea \tilde{a}^* el punto de intersección de la recta vertical por a con la cara \tilde{C} , de modo que

$$\tilde{a}^* = \lambda_1 \tilde{a}_1 + \cdots + \lambda_k \tilde{a}_k.$$

Sea α^* la última coordenda de \tilde{a}^* . Se tiene entonces que como a no se usa en la subdivisión, \tilde{a} está por encima de \tilde{a}^* . Por tanto:

$$\alpha(a) > \alpha^* = \lambda_1 \alpha(a_1) + \cdots + \lambda_k \alpha(a_k),$$

lo cual implica que α no es convexa. □

3.2. Suma de Minkowski y subdivisiones mixtas

3.2.1. Suma de Minkowski

Definición 3.16. Sean $P_1, \dots, P_k \subset \mathbb{R}^d$ politopos convexos. La **suma de Minkowski** de dichos politopos se define como:

$$\{x_1 + \cdots + x_k : x_i \in P_i\}$$

Dicha suma es a su vez un politopo en \mathbb{R}^d .

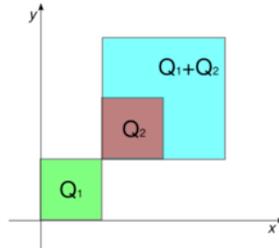


Figura 3.7: Suma de Minkowski. ([9])

El siguiente Lema nos dice que las caras de la suma de Minkowski son las sumas de Minkowski de las caras, con el mismo funcional.

Lema 3.17. Sean $P_1, \dots, P_k \subset \mathbb{R}^d$ politopos y sea $P = \sum_i P_i$ su suma de Minkowski. Entonces, para cada $c \in \mathbb{R}^d$ (interpretado como funcional),

$$\text{cara}_c(P) = \sum_{i=1}^k \text{cara}_c(P_i).$$

Demostración. Sea $p \in \text{cara}_c(P)$, veamos que

$$p \in \sum_{i=1}^k \text{cara}_c(P_i).$$

Como $p \in P = \sum_i P_i$, podemos descomponer $p = p_1 + \cdots + p_k$, con $p_i \in P_i$ para cada i . Lo único que tenemos que ver es que $p_i \in \text{cara}_c(P_i)$ para cada i . Esto se

tiene por reducción al absurdo. Si p_i está en P_i pero no en $\text{cara}_c(P_i)$ entonces hay un $p'_i \in P_i$ para el cual

$$c \cdot p'_i > c \cdot p_i.$$

Pero entonces tomamos $p' = p - p_i + p'_i$. O sea, p' es un punto con la misma descomposición que p pero sustituyendo p_i por p'_i . Tenemos entonces que $p' \in P$ y que:

$$c \cdot p' = c \cdot (p - p_i + p'_i) = c \cdot p - c \cdot p_i + c \cdot p'_i > c \cdot p.$$

Eso contradice el hecho de que $p \in \text{cara}_c(P)$.

Recíprocamente, sea $p \in \sum_i \text{cara}_c(P_i)$, veamos que $p \in \text{cara}_c(P)$. O sea, tenemos que ver que:

$$c \cdot p \geq c \cdot q,$$

para todo $q \in P$.

Como $p \in \sum_i \text{cara}_c(P_i)$, podemos descomponer $p = \sum_i p_i$, con $p_i \in \text{cara}_c(P_i)$ para cada i .

De la misma manera, como $q \in P = \sum_i P_i$ podemos descomponer $q = \sum_i q_i$, con $q_i \in P_i$.

Tenemos entonces que $p_i \in \text{cara}_c(P_i)$ para todo i y que, desarrollando el producto escalar con c , se tiene:

$$c \cdot p = \sum_i c \cdot p_i,$$

$$c \cdot q = \sum_i c \cdot q_i.$$

Cada sumando $c \cdot p_i$ es mayor o igual que cada sumando $c \cdot q_i$ porque $p_i \in \text{cara}_c(P_i)$. Por tanto, $\sum_i c \cdot p_i \geq \sum_i c \cdot q_i$, es decir, $c \cdot p \geq c \cdot q$, como se quería demostrar. \square

Observación 3.18. Aunque en lo que sigue por simplicidad hablaremos habitualmente de sumas de Minkowski y subdivisiones mixtas de politopos, todos los conceptos y resultados se pueden generalizar a configuraciones de puntos.

Definimos la suma de Minkowski $\sum_i A_i$ de ciertas configuraciones A_1, \dots, A_k como la configuración

$$\sum_{i=1}^k A_i := \{a_1 + \dots + a_k : a_i \in A_i\}.$$

La configuración $\sum_{i=1}^k A_i$ tiene exactamente $|A_1| \times \dots \times |A_k|$ puntos, aunque algunos pueden estar repetidos, es decir, diferentes sumas de puntos de los A_i pueden dar el mismo "punto" geoméricamente, pero los vamos a considerar como elementos diferentes de la configuración.

Cuando hablemos de politopos, implícitamente tomaremos como configuración asociada a cada P_i su conjunto de vértices $A_i = \text{vert}(P_i)$, y como configuración asociada a $\sum_i P_i$ la suma $\sum_i A_i$.

Una celda B de la suma de Minkowski $\sum_{i=1}^k A_i$ se llama **celda de Minkowski** si se puede escribir como suma de celdas de los A_i , es decir, si $B = \sum_{i=1}^k B_i$, donde cada B_i es un subconjunto de A_i .

Cuando en vez de configuraciones A_i tenemos politopos P_i , si hablamos de subdivisiones de $\sum P_i$ estamos implícitamente pensando en la configuración de puntos $\sum A_i$ donde tomamos cada $A_i = \text{vert}(P_i)$.

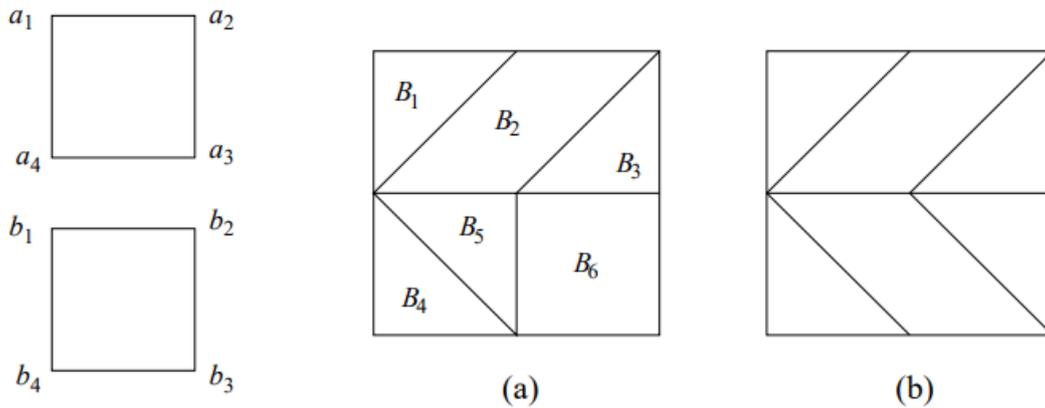
3.2.2. Subdivisiones mixtas

Definición 3.19. Una **subdivisión mixta** de $\sum_{i=1}^k P_i$ es cualquier familia S de celdas de Minkowski que cubre $\sum P_i$ e interseca adecuadamente como una suma de Minkowski, es decir, por cada dos celdas $B = \sum B_i$ y $B' = \sum B'_i$ en S y para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, los polipotos B_i y B'_i intersecan adecuadamente (la intersección es una cara de ambos).

En el caso de las subdivisiones mixtas, si hay varias maneras de obtener un subpolitopo de P como una suma de subpolitopos de P_i s, las celdas de Minkowski se consideran distintas y, por lo tanto, hay que especificar cuáles de ellas se están usando para una subdivisión mixta particular, es decir, hay que “etiquetarlas”.

Ejemplo 3.20. En la Figura 3.8 (a) se puede ver una subdivisión mixta de la suma de Minkowski de dos cuadrados iguales. Debajo de la figura, cada una de las seis celdas de Minkowski están expresadas como suma de subpolitopos de los cuadrados $a_1a_2a_3a_4$ y $b_1b_2b_3b_4$.

Por otro lado, si se considera $B_4 = a_4 + b_1b_3b_4$ y $B_5 = a_1a_2a_3 + b_4$ no sería una subdivisión mixta ya que estas dos celdas de Minkowski no se intersecan adecuadamente.



$$\begin{aligned}
 B_1 &= a_1a_2a_4 + b_1, & B_2 &= a_2a_4 + b_1b_2, & B_3 &= a_2a_3a_4 + b_2, \\
 B_4 &= a_4 + b_1b_3b_4, & B_5 &= a_4 + b_1b_2b_3, & B_6 &= a_3a_4 + b_2b_3.
 \end{aligned}$$

Figura 3.8: [5]

La Figura 3.8 (b) muestra por qué el “etiquetado” de las celdas como suma de Minkowski es importante.

Aquí, la misma suma de Minkowski de dos cuadrados iguales está descompuesta en celdas que intersecan adecuadamente como politopos y que individualmente se pueden considerar celdas de Minkowski, pero que no se pueden etiquetar de manera que se intersequen adecuadamente en el sentido de Minkowski. Es decir, la Figura 3.8 (b) no es compatible con ninguna subdivisión mixta.

Proposición 3.21. Sean P_1, \dots, P_k politopos y para cada uno de ellos consideremos un levantamiento \tilde{P}_i . Es decir, para cada P_i tenemos un vector de levantamiento $\alpha_i : \text{vert}(P_i) \rightarrow \mathbb{R}$ que define

$$\tilde{P}_i = \text{conv}\{(p, \alpha_i(p)) : p \in \text{vert}(P_i)\}.$$

Entonces, la subdivisión regular de $P_1 + \dots + P_k$ obtenida con el levantamiento $\alpha_1 + \dots + \alpha_k$ es una subdivisión mixta.

Demostración. Llamamos $P = \sum_i P_i$ y $\tilde{P} = \sum_i \tilde{P}_i$. Es obvio que \tilde{P} , como configuración de puntos, es el levantamiento de P dado por la función $\alpha_1 + \dots + \alpha_k$.

Por otro lado, el Lema 3.17 nos dice que para todo $c \in \mathbb{R}^{d+1}$ $\text{cara}_c(\tilde{P}) = \sum_i \text{cara}_c(\tilde{P}_i)$.

En particular, cada cara inferior B de \tilde{P} se descompone como suma $B_1 + \dots + B_k$ de caras inferiores de los \tilde{P}_i . Por tanto, la subdivisión regular obtenida con este levantamiento es, en efecto, una subdivisión mixta. \square

Observación 3.22. La Proposición 3.21 nos da una manera de construir subdivisiones mixtas regulares: tomar levantamientos individuales de los sumandos de Minkowski y hacer su suma de Minkowski. Aunque no lo vamos a demostrar, el recíproco también es cierto: todas las subdivisiones regulares mixtas se obtienen por este procedimiento.

Nótese que cuando se hace una subdivisión mixta regular con este método, cada celda C de la subdivisión se descompone como $C_1 + \dots + C_k$, donde cada C_i es una celda de la subdivisión regular de P_i dada por el levantamiento α_i .

Ejemplo 3.23. Veamos ahora un ejemplo en el que se pueda ver aplicada la Proposición 3.21.

Sean A_1 y A_2 las siguientes configuraciones de puntos (Figura 3.9):

$$A_1 = \{0, 2, 3\}$$

$$A_2 = \{0, 1, 3\}$$

Tomamos como vectores de levantamiento $\alpha_1 = (0, 0, 1)$ para A_1 y $\alpha_2 = (2, 1, 2)$ para A_2 . La configuración levantada de A_1 y A_2 dada por α_1 y α_2 respectivamente se puede observar en la Figura 3.10.

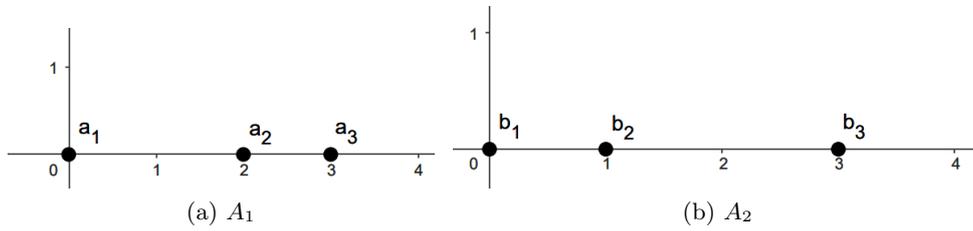


Figura 3.9: Configuración de puntos.

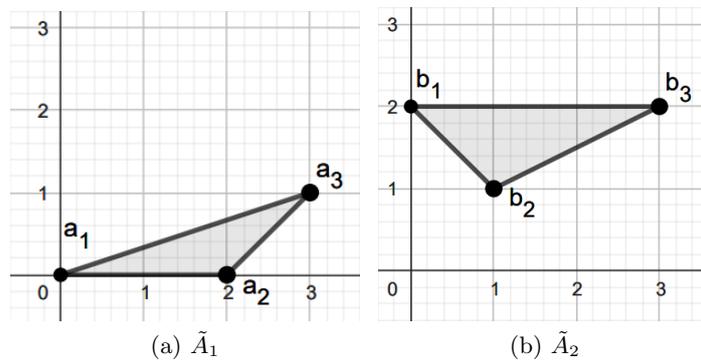


Figura 3.10: Levantamiento de la configuración de puntos.

Por otro lado, calculamos la suma de Minkowski de A_1 y A_2 :

$$A_1 + A_2 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

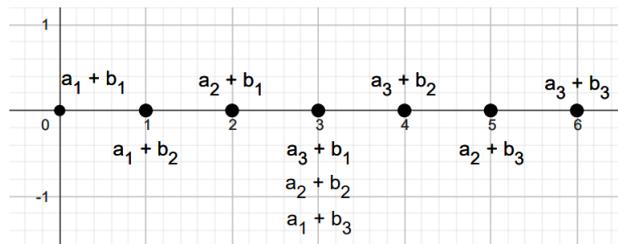


Figura 3.11: $A_1 + A_2$

Donde cada suma de puntos de A_1 y A_2 puede dar el mismo punto, como se puede observar en la Figura 3.11.

El vector de levantamiento será el dado por $\tilde{\alpha}$, donde a cada punto de la suma de Minkowski le corresponde la suma del vector de levantamiento de los puntos que

conforman dicha suma:

$$\begin{aligned}
 a_1 + b_1 &\rightarrow 2 \\
 a_1 + b_2 &\rightarrow 1 \\
 a_2 + b_1 &\rightarrow 2 \\
 a_1 + b_3 &\rightarrow 2 \\
 a_2 + b_2 &\rightarrow 1 \\
 a_3 + b_1 &\rightarrow 3 \\
 a_3 + b_2 &\rightarrow 2 \\
 a_2 + b_3 &\rightarrow 2 \\
 a_3 + b_3 &\rightarrow 3
 \end{aligned}$$

El levantamiento definido anteriormente produce la siguiente configuración levantada de $A_1 + A_2$:

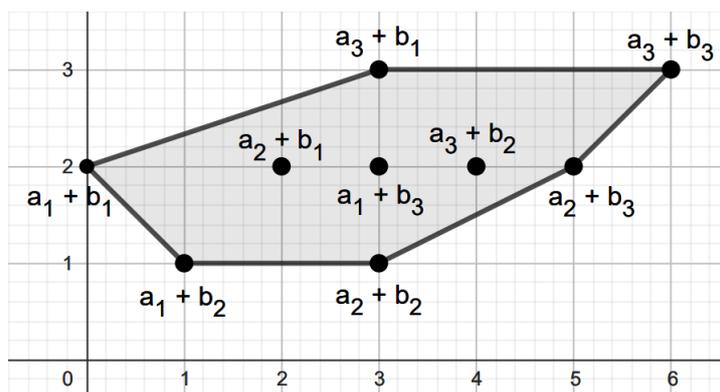


Figura 3.12: $\widetilde{A_1 + A_2}$

La Figura 3.12 es a su vez una subdivisión mixta ya que es la suma de Minkowski de $\widetilde{A}_1 + \widetilde{A}_2$ y, por lo tanto, $\widetilde{A}_1 + \widetilde{A}_2 = \widetilde{A_1 + A_2}$

Ejemplo 3.24 (Continuación del Ejemplo 3.20). La subdivisión del Ejemplo 3.20 es regular, un posible levantamiento de los cuadrados que produce dicha subdivisión es el que se ve en la Figura 3.13.

Las celdas de Minkowski de la subdivisión mixta calculada vienen dadas por:

$$\begin{aligned}
 B_1 &= a_1 a_2 a_4 + b_1 & B_2 &= a_2 a_4 + b_1 b_2 & B_3 &= a_2 a_3 a_4 + b_2 \\
 B_4 &= a_4 + b_1 b_3 b_4 & B_5 &= a_4 + b_1 b_2 b_3 & B_6 &= a_3 a_4 + b_2 b_3
 \end{aligned}$$

La suma de Minkowski de estos dos cuadrados produce una configuración con 16 elementos aunque algunos de ellos se superponen, es decir, son el mismo “punto” geoméricamente.

Por ejemplo, en la Figura 3.13, $a_1 + b_2 = a_2 + b_1$, sin embargo, cada una de las copias del “punto” tiene un levantamiento distinto, en este caso $3+0 = 3$ y $2+0 = 2$. Como en la subdivisión mixta solo se usa la “copia de más abajo” de cada punto, en este caso se ve el $a_2 + b_1$, cuyo levantamiento es 2.

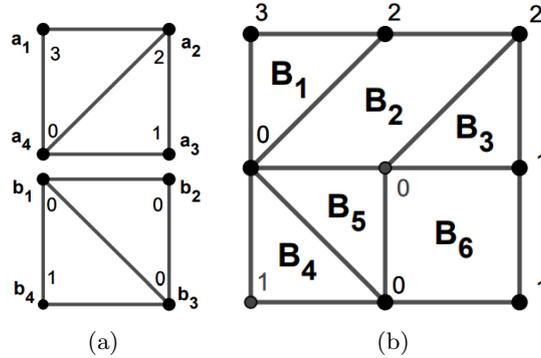


Figura 3.13: Levantamiento de los cuadrados.

Ejemplo 3.25. Veamos ahora la importancia del etiquetado dados dos cuadrados iguales a los del Ejemplo 3.24 pero que sin embargo dan otra subdivisión mixta de su suma de Minkowski.

En la Figura 3.14(a) se tienen los mismos cuadrados que en la Figura 3.13 exceptuando el levantamiento del vértice a_1 , que en este caso es 1,5. Los vectores de levantamiento producen la misma subdivisión de cada cuadrado que en el Ejemplo 3.24, pero la subdivisión mixta cambia.

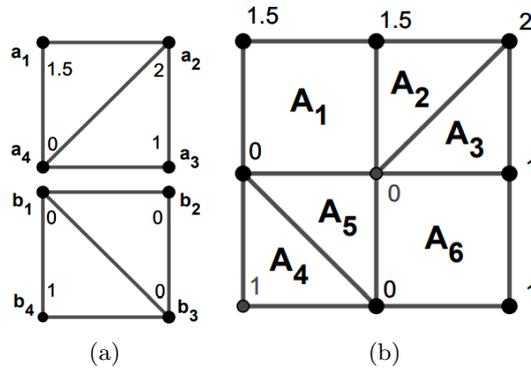


Figura 3.14: Subdivisión mixta.

Las celdas de Minkowski de la subdivisión mixta calculada vienen dadas por:

$$\begin{aligned} A_1 &= a_1 a_4 + b_1 b_2 & A_2 &= a_1 a_2 a_4 + b_2 & A_3 &= B_3 \\ A_4 &= B_4 & A_5 &= B_5 & A_6 &= B_6 \end{aligned}$$

donde B_3, B_4, B_5 y B_6 son las celdas de Minkowski del Ejemplo 3.24. Como se puede observar en la Figura 3.14 (b) la subdivisión mixta que se ha obtenido no es la misma que la del ejemplo anterior sin embargo la suma de Minkowski sobre la que se calcula dicha subdivisión usa los mismos cuadrados. Esto sucede porque los levantamientos, que son los que forman las celdas de la subdivisión mixta, son distintos, por lo que no forman la misma subdivisión.

3.3. Unimodularidad y descomposición entera

Definición 3.26. Dado un conjunto $U = \{v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbb{Z}^d$ de vectores enteros y que generan linealmente \mathbb{R}^d , se dice que U es **unimodular** si los determinantes de todas las bases contenidas en U son 1 o -1 .

Equivalentemente, si todos los menores de tamaño $d \times d$ de la matriz que tiene a U como columnas son 0, 1 o -1 .

La principal propiedad de las configuraciones unimodulares es el siguiente Lema:

Lema 3.27. Sea $U \subset \mathbb{Z}^d$ un conjunto unimodular y sea

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$$

una combinación lineal de elementos de U , con v_1, \dots, v_k linealmente independientes. Se tiene que

$$v \in \mathbb{Z}^d \Rightarrow \alpha_i \in \mathbb{Z} \quad \forall i.$$

Demostración. Como los v_i son linealmente independientes tenemos $k \leq d$. Pero, además, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $k = d$ ya que extendemos $\{v_1, \dots, v_k\}$ a una base contenida en U , tomando para ello $\alpha_{k+1} = \dots = \alpha_d = 0$.

Sea $v \in \mathbb{Z}^d$, pensemos en los α_i como solución del siguiente sistema lineal:

$$(v_1 \quad \dots \quad v_d) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \end{pmatrix} = v$$

Como v_1, \dots, v_d son base, la solución del sistema es única. Por la regla de Cramer dicha solución es:

$$\alpha_i = \frac{|v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_d|}{|v_1, \dots, v_d|}$$

donde \hat{v}_i representa que en la i -ésima columna se encuentra el vector v en lugar del v_i .

Como el determinante del numerador pertenece a \mathbb{Z} por ser el determinante de vectores en \mathbb{Z} y el determinante del denominador pertenece a $\{-1, 1\}$ por ser una base contenida en U , que es un conjunto unimodular (no puede tomar el valor 0 ya que son base), se tiene que $\alpha_i \in \mathbb{Z}$, como se quería demostrar. \square

Abusando un poco de la notación, decimos que un politopo P tiene aristas en un conjunto U de vectores si para toda arista $\{a, b\}$ se tiene que el vector $b - a$ está en U .

Notación 3.28. En el siguiente teorema y en el resto del trabajo usaremos la siguiente notación para todo $S \subset \mathbb{R}^d$:

$$\text{conv}_{\mathbb{Z}}(S) = \text{conv}(S) \cap \mathbb{Z}^d$$

Teorema 3.29. Sea U un conjunto unimodular de vectores. Si P y Q son politopos con vértices enteros y con aristas en U , entonces

$$\text{conv}_{\mathbb{Z}}(P + Q) = \text{conv}_{\mathbb{Z}}(P) + \text{conv}_{\mathbb{Z}}(Q)$$

Obsérvese que en este teorema el contenido:

$$\text{conv}_{\mathbb{Z}}(P) + \text{conv}_{\mathbb{Z}}(Q) \subset \text{conv}_{\mathbb{Z}}(P + Q)$$

es trivial. Por definición de suma de Minkowski, si $p \in P$ y $q \in Q$ entonces $p + q \in P + Q$ y si $p, q \in \mathbb{Z}^d$ entonces $p + q \in \mathbb{Z}^d$.

El otro contenido es el que no siempre se cumple, como se puede observar en el siguiente ejemplo. Cuando se cumple decimos que P y Q tienen la **propiedad de descomposición entera**.

Ejemplo 3.30. *Veamos un ejemplo en el que*

$$\text{conv}_{\mathbb{Z}}(P + Q) \not\subset \text{conv}_{\mathbb{Z}}(P) + \text{conv}_{\mathbb{Z}}(Q)$$

Dados dos politopos, Figura 3.15:

$$\text{conv}(P) = \text{conv}\{(0, 0), (2, 0), (2, 2), (0, 2)\}$$

$$\text{conv}(Q) = \text{conv}\{(0, 0), (2, 0), (6, 3), (4, 3)\}$$

se calcula su suma de Minkowski:

$$\text{conv}(P + Q) = \text{conv}\{(0, 0), (4, 0), (8, 3), (8, 5), (4, 5), (0, 2)\}$$

donde los puntos señalados en la Figura 3.16 son los puntos que se pueden formar a partir de los politopos dados.

Como se puede observar en la Figura 3.16, el punto (1, 1) no se puede formar a partir de la suma de dos puntos de los politopos $\text{conv}(P)$ y $\text{conv}(Q)$.

El ejemplo se puede hacer más drástico del siguiente modo: si se toma

$$\text{conv}(Q) = \text{conv}\{(0, 0), (2, 0), (n + 4, 3), (n + 6, 3)\}$$

se tiene que

$$|\text{conv}_{\mathbb{Z}}(P) + \text{conv}_{\mathbb{Z}}(Q)| \leq |\text{conv}_{\mathbb{Z}}(P)| \cdot |\text{conv}_{\mathbb{Z}}(Q)| \leq 9 \cdot 12,$$

donde el 12 viene de que en Q los puntos enteros están en uno de los cuatro segmentos horizontales (rectas que contienen dichos segmentos en línea discontinua), de longitud dos. En cambio, en $\text{conv}_{\mathbb{Z}}(P + Q)$ el número de puntos tiende a infinito con n .

Para demostrar el Teorema 3.29 introducimos la siguiente noción: una suma de Minkowski $P + Q$ es **suma directa** si P y Q no contienen segmentos paralelos entre sí. En este caso también decimos que P y Q son sumandos directos. O sea, sean U y V los subespacios vectoriales paralelos a $\text{aff}(P)$ y $\text{aff}(Q)$. Lo que estamos diciendo es que $U \cap V = \{0\}$ o, equivalentemente, que

$$\dim(U + V) = \dim(U) + \dim(V).$$

La razón por la que lo llamamos suma directa es que si $P + Q$ es una suma directa cada punto de $P + Q$ se descompone de manera única como suma de un punto de P y un punto de Q .

La misma definición se extiende a las caras. Dadas dos caras F y G de P y Q respectivamente decimos que las caras son sumandos directos si $F + G$ es suma directa de F y G .

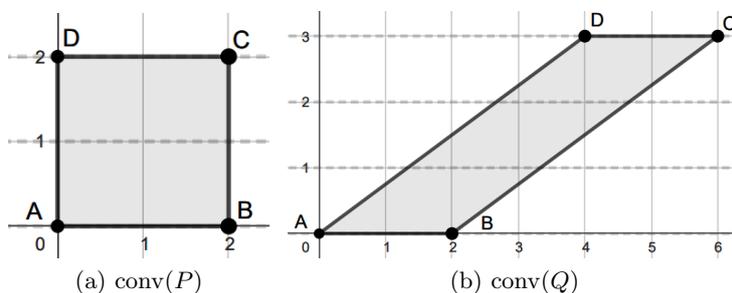


Figura 3.15: Politopos con vértices enteros.

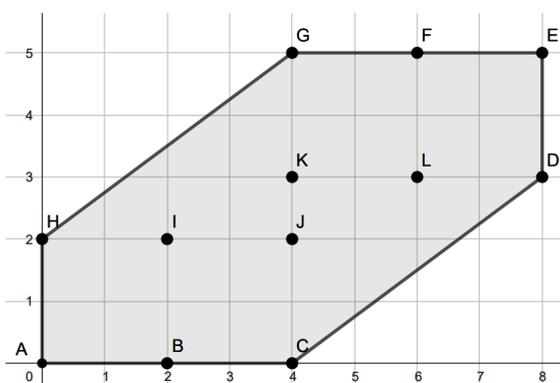


Figura 3.16: Suma de Minkowski.

Lema 3.31. *Dado un $r \in P + Q$, siempre existen caras F y G de P y Q que son suma directa y tales que $r \in F + G$.*

Demostración. Sea $r \in P + Q$. Sea $k \in \mathbb{N}$ el número más pequeño tal que $r \in F + G$ donde F y G son caras de P y Q con

$$k = \dim(F) + \dim(G).$$

Vamos a demostrar que las caras F y G , donde ese mínimo se alcanza necesariamente, son suma directa. Para ello, supongamos que tenemos r escrito como $p + q$ con $p \in F$ y $q \in G$. Hay dos casos:

- Si p está en el borde de F o q en el borde de G , tenemos una contradicción.
- Si no, p está en el interior de F y q en el interior de G . Si F y G no fueran sumandos directos, existiría un vector v paralelo a F y a G . Es decir, para ϵ pequeño tenemos que $p + \epsilon v$ y $q - \epsilon v$ siguen estando en F y G . Si elegimos el ϵ más grande para el que eso sigue ocurriendo, tenemos que uno (o los dos) de $p + \epsilon v$ y $q - \epsilon v$ está en el borde, y se sigue cumpliendo que

$$r = p + q = (p + \epsilon v) + (q - \epsilon v).$$

El caso anterior nos da una contradicción.

□

Demostración del Teorema 3.29. Sea r un punto entero de $P+Q$. Queremos demostrar que $r \in \text{conv}_{\mathbb{Z}}(P) + \text{conv}_{\mathbb{Z}}(Q)$.

Por el lema anterior, podemos escribir $r = p + q$ con p y q en caras de P y Q que son suma directa. En la práctica eso significa que, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que P y Q son suma directa y, por tanto, p y q son los únicos puntos de P y Q con $r = p + q$.

Lo que queremos ver es que p y q son enteros. Sea p_0 un punto entero de P y sean $\{p_1, \dots, p_a\}$ una base (vectorial) del espacio vectorial paralelo a P formada por vectores arista de P . Por definición de base todo punto de $\text{aff}(P)$, en particular el punto p , se escribe de manera única como

$$p = p_0 + \lambda_1 p_1 + \dots + \lambda_a p_a,$$

con $\lambda_i \in \mathbb{R}$ para todo i . Es decir, tenemos que

$$p - p_0 = \lambda_1 p_1 + \dots + \lambda_a p_a.$$

Del mismo modo, tomando un punto entero q_0 de Q y una base $\{q_1, \dots, q_b\}$ del espacio vectorial paralelo a Q y formada por vectores arista de Q tenemos que

$$q - q_0 = \mu_1 q_1 + \dots + \mu_b q_b.$$

con $\mu_j \in \mathbb{R}$ para todo j .

Consideremos el vector

$$p + q - (p_0 + q_0).$$

Este vector es combinación lineal de $V := \{p_1, \dots, p_a, q_1, \dots, q_b\}$ y, como V es una configuración unimodular, el Lema 3.27 nos dice que los coeficientes λ_i y μ_j son todos enteros. Eso significa que $p - p_0$ es combinación lineal entera de $\{p_1, \dots, p_a\}$ y $q - q_0$ es combinación lineal entera de $\{q_1, \dots, q_b\}$. Por tanto, $p - p_0$ y $q - q_0$ son enteros, y, por ello, p y q también son enteros. □

El recíproco del Teorema 3.29 no es cierto siempre. O sea, puede darse la igualdad del Teorema sin que el conjunto de aristas sea unimodular. Pero no en el caso de un paralelepípedo. Para demostrarlo, veamos primero un lema sobre matrices unimodulares:

Lema 3.32. Sea $M \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ una matriz con coeficientes enteros. Son equivalentes:

1. M es unimodular (es decir, $\det(M) = \pm 1$).
2. La aplicación $M : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ definida como $v \mapsto Mv$ es suprayectiva (y, por tanto, biyectiva).

Demostración. Por álgebra lineal sabemos que la aplicación es inyectiva sobre los reales (y por tanto sobre \mathbb{Z}^n) si y solo si $\det(M) \neq 0$. Así que supongamos $\det(M) \neq 0$ y veamos que M es suprayectiva como aplicación $\mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ si y solo si es unimodular como matriz.

Una dirección nos la da el Lema 3.27: resolver $Mv = b$ es lo mismo que escribir b como combinación lineal de las columnas de M . Como M es unimodular sus columnas son una configuración unimodular, por lo que para cualquier $b \in \mathbb{Z}^n$ la solución v está también en \mathbb{Z}^n y se tiene la implicación de 1 a 2.

Para la otra dirección, supongamos que M es suprayectiva. Entonces $M : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ es biyectiva, así que M^{-1} también. En particular, $M^{-1}(e_i)$ es entero para todo vector e_i de la base canónica. Eso implica que M^{-1} es una matriz con coeficientes enteros. Pero entonces $\det(M^{-1})$ es entero y, como $\det(M^{-1})$ es el inverso de $\det(M)$, que también es entero, necesariamente $\det(M) \in \pm 1$. \square

Proposición 3.33. Sean $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{Z}^n$ vectores linealmente independientes. Sea $P_i = [0, u_i]$ el segmento definido por u_i .

La suma de Minkowski $P = P_1 + \dots + P_n$ tiene la propiedad de descomposición entera si y solo si $\{u_1, \dots, u_n\}$ es unimodular.

Demostración. Como las aristas de P son precisamente los vectores u_i , la dirección hacia la izquierda es el Teorema 3.29.

Para la dirección hacia la derecha, consideramos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que manda $e_i \mapsto u_i$, o sea, cuya matriz es $M = (u_1, \dots, u_n)$.

Lo que vamos a ver es que si $\{u_1, \dots, u_n\}$ no es unimodular, $\sum_i \text{conv}_{\mathbb{Z}}(P_i)$ está contenido en $f(\mathbb{Z}^n)$ pero $\text{conv}_{\mathbb{Z}}(P)$ no, y por tanto

$$\sum_i \text{conv}_{\mathbb{Z}}(P_i) \neq \text{conv}_{\mathbb{Z}}(P).$$

Para la primera parte,

$$\sum_i \text{conv}_{\mathbb{Z}}(P_i) = \sum_i \{0, u_i\}^n = f(\{0, 1\}^n) \subset f(\mathbb{Z}^n).$$

Para la segunda parte, por el lema anterior la aplicación $f : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ no es suprayectiva. Sea $a \in \mathbb{Z}^n$ un punto que no está en $f(\mathbb{Z}^n)$. Como u_1, \dots, u_n son base de \mathbb{R}^n , podemos escribir

$$a = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n,$$

para ciertos λ_i .

Sea $\lambda'_i = \lambda_i - \lfloor \lambda_i \rfloor$, es decir, el único número en $[0, 1)$ con $\lambda_i - \lambda'_i \in \mathbb{Z}$. Entonces tenemos que llamando

$$a' = \lambda'_1 u_1 + \dots + \lambda'_n u_n,$$

tenemos que:

- el punto a' está en $\text{conv}_{\mathbb{Z}}(P)$ porque

$$\text{conv}(P) = \{\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n : \lambda_i \in [0, 1]\}.$$

- a' no está en $f(\mathbb{Z}^n)$ porque $f(\mathbb{Z}^n)$ es un grupo con la suma y

$$f(a') = f(a) - \sum_i (\lambda_i - \lambda'_i) f(u_i) = f(a) - f\left(\sum_i (\lambda_i - \lambda'_i) u_i\right). \quad \square$$

Capítulo 4

Contexto económico. Subastas, precios y valoraciones.

Notación 4.1. *Antes de comenzar a hablar de la configuración económica, cabe destacar que se denota \mathbb{N} como el conjunto de los números naturales que contiene al cero.*

Se considera una subasta con m tipos de bienes indivisibles que se venden a n agentes, donde $a_i^* \in \mathbb{N}$ es la cantidad de bienes del tipo $i \in [m]$, donde $[m] = \{1, \dots, m\}$. Se asume que cada agente quiere comprar como mucho un artículo de cada tipo.

El vector $a^* \in \mathbb{N}^m$ es el vector que viene dado por las cantidades de bienes que están a la venta en la subasta, es decir, es el número de bienes de cada tipo que están a la venta.

4.1. Paquetes, valoraciones y precios

Definición 4.2. *Se denomina **paquete** S a un conjunto de artículos diferentes. O sea, un paquete es un subconjunto de $[m]$.*

Definición 4.3. *Sea $\mathcal{P}([m])$ el conjunto potencia de $[m]$, es decir, todos los posibles subconjuntos de $[m]$. Se denomina **función de precios** a la función $p : \mathcal{P}([m]) \rightarrow \mathbb{R}$ que especifica el precio que se establece por cada paquete.*

Definición 4.4. *Sea $b \in [n]$ un agente, la función $\text{val}^b : \mathcal{P}([m]) \rightarrow \mathbb{R}$ se denomina **función de valoración**, donde $\text{val}^b(S) \in \mathbb{R}$ mide cuánto está dispuesto a pagar el agente b por el paquete S .*

Normalmente la función de valoración de cada agente es cero si no se recibe ningún elemento, es decir, $\text{val}^b(\emptyset) = 0$, y se suelen tener valoraciones monótonas, $\text{val}^b(S_1) \leq \text{val}^b(S_2)$ si $S_1 \subseteq S_2$, aunque para nuestros desarrollos no necesitamos suponer estas propiedades.

Dado un paquete $S \subseteq [m]$, se denomina **vector característico** de S al vector, $a_S \in \{0, 1\}^m$ con $a_i = 1$ si y solo si $i \in S$. Los vectores característicos nos dan una

biyección entre $\mathcal{P}([m])$ y $\{0, 1\}^m$ de modo que algunas veces pensaremos formalmente en los paquetes como elementos de $\{0, 1\}^m$. Con esta interpretación, si S_1 y S_2 son dos paquetes, $S_1 + S_2$ representa su unión disjunta.

Observación 4.5. *Cabe destacar que existen modelos más generales en los cuales existen paquetes con repetición de bienes. En ese caso el paquete es un elemento de \mathbb{N}^m y $S_1 + S_2$ tiene sentido aunque S_1 y S_2 no sean disjuntos.*

Definición 4.6. *Una función $f : \{0, 1\}^m \rightarrow \mathbb{R}$ de valoración o de precios se denomina **lineal** cuando se cumple que para todo par de paquetes S_1 y S_2 con suma $S = S_1 + S_2$, la valoración o el precio de S es la misma que la de la suma de cada paquete S_1, S_2 . Es decir,*

$$f(S) = f(S_1) + f(S_2)$$

Obsérvese que, en términos de vectores característicos, ser lineal es equivalente a ser la restricción a $\{0, 1\}^m$ de una función lineal en \mathbb{R}^m .

Observación 4.7. *Como veremos más adelante, las funciones de precios muchas veces se suponen lineales. Es decir, a cada tipo de artículo se le asigna un precio p_i y el precio del conjunto de artículos S es $p(S) = \sum_{i \in S} p_i$.*

En cambio para las valoraciones tiene sentido que no sean lineales. En una valoración lineal no se tienen en cuenta las interacciones entre artículos. Sin embargo, en la práctica, puede haber artículos que tengan distinto valor si vienen juntos que si vienen sueltos.

*Sean $i, j \in S$ artículos, se dicen que son una **pareja complementaria** si*

$$\text{val}^b(\{i, j\}) \geq \text{val}^b(\{i\}) + \text{val}^b(\{j\}),$$

es decir, el agente b considera que cada uno de los artículos añade valor al otro.

*Por otro lado, se dice que son una **pareja sustitutiva** si*

$$\text{val}^b(\{i, j\}) \leq \text{val}^b(\{i\}) + \text{val}^b(\{j\}),$$

es decir, el agente considera que no tiene tanto valor comprar el otro producto si ya tiene uno de ellos, porque a lo mejor hacen la misma función o son incompatibles.

Puede ocurrir que el agente solo esté interesado en algunos paquetes concretos. Por eso, en el resto del trabajo, denotaremos $A^b \subset \{0, 1\}^m$ al conjunto de paquetes en los que el agente b está potencialmente interesado, y tendremos que val^b solo estará definida en A^b .

4.2. Conjunto de demanda. Equilibrio competitivo y equilibrio de precios

Nuestro modelo de subasta es el siguiente. Primero los agentes presentan sus valoraciones al subastador. Después el subastador anuncia el precio p y una asignación a_{S_1}, \dots, a_{S_n} donde $a_{S_b} \in A^b$, para cada b , representa que ese paquete se le asigna al agente b . Tiene que cumplirse que $a = \sum_{b=1}^n a_{S_b} \leq a^*$ ($a \leq a^*$ coordenada a coordenada).

Si todos los agentes y el vendedor están de acuerdo, entonces el agente b obtiene el paquete a_{S_b} y paga $p(a_{S_b})$ al vendedor. En caso de que alguno de ellos no esté de acuerdo, en teoría, “el equilibrio ha fallado”.

Se considera que el agente b está satisfecho con el par asignación-precio $(a_{S_b}, p(a_{S_b}))$ cuando se le asigna un paquete que maximiza la utilidad de los artículos a ese precio.

Definición 4.8. *Sea un precio dado p , el conjunto de paquetes que maximiza la utilidad para el agente b se denomina **conjunto de demanda**:*

$$D(\text{val}^b, p) = \arg \max_{a_S \in A^b} \left\{ \text{val}^b(a_S) - p(a_S) \right\}.$$

Entonces, el agente b está satisfecho con el par asignación-precio cuando $a_{S_b} \in D(\text{val}^b, p)$.

En esta configuración sólo se consideran asignaciones completas, es decir, el vendedor tiene que vender todos los artículos del paquete.

Una manera poco formal de definir **equilibrio competitivo (CE)** es en la que todos los agentes están satisfechos. Un concepto más sólido es el de **equilibrio de precios (PE)**, donde el vendedor es otro participante que necesita estar satisfecho, es decir, necesita una maximización de sus ganancias.

Una maximización de las ganancias del vendedor es la máxima ganancia que puede conseguir dado un precio p , es decir,

$$D(\text{vendedor}, p) = \arg \max_{a \leq a^*} \{p(a)\}$$

con $a = \sum_{b=1}^n a_{S_b} \leq a^*$, siendo cada a_{S_i} el paquete del agente i .

Entre estas dos nociones se encuentra el **equilibrio competitivo óptimo**: un par asignación-precio tal que las ganancias del vendedor se maximizan entre todos los $a \leq a^*$ en el que existe un equilibrio competitivo.

Nótese que cuando el precio es lineal la ganancia del vendedor sólo depende de la suma de los precios de los paquetes en la asignación, $\sum_{b=1}^n p(a_{S_b}) = p(\sum_{b=1}^n a_{S_b}) = p(a_S)$. En otras palabras, la ganancia del vendedor es independiente de la asignación de los paquetes. Por tanto, las nociones de equilibrio competitivo y equilibrio de precios coinciden y se conocen como **equilibrio de Walras**.

El Teorema de Unimodularidad, Teorema 5.8, garantiza el equilibrio de Walras para algunas subastas y está relacionado con subdivisiones regulares.

4.3. Valoración y demanda agregada

Los teoremas y definiciones de esta Sección se han extraído de *Product-Mix Auctions and Tropical Geometry* de Ngoc Mai Tran y Josephine Yu [8].

A partir de aquí las funciones de precio que se considerarán serán únicamente las de precio lineal.

Hasta ahora sólo se ha tomado la valoración y la demanda individual de cada agente $b \in [n]$ pero también se podría tratar de manera agregada, es decir, como un conjunto global de todos los agentes.

Definición 4.9. *Recuérdese que se denota $A^b \subset \{0, 1\}^m$ al conjunto de paquetes en que está potencialmente interesado el agente b . Sea n el número de agentes. Llamamos **espacio de asignaciones** al conjunto*

$$A := \left\{ \sum_{b=1}^n a_b : a_b \in A^b \text{ para cada } b = 1, \dots, n \right\}.$$

Cada punto de A representa la unión de los paquetes de una posible asignación a los n agentes. Si tomamos $A^b = \{0, 1\}^m$ se tiene que $A = \{0, \dots, n\}^m$.

Observación 4.10. *El espacio de asignaciones A es casi lo mismo que la suma de Minkowski*

$$\sum_{b=1}^n A^b,$$

que abreviaremos como $\sum_b A^b$, pero tienen una diferencia que es importante en las demostraciones.

La diferencia es que en $\sum_b A^b$ cada punto viene etiquetado por una descomposición $a = a_1 + \dots + a_n$, de modo que $\sum_b A^b$ es en realidad un multiconjunto en el que cada punto aparece repetido tantas veces como maneras haya de descomponerlo en suma de puntos de los A^b .

Obsérvese que hay una aplicación natural $\sum_b A^b \rightarrow A$ que “olvida” la descomposición asociada a cada punto.

Definición 4.11. *Se denomina **función de valoración agregada** a la función $\text{val} : A \rightarrow \mathbb{R}$ obtenida como la valoración máxima sobre todas las maneras de repartir cada $a \in A$ como paquetes asignados a los agentes. Es decir:*

$$\text{val}(a) := \max \left\{ \sum_{b=1}^n \text{val}^b(a_b) : a_b \in A^b \text{ y } \sum_{b=1}^n a_b = a \right\}$$

Como ya se ha dicho, suponemos que la función p de precios es lineal. Por tanto, $p(a)$ está bien definido para cada $a \in A$, sin necesidad de especificar una manera de asignarlo.

Definición 4.12. *La **demanda agregada** para un precio lineal p es el conjunto de demanda de la valoración agregada val . Es decir:*

$$D(\text{val}, p) := \arg \max_{a \in A} \{\text{val}(a) - p(a)\}$$

En [8] (Sección 2, página 4) se menciona sin demostración la siguiente propiedad, aunque allí no se hace explícita la diferencia entre el conjunto A y el multiconjunto $\sum_b A^b$:

Lema 4.13. *Suponiendo que la función de precios p es lineal, se tiene que la demanda agregada es la “suma de Minskowski de las demandas”. Es decir, $D(\text{val}, p)$ es la imagen de*

$$\sum_{b=1}^n D(\text{val}^b, p) \subseteq A$$

por la aplicación $\sum_b A^b \rightarrow A$ que “olvida” las descomposiciones de los puntos.

Demostración. Hagamos la demostración por doble contenido:

⊆) Supongamos que tenemos un $a \in D(\text{val}, p)$. Por definición de valoración agregada, tenemos que:

$$\text{val}(a) = \text{val}^1(a_1) + \cdots + \text{val}^n(a_n),$$

para ciertos $a_i \in A^i$ con $a = \sum_{i=1}^n a_i$ y, además, con la propiedad de que ninguna otra descomposición de a nos da una suma de valoraciones mayor. Queremos ver que cada uno de estos a_i está en $D(\text{val}^i, p)$.

Si no fuera así, existiría un $i \in [n]$ y un \tilde{a}_i con

$$\text{val}^i(\tilde{a}_i) - p(\tilde{a}_i) > \text{val}^i(a_i) - p(a_i).$$

Pero entonces tomando $\tilde{a} = a - a_i + \tilde{a}_i = \sum_{j \neq i} a_j + \tilde{a}_i$ tenemos que:

$$\begin{aligned} \text{val}(\tilde{a}) &\geq \sum_{j \neq i} \text{val}^j(a_j) + \text{val}^i(\tilde{a}_i) \\ &= \text{val}(a) - \text{val}^i(a_i) + \text{val}^i(\tilde{a}_i) \\ &> \text{val}(a) - p(a_i) + p(\tilde{a}_i) = \\ &= \text{val}(a) - p(a) + (p(a) - p(a_i) + p(\tilde{a}_i)) = \\ &= \text{val}(a) - p(a) + p(\tilde{a}). \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\text{val}(\tilde{a}) - p(\tilde{a}) > \text{val}(a) - p(a),$$

lo que contradice la hipótesis.

⊇) Supongamos que tenemos un $a \in \sum_{b=1}^n D(\text{val}^b, p)$, entonces existe unos a_i con

$$a = a_1 + \cdots + a_n$$

y con $a_b \in D(\text{val}^b, p)$ para cada b .

Supongamos por reducción al absurdo que $a \notin D(\text{val}, p)$, entonces, por definición de val , $\exists \tilde{a}$ con $\text{val}(\tilde{a}) - p(\tilde{a}) > \text{val}(a) - p(a)$.

Por definición de valoración agregada y ser p lineal, $\exists \tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n$ tal que:

$$\begin{aligned} \sum_i \text{val}^i(\tilde{a}_i) - \sum_i p(\tilde{a}_i) &> \sum_i \text{val}^i(a_i) - \sum_i p(a_i) \\ &\Downarrow \\ \sum_i (\text{val}^i(\tilde{a}_i) - p(\tilde{a}_i)) &> \sum_i (\text{val}^i(a_i) - p(a_i)) \end{aligned}$$

Entonces $\exists i$ tal que $\text{val}^i(\tilde{a}_i) - p(\tilde{a}_i) > \text{val}^i(a_i) - p(a_i)$ pero esto implica que $a_i \notin D(\text{val}^i, p)$ para dicho i . \square

El Lema 4.13 implica que (para precios lineales) la definición de equilibrio competitivo de la Sección anterior es equivalente a la siguiente:

Definición 4.14. *El conjunto de funciones de valoración $\{\text{val}^b\}$ tiene un **equilibrio competitivo** en $a \in \text{conv}(A)$ si existe una función de precios lineal $p : \{0, 1\}^m \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $a \in D(\text{val}, p)$. Se dice que existe un equilibrio competitivo en A si existe para todo $a \in \text{conv}(A) \cap \mathbb{Z}^m$.*

Capítulo 5

Equilibrio competitivo y subdivisiones regulares. El Teorema de Unimodularidad

En este Capítulo se narra la conexión entre el equilibrio competitivo (CE) y las subdivisiones regulares y mixtas que estudiamos en la primera parte de la memoria.

5.1. Conjuntos de demanda como celdas de una subdivisión regular

Dado un $A^b \subset \{0,1\}^m$, una valoración $\text{val}^b : A^b \rightarrow \mathbb{R}$ se puede interpretar como una función de levantamiento definida en los vértices del politopo $\text{conv}(A^b)$, contenido en el cubo unidad. Es decir, para cada $a_S \in A^b$ usamos $\text{val}^b(a_S)$ como altura para el vértice a_S del cubo. Por tanto, podemos hablar de la subdivisión regular (de A^b) definida por val^b .

Del mismo modo la función p , entendida como función en los vértices del cubo, es un “levantamiento afín”. Veamos que los posibles conjuntos de demanda son las celdas de una subdivisión regular:

Teorema 5.1. *Sea $A^b \subset \{0,1\}^m$ y $\text{val}^b : A^b \rightarrow \mathbb{R}$, con $b \in [n]$, una valoración arbitraria. Entendamos A^b como una configuración de puntos y consideremos la subdivisión regular S de ella producida por el levantamiento $-\text{val}^b : A^b \rightarrow \mathbb{R}$.*

1. *Para toda función lineal de precios p el conjunto de demanda, $D(\text{val}^b, p)$, es el conjunto de puntos de una celda de S .*
2. *Toda celda de S es el conjunto de demanda para alguna función lineal de precios.*

Demostración. Para la primera parte, como p es lineal, del Lema 3.12 se tiene que los levantamientos $-\text{val}^b$ y $p - \text{val}^b$ producen la misma subdivisión regular del cubo.

Definamos ahora $f = p - \text{val}^b : A^b \rightarrow \mathbb{R}$ como una función de levantamiento. El levantamiento \tilde{A}^b producido por dicha función es un politopo “levantado” de

dimensión $m + 1$. El conjunto de demanda, por definición, es el siguiente:

$$D = \{a \in A^b : \text{val}^b(a) - p(a) \text{ es máximo}\},$$

o lo que es lo mismo:

$$D = \{a \in A^b : f(a) \text{ es mínimo}\}$$

Por lo tanto, el conjunto de demanda es la cara de \tilde{A}^b que minimiza el funcional f , es decir, la “última coordenada” (la coordenada que hemos añadido al levantar). Eso es una cara inferior del politopo levantado y, por tanto, una celda de la subdivisión regular S .

Para la segunda parte, procedemos al revés. Sea C una celda de la subdivisión S , la cual corresponde a una cara inferior \tilde{C} del politopo levantado. Sea $c \in \mathbb{R}^{m+1}$ un vector normal de esa cara. Como es una cara inferior, c tiene la forma $(-p, -1)$ para algún vector $p \in \mathbb{R}^m$ (donde interpretamos la función de precios lineal como un vector que tiene por coordenadas los precios de cada artículo).

Eso significa que si llamamos a_1, \dots, a_k a los puntos de C , se tiene que el funcional $(-p, -1)$ es constante en los puntos levantados $(a_i, -\text{val}^b(a_i))$. Es decir:

$$-p(a_i) + \text{val}^b(a_i) = \text{cte.}$$

Entonces el levantamiento $p - \text{val}^b$ produce la misma subdivisión, y hace que la cara \tilde{C} tenga como vector normal $(0, -1)$ porque ahora cada a_i se levanta al punto $(a_i, p(a_i) - \text{val}^b(a_i))$ y, por tanto, la última coordenada es constante.

Por el mismo argumento que en el apartado anterior se tiene entonces que C es el conjunto de demanda para ese precio p . \square

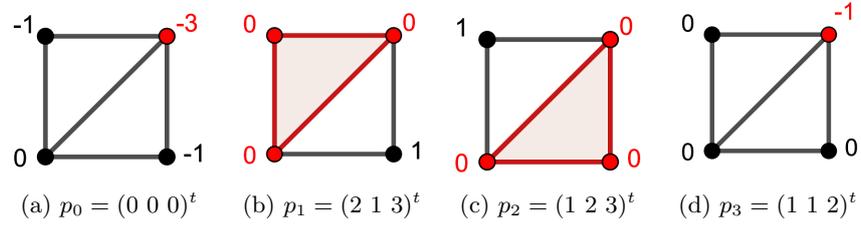
Observación 5.2. *En el teorema anterior en realidad lo que se quiere conseguir es la cara que maximiza $\text{val}^b - p$, que es el conjunto de demanda. Sin embargo, como en la Definición 3.6 para construir una subdivisión regular se ha usado el mínimo, se ha calculado $\text{mín}\{p - \text{val}^b\}$.*

Ejemplo 5.3. *Veamos aplicado el Teorema 5.1.*

Sea una subasta de un agente ($n = 1$) y dos bienes dados ($m = 2$), la valoración que da dicho agente es 1 para cada objeto por separado y 3 para los dos juntos. Es decir, $\text{val}(1,0) = 1$, $\text{val}(0,1) = 1$, $\text{val}(1,1) = 3$, que abreviaremos como $\text{val} = (1 \ 1 \ 3)^t$.

Dados diferentes precios lineales, veamos si el levantamiento $p - \text{val}$ (valor que aparece en cada vértice de la Figura 5.1) produce la misma subdivisión regular en todos los casos (Lema 3.12).

Si calculamos el conjunto de demanda en cada caso podemos ver que coincide con la cara que minimiza la última coordenada del politopo levantado (coloreada en rojo en la Figura 5.1), lo que equivale al Teorema 5.1 (1).


 Figura 5.1: Subdivisión regular producida por levantamiento de $p - \text{val}$.

$$(a) \ D(\text{val}, p_0) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(b) \ D(\text{val}, p_1) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(c) \ D(\text{val}, p_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(d) \ D(\text{val}, p_3) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Observación 5.4. Como continuación de la Observación 3.10, veamos las formas de nombrar a una subdivisión regular dada por unas valoraciones según el punto de intersección de las diagonales de la Figura 3.5, s_1 y s_2 .

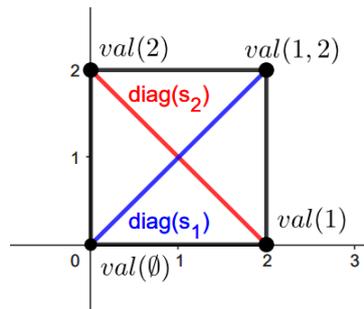


Figura 5.2: Subdivisión regular.

La altura del punto de intersección de las diagonales $\text{diag}(s_1)$ y $\text{diag}(s_2)$ aplicado a esta subdivisión de valoraciones (Figura 5.2), es:

$$h_1 = \frac{1}{2} \text{val}(\emptyset) + \frac{1}{2} \text{val}(1, 2)$$

$$h_2 = \frac{1}{2} \text{val}(1) + \frac{1}{2} \text{val}(2).$$

según si lo levantamos como punto de la diagonal s_1 o s_2 respectivamente.

Dependiendo de las relaciones de orden entre s_1 y s_2 , a la subdivisión regular se le denota como:

- Subdivisión regular suplementaria si $s_1 > s_2$.
- Subdivisión regular complementaria si $s_1 < s_2$.
- Subdivisión regular lineal si no es ni suplementaria ni complementaria, es decir, si $s_1 = s_2$.

En la Figura 5.1 del ejemplo anterior (Ejemplo 5.3), se puede observar que las cuatro subdivisiones regulares dadas por el levantamiento $p - \text{val}$, donde p es un precio lineal dado en cada caso, son complementarias.

De la misma manera se puede realizar dicho ejemplo para una subdivisión regular suplementaria, Figura 5.3 (a), cuya valoración dada sea $\text{val} = (2 \ 2 \ 3)^t$ y para una subdivisión regular lineal, Figura 5.3 (b), con valoración $\text{val} = (1 \ 1 \ 2)^t$. En estos casos la subdivisión regular que se generaría, sea cual sea el precio lineal dado, sería la siguiente:

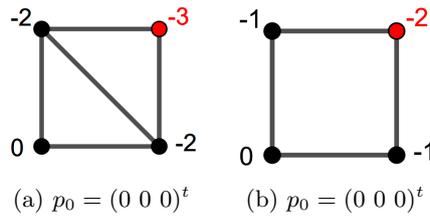


Figura 5.3: Subdivisión regular producida por levantamiento de $p - \text{val}$.

El Teorema 5.1 nos permite relacionar directamente la existencia de un equilibrio competitivo con la subdivisión mixta regular producida por las funciones de valoración.

Para ello necesitamos volver a aclarar la relación entre las dos versiones de la suma de Minkowski de los A^b . En la versión “sin repetición” que denotamos A tenemos definida la valoración agregada val .

En la versión “con repetición”, que denotamos $\sum_b A^b$, cada punto viene implícitamente expresado como una suma de puntos de cada A^b , y por tanto aparece “repetido” tantas veces como descomposiciones posibles tenga. Eso nos permite definir la valoración suma, que denotaremos $\sum_b \text{val}^b$ y que a cada $a_1 + \dots + a_n \in \sum_b A^b$ le asocia el valor $\sum_b \text{val}^b(a_b)$.

Por otro lado, hay una manera natural de pasar de $\sum_b A^b$ a A , simplemente olvidando las descomposiciones e identificando entre sí los puntos que aparecen repetidos. Lo primero que queremos ver es que estas dos versiones producen la misma subdivisión regular:

Lema 5.5. Sean $\text{val}^b : A^b \rightarrow \mathbb{R}$, con $b \in [n]$, un conjunto de valoraciones de los agentes. Sea $\text{val} : A \rightarrow \mathbb{R}$ la valoración agregada y sea $\sum_b \text{val}^b : \sum_b A^b \rightarrow \mathbb{R}$ la valoración suma.

Entonces, la subdivisión regular de $\sum_b A^b$ producida por $-\sum_b \text{val}^b$ se convierte, al olvidar las repeticiones de puntos, en la subdivisión regular de A producida por $-\text{val}$.

Demostración. Consideremos un punto a de A , que quizá se expresa de varias maneras diferentes como suma $\sum_b a_b$ y por tanto aparece varias veces en $\sum_b A^b$. En la subdivisión regular producida por $-\sum_b \text{val}^b$, la única copia de a que se puede usar es la que maximice la valoración $\sum_b \text{val}^b(a_b)$. Esto es precisamente lo que hace la valoración agregada val : tomar todas las posibles descomposiciones de a y asignar como valoración de a la máxima suma posible de las valoraciones de las descomposiciones.

Por tanto, las configuraciones levantadas de A por $-\text{val}$ y de $\sum_b A^b$ por $-\sum_b \text{val}^b$ tienen exactamente las mismas caras inferiores y producen la misma subdivisión regular. \square

Con esto podemos ya dar una versión del Teorema 5.1 para demanda agregada.

Teorema 5.6. Sean $\text{val}^b : A^b \rightarrow \mathbb{R}$, con $b \in [n]$, un conjunto de valoraciones de los agentes. Sea $\text{val} : A \rightarrow \mathbb{R}$ la valoración agregada y sea S la subdivisión regular de A producida por el levantamiento $-\text{val} : A \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Para toda función lineal de precios p el conjunto de demanda agregada, $D(\text{val}, p)$, es el conjunto de puntos de una celda de S .
2. Toda celda de S es el conjunto de demanda agregada para alguna función lineal de precios.

Demostración. Igual que en la demostración del Teorema 5.1, para la primera parte consideramos el levantamiento $p - \text{val}$ de A , siendo C la cara inferior de ese levantamiento que minimiza la última coordenada.

Por el Lema 5.5 podemos pensar en S como la subdivisión mixta de $\sum_b A^b$ dada por el levantamiento $\sum_b (p - \text{val}^b)$. De esta manera, C es la celda que se obtiene de “olvidar las descomposiciones” en la celda $C_1 + \dots + C_n$ de $\sum_b A^b$ que minimiza la última coordenada en ese levantamiento.

Además, por la Proposición 3.21 y el Lema 3.17, cada C_b coincide con la cara del levantamiento \tilde{A}^b que minimiza la última coordenada, es decir, con el subconjunto de A^b que minimiza $p - \text{val}^b$.

Tenemos entonces que:

- Por el Lema 4.13, $D(\text{val}, p)$ es la suma de Minkowski de los conjuntos de demanda individuales $D(\text{val}^b, p)$.
- Por el Teorema 5.1 cada $D(\text{val}^b, p)$ coincide con el correspondiente C_b .

Por tanto, $D(\text{val}, p)$ coincide con la suma de Minkowski de los C_i , o sea, con C . Esto termina la demostración del apartado 1.

Para el apartado 2 hacemos lo mismo que en el Teorema 5.1. A partir de una celda C de S definimos el vector normal inferior $(p, -1)$ de la correspondiente celda \tilde{C} del levantamiento y se tiene que C es, por la demostración del primer apartado, el conjunto de demanda de la función p . \square

Este resultado nos permite expresar la existencia de equilibrio competitivo como una propiedad de la subdivisión regular:

Corolario 5.7. *Sean $\text{val}^b : A^b \rightarrow \mathbb{R}$ unas valoraciones arbitrarias y sea $\text{val} : A \rightarrow \mathbb{R}$ la valoración agregada. Entonces, las siguientes propiedades son equivalentes para cada punto $a \in A$:*

1. *Existe un equilibrio competitivo para esas valoraciones y ese a .*
2. *La subdivisión regular de A definida por el levantamiento $-\text{val}$ usa el punto a .*

Por tanto, existe un equilibrio en A si y solo si la subdivisión regular usa todos los puntos de $\text{conv}(A) \cap \mathbb{Z}^m$.

Demostración. Se sigue directamente del Teorema 5.6 y de la Definición 4.14. \square

5.2. El Teorema de Unimodularidad

El Teorema de Unimodularidad nos da condiciones suficientes que tienen que cumplir las funciones de valoración para la existencia de un equilibrio competitivo. Nuestra demostración se basa en [8, Teorema 4.2] solo que los argumentos de geometría tropical que se usan allí se sustituyen por los de subdivisiones mixtas que se desarrollaron en el Capítulo 3 y en la Sección anterior.

Dado un conjunto de valoraciones $V \subset \{\text{val}^i : A^i \rightarrow \mathbb{R}\}_{i \in I}$, cada una con su dominio $A^i \subset \{0, 1\}^m$, por el Teorema 5.1 a cada valoración $\text{val}^i \in V$ le asociamos la subdivisión regular S_{val^i} de A^i dada por el levantamiento $-\text{val}^i$. Llamamos U_V al conjunto de vectores paralelos a alguna arista de alguna de las subdivisiones regulares S_{val^i} .

Teorema 5.8 (Teorema de Unimodularidad). *Sea $V \subset \{\text{val}^i : A^i \rightarrow \mathbb{R}\}_{i \in I}$, una clase de valoraciones cóncavas y supongamos que el conjunto de aristas U_V que producen como subdivisiones regulares es unimodular.*

Entonces, sea $b \in [n]$, para toda elección de valoraciones $\text{val}^b \in V$, por parte de los agentes, existe un equilibrio competitivo en A (equilibrio de Walras).

Demostración. Suponemos que el conjunto de aristas, U_V , es unimodular.

Para cada agente $b \in [n]$ consideramos una valoración $\text{val}^b \in V$ y val la valoración agregada. Por el Corolario 5.7 basta ver que la subdivisión regular S de A producida por el levantamiento $-\text{val}$ usa todos los puntos de $\text{conv}(A) \cap \mathbb{Z}^m$.

Sea $a \in \text{conv}(A) \cap \mathbb{Z}^m$ uno de esos puntos y sea C una celda de S con $a \in \text{conv}(C)$. Por el Lema 5.5, S coincide con la subdivisión mixta de $\sum_b A^b$ dada por la valoración suma $-\sum_b \text{val}^b$. Por tanto, tenemos que C es la suma de Minkowski de ciertas celdas C_1, \dots, C_n de cada A^b y que, como se dijo en la Observación 3.22, cada C_b es una celda de la subdivisión regular de A^b dada por el levantamiento $-\text{val}^b$.

Tenemos entonces que:

- El conjunto de todas las aristas de los C_i está contenido en U_V que, por hipótesis, es unimodular. Por tanto, C tiene la propiedad de descomposición

entera del Teorema 3.29. Como $a \in \text{conv}_{\mathbb{Z}}(C)$, el Teorema 3.29 nos dice que existen a_1, \dots, a_n con cada $a_i \in \text{conv}_{\mathbb{Z}}(C_i)$ y con

$$a = a_1 + \dots + a_n.$$

- Como las funciones val^b son cóncavas (es decir, las funciones $-\text{val}^b$ son convexas) el Lema 3.15 nos dice que cada punto a_b se usa en la subdivisión regular de A^b dada por $p - \text{val}^b$. Por tanto $a_b \in \text{conv}_{\mathbb{Z}}(C_b)$ implica $a_b \in C_b$.

Por tanto, el punto $a = a_1 + \dots + a_n$ está en C (y no solo en $\text{conv}(C)$), como queríamos demostrar. □

Es decir, cuando las aristas demandadas son unimodulares, el Teorema de Unimodularidad garantiza el equilibrio de Walras en el sentido más fuerte.

Vamos a ver que el recíproco del teorema también se cumple. Para simplificar los argumentos, en este recíproco consideramos como número de agentes el mismo que el de objetos ($n = m$):

Proposición 5.9. *Sea $\mathcal{S} = \{S_i : i \in I\}$ un conjunto de subdivisiones regulares, cada una de una configuración $A^i \subset \{0, 1\}^m$ y supongamos que el conjunto de aristas U que producen no es unimodular.*

Entonces, existen $S_1, \dots, S_m \in \mathcal{S}$ y valoraciones $\text{val}^b : A^b \rightarrow \mathbb{R}$ para cada $b \in [m]$ tales que:

1. *La subdivisión regular de A^b producida por $-\text{val}^b$ es S_b , para todo b .*
2. *No existe equilibrio competitivo en A para las valoraciones $\text{val}^b, b \in [m]$.*

Demostración. Sea $u_1, \dots, u_m \in U$ un conjunto de aristas tales que el determinante de u_1, \dots, u_m no es unimodular. Sea S_b la subdivisión de la que está sacada u_b , para cada $b \in [m]$.

Para cada $b \in [m]$, elegimos una valoración val^b tal que S_b es la subdivisión regular inducida por $-\text{val}^b$ y, que por el Lema 3.14, esa subdivisión además tiene la propiedad de que u_b es la cara de \tilde{A}^b que minimiza $-\text{val}^b$.

En esas condiciones, la suma de Minkowski $u_1 + \dots + u_m$ aparece como celda en la subdivisión mixta del levantamiento $-\sum_b \text{val}^b$. Pero esa celda es un paralelepípedo no unimodular, y por tanto existe un punto entero que está en su envolvente convexa pero que no es suma de extremos de los u_i (Proposición 3.33).

Por tanto, la subdivisión mixta asociada a $-\sum_b \text{val}^b$ no usa todos los puntos de $\text{conv}(A) \cap \mathbb{Z}^m$ y, por el Corolario 5.7, no existe equilibrio competitivo. □

Bibliografía

- [1] Marie-Charlotte Brandenburg, Christian Haase y Ngoc Mai Tran, Competitive equilibrium always exists for combinatorial auctions with graphical pricing schemes, *La Matematica* (2022). <https://doi.org/10.1007/s44007-022-00038-7>
Disponible como preprint en <https://arxiv.org/abs/2107.08813>
- [2] Ozan Candogan, Asuman Ozdaglar y Pablo Parrilo, Pricing Equilibria and Graphical Valuations, *ACM Transactions on Economics and Computation*, Volume 6, Issue 1, Article No.2, pp 1–26. <https://doi.org/10.1145/3175495>
- [3] Felipe Rincón y Simón Soto, Introducción a la teoría de politopos, notas de minicurso en los “Días de Combinatoria 2017”. *Lecturas Matemáticas (Sociedad Colombiana de Matemáticas)*, Vol. 40 (2), 2019. <https://scm.org.co/archivos/revista/?Rev=&Vol=40&Num=2>
- [4] Francisco Santos, Mónica Blanco y Federico Castillo, Triangulations of polytopes and point configurations, *Lecture notes for a minicourse in the CIMPA Research School “Algebraic, Enumerative and Geometric Combinatorics - ECCO 2006”, Medellín, Colombia, Junio de 2006*, <https://ecco2016.combinatoria.co/pages/santos.html>
- [5] Francisco Santos, The Cayley Trick and Triangulations of Products of Simplices, en *Integer Points in Polyhedra – Geometry, Number Theory, Algebra, Optimization* edited by A. Barvinok, M. Beck, C. Haase, B. Reznick, and V. Welker, American Mathematical Society, 2005, pp. 151–177. ISBN: 978-0-8218-3459-6.
- [6] Rekha R. Thomas, *Lectures in Geometric Combinatorics*, American Mathematical Society and Institute for Advanced Study, 2006.
- [7] Kenneth Tay, “Affine hull vs. convex hull”. *Statistical Odds & Ends*, Noviembre, 2022. Disponible en <https://statisticaloddsandends.wordpress.com/2022/11/18/affine-hull-vs-convex-hull/>
- [8] Ngoc Mai Tran y Josephine Yu (2019), Product-Mix Auctions and Tropical Geometry. <https://doi.org/10.1287/moor.2018.0975>
- [9] Colaboradores de Wikipedia. *Wikipedia, La enciclopedia libre*, 2022. Disponible en <https://www.wikipedia.org/>
- [10] Günter M. Ziegler, *Lectures on Polytopes*, Springer-Verlag, 1995.