



***Facultad
de
Ciencias***

**El sandpile como modelo de transporte en
plasmas de fusión nuclear: análisis del
tiempo de confinamiento**
(The sandpile as a transport model in nuclear
fusion plasmas: analysis of confinement time)

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al

GRADO EN FÍSICA

Autor: David Aguayo Sánchez

Director: José Ángel Mier Maza

Julio - 2023

Agradecimientos

Gracias a José Ángel Mier, por haberme hecho disfrutar del último tramo de la carrera, siempre transmitiendo confianza y calma. Por haber estado siempre disponible, dándome ánimos y sobre todo, enseñándome y compartiendo sus conocimientos sobre un tema que a ambos nos encanta, la física.

Gracias a todos los profesores que me han hecho disfrutar de la carrera, con los que he podido aprender mucha física y sus enseñanzas, seguro, me acompañarán en el futuro.

Gracias a mi familia por haberme apoyado a lo largo de todo el camino. Habéis demostrado la definición de entrega y cariño cada día. Gracias, por haber estado y porque seguiréis estando.

Especialmente, quiero agradecerle y dedicarle este trabajo a los tres grandes pilares de mi vida, ya que sin ellos, estoy seguro de que esto no habría sido posible. Va por vosotros.

A mis amigos, Lillo, Guille, Julio, Carlos y Óscar. Hace muchos años emprendimos esta aventura siendo unos críos que no sabían dónde se estaban metiendo y ahora, sois mis mejores amigos. Gracias por enseñarme a reír independientemente del momento, ya que no importa cuánto, sino cómo se vive. Gracias, a todos, por los maravillosos recuerdos tenemos y lo mejor, por los que crearemos.

A ti, Elsa. Gracias por creer en mí, gracias por enseñarme a creer en mí, gracias por enseñarme a esforzarme en lo que me gusta, a pesar de que a veces, vivir haciendo lo que a uno le gusta sea más difícil de lo que parece. Me siento muy afortunado de haberte podido conocer y haber vivido contigo muchos momentos felices y mágicos. Espero poder estar para ti, siempre.

Gracias a mis padres. Gracias por haber sido pacientes, gracias por haberme educado con vuestro mejor cariño, por haberme dejado desarrollarme hasta lo que soy hoy en día, pues casi todo el mérito de esto es vuestro. Vosotros habéis soportado todo el proceso que me ha llevado hasta aquí, que a pesar de los malos momentos, siempre y repito, siempre, me he sentido apoyado en todo momento. Ojalá podáis sentirnos orgullosos de mí en una décima parte de lo que yo me siento de vosotros. Gracias.

En este espacio no caben las palabras de agradecimiento que siento en mi interior. Gracias a todos.

Resumen

El consumo de energía sigue creciendo con el paso de los años y la búsqueda de nuevas fuentes de energía capaces de eliminar la dependencia de los combustibles fósiles es más urgente cada día para evitar las consecuencias de estos. La energía nuclear de fusión se presenta como una alternativa limpia y prácticamente ilimitada, sin embargo, el tiempo de confinamiento de los plasmas en los reactores de fusión aún no consigue ser lo suficientemente largo como para ser energéticamente rentable.

En este trabajo se estudia el tiempo de confinamiento de un sandpile, cuya dinámica de transporte de granos de arena guarda cierta analogía con el transporte de materia y energía en dispositivos de fusión nuclear por confinamiento magnético. Por tanto, a partir de los resultados obtenidos en este sencillo modelo de transporte, se podría ahondar en el entendimiento de lo que sucede en sistemas mucho más complejos como los plasmas de fusión nuclear. Para ello, se analizarán todos los parámetros que influyen en el tiempo de confinamiento y se realizarán múltiples simulaciones de sandpiles en el entorno de programación de MATLAB que permitan obtener conclusiones apropiadas. Finalmente, en base a todo lo estudiado, se propondrán algunas posibles soluciones sobre cómo maximizar el tiempo de confinamiento.

Palabras clave: sandpiles, auto-organización crítica, tiempo de confinamiento, plasmas de fusión.

Abstract

The energy consumption continues to grow with the passing of years, and the search for new energy sources capable of eliminating the dependence on fossil fuels becomes increasingly urgent every day to avoid the consequences of these. Nuclear fusion energy is presented as a clean and infinite alternative. However, the confinement time of plasmas in fusion reactors has not yet been sufficiently long to be energetically profitable.

This work studies the confinement time of a sandpile, whose dynamics of sand grain transportation bears some analogy to the transportation of matter and energy in magnetic confinement nuclear fusion devices. Therefore, based on the results obtained in this simple transportation model, it could deepen the understanding of what happens in much more complex systems like nuclear fusion plasmas. To do this, all the parameters that influence the confinement time will be analyzed, and multiple simulations of sandpiles will be performed in the MATLAB programming environment to obtain appropriate conclusions. Finally, based on all the research conducted, some possible solutions on how to maximize the confinement time will be proposed.

Keywords: sandpiles, critical self-organization, confinement time, fusion plasmas.

Índice general

1. Motivación	1
2. Introducción	3
2.1. La energía de fusión	3
2.2. El modelo de sandpile clásico: running sandpile	6
2.3. El modelo de sandpile difusivo: convivencia entre los canales de transporte por avalanchas y difusión	10
2.4. Modelo matemático para el perfil del sandpile	13
2.5. Tiempo de confinamiento	17
2.6. Sandpile en plasmas reales	18
3. Objetivos	20
4. Código numérico	21
5. Resultados y análisis	23
5.1. Estudio del punto de transición entre los canales de transporte turbulento y difusivo para parámetros clásicos	23
5.2. Dependencia del tiempo de confinamiento con la difusividad	24
5.3. Dependencia del tiempo de confinamiento con la probabilidad de lluvia de partículas	25
5.4. Dependencia del tiempo de confinamiento con la pendiente crítica	26
5.5. Dependencia del tiempo de confinamiento con la longitud del sandpile	27
6. Discusión y conclusiones	29
7. Bibliografía	33

Motivación

La energía es necesaria y esencial para la vida cotidiana. Es necesaria para casi cualquier cosa, desde calentar o enfriar edificios, hacer funcionar electrodomésticos, fabricación de productos, etc. Por tanto, el ser humano ha seguido diversas vías para conseguir una obtención de energía capaz de satisfacer nuestro estilo de vida.

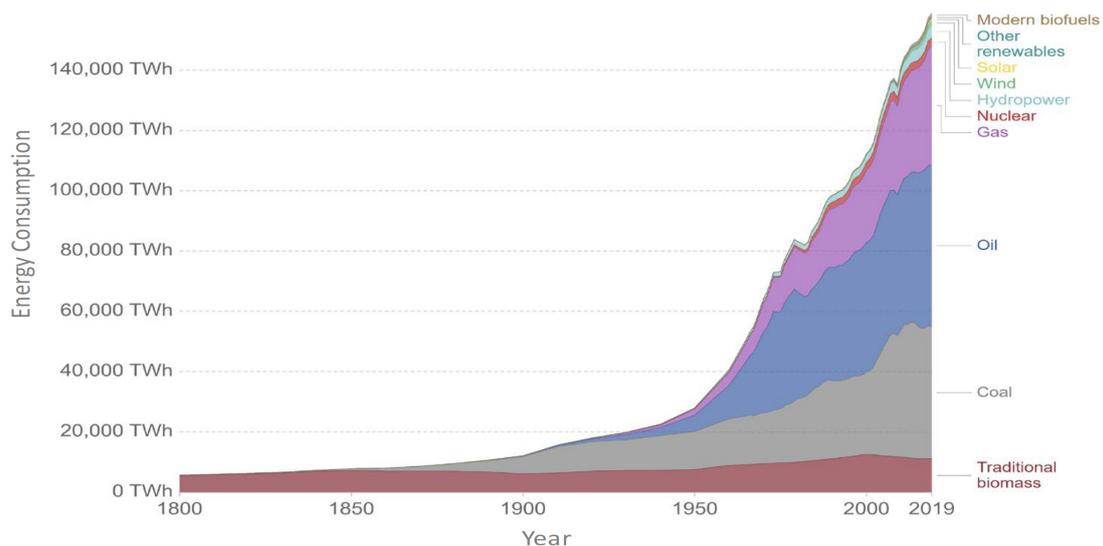


Figura 1.1: Figura extraída del artículo de Simona E. M. [1], que recoge la cantidad de energía aportada por las diversas vías de obtención energética a nivel mundial desde 1800 hasta 2019.

Como se aprecia en la figura 1.1, el consumo de energía se disparó desde la década de 1950 aumentando de manera más o menos constante hasta nuestros días. Sin embargo, a pesar de que la población mundial se ha triplicado en los últimos cien años, el consumo energético es seis veces mayor. Lo cual no concuerda con la idea simplista donde se podría llegar a pensar que la población y el consumo energético deberían avanzar al mismo ritmo, que en este caso el consumo energético debería ser tres veces mayor en vez de seis. La diferencia se encuentra en que el nivel de vida medio de la población mundial también ha aumentado, requiriendo así más consumo energético por cada ciudadano con respecto a otras épocas.

Aunque la población mundial lleva creciendo ininterrumpidamente desde la década de 1950 y con ella la demanda de recursos energéticos, a partir de 1988 el ratio de crecimiento de la población ha ido disminuyendo, es decir, la población aumenta a un ritmo más lento que antes [2], donde según algunos estudios se estima que la población mundial solo aumente un 0.1% en el año 2100. Sin embargo, se prevé que la población mundial aumente de 7.8 mil millones que hay en 2023 a más de 9 mil millones en el año 2040, donde el consumo energético aumentaría de un 20% a un 30%. Los estudios prevén un crecimiento espectacular en el consumo de energía en países en desarrollo como India y China, mientras que los países industrializados muestran una saturación o un crecimiento menor [3].

Dicho aumento de consumo energético inmediatamente lleva a los mayores riesgos que ponen en jaque la seguridad energética, ya que posibles faltas de abastecimiento tendrían unas consecuencias que pondrían en riesgo el bienestar medio mundial. Actualmente el consumo energético mundial bebe principalmente de los combustibles fósiles (en torno al 80%) y secundariamente de la energía nuclear o energías renovables.

La quema de combustibles fósiles como el carbón, el petróleo o el gas natural libera grandes cantidades de dióxido de carbono y otros gases de efecto invernadero a la atmósfera, causando un aumento de la temperatura global y todos sus conocidos efectos, además de contaminar también el aire. Adicionalmente, estos recursos son finitos y pueden llegar a agotarse, por lo que la necesidad de buscar una alternativa de abastecimiento energético cada vez está más presente en el panorama energético mundial. Aunque hay diferencias significativas entre las diferentes predicciones sobre el escenario energético mundial [3], todas convergen en que sucederá un cambio gradual que abandonará los combustibles fósiles para finales del siglo XXI. Esto conllevará una dependencia de las energías que no se basan en los recursos fósiles, como la energía nuclear y las renovables, que se espera que se haga efectiva de forma progresiva durante la segunda mitad de siglo. Ya que el uso continuado del carbón a lo largo del siglo resultaría muy malo para el medio ambiente. Por ejemplo, dos países muy importantes, China e India aún dependen energéticamente del carbón.

Es aquí donde la energía de fusión nuclear [1] se presenta como una posible solución, ya que se considera una energía limpia y prácticamente inagotable. No produce emisiones de gases a la atmósfera, mejorando la calidad del aire¹ y eliminando las consecuencias de su contaminación como son la lluvia ácida, la niebla tóxica, etc. Sin embargo, la energía nuclear de fusión tiende a presentarse de una manera demasiado idealizada, ya que esta necesita materiales como el litio (presente en el agua de mar) y el deuterio (presente en todas las formas del agua) para funcionar, que a primera vista se encuentran en grandes cantidades. Pero el reciente apogeo de la industria automovilística eléctrica ha disparado el uso a gran escala de las baterías ion-litio, creando una nueva situación en la cual unas reservas que se exponían como virtualmente ilimitadas, deben ser revisadas teniendo en cuenta el nuevo escenario tecnológico [4]. En la siguiente sección se hablará más en detalle sobre la energía de fusión.

¹Un aire contaminado puede generar enfermedades cardiovasculares, cáncer de pulmón, etc.

Introducción

2.1. La energía de fusión

La fusión nuclear es una fuente potencialmente limpia y casi inagotable de energía que se basa en la fusión de átomos ligeros, como el hidrógeno, para formar átomos más pesados. Sin embargo, presenta diversos problemas que dificultan su implementación como fuente de energía estable y comercialmente viable. Estas dificultades incluyen la necesidad de alcanzar temperaturas extremadamente altas para lograr la fusión, el desafío de mantener el plasma confinado a altas presiones, el consumo de energía necesario para iniciar y mantener la reacción de fusión, así como la generación de radiación y neutrones de alta energía que pueden dañar los materiales del reactor. Además, aún están en desarrollo la implementación de materiales capaces de resistir las condiciones extremas de la fusión a largo plazo. A pesar de estos obstáculos, la investigación y el desarrollo de la fusión nuclear continúan en todo el mundo con proyectos como el ITER [5] (International Thermonuclear Experimental Reactor).

El plasma es considerado el cuarto estado de la materia, junto con los tradicionales estados sólido, líquido y gaseoso. Se trata de un estado altamente energético y altamente ionizado de la materia, en el cual los átomos y moléculas se descomponen en sus componentes más básicos, como electrones e iones. Por tanto, está compuesto principalmente por partículas cargadas eléctricamente, lo que le confiere propiedades únicas y comportamientos distintos a los de los otros estados de la materia.

En condiciones normales, en nuestro planeta la mayoría de los átomos y moléculas de materia se encuentran en estado eléctricamente neutro. Sin embargo, si se suministra energía suficiente a un gas, ya sea mediante calentamiento o aplicando un campo eléctrico de alta intensidad, los átomos y moléculas pueden perder o ganar electrones, convirtiéndose en iones cargados positiva o negativamente. Este proceso de ionización es el responsable de la formación de un plasma. En un plasma, una fracción significativa de los átomos o moléculas se encuentran ionizados, lo que significa que han perdido uno o más electrones. Como resultado, el plasma se compone de electrones libres e iones positivos [3]. Estas partículas cargadas interactúan entre sí mediante fuerzas electromagnéticas, generando fenómenos como conducción eléctrica, campos magnéticos y radiación electromagnética.

El plasma exhibe comportamientos colectivos debido a las interacciones entre sus partículas cargadas. Puede generar campos magnéticos auto-sostenidos, como ocurre en las estrellas y los tokamaks utilizados en la fusión nuclear. Además, el plasma tiene una alta conductividad eléctrica, lo que lo convierte en un medio propicio para la generación y propagación de ondas electromagnéticas.

Un tokamak es un dispositivo de fusión nuclear diseñado para confinar y controlar un plasma caliente mediante campos magnéticos de alta intensidad. Es una cámara de vacío toroidal en la cual se genera y mantiene el plasma en condiciones adecuadas para que las reacciones de fusión nuclear puedan tener lugar, tal y como se observa en la figura 2.1.

El tokamak se basa en el principio de confinamiento magnético, en el cual un campo magnético de forma toroidal se utiliza para contener el plasma en el centro del dispositivo [6]. El campo magnético se genera mediante la combinación de corrientes eléctricas en bobinas situadas en el exterior del tokamak y una corriente inducida en el plasma. El objetivo principal de este dispositivo es alcanzar las condiciones necesarias para la fusión nuclear, en las cuales los núcleos atómicos se fusionan para formar núcleos más pesados, liberando una gran cantidad de energía en el proceso. Para lograr esto, el plasma debe ser calentado a temperaturas extremadamente altas, del orden de cientos de millones de grados Celsius.

Existen diferentes métodos de calentamiento utilizados en un tokamak [7]. El principal de ellos es el llamado calentamiento óhmico, que utiliza la propia corriente que circula por el plasma para calentarlo por efecto Joule, ya que se trata de un medio resistivo. Otro método es el calentamiento por radiofrecuencia, en el cual se inyecta energía al plasma mediante ondas electromagnéticas de alta frecuencia. Otra técnica común es la inyección de haces de partículas neutras o de alta energía, que transfieren su energía cinética al plasma mediante colisiones. También cuenta con sistemas de control y diagnóstico para monitorizar y regular el plasma, utilizando sensores y detectores para medir las propiedades del plasma, como la temperatura, la densidad, la corriente, etc. Estos datos se utilizan para ajustar los parámetros del tokamak y optimizar el rendimiento del plasma.

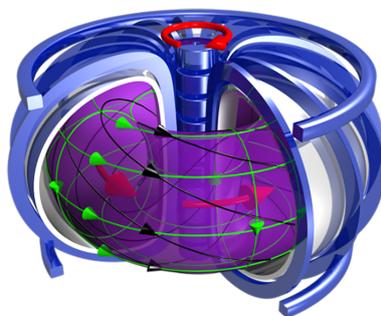


Figura 2.1: Esquema de un reactor de fusión tokamak proporcionado por el organismo internacional de energía atómica [8].

Es difícil clasificar el transporte de partículas en un dispositivo de confinamiento como un tokamak. A continuación se citan algunos de ellos:

Transporte neoclásico: Es responsable del movimiento de partículas cargadas en el plasma confinado en un campo magnético toroidal. Este transporte está influenciado por efectos magnéticos y colisionales. En regiones de bajos gradientes de temperatura y densidad, las partículas siguen trayectorias neoclásicas, que son determinadas por las fuerzas magnéticas y las colisiones con otras partículas.

Transporte anómalo o turbulento: El transporte anómalo se refiere a los procesos de transporte de partículas que no pueden explicarse únicamente por el transporte neoclásico, de ahí la denominación de “anómalo”. En regiones de altos gradientes de temperatura y densidad, la presencia de inestabilidades y turbulencias puede causar un aumento muy importante del transporte de partículas a través del plasma. Estos fenómenos tienen un impacto negativo en el confinamiento del plasma y, por lo tanto, son un desafío importante en la búsqueda de la fusión nuclear controlada.

Transporte de impurezas: Las impurezas en el plasma, como átomos e iones más pesados que los principales constituyentes del plasma, pueden afectar significativamente su comportamiento. Estas impurezas pueden provenir de diferentes fuentes, como las paredes del tokamak o la interacción con el material de plasma. El transporte de impurezas puede ser gobernado tanto por el transporte neoclásico como por el transporte anómalo, y su presencia debe ser controlada para evitar la contaminación del plasma y daños en las paredes del tokamak.

Transporte de partículas neutras: Las partículas neutras también desempeñan un papel importante en el transporte del plasma en un tokamak. Las partículas neutras pueden penetrar a través del campo magnético y escapar del plasma, lo que se conoce como pérdida de partículas neutras. La pérdida de partículas neutras puede tener efectos significativos en la densidad y la energía del plasma, y su control es esencial para mantener el equilibrio y la estabilidad del plasma.

El criterio de Lawson [9] establece las bases que debe cumplir un plasma para ser energéticamente rentable, donde la tasa de producción de energía a través de la reacción de fusión debe ser mayor que la tasa de pérdida de energía debido a la conducción, la radiación y la convección. La tasa de producción de energía está contenida en el llamado triple producto de fusión, que relaciona la densidad del plasma n , la temperatura del plasma T y el tiempo de confinamiento τ . Mientras que la tasa de pérdida energética viene dada por una constante k que depende de la reacción de fusión en sí y del diseño del dispositivo de fusión. Por ello, para que el dispositivo de fusión sea energéticamente rentable debe cumplir:

$$nT\tau > K \tag{2.1}$$

El objetivo de los científicos centrados en la fusión nuclear es el cumplimiento del criterio de Lawson y maximizar el triple producto de fusión $nT\tau$, ya que así se conseguirá una fusión nuclear que sirva de fuente de energía sostenible y limpia. Si se logra superar este criterio, la fusión nuclear podría proporcionar una fuente de energía prácticamente

ilimitada, con combustible abundante y sin emisiones de gases de efecto invernadero ni residuos nucleares a largo plazo.

El tiempo de confinamiento en un plasma es el tiempo que el plasma se mantiene confinado dentro del dispositivo de fusión, como por ejemplo un tokamak. Un tiempo de confinamiento más largo permite que las reacciones de fusión tengan lugar durante un período de tiempo mayor, lo que aumenta la cantidad de energía producida por fusión. El objetivo principal de la fusión nuclear es maximizar dicho tiempo de confinamiento mediante la optimización del dispositivo de fusión nuclear.

El tiempo de confinamiento también mide la tasa a la cual un sistema pierde energía hacia su entorno. Cuanta más rápida sea la tasa de pérdida de energía, más corto será el tiempo de confinamiento de energía. Por tanto, el tiempo se calcula dividiendo la densidad de energía W (contenido energético por unidad de volumen) por la densidad de pérdida de potencia P_{loss} (tasa de pérdida de energía por unidad de volumen):

$$\tau = \frac{W}{P_{loss}} \quad (2.2)$$

Para que un reactor de fusión funcione en estado estable, el plasma de fusión debe mantenerse a una temperatura constante. Por lo tanto, se debe agregar energía térmica a la misma tasa a la cual el plasma pierde energía para mantener las condiciones de fusión. Esta energía puede ser suministrada por las propias reacciones de fusión, dependiendo del tipo de reacción, o mediante la aplicación de calor adicional a través de diversos métodos.

2.2. El modelo de sandpile clásico: running sandpile

En la naturaleza se pueden encontrar estructuras y sistemas complejos en varias disciplinas y diversas como pueden ser las costas, las redes ramificadas de los ríos, el mercado de valores, flujos de tráfico... Todos estos fenómenos están compuestos de muchos elementos y tienen propiedades de auto-organización crítica, experimentando cambios drásticos en su comportamiento general debido a pequeñas perturbaciones locales. Esto puede implicar que los patrones observados en diferentes escalas sean similares entre sí, como por ejemplo una sección de costa, que al ser comparada con otra sección más grande de la misma costa, se encuentra un comportamiento similar.

Dicha autoorganización crítica tiene la capacidad de generar eventos de gran magnitud de manera espontánea. Estos procesos, los cuales representan muchos fenómenos naturales, generan patrones interesantes que pueden estudiarse mediante fractales y modelos físicos críticos [10]. Uno de los modelos de auto-organización crítica más sencillos capaz de describir sistemas complejos que han despertado el interés de los investigadores en diversos campos son los “sandpiles”, o montones de arena. El sandpile es un modelo teórico para estudiar la dinámica de pilas (o montones) de arena y su comportamiento en condiciones perturbadas [11]. A primera vista, un montón de arena puede parecer un sistema simple y estático, pero bajo ciertas condiciones puede mostrar un comportamiento complejo y multifactorial. Estos montones de arena se han estudiado en los campos de la física estadística, la teoría del caos y la teoría de sistemas complejos, dando como

resultado información valiosa sobre la autoorganización y la dinámica de los sistemas que no están en equilibrio.

Un sandpile puede ser implementado según las reglas de un *toy model*¹, donde se simplifican las reglas que rigen su dinámica. Al igual que en un juego de construcción en el que cada pieza se organiza de acuerdo con reglas específicas, se agrega arena a un montón de arena de acuerdo con reglas específicas de crecimiento y redistribución. Estas reglas pueden variar según el modelo utilizado, pero en general la simplicidad de las reglas permite una fácil implementación y estudio matemático.

Uno de los sandpiles más sencillos es el *running sandpile*, también llamado BTW, que fue optimizado por los científicos Bak, Tang y Wiesenfeld [12], los cuales usaron un autómata celular. El modelo del running sandpile se basa en la suposición de que un montón de arena puede crecer hasta cierto punto antes de colapsar bajo la influencia de la gravedad y entrar en estado estacionario. En este modelo, la arena se agrega gradualmente sobre un montón existente² (o vacío), y cuando la pendiente de la columna de arena alcanza un valor crítico, la arena se desplaza de manera local, lo que puede provocar el colapso de la columna o únicamente afectar a las columnas vecinas. Estas redistribuciones locales pueden propagarse a través del sandpile y desencadenar una avalancha de colapsos en gran parte del sistema, tal como se esquematiza en la figura 2.2.

Por tanto, teniendo solo el transporte turbulento causado por las avalanchas, el sandpile parte de una red unidimensional de longitud L , donde cada casilla del eje horizontal x tiene asociada una altura en el eje vertical $h(x)$. Dicha altura representa el número de granos de arena (o partículas) acumulados en esa posición y solo puede ser modificada por dos causas.

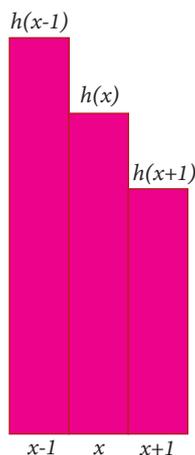


Figura 2.2: Fragmento de un sandpile, donde se ven 3 celdas con sus correspondientes alturas (en cada altura hay partículas acumuladas).

¹Un modelo sencillo que sirve para explicar procesos sin tener en cuenta detalles que puedan complicar el desarrollo.

²El sandpile puede ser inicializado por cualquier distribución aleatoria, ya que con el paso de las iteraciones temporales alcanzará el estado estacionario.

Una de las causas es la lluvia de partículas representada en la figura 2.3, que puede ser interpretada como una fuente externa, donde en cada instante de tiempo (o en cada iteración), hay una probabilidad P_0 de que caigan N_r partículas sobre una casilla aleatoria del sandpile [13]. Por tanto, la altura local de una cierta casilla a la que le hayan caído N_r partículas de la lluvia cambiará como:

$$h(x) = h(x) + N_r \quad (2.3)$$

donde suele ser $N_r = 1$.

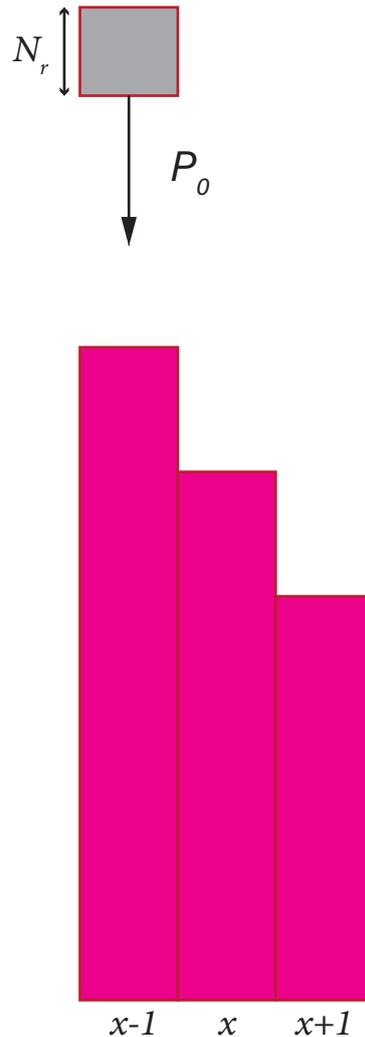


Figura 2.3: Fragmento de un sandpile durante la fase de lluvia de partículas, donde cada celda tiene una probabilidad P_0 de que se añadan N_r partículas a su altura.

La otra causa son avalanchas (recogidas en la Fig 2.4) causadas por la acción de la gravedad cuando se produce un equilibrio inestable entre dos celdas, donde si la diferencia de altura entre dos celdas contiguas supera una cierta pendiente crítica Z_c , entonces se desprenderán N_f partículas de la celda de la izquierda a su celda contigua de la derecha³.

³De acuerdo con las reglas seguidas en este sandpile.

Entonces, la dinámica de transporte en una inestabilidad local sigue las ecuaciones:

$$\begin{aligned} h(x) &= h(x) - N_f \\ h(x+1) &= h(x+1) + N_f \end{aligned} \quad (2.4)$$

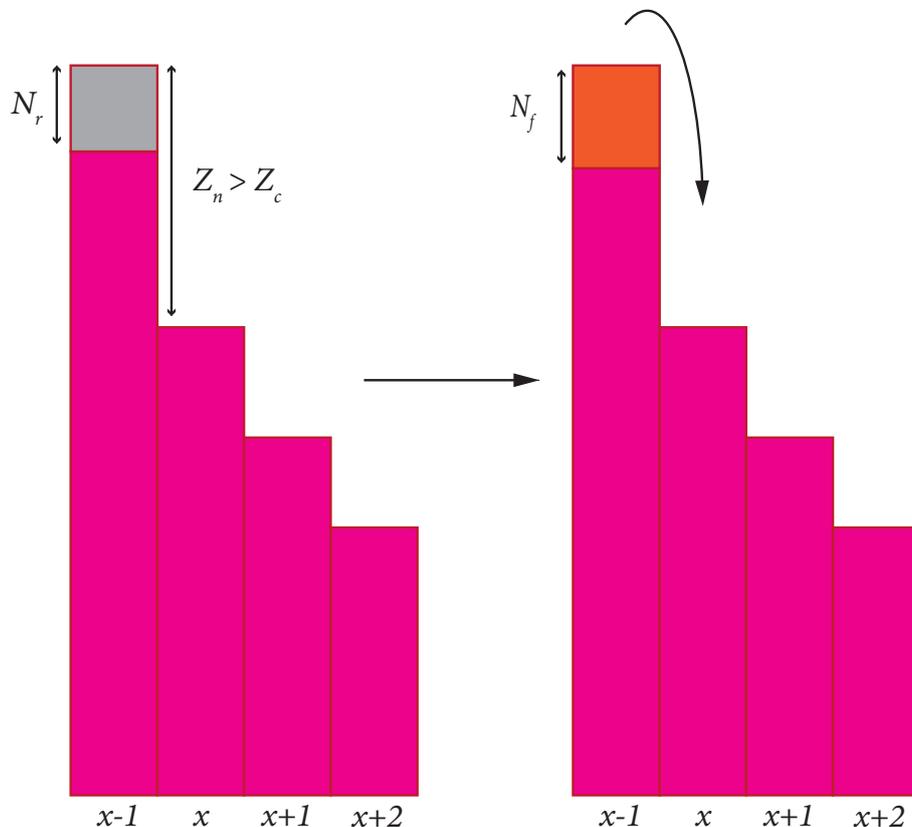


Figura 2.4: Fragmento de un sandpile al que le han caído N_r partículas de la lluvia en la celda $x - 1$, al comprobar que la pendiente local Z_n entre ambas celdas supera (o iguala) la pendiente crítica, se produce una avalancha en la que la celda $x - 1$ tira N_f partículas a la celda x . Esta situación se puede aplicar al resto de celdas del sandpile, donde esta primera avalancha puede quedarse como un fenómeno local o extenderse a lo largo de todo el sandpile [14].

Finalmente, las partículas que llegan al borde del sandpile L , son expulsadas de este fijando la condición:

$$h(L) = 0 \quad (2.5)$$

Esta condición es necesaria para que el sandpile adquiera su forma tan característica, ya que si nunca expulsase partículas hacia afuera, el sandpile tendría una forma de vaso de agua, imposibilitando la presencia de avalanchas.

Por tanto, el running sandpile se construye y se autorregula con las ecuaciones 2.3, 2.4 y la condición 2.5. Primero, se recorre el sandpile paso por paso (de izquierda a derecha) aplicando la condición definida para la lluvia de partículas⁴. A continuación, dentro de la

⁴En ese momento se genera un número aleatorio entre 0 y 1, si P_0 es mayor o igual que ese número, una partícula caerá sobre la celda analizada.

2.3. EL MODELO DE SANDPILE DIFUSIVO: CONVIVENCIA ENTRE LOS CANALES DE TRANSPORTE POR AVALANCHAS Y DIFUSIÓN

misma iteración, se recorre de nuevo el sandpile comprobando la estabilidad entre celdas y produciendo una avalancha en caso de que haya una inestabilidad local. Es notable que, una inestabilidad local puede desencadenar una avalancha mayor a lo largo de toda la estructura [13].

Es posible que si la fuente es demasiado grande en comparación a las avalanchas, el sandpile se sobresature. Un ejemplo comparativo es imaginarse la situación de una alcantarilla que drena agua. Si sobre dicha alcantarilla cayese una tromba, llegaría un momento en el que cayese más agua de la que puede drenar, llegando a acumularse el agua fuera. Una situación similar sería la que le pasaría al sandpile. Para que el running sandpile no se sobresature y pueda alcanzar el estado estacionario, debe cumplirse la siguiente condición [15]:

$$N_f > P_0 N_r L \quad (2.6)$$

El razonamiento de esta condición es simple, en promedio el sandpile recibe $P_0 N_r L$ partículas por cada iteración, y esta cifra debe ser menor que la cantidad de partículas que pueden ser expulsadas por el borde del sandpile, siendo esta cantidad N_f .

En definitiva, el sistema puede partir de cualquier condición inicial, ya que con un número suficiente de iteraciones siempre alcanzará su estado estacionario, cuyas ecuaciones serán deducidas más adelante.

2.3. El modelo de sandpile difusivo: convivencia entre los canales de transporte por avalanchas y difusión

La diferencia del modelo de sandpile difusivo respecto al clásico running sandpile es la incorporación de un canal adicional de transporte por difusión. Este transporte difusivo se rige en base a la ley de Fick, que establece que el flujo de partículas va desde una región con alta concentración a una región con baja concentración, todo condicionado bajo el coeficiente de difusión D_0 :

$$\Gamma = -D_0 \frac{\partial h}{\partial x} \quad (2.7)$$

De esta forma, conviven los canales de transporte turbulento o por avalanchas, que ocurre de manera discreta (cada cierto tiempo), con el canal de transporte difusivo que ocurre de manera continua.

En el caso de nuestro sandpile, la ley de Fick se aplica entre dos casillas contiguas al ser un canal de transporte local. Sin embargo, como el transporte difusivo ocurre de manera continua, aplicarlo entre dos casillas solo aportaría el flujo saliente que hay de una casilla a la otra, sin tener en cuenta el flujo entrante que llegaría de una tercera casilla situada a la izquierda de las dos mencionadas al principio como se aprecia en la figura 2.5. Por lo cual, para tener en cuenta el flujo difusivo neto al que se ve sometido una cierta casilla del sandpile, la ley de Fick debe aplicarse dos veces, por lo que:

$$\Gamma_{neto} = -D_0 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (2.8)$$

2.3. EL MODELO DE SANDPILE DIFUSIVO: CONVIVENCIA ENTRE LOS CANALES DE TRANSPORTE POR AVALANCHAS Y DIFUSIÓN

Así que, restando las partículas que salen de $h(x)$ hacia la celda contigua a la derecha, y sumando las que llegan de la celda contigua a la izquierda, se obtiene el flujo neto de partículas en una cierta celda $h(x)$ [16]:

$$h(x) = h(x) + D_0 [h(x+1) - 2h(x) + h(x-1)] \quad (2.9)$$

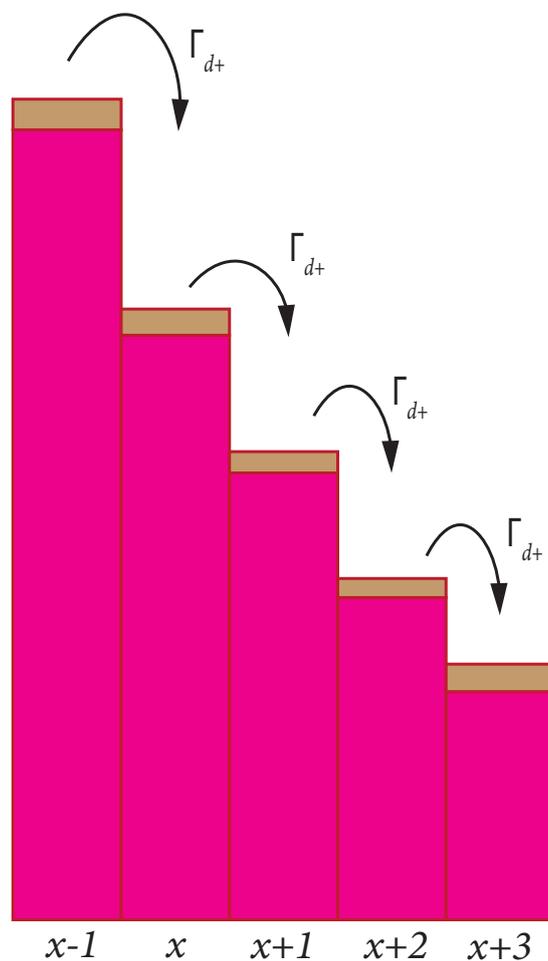


Figura 2.5: Fragmento de un sandpile donde se esquematiza el transporte difusivo de partículas con flujo saliente Γ_{d+} , que ocurre de manera continua, siempre de zonas de mayor altura (mayor concentración) a zonas de menor altura (menor concentración).

Un sandpile más complejo puede ser aquel que combina los transportes turbulentos de partículas con el transporte difusivo, por lo que deben tenerse en cuenta ambos transportes al mismo tiempo [17].

2.3. EL MODELO DE SANDPILE DIFUSIVO: CONVIVENCIA ENTRE LOS CANALES DE TRANSPORTE POR AVALANCHAS Y DIFUSIÓN

El transporte por difusión de granos de arena en el sandpile se aplica a nivel microscópico en base a una analogía por colisiones entre partículas. Estos movimientos son similares a los observados en la difusión de partículas en un líquido o gas, y tienden a igualar las diferencias locales en la concentración de arena. A medida que las partículas son transportadas, algunas se acumulan en ciertas áreas mientras que otras se desplazan, generando flujos de partículas (por difusión). Dependiendo de la magnitud del coeficiente de difusión D_0 , los cambios que puede ocasionar el transporte difusivo en la forma de la estructura del sandpile pueden ser más o menos significativos, llegando a dar al sandpile una forma parabólica en aquellos casos donde la difusión predomina o apenas cambiando la forma de este, en las zonas en las que el transporte queda dominado por avalanchas. La particularidad del transporte difusivo es que ocurre de manera continua, siempre de zonas donde hay mayor concentración de partículas (mayor altura del sandpile) a zonas con menor concentración.

Por otro lado, el transporte por avalanchas o turbulento ocurre cuando una perturbación en el montón de arena desencadena una avalancha de granos que se desplazan desde una región elevada hacia áreas más bajas. Estas avalanchas pueden ser pequeñas (locales) o tan grandes como el tamaño de todo el sandpile, dependiendo de las magnitudes asignadas a las condiciones iniciales citadas anteriormente como la pendiente crítica, etc. Cuando ocurre una avalancha, la arena se redistribuye de manera abrupta y se acumula en nuevas áreas, alterando la geometría del montón de manera discreta.

La combinación de transporte por difusión y por avalanchas es lo que permite que el sandpile alcance un estado de equilibrio dinámico llamado estado crítico estacionario. En este estado, el sandpile exhibe propiedades emergentes interesantes, como la autosimilaridad fractal y la distribución de tamaños de avalanchas.

Una vez alcanzado el estado estacionario en el sandpile se distinguen dos subdominios, el interno donde las partículas únicamente se desplazan por difusión y otro externo donde las partículas se desplazan combinando el transporte difusivo y por avalanchas. Ambos subdominios tienen un punto de transición x_t , el cual se estima con la integración de la fuente [18]:

$$\int_0^{x_t} S_0 dx = P_0 x_t = \Gamma_d^-(x_t) = D_0 Z_a \Rightarrow x_t = \frac{D_0 Z_a}{P_0} \quad (2.10)$$

donde $Z_a = Z_c - N_f/2$ es la pendiente promedio del sandpile en estado estacionario, donde más adelante se verá su utilidad.

En este caso, para que el sandpile no sobresature y pueda alcanzar el estado estacionario se debe cumplir [16]:

$$N_f > P_0 N_r L - D_0 Z_a \quad (2.11)$$

2.4. Modelo matemático para el perfil del sandpile

Anteriormente se ha descrito la dinámica de transporte en un sandpile clásico y en un sandpile difusivo. En base a la física del modelo de sandpile difusivo, a continuación se demostrarán las ecuaciones analíticas para desplazamientos turbulentos y difusivos que puede contener este tipo de sandpile.

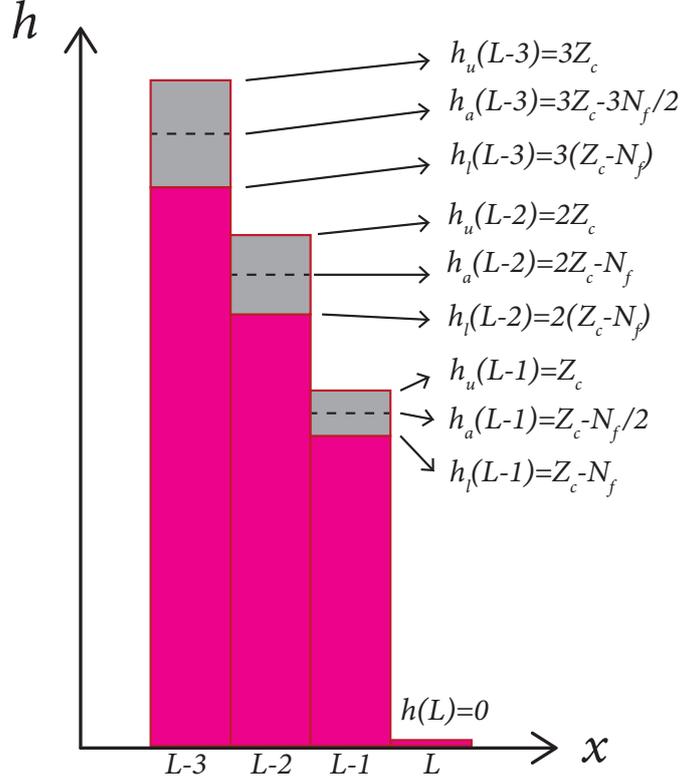


Figura 2.6: Fragmento de la parte final de un sandpile, se analiza la casuística correspondiente a las alturas correspondientes a las últimas celdas hasta llegar a la condición de $L = 0$.

Partiendo de las ecuaciones que describen un sandpile clásico (no difusivo) de avalanchas (Ecs. 2.4) se puede construir la figura anterior (Fig 2.6), donde se analizan las últimas celdas y se toman los casos extremos donde una celda puede tener una altura máxima de nZ_c antes de tirar N_f partículas, donde también se coge el promedio entre ambos casos. Tomando la altura promedio analítica, se obtiene la pendiente analítica Z_a . Cogiendo los datos de las celdas L y $L - 1$, se obtiene la ecuación de la recta analítica correspondiente a ambos puntos:

$$\left. \begin{array}{l} 0 = a + bL \\ Z_a = a + b(L - 1) \end{array} \right\} h(x) = Z_a L - Z_a x = Z_a(L - x) \quad (2.12)$$

La utilidad de Z_a es precisamente que es la pendiente promedio. No es el caso máximo de Z_c , sino que es el caso promedio, el cual se aproxima de manera más realista a la pendiente que tiene el sandpile en estado estacionario. La relación entre ambas pendientes puede

demostrarse fácilmente:

$$Z_a = \frac{Z_{max} + Z_{min}}{2} = \frac{Z_c + Z_c - N_f}{2} = Z_c - \frac{N_f}{2} \quad (2.13)$$

Para la ley de Fick, cuya ecuación describe el transporte difusivo 2.7, se pueden aplicar los flujos teóricos correspondientes al flujo turbulento Γ_t , al flujo difusivo Γ_d y al flujo total Γ_T :

$$\Gamma_t = P_0 x, \quad \Gamma_d = D_0 Z_a, \quad \Gamma_T = \Gamma_t + \Gamma_d \quad (2.14)$$

Entonces, integrando la ley de Fick y teniendo en cuenta las expresiones anteriores, se llega a la ecuación analítica que describe el comportamiento difusivo es [19]:

$$h(x) = A x^2 + B \quad (2.15)$$

donde

$$\begin{aligned} A &= -\frac{P_0}{2D_0} \\ B &= Z_a L - \frac{Z_a^2 D_0}{2P_0} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Es por ello que, lo que describe el comportamiento del sandpile difusivo es una función a trozos, ya que en el subdominio a la izquierda de x_t las partículas se desplazan con transporte difusivo y con transporte turbulento para el subdominio a la derecha de x_t :

$$\begin{aligned} h(x) &= -\frac{P_0}{2D_0} x^2 + Z_a L - \frac{Z_a^2 D_0}{2P_0}, \quad \text{si } 1 \leq x \leq x_t < L \\ h(x) &= Z_a(L - x), \quad \text{si } x_t \leq x \leq L \\ h(x) &= -\frac{P_0}{2D_0} (x^2 - L^2), \quad \text{si } 1 \leq x \leq L \end{aligned} \quad (2.17)$$

En las figuras 2.7, 2.8 y 2.9 se representan los perfiles teóricos que utilizan las Ecs. 2.17, las pendientes analítica (Ec 2.13) y crítica y los resultados de algunas simulaciones para los parámetros clásicos de un sandpile.

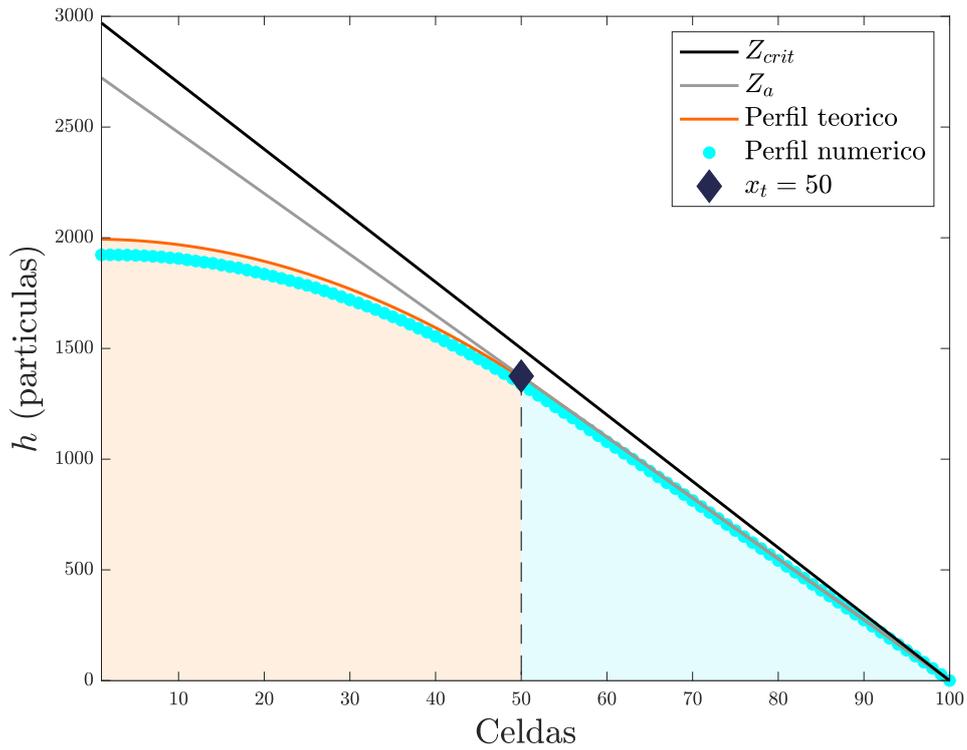


Figura 2.7: Se representan las alturas de las celdas con la posición de dichas celdas para una simulación de ejemplo de un sandpile con parámetros: $Z_c = 30$, $N_f = 5$, $P_0 = 10^{-3}$ y $x_t = 50$. El perfil numérico es el resultado de una simulación numérica (elaborada para este trabajo) usando las ecuaciones 2.4 y 2.9, el perfil teórico se construye con las ecuaciones 2.12 y 2.15 del modelo usado en la sección 2.4 y el punto de transición, que separa el subdominio dominado por la difusión (naranja) del dominado por las avalanchas (azul), se calcula con la ecuación 2.10. Al ser $x_t = L/2$, el transporte de este sandpile está dominado a medias por el canal de transporte turbulento y el difusivo.

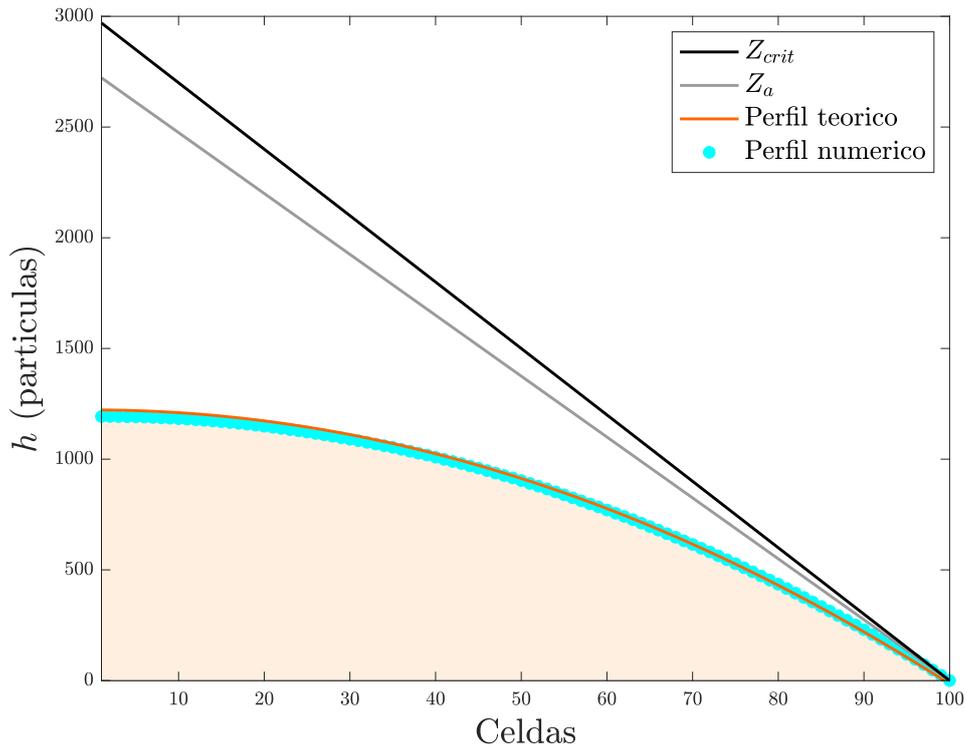


Figura 2.8: Sandpile 100 % difusivo. Se representan las alturas de las celdas con la posición de dichas celdas para una simulación de un sandpile con parámetros: $Z_c = 30$, $N_f = 5$, $P_0 = 10^{-3}$ y $x_t = 50$. El perfil numérico es el resultado de una simulación numérica (elaborada para este trabajo) usando las ecuaciones 2.4 y 2.9, el perfil teórico se construye con las ecuaciones 2.12 y 2.15 del modelo usado en la sección 2.4 y el punto de transición, que al ser $x_t \geq L$, el transporte de este sandpile está dominado completamente por el canal de transporte difusivo (área naranja).

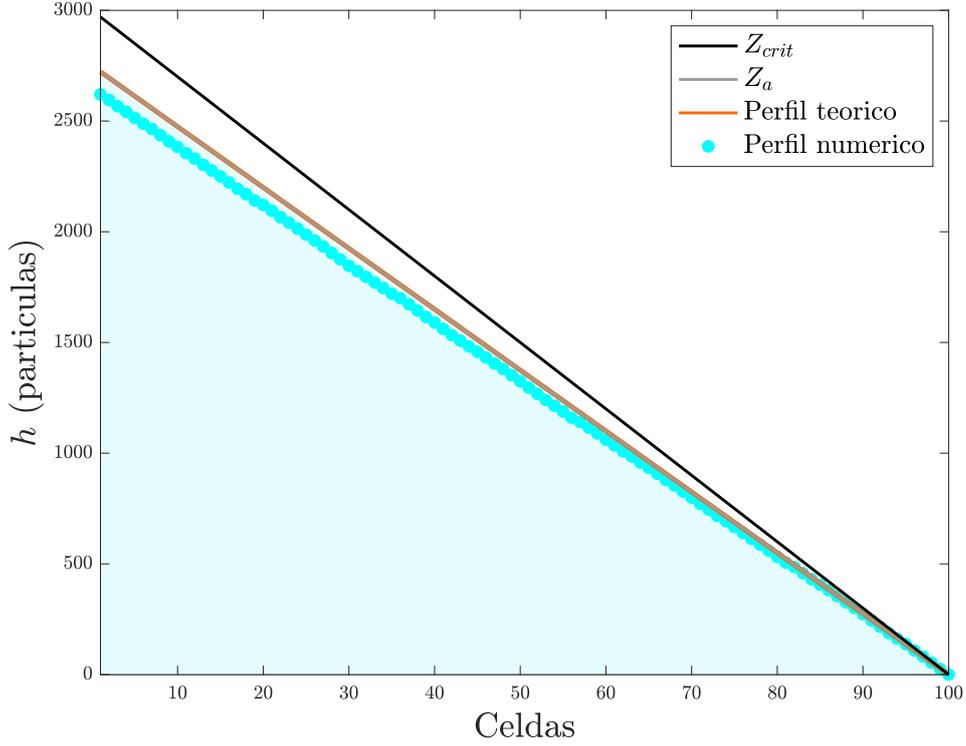


Figura 2.9: Sandpile 100% turbulento. Se representan las alturas de las celdas con la posición de dichas celdas para una simulación de un sandpile con parámetros: $Z_c = 30$, $N_f = 5$, $P_0 = 10^{-3}$ y $x_t = 50$. El perfil numérico es el resultado de una simulación numérica (elaborada para este trabajo) usando las ecuaciones 2.4 y 2.9, el perfil teórico se construye con las ecuaciones 2.12 y 2.15 del modelo usado en la sección 2.4 y el punto de transición, que al ser $x_t \leq L$, el transporte de este sandpile está dominado completamente por el canal de transporte turbulento (área azul).

2.5. Tiempo de confinamiento

Físicamente el tiempo de confinamiento se define como el tiempo promedio que tarda una partícula en abandonar el sandpile [16]. Por tanto, el tiempo de confinamiento global de los granos de arena confinados se define como:

$$\tau^{global} = \frac{\int_0^L h(x) dx}{P_0 L} \quad (2.18)$$

Estudiar el tiempo de confinamiento es crucial en los plasmas confinados magnéticamente, al ser una magnitud muy importante a la hora de caracterizar el rendimiento en dispositivos de fusión nuclear.

Partiendo de la ecuación 2.18, si $L \gg 1$, $P_0 \ll 1$ y $N_f \ll Z_a$, e integrando las ecuaciones de los perfiles 2.17 se obtienen las siguientes expresiones para el tiempo de confinamiento:

$$\tau_I^{global} \approx \frac{Z_a L}{2P_0} - \frac{D_0^2 Z_a^3}{6P_0^3 L}, \quad x_t \leq L \quad (2.19)$$

$$\tau_{II}^{global} \approx \frac{L^2}{3D_0}, \quad x_t \geq L \quad (2.20)$$

2.6. Sandpile en plasmas reales

Los sandpiles resultan muy útiles en plasmas reales gracias al estudio por analogía entre ambos sistemas. La analogía entre los plasmas de fusión y los sandpiles consiste en el comportamiento emergente de ambos sistemas. Tanto en los plasmas como en los sandpiles, se observa un fenómeno conocido como autoorganización crítica. En otras palabras, a medida que los plasmas o los sandpiles alcanzan ciertos umbrales críticos, se producen cambios drásticos y desordenados en su estructura. Al observar cómo ocurren las avalanchas en los sandpiles y analizar los patrones emergentes, se pueden obtener ideas sobre el tiempo de confinamiento y la formación de estructuras en los plasmas de fusión. La ventaja de utilizar la analogía de los sandpiles para estudiar los plasmas de fusión radica en la simplicidad y la accesibilidad de los sandpiles como sistema experimental. Los sandpiles se pueden manipular y medir con relativa facilidad, lo que permite realizar experimentos y observaciones detalladas sobre las propiedades de autoorganización crítica. Algunas de las analogías entre los plasmas y los sandpiles están recogidos en la siguiente tabla.

Sandpile	Plasma
Dominio del sandpile	Extensión radial del dispositivo
Celda	Remolino turbulento (eddy)
Arena	Partículas, energía
Lluvia de arena	Fuentes
Pendiente crítica	Umbral local de inestabilidad
Reducción local de arena	Relajación local de la turbulencia
Avalancha	Suceso extendido de transporte radial

Tabla 2.1: Tabla de analogías utilizada en el estudio de sandpiles y plasmas creada por D.E. Newman en 1996 [20].

Entrando más en detalle con la tabla 2.1, la relación dominio del sandpile - extensión radial del dispositivo se refiere a que en los sandpiles, el dominio es el espacio, o conjunto de todas las celdas del sandpile, en que se depositan las partículas (o granos de arena). En los plasmas de fusión, la extensión radial del dispositivo se refiere al área del reactor de fusión donde se genera y se confina el plasma.

La analogía celda - remolino turbulento (eddy), donde en los sandpiles, una celda es una fracción del espacio total del sandpile, que puede acumular partículas de manera vertical. En plasmas de fusión, los remolinos turbulentos, también conocidos como eddies, son estructuras de movimiento giratorio presentes en el plasma debido a la turbulencia.

La analogía arena - partículas, energía se refiere a que en los sandpiles, la arena representa las partículas pertenecientes del sistema y la energía almacenada en el sistema. En los plasmas de fusión, las partículas se refieren a los iones y electrones que componen el plasma, mientras que la energía se refiere a la energía cinética y térmica del plasma.

La asociación lluvia de arena - fuentes, en los sandpiles la lluvia de arena (o partículas) se produce cuando se añade arena al sistema desde una fuente externa. En los plasmas de fusión, las fuentes se refieren a los métodos utilizados para inyectar partículas o energía adicional al plasma, como la inyección de partículas neutras o la aplicación de corriente eléctrica.

La analogía pendiente crítica - umbral local de inestabilidad; en sandpiles la pendiente crítica es la máxima pendiente (o ángulo máximo) que puede tener la pila de arena antes de que se produzcan avalanchas. En los plasmas de fusión, el umbral local de inestabilidad se refiere al nivel de perturbación o condiciones necesarias para desencadenar fenómenos inestables, como la inestabilidad de modos de plasma o la inestabilidad del flujo de calor.

La analogía reducción local de arena - relajación local de la turbulencia, donde en los sandpiles la reducción local de arena se produce cuando se retira arena del sistema, lo que puede conducir a una disminución de la turbulencia en esa área. En los plasmas de fusión, la relajación local de la turbulencia se refiere a la disminución de la turbulencia en una región específica del plasma, que puede ser causada por diferentes mecanismos de control o supresión de la turbulencia.

La analogía avalancha - suceso extendido de transporte radial, donde en sandpiles, una avalancha es un evento en el que una región de arena colapsa y desencadena la caída de arena en áreas adyacentes. En los plasmas de fusión, un suceso extendido de transporte radial se refiere al transporte de partículas o energía a lo largo de líneas de campo magnético, que puede ocurrir debido a fenómenos como el calentamiento del plasma o el movimiento de partículas cargadas.

Objetivos

El objetivo principal de este estudio es la obtención del tiempo de confinamiento de un sandpile difusivo. Después, se realizará un estudio por analogía entre el sandpile y un dispositivo de fusión tokamak.

Un objetivo adicional, por tanto, consistirá en el establecimiento de analogías entre las partículas de un sandpile (que es un toy model) y los plasmas reales presentes en tokamaks. Esto permitirá una mejor comprensión de los fenómenos físicos y de transporte que ocurren en este tipo de dispositivos mediante la observación de los procesos análogos en el sandpile.

Otro objetivo es la caracterización de dicho sandpile difusivo mediante el estudio detallado de todos sus parámetros. Cada parámetro debe ser estudiado individualmente y con diferentes casuísticas, para así comprender adecuadamente su comportamiento y ver si los perfiles esperados teóricamente se corresponden con los obtenidos en la simulación.

Con base en los resultados obtenidos, se buscará proponer estrategias y mejoras para maximizar el tiempo de confinamiento del plasma en el dispositivo de fusión tokamak. Estas propuestas pueden incluir modificaciones en los parámetros operativos, cambios en la geometría del dispositivo o la implementación de nuevas técnicas de control.

El último objetivo y casi el más importante de este estudio es realizar todas las investigaciones y análisis utilizando el entorno de programación Matlab. En base a él se realizarán todas las simulaciones, cálculos numéricos, gráficas ... Que en definitiva, tratarán de trasladar la física del sandpile de la manera más fiel posible a dicho entorno de programación.

Capítulo 4

Código numérico

Para realizar el código numérico que simule el comportamiento de un sandpile difusivo se utilizó el software de MATLAB. El código en sí está estructurado en tres partes, donde se tratan todos los aspectos referentes a la dinámica del sandpile. A continuación se mostrarán las partes simplificadas del código.

El código se inicia definiendo todos los parámetros que contiene el sandpile difusivo, es decir, se deben definir D_0 , L , N_r , P_0 , Z_c , N_f y también el vector h que recoge la altura de cada casilla del sandpile (por tanto es un vector con el tamaño de L). Nada más definir las condiciones iniciales se calcula la pendiente analítica Z_a haciendo uso de la ecuación 2.13 y se evalúan las condiciones para que el sandpile no se sobresature y pueda alcanzar el estado estacionario usando la ecuación 2.11. Después se calcula el punto de transición x_t que separa los canales de transporte difusivo y turbulento utilizando la ecuación 2.10, donde si $x_t < 1$ se trata de un sandpile 100% dominado por el canal de transporte turbulento y si $x_t > L$ se trata de un sandpile 100% dominado por el canal de transporte difusivo.

A continuación se calcularon los perfiles teóricos haciendo uso de las ecuaciones 2.17 para más adelante poder comparar dichos perfiles con los resultados obtenidos en la simulación numérica.

Una vez llegado a este punto, empieza un bucle con iteraciones (de tiempo). Dentro de cada iteración de este bucle hay varios subpasos, transcurrirá la fase de acumulación de partículas en lluvia, el transporte difusivo, se revisará si puede producirse alguna avalancha y por último se añadirán las condiciones de contorno. Primero, se genera otro bucle que recorre todas las celdas del sandpile, donde en cada celda se generará un número aleatorio entre 0 y 1, si P_0 es mayor o igual que dicho número, entonces se añadirán N_r partículas en la celda evaluada $h(i)$. De esta manera, se están añadiendo partículas al sandpile en la fase de lluvia con probabilidad P_0 .

```

1 for i=1:1:L
2     R=rand; % numero aleatorio entre 0 y 1
3     if (P0>=R)
4         h(1,i)=h(1,i)+N_r;
5     end
6 end

```

El siguiente paso después de evaluar la fase de lluvia es recorrer todas las celdas del sandpile y calcular el flujo neto difusivo de partículas que tiene cada celda, donde se debe tener en cuenta las partículas que llegan de la celda a la izquierda de la casilla evaluada y las que se van de la celda evaluada a su celda contigua de la derecha. Todo esto queda recogido en la ecuación 2.9.

```

1 for i=2:1:L-1
2     h(1,i)=h(1,i)+D0*(h(1,i+1)-2*h(1,i)+h(1,i-1));
3 end

```

Después se recorre todo el sandpile comprobando si la diferencia entre dos celdas contiguas es mayor o igual que la pendiente crítica. En caso de ser así, se produciría una avalancha con un desplazamiento de N_f partículas de una casilla a su contigua a la derecha. Si durante este recorrido se ha alcanzado el final del sandpile, se fijará la altura de la última celda a 0, para así garantizar la expulsión de partículas del sandpile.

```

1 for i=1:1:L
2     if i==L
3         h(1,L)=0;
4         break;
5     end
6     if (h(1,i)-h(1,i+1)>=Zcrit)
7         h(1,i)=h(1,i)-Nf;
8         h(1,i+1)=h(1,i+1)+Nf;
9     end
10 end

```

Por último se aplican las condiciones de contorno de la difusión de igualar la primera y la segunda celda del sandpile y también la condición de fijar la altura de la última celda a 0, para así garantizar la expulsión de partículas del sandpile.

```

1 if (D0>0)
2     h(1,1)=h(1,2);
3 end
4 h(1,L)=0;

```

En el resto de partes del código se encuentran muchas matrices para recoger los datos de las distintas simulaciones y así poder hacer la estadística pertinente, gráficas, etc más adelante.

Resultados y análisis

5.1. Estudio del punto de transición entre los canales de transporte turbulento y difusivo para parámetros clásicos

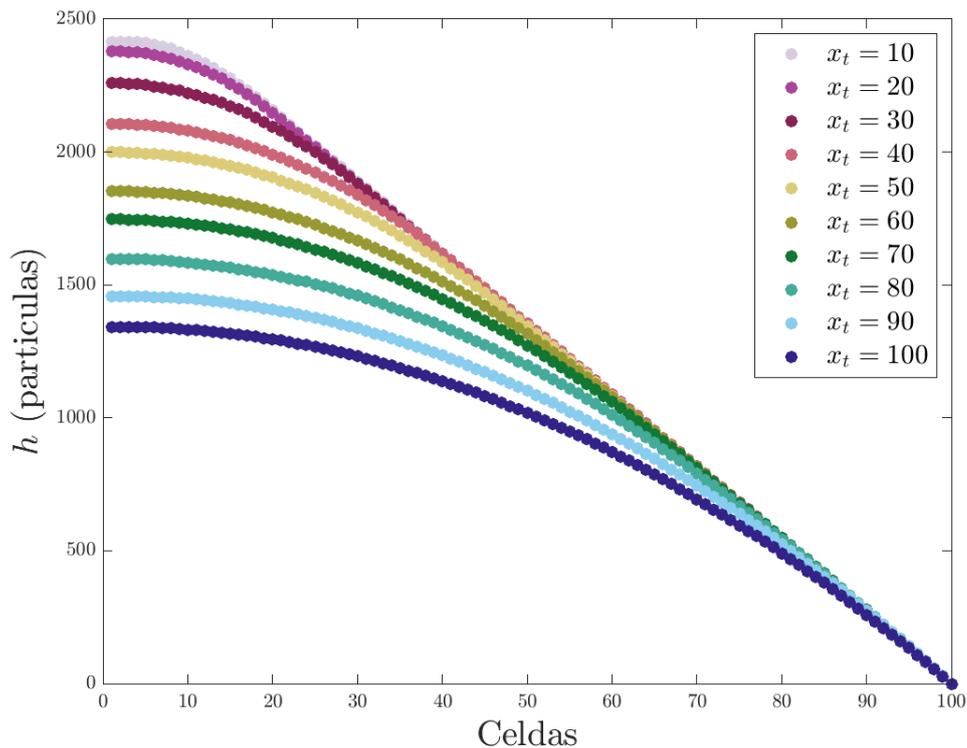


Figura 5.1: Se representan las alturas de las celdas con la posición de dichas celdas para varias simulaciones correspondientes a diferentes sandpiles con parámetros: $L = 100$, $Z_c = 30$, $N_f = 5$, $P_0 = 10^{-3}$ y diferentes x_t (y en consecuencia diferentes D_0).

En base a la figura 5.1, se puede apreciar claramente cómo la altura promedio de los sandpile disminuye según aumenta el punto de transición entre el canal de transporte turbulento y difusivo, para los parámetros seleccionados. Cada curva de cada sandpile diferente es el resultado promedio obtenido después de realizar cien simulaciones con cada curva, para así tener una curva promedio fiable. Los parámetros usados son los considerados parámetros clásicos que sirven muy bien para entender la dinámica de un sandpile, ya que sus resultados son muy extremos y por tanto sus comportamientos son muy fáciles de ver. Pero a continuación se realizarán simulaciones con sandpiles de parámetros diferentes que buscan unas inestabilidades entre celdas más realistas, es decir, una diferencia entre Z_c y N_f menor que las hasta ahora propuestas con los parámetros clásicos.

5.2. Dependencia del tiempo de confinamiento con la difusividad

Con el autómata celular operativo, se empieza evaluando la dependencia del tiempo de confinamiento con el coeficiente de difusión. Además se han realizado simulaciones para sandpiles de diferentes tamaños y se ve si el comportamiento cambia en función de dicho tamaño o no. También es necesario comparar los resultados del autómata celular con los perfiles analíticos proporcionados en la introducción para comprobar si existe algún tipo de discrepancia entre ambos.

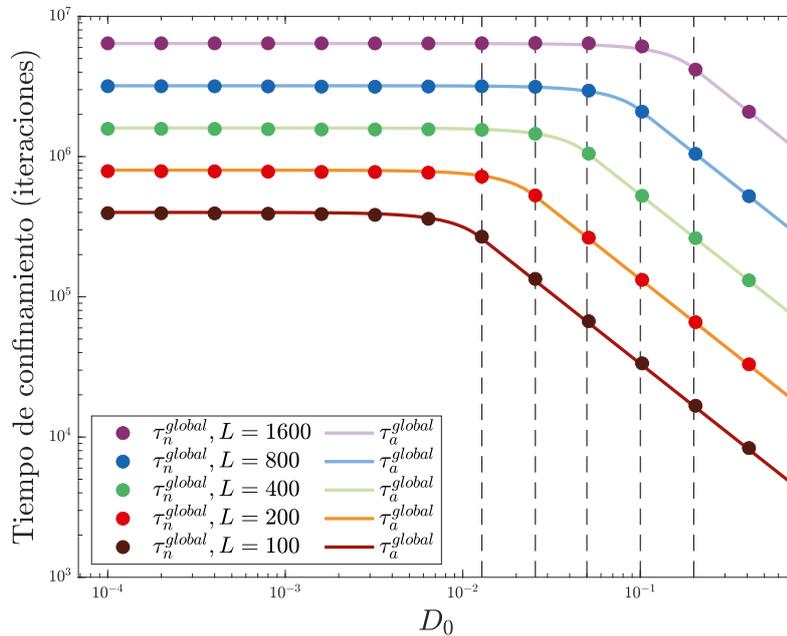


Figura 5.2: Tiempos de confinamiento frente al coeficiente de difusión para sandpiles con diferentes longitudes y con parámetros: $Z_c = 10$, $N_f = 4$, $N_r = 1$ y $P_0 = 10^{-3}$. Los resultados numéricos de las simulaciones corresponden a los puntos y los perfiles analíticos, que se realizaron (como una función a trozos) utilizando las ecuaciones 2.17, corresponden a las líneas. Las líneas discontinuas verticales representan para cada longitud el punto de transición x_t , siendo la línea de más a la izquierda para $x_t = 100$, después $x_t = 200$...

5.3. DEPENDENCIA DEL TIEMPO DE CONFINAMIENTO CON LA PROBABILIDAD DE LLUVIA DE PARTÍCULAS

La figura 5.2 está en escala logarítmica, ya que los valores que puede tomar el coeficiente de difusión van desde 0 a un número próximo a 1. Es por ello que la escala logarítmica facilita el estudio en este rango de valores. Se puede observar que el comportamiento de la evolución del tiempo de confinamiento sigue el mismo patrón en todos los sandpiles, cambiando solo en escala. Se aprecia que el tiempo de confinamiento no varía para valores bajos del coeficiente de difusión, mientras que a partir de cierto valor, que es diferente para cada curva, el tiempo de confinamiento decae linealmente como $\propto \frac{1}{D_0}$ (tal y como indican las expresiones analíticas 2.19 y 2.20), que es cuando no se producen avalanchas y el transporte es debida única y exclusivamente a la difusión (Ec. 2.15). Se observa, por tanto, que el perfil presentado en las simulaciones concuerda con el esperado en base a los perfiles analíticos (o teóricos).

5.3. Dependencia del tiempo de confinamiento con la probabilidad de lluvia de partículas

El siguiente parámetro a evaluar es la probabilidad de añadir N_r partículas durante la fase de acumulación o intensidad de la fuente. Donde se fijó $N_r = 1$ durante no sólo en esta, sino en todas las simulaciones. De nuevo, se seleccionaron varios sandpiles de diferentes longitudes para observar posibles diferencias entre los sandpiles y todo esto se comparó con su correspondiente curva analítica.

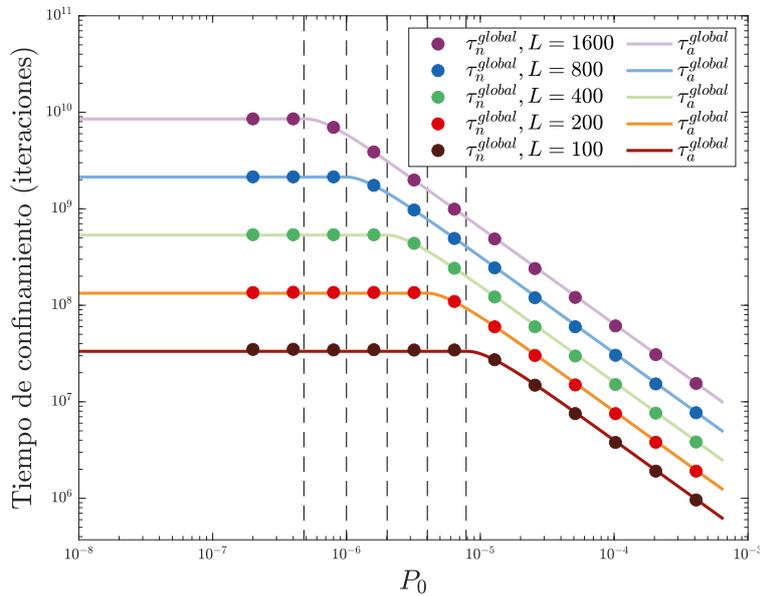


Figura 5.3: Tiempos de confinamiento frente a la probabilidad de añadir N_r partículas en la fase de acumulación para sandpiles con diferentes longitudes y con parámetros: $Z_c = 10$, $N_f = 4$, $N_r = 1$ y $D_0 = 10^{-4}$. Los resultados numéricos de las simulaciones corresponden a los puntos y los perfiles analíticos, que se realizaron (como una función a trozos) utilizando las ecuaciones 2.17, corresponden a las líneas. Las líneas discontinuas verticales representan para cada longitud el punto de transición x_t , siendo la línea de más a la izquierda para $x_t = 1600$, después $x_t = 800$...

5.4. DEPENDENCIA DEL TIEMPO DE CONFINAMIENTO CON LA PENDIENTE CRÍTICA

En la figura 5.3 se observa un comportamiento similar al presentado en la figura 5.2, pero cambiando el coeficiente de difusión por la intensidad de la fuente, ya que, a bajos valores de dicha probabilidad, el tiempo de confinamiento permanece constante. Es más adelante cuando el tiempo de confinamiento empieza a decaer linealmente como $\propto \frac{1}{P_0}$ (tal y como indica la expresión analítica 2.19). De nuevo, las diferencias entre las distintas longitudes de los sandpiles son de escala y todos presentan un perfil con la misma forma.

En el régimen dominado por las avalanchas (parte plana de la figura) el tiempo de confinamiento es constante, ya que aunque aumente P_0 estas son capaces de evacuar toda la arena (partículas) de la fuente sin variar el tiempo de confinamiento. En cambio, en el régimen puramente difusivo ($x_t > L$) donde no hay avalanchas, el tiempo de confinamiento decae en razón inversamente proporcional a P_0 .

5.4. Dependencia del tiempo de confinamiento con la pendiente crítica

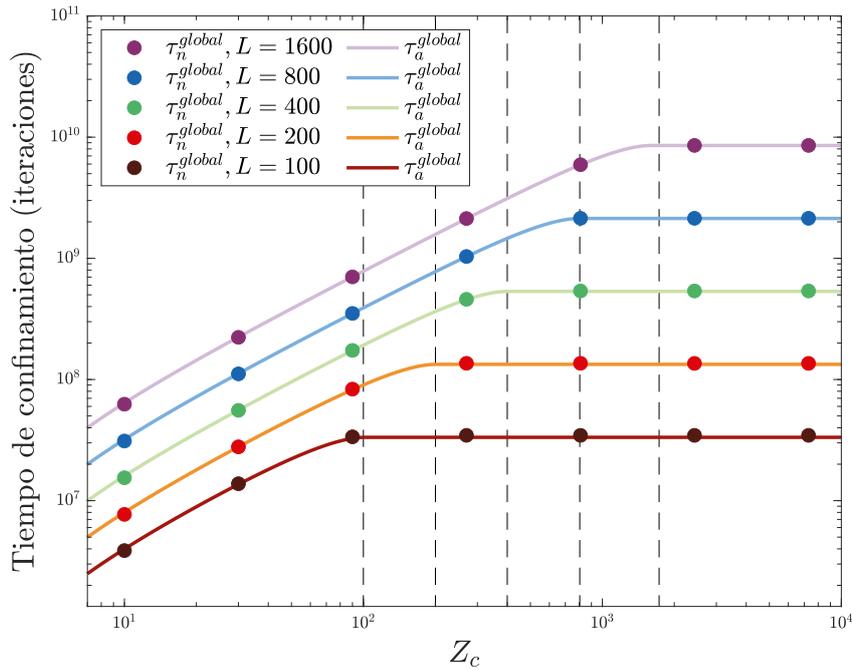


Figura 5.4: Tiempos de confinamiento frente a la pendiente crítica para sandpiles con diferentes longitudes y con parámetros: $P_0 = 10^{-3}$, $N_f = 4$, $N_r = 1$ y $D_0 = 10^{-4}$. Los resultados numéricos de las simulaciones corresponden a los puntos y los perfiles analíticos, que se realizaron (como una función a trozos) utilizando las ecuaciones 2.17, corresponden a las líneas. Las líneas discontinuas verticales representan para cada longitud el punto de transición x_t , siendo la línea de más a la izquierda para $x_t = 100$, después $x_t = 200$...

La pendiente crítica es un valor sumamente importante en los procesos de transporte turbulento, ya que su valor generará una mayor o menor cantidad de transporte

de partículas. Entonces, para realizar su estudio apropiadamente se toman sandpiles de distintas longitudes y se comparan los resultados del autómata celular con los perfiles analíticos.

La figura 5.4 refleja el aumento del tiempo de confinamiento según aumenta la pendiente crítica y aumenta linealmente como $\propto Z_c$ (tal y como indican las expresiones analíticas (Ecs. 2.19 y 2.20) donde hay que transformar Z_a a Z_c) y llegando a cierto punto, se estabiliza y no varía más. Este comportamiento se da en todos los sandpiles, pero tarda más en estabilizarse en los sandpiles de mayor longitud. Además, los sandpiles más grandes alcanzan mayores valores del tiempo de confinamiento.

Cuando el sandpile tiene avalanchas ($x_t < L$), el tiempo de confinamiento aumenta con la pendiente crítica, mientras que cuando no hay avalanchas y el sandpile es puramente difusivo ($x_t > L$), entonces el tiempo de confinamiento es independiente de dicha pendiente crítica, lo cual es lógico ya que en el canal de transporte difusivo las inestabilidades locales entre celdas no son tan grandes como para alcanzar el valor de Z_c y por tanto nunca se producen avalanchas en esas regiones.

5.5. Dependencia del tiempo de confinamiento con la longitud del sandpile

La longitud se ha evaluado de manera indirecta durante todo el análisis, pero no se intuye un patrón claro. Entonces se evaluará el comportamiento del tiempo de confinamiento frente a las longitudes de los sandpiles, utilizando los resultados de la simulación y los perfiles analíticos.

La figura 5.5 muestra cómo el tiempo de confinamiento aumenta según aumenta L para diferentes probabilidades P_0 . El aumento se produce de manera lineal como $\propto L$ (tal y como indican las expresiones analíticas (Ecs. 2.19 y 2.20) donde hay que transformar Z_a a Z_c) y llegado a cierto punto, sigue aumentando de manera lineal pero habiendo reducido su pendiente de crecimiento. También, cuanto más pequeña es la probabilidad P_0 , mayores son los tiempos de confinamiento.

5.5. DEPENDENCIA DEL TIEMPO DE CONFINAMIENTO CON LA LONGITUD DEL SANDPILE

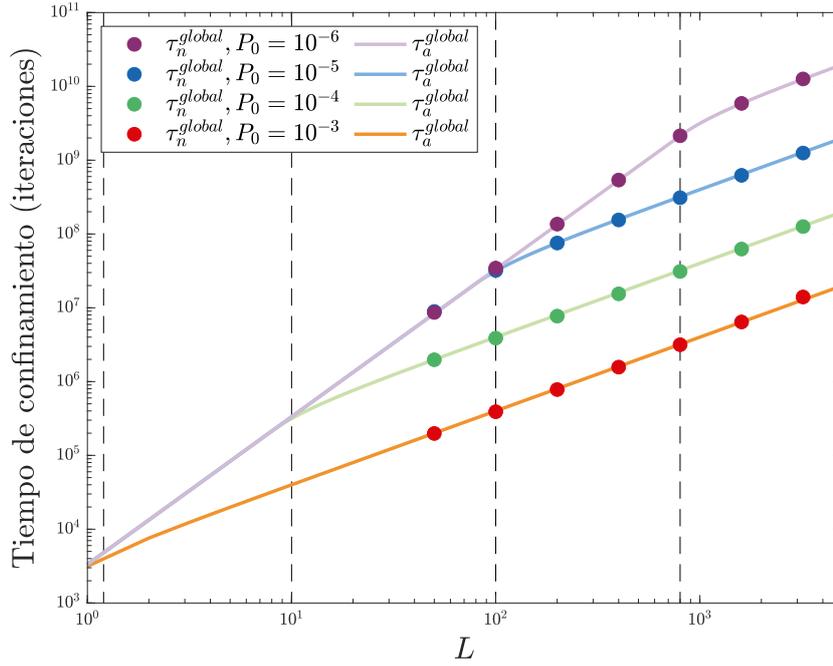


Figura 5.5: Tiempos de confinamiento frente a la longitud del sandpile para sandpiles con diferentes probabilidades de caída y con parámetros: $Z_c = 10$, $N_f = 4$, $N_r = 1$ y $D_0 = 10^{-4}$. Los resultados numéricos de las simulaciones corresponden a los puntos y los perfiles analíticos, que se realizaron (como una función a trozos) utilizando las ecuaciones 2.17, corresponden a las líneas. Las líneas discontinuas verticales representan para cada longitud el punto de transición x_t .

Discusión y conclusiones

El principal objetivo de este trabajo fue determinar la dependencia del tiempo de confinamiento de un sandpile en base a sus diferentes parámetros. A continuación se discute cómo afecta cada parámetro a dicha maximización.

En base a la figura 5.2, se puede determinar que el tiempo de confinamiento es constante en la región donde dominan las avalanchas ya que mientras $x_t < L$ se producen avalanchas (como puede apreciarse en el área azul de la figura 2.7), lo que permite mantener el tiempo de confinamiento invariante aun aumentando D_0 . Después decrece linealmente como $\propto \frac{1}{D_0}$ cuando $x_t > L$ y más peso tiene el transporte difusivo. En el caso del coeficiente de difusión, lejos de maximizar, el objetivo de su regulación debería ser que influya lo menos posible en la disminución del tiempo de confinamiento, intentando alcanzar un valor del coeficiente que dejase al sandpile o al plasma en la primera región de la gráfica, donde predomina el transporte turbulento y el tiempo de confinamiento se mantiene invariante. Respecto a las longitudes, los sandpiles más largos mantienen el tiempo de confinamiento más estable con coeficientes de difusión altos.

De acuerdo con la figura 5.3, se observa que a partir de cierto valor en la probabilidad P_0 , el tiempo de confinamiento empieza a decrecer linealmente ya que $x_t > L$, por lo que, para maximizar el tiempo de confinamiento lo ideal sería mantener el valor de dicha probabilidad lo más bajo posible. A diferencia del caso anterior, se aprecia que los sandpiles más cortos mantienen más estable el tiempo de confinamiento que los grandes, ya que hace falta una P_0 mayor para que $x_t > L$.

La figura 5.4 muestra cómo el tiempo de confinamiento crece linealmente con la pendiente crítica hasta llegar a un cierto punto de estabilización, que es x_t , ya que si $x_t > L$ entonces el tiempo de confinamiento no depende de Z_c , también los sandpiles más cortos llegan a estabilizarse antes que los más altos. Por ello, para maximizar el tiempo de confinamiento convendría tener una pendiente crítica elevada junto con un sandpile largo.

Por último, la figura 5.5 muestra cómo aumentar la longitud de los sandpiles aumenta el tiempo de confinamiento, consiguiendo los mejores resultados donde la probabilidad de añadir nuevas partículas en fase de acumulación (o lluvia) es muy baja.

La calidad de las simulaciones se puede evaluar viendo la concordancia entre los perfiles analíticos esperados y los resultados obtenidos de dichas simulaciones, por lo que se puede afirmar que el código numérico se ajusta fielmente al modelo del sandpile difusivo. Sin embargo, cabe pensar que se podría haber cogido un mayor rango de longitudes de sandpiles para enriquecer más el estudio. Pero desde un punto de vista computacional, no compensaría aumentar el tamaño de los sandpiles mucho más, ya que las simulaciones aumentarían el tiempo de cálculo necesario para obtener resultados y de acuerdo con los resultados mostrados en la figura 5.5, se puede apreciar que el patrón de los perfiles es el mismo, por lo que no es realmente necesario tomar más longitudes para realizar el estudio. Un poco más adelante, se tratará el tema de cómo afectan las longitudes del dispositivo de confinamiento tokamak al tiempo de confinamiento.

Haciendo balance de los comportamientos recogidos para el tiempo de confinamiento se puede concluir cuáles deben ser los parámetros ideales para maximizar el tiempo de confinamiento. La longitud de los sandpiles debe ser la mayor posible, ya que los sandpiles más grandes son los que mayor tiempo de confinamiento presentan. Luego, la intensidad de la fuente P_0 debe ser lo más pequeña posible, ya que maximizará el tiempo de confinamiento. Respecto a la pendiente crítica, no necesita tener un valor muy elevado para maximizar el tiempo de confinamiento, ya que a partir de $x_t > L$ ya no dependa de ella. Por último, el coeficiente de difusión debe ser lo más pequeño posible, pues al aumentar su presencia en los sandpiles, el tiempo de confinamiento decae.

Aplicando las analogías de la tabla 2.1 al párrafo anterior, se describe cómo deben comportarse los factores de un dispositivo de fusión tokamak para maximizar el tiempo de confinamiento.

En primer lugar, la extensión radial del dispositivo de fusión debe ser lo más grande posible (la longitud del sandpile), ya que los dispositivos más grandes tienden a presentar un mayor tiempo de confinamiento. A priori esto sugiere que aumentar el tamaño del reactor de fusión puede ser beneficioso para prolongar el confinamiento del plasma, sin embargo, en términos económicos y técnicos supone una barrera, ya que además de ser muy caro, los dispositivos tokamak utilizan campos magnéticos para confinar el plasma de fusión en forma de anillo. Para mantener el plasma estable y evitar su pérdida, los campos magnéticos deben ser lo suficientemente fuertes y confinantes. A medida que aumenta el tamaño del reactor, se requiere un aumento proporcional en la potencia de los imanes para mantener el plasma confinado adecuadamente. Esto precisa de imanes muy grandes y una enorme cantidad de energía para alimentarlos, lo cual lo hace muy difícil en la práctica. Actualmente los reactores de fusión tokamak tienen un diámetro de unos metros, donde un ejemplo puntero es el ITER, cuyo reactor tokamak tiene un diámetro externo de aproximadamente 30 metros y una altura de unos 30 metros.

En segundo lugar, sería conveniente minimizar las fuentes externas que puedan añadir partículas no deseadas al plasma, ya que contaminaría el plasma y perturbaría su estabilidad. Al reducir estas fuentes externas, se logra mantener un plasma limpio, estable y óptimo para la fusión nuclear, lo que contribuye a un tiempo de confinamiento más largo y a una mayor eficiencia en general. Las únicas fuentes externas que deberían estar

presentes son las incorporaciones de combustible, las cuales deben estar reguladas para no aumentar excesivamente P_0 . Esto puede implicar técnicas de control y filtrado de partículas para minimizar su entrada no deseada al plasma.

Hay ciertos valores críticos que, en el caso de los plasmas de fusión, pueden alcanzar un umbral de inestabilidad que desencadene una pérdida de confinamiento y un transporte radial extendido. Si se maximizan estos umbrales (pendientes críticas), se reducen las posibilidades de que se produzcan inestabilidades y perturbaciones que puedan llevar a la pérdida de confinamiento. Un plasma más estable es más propenso a tener tiempos de confinamiento más largos y así mantener las condiciones óptimas de confinamiento. Teniendo en cuenta dichos umbrales de inestabilidad, se puede diseñar y controlar el plasma de manera más efectiva. Esto permite una mejor manipulación de las condiciones de confinamiento y la aplicación de técnicas de control para mantener el plasma en un estado estable y confinado durante más tiempo.

Cuando el coeficiente de difusión en un plasma es alto, las partículas pueden difundirse rápidamente desde regiones de alta densidad y temperatura hacia regiones de baja densidad y temperatura. Esto puede resultar en una pérdida rápida de partículas y energía del plasma, lo que disminuye el tiempo de confinamiento efectivo. Por otro lado, cuando el coeficiente de difusión es bajo, las partículas tienen una menor propensión a difundirse y mezclarse a lo largo del plasma. Esto implica que las partículas pueden permanecer confinadas en regiones de alta densidad y temperatura durante períodos de tiempo más largos, generando así un tiempo de confinamiento mayor. Maximizar el tiempo de confinamiento ayuda a que las reacciones de fusión nuclear ocurran de manera más efectiva, ya que para producirse la fusión nuclear en un plasma de fusión, es necesario que las partículas estén suficientemente cerca unas de otras y con suficiente energía. Si el coeficiente de difusión es alto y las partículas se difunden rápidamente, la probabilidad de que ocurran colisiones entre partículas y la probabilidad de que se alcancen condiciones de fusión disminuyen. Entonces, sería favorable el desarrollo de estrategias de control y supresión de la difusión en el plasma de fusión.

En resumen, en base al estudio realizado en los sandpiles se concluye que maximizar el tiempo de confinamiento en plasmas de fusión requiere aumentar la extensión radial del dispositivo lo máximo posible de acuerdo a las limitaciones técnicas, minimizar la introducción de partículas de fuentes externas, maximizar los umbrales de inestabilidades y reducir el coeficiente de difusión lo máximo posible. Estos serían los parámetros ideales para mejorar y optimizar el confinamiento y avanzar en la eficiencia de los reactores de fusión. Al final, un mayor tiempo de confinamiento permite una mayor probabilidad de que las partículas cargadas colisionen y se fusionen. Esto aumenta la eficiencia de las reacciones de fusión nuclear, ya que se tienen más oportunidades para que ocurran las colisiones necesarias para la fusión. A su vez, una fusión nuclear eficiente y duradera es fundamental para lograr que se establezca como una fuente de energía sostenible y viable.

Una posible ampliación de este estudio para realizarse en un futuro sería la utilización de los tracers, que son unas pseudopartículas (o partículas virtuales) utilizadas para seguir y estudiar el movimiento y la propagación de las partículas en los sandpiles. Esto impli-

caría asignar dichos tracers a ciertas posiciones en el sandpile y rastrear su movimiento a medida que se propagan por los diferentes canales de transporte. Por ejemplo se podría medir el tiempo que tarda un tracer en abandonar el sandpile. Esto comúnmente se llama tiempo de confinamiento microscópico. Esto permitirá analizar de manera más detallada el comportamiento de las partículas y obtener información adicional sobre la propagación y la dinámica local del sandpile. Por ejemplo, serviría para identificar regiones críticas donde haya transportes de partículas más destacados. Esta ampliación del estudio trataría de buscar correlaciones entre los fenómenos macroscópicos y los microscópicos en el sandpile, ya que permitiría comprender cómo los eventos locales se traducen en el comportamiento global y cómo los procesos a nivel microscópico afectan al tiempo de confinamiento global.

Otra vía para ampliar el estudio sería analizar el flujo difusivo y el turbulento a lo largo de todo el sandpile, donde se podría ver cómo evoluciona cada uno de ellos según se recorre el sandpile y podría intentarse relacionar dichos pesos con los parámetros del sandpile, permitiendo así una comprensión más completa de la dinámica de transporte.

Bibliografía

- [1] Simona E. Murph. Nuclear fusion: The promise of endless energy. 2 2021.
- [2] Max Roser, Hannah Ritchie, and Esteban Ortiz-Ospina. World population growth. *Our World in Data*, 2013.
- [3] Mitsuru Kikuchi, Karl Lackner, and Minh Quang Tran, editors. *Fusion Physics*. International Atomic Energy Agency (IAEA), 2012.
- [4] A.M. Bradshaw, T. Hamacher, and U. Fischer. Is nuclear fusion a sustainable energy form? *Fusion Engineering and Design*, 86(9):2770–2773, 2011. Proceedings of the 26th Symposium of Fusion Technology (SOFT-26).
- [5] N. Holtkamp. An overview of the iter project. *Fusion Engineering and Design*, 82(5):427–434, 2007. Proceedings of the 24th Symposium on Fusion Technology.
- [6] P. H. Diamond and T. S. Hahm. On the dynamics of turbulent transport near marginal stability. *Physics of Plasmas*, 2(10):3640–3649, 10 1995.
- [7] Philippe Mertens. The core-plasma cxrs diagnostic for iter: An introduction to the current design. *Journal of Fusion Energy*, 38, 08 2019.
- [8] Organismo Internacional de Energía Atómica (IAEA). Fusión por confinamiento magnético con tokamaks y esteláratórs. <https://www.iaea.org/es/energia-de-fusion/fusion-por-confinamiento-magnetico-con-tokamaks-y-estelaratórs>, Consultado el 28 de junio 2023.
- [9] J D Lawson. Some criteria for a power producing thermonuclear reactor. *Proceedings of the Physical Society. Section B*, 70(1):6, January 1957.
- [10] Terence Hwa and Mehran Kardar. Avalanches, hydrodynamics, and discharge events in models of sandpiles. *Phys. Rev. A*, 45:7002–7023, May 1992.
- [11] B. A. Carreras, V. E. Lynch, D. E. Newman, and G. M. Zaslavsky. Anomalous diffusion in a running sandpile model. *Physical Review E*, 60(4 Pt B):4770–8, Oct 1999.

-
- [12] Per Bak, Chao Tang, and Kurt Wiesenfeld. Self-organized criticality: An explanation of the $1/f$ noise. *Phys. Rev. Lett.*, 59:381–384, Jul 1987.
- [13] B. A. Carreras, V. E. Lynch, D. E. Newman, and R. Sanchez. Avalanche structure in a running sandpile model. *Phys. Rev. E*, 66:011302, Jul 2002.
- [14] D.E. Newman, Benjamin Carreras, Patrick Diamond, and T. Hahm. The dynamics of marginality and self-organized criticality as a paradigm turbulent transport. *Physics of Plasmas*, 3:1858–1866, 05 1996.
- [15] R. Sánchez, D. E. Newman, and J. A. Mier. Modeling transport across the running-sandpile cellular automaton by means of fractional transport equations. *Phys Rev E*, 97:052123, May 2018.
- [16] J.A. Mier, R. Sánchez, and D.E. Newman. Tracer particle transport dynamics in the diffusive sandpile cellular automaton. *Chaos, Solitons & Fractals*, 140:110117, 2020.
- [17] D. E. Newman, R. Sánchez, B. A. Carreras, and W. Ferenbaugh. Transition in the dynamics of a diffusive running sandpile. *Phys. Rev. Lett.*, 88:204304, May 2002.
- [18] Raul Sanchez, D.E. Newman, Benjamin Carreras, Ryan Woodard, W Ferenbaugh, and HR Hicks. Modelling of elm-like phenomena via mixed soc-diffusive dynamics. *Nucl. Fusion*, 43, 10 2003.
- [19] J. A. Mier, R. Sánchez, and D. E. Newman. Characterization of a transition in the transport dynamics of a diffusive sandpile by means of recurrence quantification analysis. *Phys Rev E*, 94:022128, Aug 2016.
- [20] D.E. Newman, Benjamin Carreras, Patrick Diamond, and T. Hahm. The dynamics of marginality and self-organized criticality as a paradigm turbulent transport. *Physics of Plasmas*, 3:1858–1866, 05 1996.