



Facultad
de
Ciencias

Estadística de eventos extremos en plasmas electromagnéticos

(Statistics of extreme events in electromagnetic plasmas)

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al

GRADO EN FÍSICA

Autor: Josu Blanco Ortiz

Director: Juan Manuel López

Codirector: José Ángel Mier Maza

Junio 2023

A mis padres.

Resumen

Este trabajo presenta un análisis exhaustivo del comportamiento de las avalanchas en varias descargas de plasma no confinado de la Máquina Lineal de Plasma de Santander (SLPM). Dichas avalanchas son observadas a partir de los datos preexistentes indirectamente medidos del flujo de partículas utilizando sondas de Langmuir. Las series temporales del flujo de partículas a distintas posiciones radiales han permitido calcular los tiempos de espera entre avalanchas utilizando un nuevo método basado en considerar el flujo como una variable con magnitud y dirección. Este enfoque permite establecer un criterio de umbral concreto a partir del cual clasificar los eventos como avalancha de forma más precisa.

Se estudia la correlación existente entre los mencionados tiempos de espera, analizando la función densidad de probabilidad *pdf* de los mismos en las distintas posiciones radiales. Se concluye que el radio más externo presenta correlación de tipo ley de potencias. Esta correlación es característica del transporte anómalo. Se analiza también el tiempo que la señal transcurre en el lado negativo o positivo, correspondiente a transporte de materia hacia el interior o exterior, respectivamente. Se denomina a este el tiempo de excursión y se analiza la dependencia entre ambas direcciones de transporte, obteniéndose una relación que parece indicar la existencia de un fenómeno tipo *reshock* similar a los terremotos.

Finalmente, se realiza un análisis del espectro de potencia de las series temporales de flujo. Se observa un pico y su armónico, correspondientes a la rotación de la columna de plasma. La frecuencia angular de rotación exhibe variación frente a la posición radial, existiendo por tanto fenómenos asociados a cizalla en el plasma. Se observa correlación de tipo ley de potencias a tiempos largos en el espectro, compatible también con fenómenos de transporte anómalo.



Abstract

This work presents a comprehensive analysis of the behaviour of avalanches in several unconfined plasma discharges from the Santander Linear Plasma Machine (SLPM). These avalanches are observed from pre-existing indirectly measured particle flux data using Langmuir probes. The time series of the particle flux at different radial positions has allowed the calculation of the quiet times between avalanches using a new method that considers flux as a variable with magnitude and direction. This approach allows for establishing a precise threshold criterion from which to classify events as avalanches more accurately.

The correlation between these quiet times is studied, analyzing the probability density function *pdf* of the quiet times at different radial positions. It is concluded that the outermost radius presents a power-law type correlation. This correlation is characteristic of anomalous transport. The time that the signal spends on the negative or positive side, corresponding to matter transport towards the interior or exterior, respectively, is also analyzed. This time is referred to as the excursion time, and the dependence between both transport directions is analyzed, obtaining a relationship that seems to indicate the existence of a *preshock* phenomenon similar to earthquakes.

Finally, an analysis of the power spectrum of the particle flux time series is conducted. A peak and its harmonic are observed, corresponding to the rotation of the plasma column. The angular rotation frequency exhibits variation with respect to the radial position, thus there are phenomena associated with shearing in the plasma. A power-law type correlation is observed at long times in the spectrum, which is also compatible with anomalous transport phenomena.



Índice

1	Introducción	1
1.1	Motivación	1
1.2	Definición de plasma	2
1.3	Magnetohidrodinámica	4
1.4	Estudio de derivas	6
1.5	Transporte anómalo	9
1.6	Maquina Lineal de Plasma de Santander	11
2	Métodos de Análisis	16
2.1	Avalanchas	16
2.2	Análisis estadístico	20
2.3	Correlaciones	22
3	Resultados	26
3.1	Distribución radial del flujo medio	26
3.2	Análisis de la distribución de los tiempos de espera	27
3.3	Análisis de los tiempos de excursión	30
3.4	Análisis del espectro de potencia	34
4	Conclusiones	38
	Referencias	43

1

Introducción

1.1. Motivación

En la búsqueda de soluciones sostenibles y limpias para satisfacer las crecientes necesidades energéticas de nuestra sociedad, la fusión nuclear emerge como una de las opciones más prometedoras. Este fenómeno, que ocurre naturalmente en el interior de las estrellas, tiene el potencial de proporcionar una fuente de energía prácticamente ilimitada y libre de emisiones de gases de efecto invernadero, convirtiéndola así en una alternativa energética altamente atractiva.

La fusión nuclear se produce cuando átomos ligeros se combinan para formar elementos más pesados, liberando una cantidad significativa de energía en el proceso. Para lograr la fusión controlada en la Tierra, es necesario tener una comprensión profunda y precisa del comportamiento de los plasmas, comúnmente denominados como el cuarto estado de la materia [1]. El plasma es un estado de la materia que se caracteriza por ser un gas altamente ionizado, en el cual los electrones se encuentran disociados de los núcleos atómicos y se mueven por todo el medio, interaccionando con otras cargas [2]. Es necesario mantener condiciones de temperatura y presión extremas para lograr la fusión, similares a las que se dan en las estrellas a través de la presión gravitatoria. Sin embargo, en la Tierra no es técnicamente posible replicar las condiciones gravitatorias análogas a las del sol. Por ello, la consecución de la fusión nuclear presenta un obstáculo físico crucial: el confinamiento del plasma.

El criterio de Lawson es una inecuación fundamental en la física del plasma que describe las condiciones necesarias para lograr la fusión nuclear autosostenida [3]. De acuerdo con este criterio, para que la fusión produzca mayor energía de la aportada, el producto del tiempo de confinamiento τ , la densidad numérica de iones del plasma n y la temperatura T debe exceder un valor umbral.

$$nT\tau \geq 3 \cdot 10^{21} \text{ keV s m}^{-3}, \text{ para la reacción Deuterio-Tritio} \quad (1.1)$$

Existen dos enfoques predominantes para incrementar el tiempo de confinamiento del plasma: el confinamiento magnético y el confinamiento inercial. Los dispositivos de fusión más reconocidos, los *tokamak* y *stellarator*, emplean el confinamiento magnético como estrategia para mantener el plasma en condiciones adecuadas. No obstante, el plasma es un sistema complejo y caótico que presenta desafíos significativos que limitan la efectividad de cualquier método de confinamiento. Por ello, en este Trabajo de Fin de Grado, se abordará la investigación de plasmas no confinados generados en una máquina lineal de plasma.

El estudio detallado del plasma en un estado no confinado, considerado como sistema físico complejo, es crucial para una comprensión más avanzada de la dinámica global de los plasmas. Este conocimiento es indispensable para su posterior implementación en dispositivos diseñados para el confinamiento de plasma y su aplicación en la obtención de energía.

1.2. Definición de plasma

El plasma, como se ha mencionado previamente, se refiere a un estado de la materia en el cual el gas se encuentra ionizado. Sin embargo, es importante destacar que no se puede considerar plasma a cualquier gas ionizado, ya que todos los gases poseen algún grado de ionización. La siguiente puede considerarse como una definición útil y rigurosa:

El plasma es un gas cuasineutro de partículas cargadas y neutras que presenta comportamiento colectivo. [4]

De este modo, el plasma es un tipo de gas que exhibe dos propiedades fundamentales. La cuasineutralidad es un concepto que se refiere a la distribución de electrones e iones en el plasma, siendo esta lo suficientemente similar como para utilizar la aproximación $n_i \approx n_e$, es decir, número de iones aproximadamente igual al número de electrones. No obstante, la semejanza no es tan marcada como para descartar la interacción electromagnética. La justificación para esta aproximación radica en la presencia de apantallamiento entre las cargas, debido a la alta movilidad de los electrones que rodean las regiones con carga positiva. A nivel global, el plasma contiene prácticamente la misma cantidad de cargas positivas y negativas.

Sin embargo, localmente pueden surgir regiones de desequilibrio en las cuales la condición de neutralidad no se cumple. En estas áreas, el sistema tenderá a restablecer la neutralidad mediante campos eléctricos restauradores que provocarán una redistribución de la carga eléctrica. Se ilustra este fenómeno en la fig. 1.1. La longitud de Debye λ_D , definida en la ec. (1.2), proporciona una estimación del alcance espacial en el cual estos dominios de carga pueden existir.

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T_e}{n_e e^2}} \quad (1.2)$$

donde ϵ_0 es la permitividad del vacío, k_B es la constante de Boltzmann, T_e es la temperatura electrónica, n_e es la densidad de electrones y e es la carga del electrón.

A partir de esta definición, válida únicamente cuando la movilidad de los iones es despreciable comparada con la escala de tiempo del proceso, se tiene que la longitud de Debye λ_D cumple una relación inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la densidad de electrones y directamente proporcional a la raíz cuadrada de la temperatura. De este modo, en un plasma más caliente o

menos denso, las regiones de desequilibrio de carga pueden cubrir distancias más grandes.

Este comportamiento colectivo es un fenómeno que podemos comprender al analizar las fuerzas que interactúan en un sistema de partículas. Tomando como ejemplo una molécula de aire ambiente, al ser esta neutra, no experimentará fuerzas electromagnéticas netas y además, dado su peso, la influencia de la gravedad tendrá un impacto mínimo.

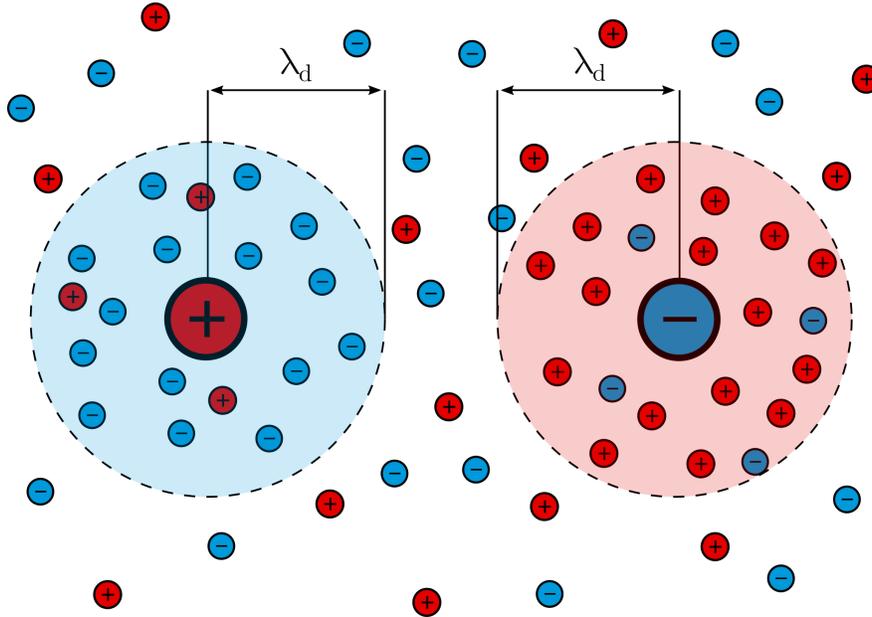


Figura 1.1: Las partículas presentes en el plasma apantallan los excesos de carga, creando una región en la que existe un potencial eléctrico. Dicha región queda definida por la longitud de Debye λ_D .

De este modo, la trayectoria de la molécula se mantiene estable hasta que choca con otra determinando estas interacciones el movimiento de las partículas involucradas. Cuando una fuerza de gran escala afecta un gas neutro, como en el caso de las ondas sonoras generadas por un altavoz, esta fuerza se comunica a los átomos individuales mediante las colisiones entre ellos.

Sin embargo, la situación en un plasma es completamente diferente debido a la presencia de partículas cargadas. Cuando estas partículas se desplazan, pueden crear acumulaciones locales de carga eléctrica, ya sea positiva o negativa, originando campos eléctricos y magnéticos en el proceso. Estos campos, a su vez, ejercen influencia sobre el movimiento de otras partículas cargadas ubicadas a una distancia determinada, que al desplazarse generan nuevos gradientes de carga y así sucesivamente en forma de cascadas denominadas avalanchas. Este comportamiento evidencia la notable complejidad del comportamiento colectivo presente en un plasma.

Por lo tanto, los elementos de plasma ejercen una fuerza entre sí incluso a grandes distancias. El comportamiento colectivo se refiere a los movimientos que dependen no solo de las condiciones locales, sino también del estado del plasma en regiones remotas.

1.3. Magnetohidrodinámica

Existen diversos enfoques para analizar la naturaleza de un plasma. Como primera aproximación al problema, es posible tener en cuenta que los plasmas se encuentran compuestos por partículas discretas. Esto implica que su dinámica puede ser descrita mediante el seguimiento de las trayectorias de las mismas, en especial de las que portan carga eléctrica.

El movimiento browniano es un fenómeno que caracteriza el desplazamiento aleatorio de una partícula individual, que experimenta cambios en dirección y sentido debido a colisiones o interacciones impredecibles con otras partículas. El biólogo escocés Robert Brown estudió este fenómeno en 1827 al observar el movimiento de partículas de polen suspendidas en agua [5]. Sin embargo, fue Albert Einstein [6] quien desarrolló una teoría que pudo explicar este transporte de manera teórica y clara. De este modo, la difusión de las partículas desde regiones de alta densidad hacia regiones de baja densidad en un fluido se encuentra plenamente caracterizada por el fenómeno del movimiento browniano.

Las denominadas leyes de Fick [7] ofrecen un enfoque teórico para comprender el proceso de difusión en diversos contextos.

$$\vec{J} = -D\vec{\nabla}n \quad (1.3a)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \mathcal{S} \quad (1.3b)$$

donde \vec{J} es el flujo de partículas por difusión, n la densidad de partículas, D la difusividad (constante propia del medio) y \mathcal{S} el término fuente (que será cero si el sistema no contiene ninguna). El transporte que ocurre como resultado de la difusión se conoce como transporte clásico. Este tipo de movimiento se encuentra siempre presente en cualquier fluido debido a las fluctuaciones inherentes al movimiento errático de las partículas en un baño térmico.

Sin embargo, en ciertos sistemas como el plasma, también se evidencian otros mecanismos de naturaleza no local que no pueden ser justificados utilizando la difusión. Estos mecanismos contribuyen considerablemente a la degradación del confinamiento en el caso de los plasmas, y por ende, requieren una consideración detallada. Estos mecanismos de transporte no local existen en el plasma debido a que es un sistema compuesto por un gran número de partículas cargadas capaces de interactuar a largo alcance, como ya se ha descrito previamente. Dichos fenómenos adicionales de transporte se conocen como transporte anómalo [8] dada su gran diferencia con el comportamiento difusivo clásico y serán desarrollados con mayor profundidad en la sec. 1.5.

Con el fin de modelar el fenómeno de transporte anómalo, la física del plasma opta por unificar las ecuaciones que describen los fluidos, conocidas como ecuaciones de Navier-Stokes, junto con la descripción del electromagnetismo, descrita por las ecuaciones de Maxwell. Esta unificación da lugar a la magnetohidrodinámica (MHD) [9].

Las ecuaciones de la magnetohidrodinámica son las siguientes:

Ecuación de continuidad de masa.

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\vec{v}) = 0 \quad (1.4)$$

donde \vec{v} es la velocidad local de las partículas del plasma.

Ecuación de movimiento de un elemento de fluido o ecuación de Euler.

$$n \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \right) \vec{v} = -\nabla P + \vec{j} \times \vec{B} \quad (1.5)$$

donde \vec{B} es el campo magnético, \vec{j} la densidad de corriente eléctrica y P la presión termodinámica. Esta ecuación es similar a la ecuación principal de Navier-Stokes y conecta magnitudes termodinámicas como la presión con una magnitud electromagnética, el campo magnético.

Ecuación de estado o de energía.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0 \quad (1.6)$$

donde $\gamma = C_p/C_v$ es el índice adiabático. Los coeficientes que definen este índice son: C_p la capacidad calorífica a presión constante y C_v la capacidad calorífica a volumen constante. Se define la capacidad calorífica como la energía necesaria para aumentar la temperatura de una determinada sustancia en una unidad de temperatura. En el caso de un plasma el valor tomado generalmente es $\gamma = 5/3$, aproximando a un gas monoatómico con tres grados de libertad.

Ecuación de inducción.

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (1.7)$$

Ley de Gauss para el campo magnético.

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.8)$$

Estas ecuaciones completan el modelo conocido como magnetohidrodinámica ideal, en la cual se desestiman los efectos de viscosidad, fricción, conductividad térmica y resistividad eléctrica. La caracterización de estos procesos disipativos se realiza utilizando términos adicionales como la difusividad magnética $\eta = 1/\mu\sigma$, donde μ es la permeabilidad magnética del material y σ la conductividad eléctrica del mismo. Este término cuantifica la capacidad del campo magnético para difundirse a través del medio conductor en cuestión, en este caso un plasma.

También es posible tener en consideración las fuerzas externas \vec{F} que pudieran afectar al sistema, como la gravedad o la viscosidad, introduciendo potenciales en las ecuaciones diferenciales anteriormente mencionadas.

Asimismo, es posible describir las pérdidas de energía definiendo una función \mathcal{L}^1 que tendrá en cuenta pérdidas asociadas al flujo térmico y la radiación emitida a través de efecto Joule [10].

De este modo, se logra una formulación completa de la magnetohidrodinámica, denominada MHD resistiva. En cualquier caso, dado que la resistividad de Spitzer² en un plasma decae con la temperatura como $T^{-3/2}$ [11] la aproximación magnetohidrodinámica ideal es válida para altas temperaturas, características del plasma.

¹ \mathcal{L} , del inglés *loss*.

²La resistividad de Spitzer [11] es un modelo clásico de resistividad eléctrica, utilizado habitualmente en física de plasmas, basado en las colisiones electrón-ión.

1.4. Estudio de derivas

El movimiento de partículas en un plasma se encuentra influenciado por campos electromagnéticos externos a las propias partículas. Es esencial comprender cómo se comportan las partículas en condiciones de densidad características de un plasma, considerando el efecto electromagnético del entorno en el que se encuentran para poder realizar un análisis riguroso del comportamiento del sistema [4, 12].

La ecuación del movimiento de una partícula cargada de carga q con velocidad \vec{v} sometida a un campo eléctrico \vec{E} y magnético \vec{B} externos viene descrita por la ley de la fuerza de Lorentz.

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (1.9)$$

En el caso de que $\vec{E} = 0$ y aproximando $\vec{B} = B_z \hat{z}$, debido a la simetría axial del dispositivo experimental (sec. 1.6) la partícula girará en círculo describiendo giros de Larmor con frecuencia ciclotrón ω_c .

$$\omega_c = \frac{|q|B_z}{m} \quad (1.10)$$

El radio de la circunferencia descrita por la partícula es conocido como radio de Larmor y depende de la componente de la velocidad en el plano perpendicular al campo magnético v_\perp .

$$r_L = \frac{v_\perp}{\omega_c} \quad (1.11)$$

De este modo, se entiende que las partículas cargadas no siguen una trayectoria lineal sino que adoptan un desplazamiento helicoidal.

La velocidad lineal, en función de su magnitud y dirección, influye en la rapidez y orientación traslacional del movimiento de la partícula a lo largo de su trayectoria. Por otro lado, el giro de Larmor, describe la precesión de la partícula cargada en un campo magnético, dictando la orientación del movimiento circular, dando forma a la trayectoria característica.

Sin embargo, si $\vec{E} \neq 0$, aplicando la ec. (1.9) y despejando \vec{v} , se concluye que el centro del giro de Larmor (conocido como centro de guía en la literatura) sufre una deriva asociada al campo eléctrico caracterizada por una velocidad \vec{v}_E :

$$\vec{v}_E = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} \quad (1.12)$$

Es importante recalcar que dicho campo eléctrico es externo. Además, debido a que el plasma en su conjunto se comporta como un sistema cuasineutro, la única opción posible es que este campo eléctrico \vec{E} , si existe, sea externo al plasma y se encuentre relacionado con posibles campos generados en el dispositivo experimental.

Como ejemplo ilustrativo, al sustituir $|\vec{E}| = 0.33 \text{ V m}^{-1}$, $|\vec{B}| = 5 \text{ T}$, $|\vec{v}| = 1 \text{ m s}^{-1}$ se obtiene que la velocidad de deriva $\vec{E} \times \vec{B}$ se sitúa en el orden de $v_E \sim 10^{-2} \text{ m s}^{-1}$. La fig. 1.2 es una representación gráfica de dicho ejemplo. Cabe recalcar que la magnitud de esta deriva en el dispositivo real utilizado, la máquina lineal de plasma de Santander SLP, alcanza 10^4 m s^{-1} [13]. Por ello, es

obligatorio considerar la deriva $\vec{E} \times \vec{B}$ en cualquier medición experimental realizada en el plasma.

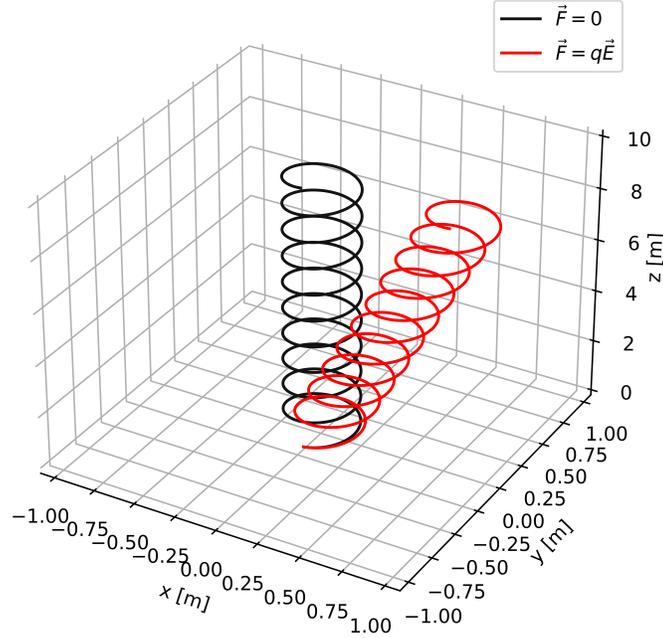


Figura 1.2: Simulación de la deriva $\vec{E} \times \vec{B}$, ec. (1.12), de una partícula cargada asociada a un campo eléctrico $|\vec{E}| = 0.33 \text{ V m}^{-1}$ e inmersa en un campo magnético $|\vec{B}| = 5 \text{ T}$ con velocidad lineal $|\vec{v}| = 1 \text{ m s}^{-1}$. El resultado es una deriva debida al campo eléctrico $v_{\vec{E}} = 0.066 \text{ m s}^{-1}$.

Es posible llevar a cabo un análisis análogo al de la ecuación (1.12), considerando la influencia del campo gravitatorio generado por el planeta Tierra, $\vec{F}_g = m\vec{g}$. No obstante, aplicando valores típicos, se obtiene que $v_{\vec{g}} \sim 10^{-9} \text{ m s}^{-1}$. De modo que considerando el tiempo de duración de una descarga de 0.2 s, se concluye que el desplazamiento es aproximadamente de 1 Å y por lo tanto despreciable.

$$\vec{v}_{\vec{g}} = \frac{m \vec{g} \times \vec{B}}{q B^2} \approx 0 \quad (1.13)$$

Además de las mencionadas, existen también derivas asociadas a la variación e inhomogeneidad de los campos magnético y eléctrico.

En el caso de que el campo magnético \vec{B} tenga una variación en la densidad de líneas de campo a lo largo de diferentes regiones del espacio, es decir, cuando dicho campo no sea uniforme, se produce una deriva asociada al gradiente de densidad de dichas líneas. Esta deriva no aplica al dispositivo experimental SLPM de Santander al tratarse en esencia de un cilindro de longitud finita. En este tipo de configuración, las líneas de campo magnético en el interior pueden ser consideradas esencialmente paralelas y uniformemente distribuidas a lo largo de la longitud del cilindro. Las partículas no se encuentran en presencia de un gradiente de densidad de líneas de campo significativo, por lo que la deriva asociada es despreciable.

$$\vec{v}_{\nabla \vec{B}} = \pm \frac{1}{2} v_{\perp} r_L \frac{\vec{B} \times \nabla \vec{B}}{B^2} \approx 0 \quad (1.14)$$

donde v_{\perp} es la componente de la velocidad en el plano perpendicular al campo magnético \vec{B} .

Del mismo modo, es posible observar una deriva relacionada con la curvatura del campo magnético, que puede ser igualmente descartada utilizando el argumento previo.

$$\vec{v}_{\vec{R}} = \frac{mv_{\parallel}^2}{q} \frac{\vec{R}_c \times \vec{B}}{R_c^2 B^2} \approx 0 \quad (1.15)$$

donde \vec{R}_c es el vector asociado al radio de curvatura de las líneas de campo del campo magnético \vec{B} y v_{\parallel} es la componente de la velocidad a lo largo de \vec{B} .

Cuando el campo magnético varía temporalmente, surgen fuerzas que aceleran las partículas en el eje paralelo a dicho campo \vec{B}_{\parallel} . Dado que el campo magnético utilizado es uniforme en el tiempo, la aceleración asociada a esta fuerza es despreciable.

$$\vec{F}_{\parallel} = -\mu \nabla_{\parallel} \vec{B} \quad (1.16)$$

donde $\mu = 1/2mv_{\perp}^2/B^2$ es el momento magnético asociado a la partícula cargada con masa m .

Además de ello, cabe la posibilidad de que el campo eléctrico sea no uniforme en el espacio. En ese caso, se añade una corrección a $v_{\vec{E}}$ asociada a la segunda derivada de \vec{E} , ver nota ³.

$$\vec{v}_{\nabla^2 \vec{E}} = \left(1 + \frac{1}{4} r_L^2 \nabla^2\right) \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} \quad (1.17)$$

donde r_L es el radio de Larmor.

De la misma manera, si el campo eléctrico varía en el tiempo surgirá una deriva asociada denominada deriva de polarización \vec{v}_p de distinto signo en función de la carga eléctrica de la partícula. La razón física tras esta corriente de polarización es sencilla. Consideremos un ion en reposo en presencia de un campo magnético, al aplicar un campo eléctrico \vec{E} , el ion inicialmente se desplaza en la dirección de \vec{E} . Solo después de adquirir una velocidad \vec{v} , el ion experimenta una fuerza de Lorentz, descrita por la ecuación (1.9). Si el campo eléctrico \vec{E} se mantiene constante, no hay más deriva \vec{v}_p sino sólo una deriva $\vec{v}_{\vec{E}}$.

$$\vec{v}_p = \pm \frac{1}{\omega_c B} \frac{d\vec{E}}{dt} \approx 0 \quad (1.18)$$

donde ω_c es la frecuencia ciclotrón.

Estas dos últimas derivas son desestimadas debido a la uniformidad tanto temporal como espacial del campo \vec{E} externo medido en el interior del dispositivo experimental SLPM. Además, también se cumplimentan las predicciones realizadas en relación al campo magnético con las mediciones realizadas del mismo [14].

En conclusión, la única deriva a tener en cuenta en la medición de datos en el dispositivo SLPM es la deriva $\vec{v}_{\vec{E}}$ asociada a la presencia de un campo eléctrico externo homogéneo en el espacio y el tiempo.

³Si el campo eléctrico variase linealmente, las correcciones asociadas a la primera derivada se cancelarían. De este modo, surge la necesidad de tener en cuenta la segunda derivada espacial.

1.5. Transporte anómalo

En la naturaleza, los sistemas complejos fuera del equilibrio termodinámico que se encuentran ligeramente perturbados por un proceso de aporte energético lento pero persistente, denominado *driving*, tienden a exhibir un patrón de transporte extremo e intermitente conocido como avalanchas [15]. Estos estallidos de actividad se manifiestan en diversas situaciones físicas como el movimiento intermitente de paredes de dominio en sistemas magnéticos [16] o la emisión acústica en materiales sometidos a tensión [17], entre otros. Dicho comportamiento complejo puede observarse en una amplia gama de escalas, que van desde nanómetros o micrómetros, como los ejemplos anteriores, hasta cientos o miles de kilómetros, como ocurre en los terremotos [18] o las erupciones solares [19].

En este contexto, el enfoque de la criticalidad autorganizada (SOC⁴) [20] ha cobrado cada vez más relevancia en la investigación de la física del plasma. Originado en la física de sistemas complejos, el concepto de SOC busca analizar esos sistemas en los que la física evoluciona hacia un estado crítico, generando eventos a lo largo de diferentes tamaños y escalas temporales. Esta perspectiva resulta valiosa en la comprensión de los fenómenos observados en el plasma, ya que permite un análisis más completo de la compleja dinámica que se manifiesta.

La aplicación de este enfoque de dinámica tipo SOC a los plasmas se debe a la observación de que muchas de sus propiedades muestran comportamientos similares a los de los sistemas en estado crítico. Esto sugiere que los plasmas podrían estar en un estado de criticalidad autorganizada, en el cual las interacciones a corto y largo alcance generan cierta dinámica colectiva que conduce a fluctuaciones de gran escala y eventos abruptos, como las disrupciones en los dispositivos de fusión.

En el presente trabajo, se analizará, entre otros aspectos, el comportamiento de las avalanchas en un plasma no confinado con el fin de comprobar si se adecuan a este patrón de comportamiento.

Los sistemas que se desarrollan hacia un estado dinámico SOC presentan separación de escalas temporales (y espaciales), donde el proceso relacionado con la fuerza externa que impulsa el sistema (*driving*) es significativamente más lento en comparación con los procesos internos de relajación. Este fenómeno se ejemplifica en eventos como los terremotos, donde la tensión acumulada en la corteza terrestre a lo largo de varios cientos o miles de años (*driving*) se libera en cuestión de segundos o minutos (relajación) [20].

La separación de escalas temporales (y espaciales) se encuentra estrechamente relacionada con la existencia de umbrales y metaestabilidad. Esto se debe a que la existencia de un umbral asegura que la acumulación de energía es gradual a lo largo de un período prolongado previo a la liberación cuasi-instantánea. Como ejemplo, cuando se empuja un piano por el suelo, la fuerza aplicada aumenta lentamente hasta alcanzar un determinado umbral, momento en el que el piano se mueve rápidamente liberando la tensión. La fuerza de fricción real que debe superarse depende de los detalles microscópicos del piano y del suelo, dando lugar a gran cantidad de estados metaestables diferentes. Los conceptos de umbral y *driving* son esenciales para una adecuada comprensión de los sistemas que manifiestan fenómenos de avalancha.

Consideremos un sistema en estado de equilibrio, si introducimos una ligera perturbación que exceda el umbral en uno de sus componentes, este relajará su energía a primeros vecinos. No obstante,

⁴SOC, del inglés *Self Organized Criticality*

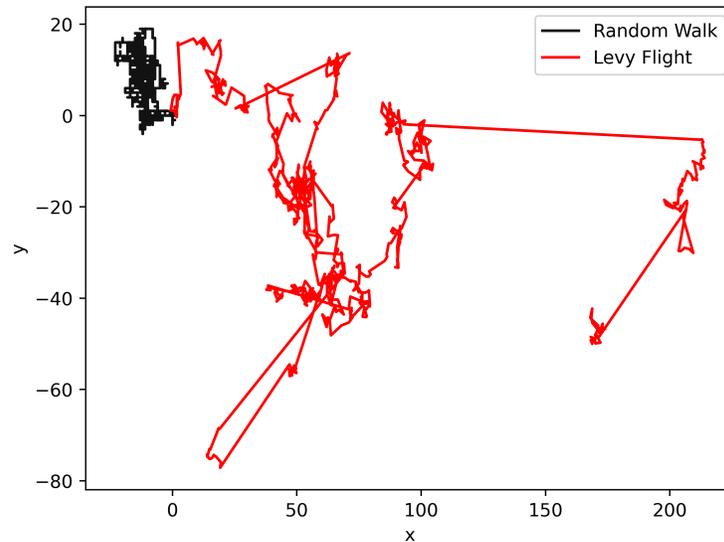


Figura 1.3: Simulación de $N = 10^3$ pasos para un *random walk* y un *Lévy flight*.

el efecto será apenas discernible en el conjunto del sistema. En este contexto, la escala temporal estándar se definiría por el período de relajación, mientras que la escala espacial se determinaría por la proximidad a los vecinos inmediatos.

Sin embargo, después de un extenso período de *driving*, cada componente del sistema se encontrará muy cerca de su umbral. Introducir una perturbación localizada en el sistema causará que cierto componente sobrepase su umbral, provocando una descarga hacia sus vecinos. En este escenario, los componentes vecinos también se encuentran muy cerca de sus umbrales y se genera un efecto de relajación en cadena. Este fenómeno, observado desde el exterior, es percibido como una avalancha. Las avalanchas son manifestaciones de un fenómeno colectivo, por lo tanto, su dinámica se manifiesta en escalas temporales y espaciales mucho mayores que las asociadas a las interacciones microscópicas.

El transporte difusivo clásico, representativo de sistemas hamiltonianos en equilibrio termodinámico, puede entenderse pictóricamente a partir del modelo clásico de random walk. En este modelo, un caminante realiza pasos sucesivos que son independientes y aleatoriamente determinados. Concretamente, para un caminante que se mueva en un plano, existe una probabilidad de $1/4$ para cada dirección (arriba, abajo, izquierda, derecha) en cada paso de tiempo. El caminante dará un paso de una unidad de longitud en la dirección escogida. Con el paso del tiempo aparecerán longitudes características asociadas al movimiento del caminante. Si existiese un gran número de caminantes en cierta región y pudiesen colisionar entre sí, este modelo representaría el movimiento browniano. En ese contexto, la longitud característica asociada sería el recorrido libre medio.

Por otro lado, un caso muy distinto se evidencia en el caminante de tipo *Lévy flight*. En este caso, existirá también una probabilidad idéntica de $1/4$ para cada dirección, pero el tamaño del paso se regirá por una distribución de probabilidad de tipo ley de potencias $\propto l^{-\alpha}$ donde l es la longitud y $3 > \alpha > 1$. Esta distribución decae lentamente y por tanto permite a la partícula cubrir una gama más amplia de distancias. De hecho, las fluctuaciones de los saltos $\langle l^2 \rangle - \langle l \rangle^2$ no se encuentran acotadas. Este tipo de movimiento recuerda al comportamiento de las avalanchas descritas ante-

riormente, dado que el sistema recorre una sección determinada del plano bidimensional hasta que bruscamente salta a otro punto distante. En consecuencia, la partícula cubrirá distancias considerablemente grandes de manera aleatoria en el tiempo y no existen longitudes características. La fig. 1.3 compara los dos tipos distintos de movimientos mencionados en una simulación de caminantes después de 1000 pasos.

Los plasmas confinados magnéticamente en dispositivos toroidales, utilizados para la investigación de la fusión termonuclear, parecen exhibir una respuesta intermitente en forma de avalanchas impulsada por la turbulencia [21]. Este hecho, junto con muchos otros detallados en la literatura, sugiere la presencia de transporte anómalo en los plasmas confinados. Por ello, desde el punto de vista teórico, se ha propuesto la conexión con el mencionado paradigma de la criticalidad autorganizada SOC. Sin embargo, este paradigma no es más que una categorización de un conjunto de fenómenos observados en los sistemas complejos cuya naturaleza caótica y no lineal es la verdadera responsable del transporte anómalo.

1.6. Máquina Lineal de Plasma de Santander

Los datos a analizar en este trabajo provienen de mediciones preexistentes de la Máquina Lineal de Plasma de Santander (SLPM) [22]. La fig. 1.4 muestra un esquema del dispositivo experimental que será descrito en esta sección. El plasma de la SLPM se genera en una vasija cilíndrica de vidrio con un diámetro interno de 0.07 m y una longitud total de 1 m. La vasija se sitúa dentro de una guía de ondas circular, de diámetro 0.08 m. Una guía de ondas es una estructura física diseñada para guiar ondas electromagnéticas o sonoras en una dirección específica, minimizando además la pérdida de energía. La necesidad de estas guías radica en el hecho de que sin ellas, la intensidad de las ondas disminuiría conforme a la ley del inverso del cuadrado de la distancia en un espacio tridimensional [23]. La guía confina la onda para su propagación en una dimensión [24], de modo que, en condiciones ideales, la onda no pierde potencia mientras se propaga. Asimismo, debido a la reflexión total en las paredes, las ondas se limitan al interior.

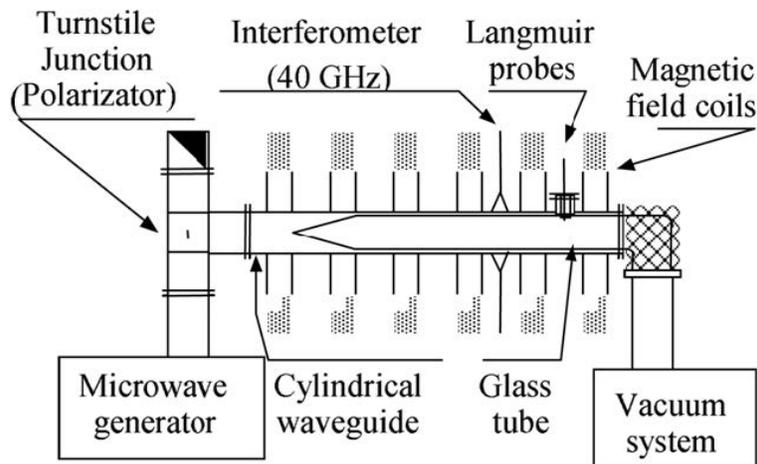


Figura 1.4: Esquema ilustrativo del SLPM.

El guiado es crucial puesto que la producción de plasma se lleva a cabo mediante la emisión longitudinal de ondas electromagnéticas con una frecuencia de operación de 2.45 GHz. Esta frecuencia corresponde al rango de las microondas en el espectro electromagnético.

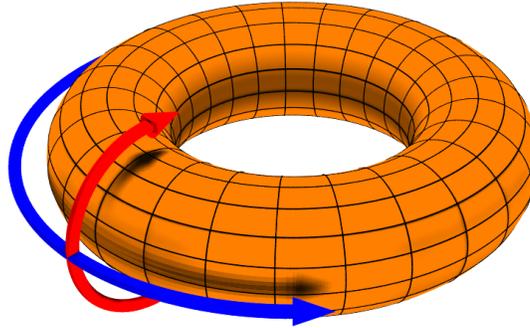


Figura 1.5: Esquema que representa las direcciones de los campos magnéticos en un dispositivo tipo *tokamak*. La dirección poloidal θ se representa en rojo y la toroidal φ en azul [25].

La vasija de vidrio finaliza en una punta cónica que se dirige hacia el generador de microondas. Esta característica de diseño tiene el objetivo de reducir la potencia reflejada hacia el generador, permitiendo mayor control y eficiencia en la generación del plasma. La potencia incidente P_i oscila en un rango $0.6 \text{ kW} < P_i < 1.2 \text{ kW}$.

Se añade un campo magnético longitudinal estacionario generado a través de seis bobinas refrigeradas por agua. Las bobinas se encuentran dispuestas de forma concéntrica con la guía de ondas. El campo magnético generado B_0 varía en el rango $0.05 \text{ T} < B_0 < 0.15 \text{ T}$. Todas las medidas correspondientes a este trabajo se han realizado en un plasma de Helio utilizando un valor de campo magnético $B_0 = 0.12 \text{ T}$.

Este tipo de configuración de campo magnético no confina las partículas en el plasma. Las partículas cargadas en un campo magnético uniforme experimentan una fuerza que las hace moverse en una trayectoria helicoidal a lo largo de las líneas de campo, sec. 1.4. Sin embargo, las fuerzas ejercidas por el sistema en dirección radial no son contrarrestadas en el dispositivo.

Además de ello, debido a la geometría del dispositivo, las partículas en el cilindro no se encuentran confinadas axialmente. De este modo, para confinar las partículas, se requerirá de un campo magnético en dirección poloidal y una geometría de tipo toroide, que resultará en trayectorias helicoidales cerradas. Se definen de forma ilustrativa en la fig. 1.5 los ángulos, toroidal ϕ y poloidal θ , característicos de una máquina confinante con geometría toroidal.

De este modo, añadiendo las dos componentes del campo magnético necesarias para confinar el plasma toroidal y poloidalmente, se obtiene un campo magnético cuyas líneas se encuentran cerradas y dibujan una trayectoria helicoidal. La fig. 1.6 muestra las componentes del campo magnético en el caso de los reactores tipo *Tokamak*.

La SLPM es útil para realizar mediciones de diversas cantidades físicas relacionadas con los parámetros típicos de un plasma. La determinación de la densidad media de electrones n_e se lleva a cabo mediante el uso de un interferómetro de 8 mm. El interferómetro mide las fluctuaciones sufridas por la luz debido al plasma en una línea de la longitud mencionada. La densidad varía típicamente en

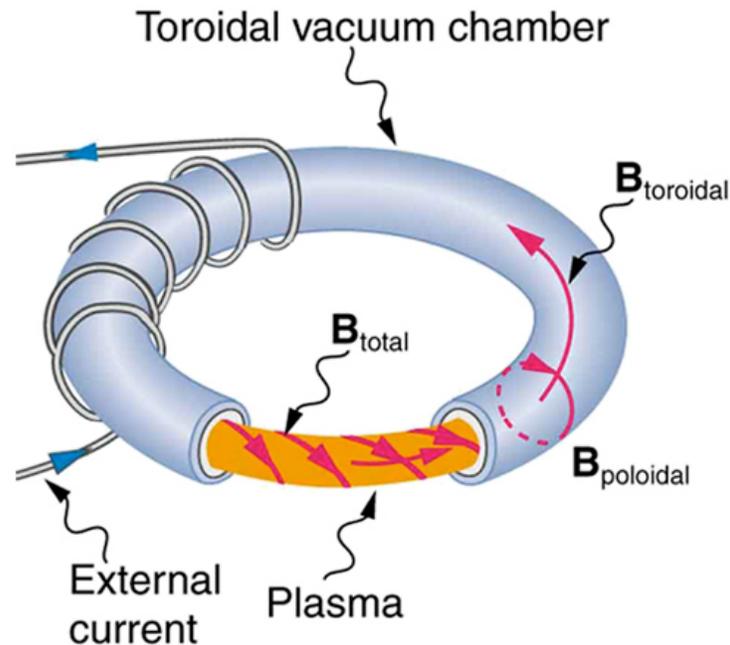


Figura 1.6: Componentes del campo magnético en un reactor tipo Tokamak [26].

el rango $10^{15} < n_e < 10^{18} \text{ m}^{-3}$.

Para obtener el valor local de la densidad de electrones, el potencial flotante⁵ y los números de Mach⁶, junto con sus fluctuaciones a lo largo de toda la columna radial del plasma, se utiliza un conjunto de sondas de Langmuir. La temperatura media (en eV) de los electrones del plasma generado, asociada a una distribución de velocidades de tipo Maxwell-Boltzmann, se encuentra en el rango $5 < kT < 40 \text{ eV}$.

Este conjunto de sondas consta de cuatro puntas de alambre de tungsteno con un diámetro de 0.5 mm y una longitud de 2 mm dispuestas en un conjunto cuadrado de una longitud lateral de 2 mm. La fig. 1.7 muestra un esquema de las sondas de Langmuir utilizadas.

Las sondas de Langmuir son dispositivos de diagnóstico con al menos dos electrodos insertados en el plasma, actuando uno como ánodo y otro como cátodo. Variando el potencial eléctrico entre ellos, se genera una característica $I(V)$ que brinda información sobre propiedades del plasma como la corriente de saturación, el potencial eléctrico o la temperatura.

El funcionamiento de dichas sondas se basa en el estudio del potencial del plasma. Cuando el plasma entra en contacto con las paredes de la cámara de vacío, este se comporta como un pozo donde los electrones e iones se recombinan formando un gas neutro. Debido a sus diferencias de masa, los electrones alcanzan las paredes antes que los iones, generando un campo eléctrico radial. Este

⁵Se conoce como potencial flotante al potencial eléctrico medido en un sustrato aislado de plasma.

⁶El número Mach de Alfvén representa la relación entre la velocidad del plasma y la velocidad de las ondas Alfvén en el mismo. Estas ondas se generan cuando los iones se desvían de su alineación a lo largo de las líneas de campo y son restaurados por la fuerza magnética.

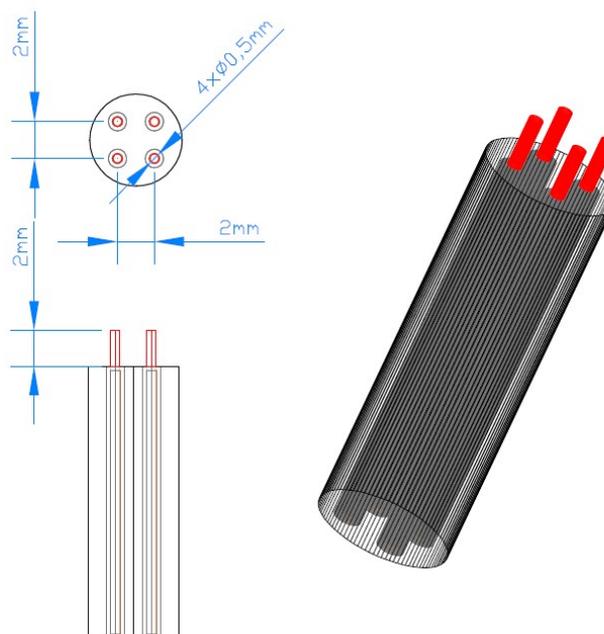


Figura 1.7: Esquema de una sonda de Langmuir de 4 puntas [13].

campo eléctrico equilibra el flujo de electrones hacia las paredes y, a su vez, aumenta el flujo de iones. El flujo de iones se encuentra determinado por las presiones electrónica e iónica, pero se ve restringido por la inercia de los iones. Como resultado, se establece un gradiente de potencial radial muy intenso en las paredes de la cámara, aunque este gradiente se disipa rápidamente debido al apantallamiento de Debye (sec. 1.2).

Cuando un electrodo se introduce en el plasma, el comportamiento se asemeja al del plasma interactuando con el borde. Sin embargo, el electrodo introducido tiene la capacidad de cambiar su potencial en relación al potencial del plasma y es lo suficientemente pequeño como para no perturbar significativamente las condiciones del mismo. Por lo tanto, cuando el electrodo se sumerge en el plasma, su potencial de polarización determinará la formación de un escudo simétrico de electrones e iones a su alrededor. Si asumimos que la presión del gas es lo suficientemente baja como para que las colisiones sean insignificantes, la corriente recogida por el colector puede ser calculada en función del área y otros parámetros conocidos [27, 28].

De este modo, dado que la SLPM tiene simetría cilíndrica, es posible calcular el flujo de partículas inducido por fluctuación asociada a la componente radial de la deriva $\vec{v}_{\vec{E}}$, sec. 1.4, a partir de los valores medidos de la densidad electrónica $n_e(t) = \bar{n}_e + \delta n_e(t)$ y el campo eléctrico poloidal $E_\theta(t) = \bar{E}_\theta + \delta E_\theta(t)$. Las magnitudes $\delta n_e(t)$ y $\delta E_\theta(t)$ denotan, respectivamente, la variación temporal o fluctuación de la densidad electrónica y el campo eléctrico en el sistema físico en torno a un valor medio. En la literatura, con el fin de simplificar la notación, se simbolizan como \tilde{n}_e y \tilde{E}_θ .

$$\Gamma_{E \times B}(t) = n_e(t) v_{\vec{E},r} = n_e(t) E_\theta(t) / B_0 \quad (1.19)$$

donde B_0 es el campo magnético axial.

La densidad electrónica $n_e(t)$ se obtiene a partir de las mediciones de la densidad de corriente de saturación iónica [27, 28] y el campo eléctrico poloidal $E(t)$ partiendo del potencial flotante medido en dos puntos poloidalmente separados [27] (sec. 1.6).

Dada la existente simetría cilíndrica, se han examinado datos de flujo Γ obtenidos trasladando radialmente la sonda de Langmuir y midiendo a diez radios diferentes desde $r = 0.2$ hasta 2.8 cm. Previo a la realización de las mediciones, se permite que el plasma evolucione hasta alcanzar un estado de régimen estacionario. Adicionalmente, se verifica que la distribución de densidad de probabilidad PDF del flujo se mantenga constante con el tiempo.

Finalmente, para cada radio, se obtienen series temporales del flujo Γ de partículas con una resolución de $1 \mu\text{s}$ y $2 \cdot 10^5$ puntos en dicho régimen estacionario. Esto corresponde a mediciones en un rango de 0.2 s de evolución temporal, varios órdenes de magnitud mayor que el tiempo típico de decorrelación de la señal ($\tau_c \approx 1 - 6 \mu\text{s}$).

2

Métodos de Análisis

2.1. Avalanchas

Según lo expuesto en la sección 1.5, los sistemas que manifiestan comportamiento SOC se caracterizan por la existencia de umbrales específicos. Estos umbrales pueden ser entendidos como límites que, al ser excedidos, desencadenan una transformación cualitativa en la conducta del sistema a lo largo de un período de tiempo determinado. Este umbral, por tanto, demarca la transición desde un estado estacionario hasta un estado temporal de gran fluctuación, dando lugar a fenómenos emergentes que pueden variar en su naturaleza y magnitud. Un ejemplo paradigmático de este tipo de fenómenos es el de las avalanchas en el plasma, fenómeno central de este trabajo.

En este sentido, la selección de un criterio de umbral adecuado en el análisis de datos se vuelve de vital importancia a la hora de definir que fenómenos serán clasificados como avalanchas. Un umbral incorrectamente definido puede llevar a interpretaciones equivocadas del comportamiento del sistema mientras que una correcta identificación y aplicación de los umbrales puede ofrecer una visión detallada y precisa de la dinámica de eventos extremos realmente subyacente.

En la actualidad, se ha establecido como estándar la aplicación de un umbral al valor absoluto de la señal temporal [29]. Esta estrategia tiene como objetivo minimizar el impacto del ruido proveniente de interacciones de corto alcance. De esta manera, únicamente las avalanchas que superen dicho umbral serán consideradas en el análisis. Las series temporales empleadas en este estudio albergan información sobre la dirección radial del flujo electrónico. Esta direccionalidad puede ser negativa, denotando un transporte de materia hacia el interior, designado como *in*, y viceversa, *out*. De forma que, al implementar la técnica de establecimiento de umbrales previamente mencionada, se ha observado que, en muchos casos, se pierde información crucial acerca de las avalanchas *in*, que indican flujos de materia hacia el interior. Este resultado puede atribuirse a la asimetría inherente de la señal analizada. Los eventos *out*, tienden a ser predominantemente más abundantes en las señales analizadas, siendo generalmente dos órdenes de magnitud superiores en comparación con los eventos *in*. Como consecuencia de esta disparidad, las avalanchas *in* pueden verse eclipsadas dentro del ruido *out* y esta circunstancia prevalece independientemente del criterio de umbral seleccionado cuando se considera el flujo en valor absoluto. En cualquier caso, siempre y cuando la señal sea

asimétrica, este problema prevalece en el análisis.

En consecuencia, en este trabajo, se ha decidido considerar la señal como la combinación de dos flujos, *in* y *out*. Es inmediato que a raíz de este cambio de paradigma se establecerán dos umbrales, a partir del mismo criterio, para cada señal analizada. Se ha optado por definir los umbrales en términos del máximo de los picos. En concreto, se ha decidido establecer el umbral en el 6% de la media de los diez picos más altos de cada señal. Esta elección ofrece dos ventajas claras. En primer lugar, al considerar los picos más altos, se asegura que el umbral esté relacionado con los eventos extremos que se desean estudiar. En segundo lugar, el uso de la media de los diez picos más altos en lugar del máximo absoluto, permite mitigar la influencia de posibles errores de medición o eventos atípicos no representativos de la dinámica general del sistema.

No obstante, la elección de dicho umbral no es arbitraria. Se ha seleccionado la cantidad de 6% tras un análisis detallado de las series temporales. La elección es lo suficientemente baja como para no ignorar las avalanchas de menor magnitud, pero lo suficientemente alta como para evitar la consideración de fluctuaciones aleatorias como avalanchas. El criterio ha demostrado ser válido para diferentes series temporales.

Tras establecer los umbrales, se abre la posibilidad de llevar a cabo varios análisis que dan lugar a diversas variables. Una de estas variables es el tiempo de espera, denotado como Q , el cual se define como los intervalos de tiempo que transcurren entre avalanchas sucesivas. La forma en la que se definen y calculan estos tiempos de espera depende del criterio de umbral aplicado y puede proporcionar una visión más o menos profunda de la dinámica subyacente.

Con el nuevo método propuesto en este trabajo, donde se consideran los flujos como dos dinámicas interrelacionadas, se aplican dos umbrales diferentes a partir del mismo criterio. Se obtiene así una visión más completa de los tiempos de espera, sin incurrir en los errores mencionados previamente.

Los «tiempos de espera» Q son definidos como los intervalos de tiempo entre cualquier tipo de avalancha, ya sea *in* o *out*. La expresión matemática de este concepto se detalla en la ec. (2.1).

$$Q(i) = t_{i+1}^{init} - t_i^{end} \quad (2.1)$$

donde Q_i es el i -ésimo tiempo de espera, definiéndose como el intervalo de tiempo entre el final de una avalancha, t_i^{end} , y el comienzo de la siguiente, t_{i+1}^{init} .

La fig. 2.1 proporciona una representación visual clara del método utilizado. Se ilustra en ella la separación de los flujos manifestada por la posterior aplicación del criterio de umbral, que define los tiempos de espera. Se observa que el tiempo de espera Q es equivalente al intervalo de tiempo en el que la señal permanece entre umbrales.

Con el propósito de lograr una definición precisa de dichos intervalos de tiempo, resulta fundamental identificar los momentos exactos en los que la señal atraviesa los umbrales establecidos. Sin embargo, esta tarea puede presentar desafíos significativos debido a la naturaleza de las señales analizadas. En particular, en el caso más extremo, la señal puede variar diversos ordenes de magnitud en un solo microsegundo. Esta rápida variación hace difícil determinar con precisión lo ocurrido entre dos puntos consecutivos.

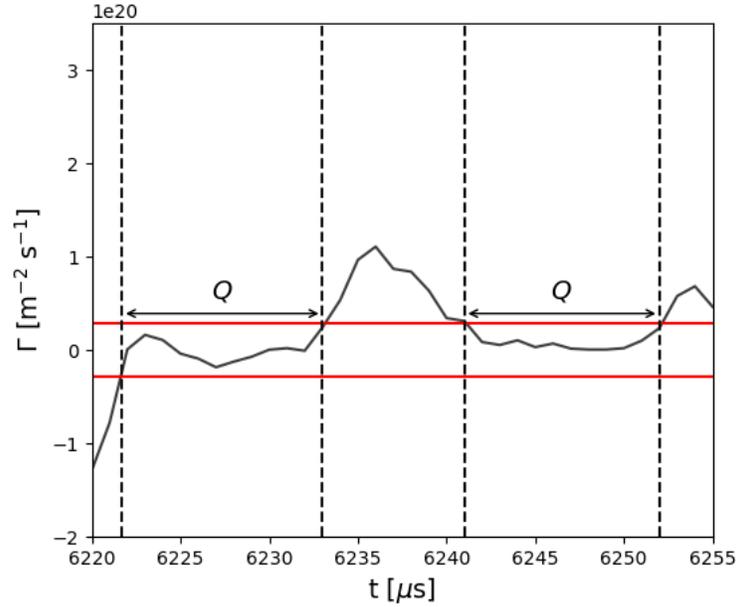


Figura 2.1: Muestra de la serie temporal del flujo de partículas Γ para $r = 1.0$ cm. Se observan ambos umbrales escogidos como el 6% de la media de los 10 primeros máximos. Se identifican los eventos de avalancha correspondientes a fluctuaciones por encima o debajo de los umbrales correspondientes. De este modo, es posible el cálculo de los dos tipos de tiempos de espera Q entre eventos.

Se ha seleccionado un método que hace uso de la interpolación lineal para estimar valores intermedios entre puntos de datos existentes. Esta técnica asume que existe una relación lineal directa entre los puntos de datos adyacentes, lo que puede no ser totalmente exacto en todos los casos. No obstante, dada la naturaleza fluctuante y variable de la señal en cuestión, este método proporciona una estimación útil. El empleo de la interpolación lineal facilita la predicción de valores en un conjunto de datos que, por su naturaleza intrínseca, tienden a cambiar rápidamente con el tiempo. La fig. 2.2 proporciona una representación visual clara del método, ilustrando la separación de los flujos además de la posterior aplicación del criterio de umbral, que define los tiempos de espera.

Otra cantidad notable son los «tiempos de excursión». De acuerdo con la metodología *in* y *out* que destaca la importancia de considerar la direccionalidad del flujo electrónico, es posible llevar a cabo un análisis que se asemeja al estudio de los tiempos de espera Q . Este análisis se fundamenta en la medición del tiempo durante el cual la señal se encuentra en el lado positivo ($\Gamma > 0$) o negativo ($\Gamma < 0$). Estos intervalos de tiempo se denominan tiempos de excursión.

De este modo se definen dos intervalos de tiempo significativos: t_{in} y t_{out} . Estos intervalos representan períodos durante los cuales el flujo se dirige radialmente hacia el centro (*in*) o hacia el exterior (*out*), lo que corresponde a un flujo negativo o positivo, respectivamente. Este posicionamiento es en relación con el cero, es decir, t_{in} corresponde a los periodos de tiempo cuando el sistema se encuentra debajo de $\Gamma = 0$, mientras que t_{out} alude a los momentos en los que el sistema supera el eje.

Dicho esto, es crucial resaltar que mediante esta metodología es posible analizar la existencia de correlación asociada con el tiempo durante el cual el sistema transporta materia hacia su interior (t_{in}) y el tiempo durante el cual lleva a cabo el transporte de materia hacia el exterior (t_{out}).

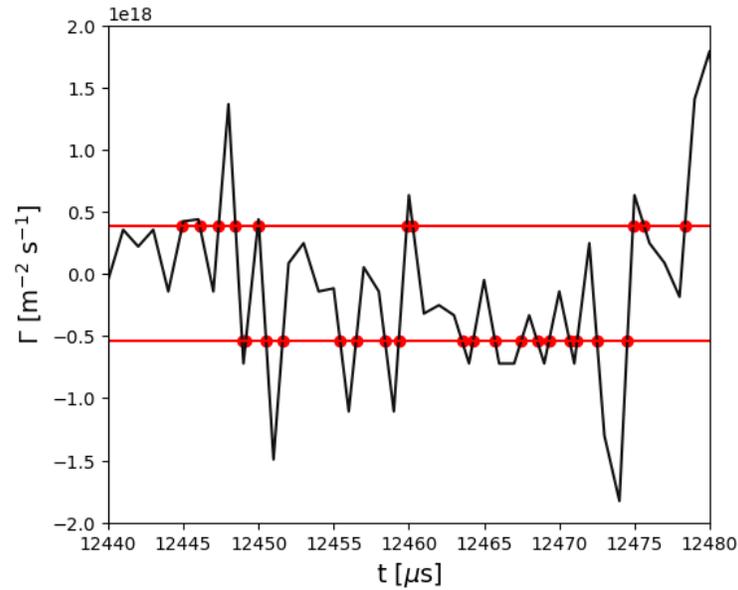


Figura 2.2: Muestra de la serie temporal del flujo de partículas Γ para $r = 2.8$ cm. Se observa el uso de la interpolación lineal para determinar tiempos de corte de umbral con mayor exactitud.

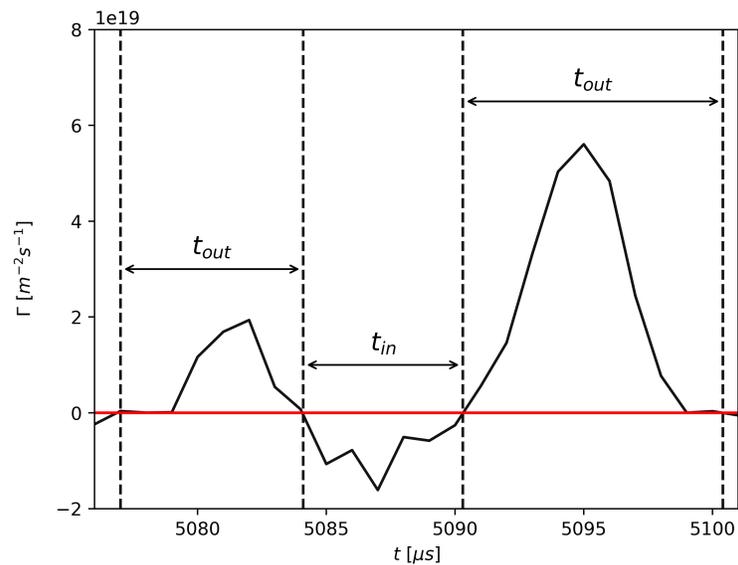


Figura 2.3: Muestra de la serie temporal del flujo de partículas Γ para $r = 1.0$ cm. Se ilustran los tiempos de excursión t_{in} y t_{out} asociados a los intervalos de tiempo que el sistema transporta materia hacia el interior o hacia el exterior.

Por último, la fig. 2.3 proporciona una representación gráfica precisa del método, mostrando la definición de los tiempos de excursión como intervalos de tiempo durante los cuales la señal se encuentra en el lado positivo o negativo.

2.2. Análisis estadístico

Una vez determinada la serie temporal de los tiempos de espera a partir de las series temporales del flujo medidas experimentalmente, las propiedades de transporte en el plasma se reflejan en la distribución de probabilidad de dichos tiempos de espera. Por tanto, una parte fundamental del análisis en este trabajo se basa en una determinación precisa de la estadística de los tiempos de espera de las señales de flujo.

En el contexto de variables continuas, cualquier definición de probabilidad basada en la repetición de eventos se vuelve insuficiente debido a que el número total de resultados posibles es infinito. Para abordar esta problemática, se introduce una herramienta fundamental conocida como función densidad de probabilidad. Esta función, denotada como $p(x)$, permite calcular la probabilidad P de que un resultado específico X se encuentre en el intervalo entre x y $x + dx$ (siendo dx un diferencial infinitesimal).

$$P(X \in [x, x + dx]) = p(x) dx \quad (2.2)$$

donde $p(x)$ es la función densidad de probabilidad o *pdf*. Esta función debe satisfacer un par de condiciones para garantizar que $p(x)dx$ es una probabilidad.

En primer lugar, las probabilidades deben ser siempre positivas.

$$p(x) \geq 0, \forall x \in \Omega \quad (2.3)$$

Además, la probabilidad total debe ser unitaria sobre el conjunto Ω , que representa el dominio de la variable x .

$$\int_{\Omega} p(x) dx = 1 \quad (2.4)$$

Existen diversas técnicas específicas para poder determinar la *pdf* a partir de un conjunto de datos experimentales discreto. Sin embargo, las aplicadas en este trabajo se sustentan sobre el *bineado* de datos. Este método consiste en esencia en generar histogramas a partir de los datos medidos para poder estimar la *pdf* de manera práctica [30].

La técnica estándar para construir una *pdf* a partir de un conjunto de datos es conocida como *bineado* lineal o *CBS*¹². Inicialmente, se tendrá un conjunto X^* de N mediciones realizadas a una cantidad X .

$$X^* = [X_1, X_2, \dots, X_N] \quad (2.5)$$

Es posible estimar la *pdf* a partir de este conjunto de datos X^* construyendo un grupo de M *bins* que cubra el dominio $X \in [\min(X^*), \max(X^*)]$. El número de *bins* debe ser mucho menor que el

¹CBS, del inglés *Constant Bin Size*.

²Existen varios estándares de *bineado*, el siguiente método más común es el *Constant Bin Content* o *CBC*, donde el tamaño del *bin* es definido a partir de un contenido fijo.

número de datos, $M \ll N$, para que exista un número razonable de datos en cada uno de ellos. Se define cada bin b_i a partir de un intervalo concreto.

$$b_i = [\min(X^*) + i \cdot \Delta b, \min(X^*) + (i + 1) \cdot \Delta b], \quad i = 1, \dots, M \quad (2.6)$$

El tamaño de cada bin Δb es constante y se define a partir de M y los valores máximo y mínimo del conjunto X^* .

$$\Delta b = \frac{\max(X^*) - \min(X^*)}{M - 1} \quad (2.7)$$

Tras obtener los bins, se determina el número de elementos del conjunto X^* , N_i , que pertenecen a cada bin específico. De este modo, la probabilidad de que una medida sea parte del bin b_i se da a partir de una simple fracción.

$$P_i = \frac{N_i}{N} \quad (2.8)$$

Teniendo en cuenta la definición realizada en la ec. 2.2 se obtiene la *pdf* correspondiente.

$$P_i = p_i \Delta b \rightarrow p_i = \frac{N_i}{N \Delta b} \quad (2.9)$$

Se asigna el valor de la *pdf* obtenido al punto medio del bin. De este modo, se define la función densidad de probabilidad numérica a partir de un par de valores (x_i, p_i) .

$$p_{CBS}(X^*) = \left\{ (x_i, p_i) = \left(\min(X^*) + \left(i + \frac{1}{2} \right) \Delta b, \frac{N_i}{N \Delta b} \right), \quad i = 1, \dots, M \right\} \quad (2.10)$$

Este método contiene un parámetro libre, el número de bins M , que debe ser ajustado para conseguir la precisión necesaria.

Una vez descrito el método de determinación de la función densidad de probabilidad *pdf*, es conveniente analizar el significado físico de los distintos tipos de función que pueden aparecer al calcular la *pdf* de los tiempos de espera Q .

Si la *pdf* de los tiempos de espera sigue una distribución de tipo exponencial decreciente, la probabilidad de que el sistema permanezca entre umbrales es independiente de cuánto tiempo haya estado en el estado de silencio. La distribución exponencial implica la descorrelación entre los tiempos en los que ocurren las avalanchas.

Por el contrario, si la *pdf* no es exponencial, los tiempos en los que ocurren las avalanchas se encontrarán correlacionados en mayor o menor medida. Es decir, la probabilidad de que el sistema continúe en silencio depende del tiempo que ya ha permanecido en ese estado. Generalmente, las distribuciones asociadas a este tipo de comportamiento presentan una cola pesada. En el caso extremo, donde existen correlaciones de largo alcance, la distribución será de tipo ley de potencias decreciente. Este tipo de distribución exhibe una cola pesada y, en general, presenta una caída más gradual en comparación con la distribución de tipo exponencial decreciente.

En la siguiente sección se realizará un análisis detallado de las correlaciones con el objetivo de ampliar su significado físico y desarrollo matemático.

2.3. Correlaciones

La correlación nos informa del grado de dependencia estadística entre dos variables. Las correlaciones no se limitan únicamente a su aplicación en el dominio del tiempo. También se muestran en el dominio de la frecuencia. La transformada de Fourier, que permite la transición entre estos dos dominios, juega un papel crucial en este ámbito y permite multitud de análisis como el que será objeto de esta sección, el análisis espectral de potencias.

La función de correlación temporal $C(\tau)$ cuantifica la influencia que el valor de la señal en $X(\tau_0)$ tiene sobre un instante posterior $X(\tau_0 + \tau)$ [20]. El grado de dependencia, historia o causalidad de la señal se caracteriza a través de esta función.

$$C(\tau) = \langle X(\tau_0)X(\tau_0 + \tau) \rangle_{\tau_0} - \langle X(\tau_0) \rangle_{\tau_0}^2 \quad (2.11)$$

Si no existe correlación estadística entre la señal en τ_0 y τ unidades después, entonces $C(\tau) = 0$. La velocidad con la que $C(\tau)$ disminuye hacia cero mide la duración de las correlaciones o efectos de memoria típicos en la señal.

En sistemas donde predominan las interacciones de corto alcance y las fluctuaciones tienden a ser más localizadas, las correlaciones espaciales y temporales entre elementos del sistema decaen rápidamente. Este patrón de caída rápida se manifiesta en forma de una función de decaimiento exponencial en la función de correlación $C(\tau)$.

$$C(\tau) \propto e^{-\tau/\tau_0} \quad (2.12)$$

donde τ_0 es el tiempo de correlación, que representa la escala típica en la que las correlaciones decaen. Estas son, por ejemplo, las correlaciones que uno espera en un sistema en equilibrio termodinámico.

Sin embargo, existen sistemas físicos que muestran correlaciones de largo alcance, es decir, sistemas que no exhiben longitudes o tiempos característicos. Esta falta de escalas típicas se asocia con funciones de correlación de tipo algebraico, también conocidas como leyes de potencia o *power laws*. Este tipo de funciones tienen un decrecimiento más lento y muestran una cola que persiste a grandes distancias.

$$C(\tau) \propto \tau^{-\alpha} \quad (2.13)$$

donde $\alpha \leq 2$ es el exponente de la ley de potencia. La fig. 2.4 muestra los comportamientos de tipo exponencial o *power law* descritos en diferentes escalas: lineal, semilog o log-log.

El análisis espectral de potencias es una herramienta matemática ampliamente utilizada en el procesamiento de señales que tiene como fin estudiar las frecuencias características presentes en una señal temporal. Este método transforma los datos del dominio de tiempos al dominio de frecuencias utilizando la ya mencionada transformada de Fourier y posteriormente computa el cuadrado del valor absoluto de la misma, facilitando así la identificación de patrones subyacentes y características de las señales que pueden no ser evidentes en la representación temporal. A continuación se detalla el método utilizado en este trabajo para obtener el espectro de potencias.

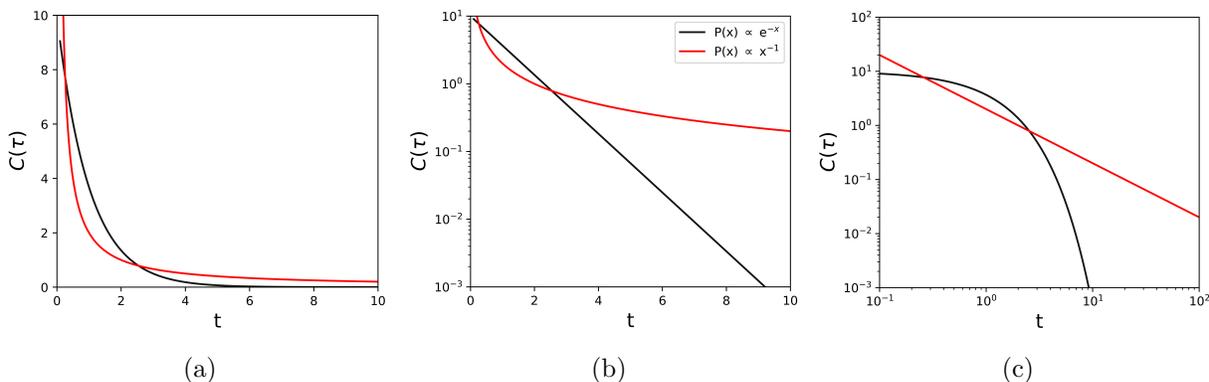


Figura 2.4: Comparación entre las funciones de correlación descritas. La línea roja representa el comportamiento tipo ley de potencias (eq. 2.13), característica de los sistemas críticos, mostrando un decaimiento más lento a largas distancias. La línea negra representa el comportamiento tipo decaimiento exponencial (eq. 2.12), con un valor despreciable a partir de cortas distancias. Se muestra la forma de las funciones en (a) escala lineal, (b) semi-logarítmica y (c) log-log.

El cálculo de la transformada de Fourier en el ámbito computacional se realiza de manera discreta, utilizando la Transformada Discreta de Fourier. La DFT³ transforma una secuencia de números complejos, la señal en el dominio del tiempo, en otra secuencia de números complejos, la misma señal en el dominio de la frecuencia [31].

En términos matemáticos, si se tiene una señal $x(t)$ de longitud N , la DFT se define como:

$$\tilde{X}(\omega_k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=0}^{N-1} x(t) e^{-\omega_k \cdot t} \quad (2.14)$$

donde $\tilde{X}(\omega_k)$ son las componentes normalizadas en dominio de frecuencias de la señal y las frecuencias son $\omega_k = 2\pi k/N$ con $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$.

Para llevar a cabo este análisis de espectro de potencias, se ha utilizado la Transformada Rápida de Fourier (FFT)⁴, un algoritmo eficiente que permite calcular la Transformada Discreta de Fourier (DFT) en un tiempo más eficiente $O(N \log N)$ ⁵ [32].

Es posible reducir el ruido y mejorar la precisión en el análisis aplicando la técnica conocida como método de Bartlett [33]. Este método consiste en dividir la señal en bloques con el fin de calcular la FFT para cada bloque individual. Así, se obtiene el espectro de potencias $S(\omega)$ de la transformada de Fourier al calcular el cuadrado del módulo de cada componente.

$$s(\omega_k) = |\tilde{X}(\omega_k)|^2 \quad (2.15)$$

Finalmente, se promedian los espectros de potencias de todos los bloques para obtener el espectro de potencias de la señal completa. Esto proporciona un análisis preciso y suavizado de la distribución

³DFT, del inglés Discrete Fourier Transform.

⁴FFT, del inglés Fast Fourier Transform.

⁵El término $O(N \log N)$ hace referencia a una clasificación informática y matemática que describe la complejidad de un algoritmo en términos de tiempo de ejecución. Específicamente, sugiere que el tiempo de ejecución aumentará con el producto del tamaño de la entrada (N) y su logaritmo natural ($\log N$), reduciendo su eficiencia.

del peso de cada componente de Fourier en $\omega_k = 2\pi k/N$.

La función de correlación temporal $C(\tau)$ puede ser derivada a partir del espectro de potencias $S(\omega)$. Ambos análisis son matemáticamente equivalentes y puede establecerse su relación mediante la Transformada de Fourier.

$$C(\tau) \xleftrightarrow{FT} S(\omega_k)$$

Tal y como se ha mencionado, este trabajo utilizará el análisis espectral de potencias debido a su polivalencia. Por ello, resulta imperativo conocer cual es la forma de las funciones previamente expuestas, ecs. (2.12) y (2.13), en el espacio de frecuencias de Fourier para el posterior análisis de las series temporales experimentales obtenidas en la máquina.

La fig. 2.5 ilustra la transformada de Fourier de una función de correlación exponencial en el dominio de las frecuencias.

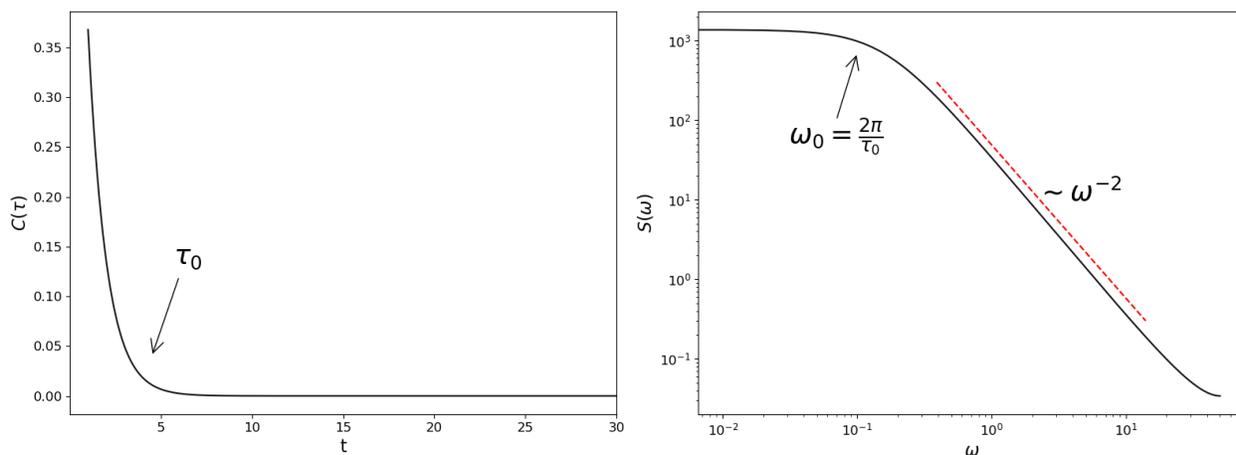


Figura 2.5: Función de correlación de tipo exponencial en escala lineal y su transformada de Fourier en escala log-log.

En el caso de esta figura, fig. 2.5, la función observada en el espacio de frecuencias ω es de tipo Lorentziana.

$$S(\omega) \propto \frac{1}{(\omega^2 - \omega_0^2)} \quad (2.16)$$

donde ω_0 es el parámetro de desplazamiento. De esta forma, un sistema caracterizado por correlaciones que decaen exponencialmente en tiempos de orden τ_0 tiene un espectro de potencias fácilmente identificable con $S(\omega) \sim cte.$ para frecuencias bajas $\omega \ll \omega_0$ y $S(\omega) \sim \omega^{-2}$ para frecuencias altas $\omega \gg \omega_0$, con $\omega_0 = 2\pi/\tau_0$.

A modo de ilustración del método de espectro de potencias, la fig. 2.6 corresponde a la transformada de Fourier de una función de correlación tipo ley de potencias en el dominio de las frecuencias. Convenientemente, la función observada en ambos espacios toma la forma de una ley de potencias.

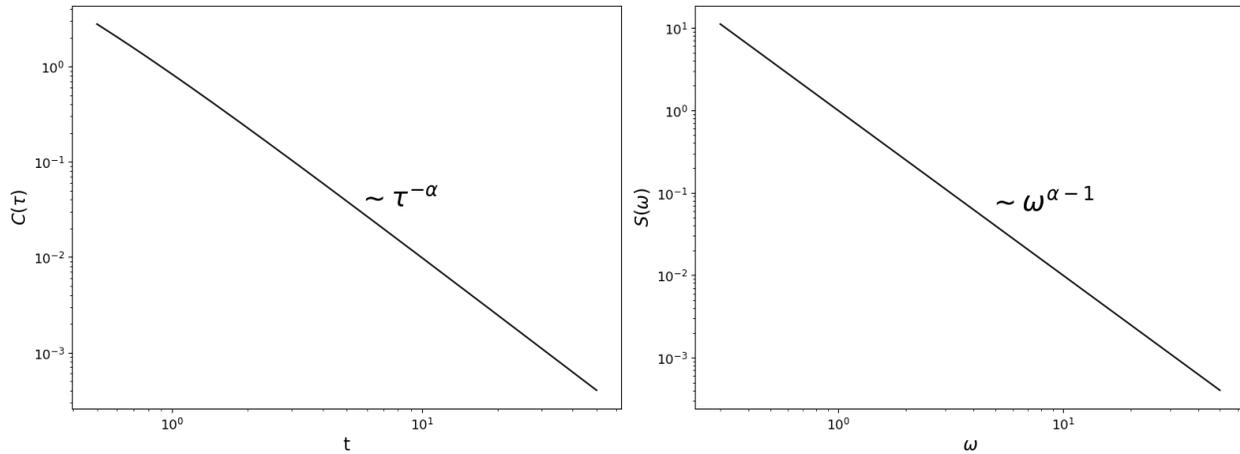


Figura 2.6: Función de correlación de tipo ley de potencias en escala log-log y su transformada de Fourier en escala log-log.

Específicamente, en un sistema con correlaciones de cola larga $C(\tau) \sim \tau^{-\alpha}$ el espectro de potencias es $S(\omega) \sim \omega^{\alpha-1}$ en todo el rango de frecuencias. En particular, $S(\omega) \sim \omega^{\alpha-1}$ para $\omega \rightarrow 0$, reflejando que las correlaciones persisten entre puntos de la serie separados temporalmente un intervalo arbitrariamente largo.

La existencia de este tipo de correlaciones de cola larga se encuentra típicamente asociada a efectos cooperativos y fenómenos de transporte de información por mecanismos no difusivos, como por ejemplo en sistemas cerca de un punto crítico o sistemas fuera del equilibrio con dinámica SOC.

3

Resultados

3.1. Distribución radial del flujo medio

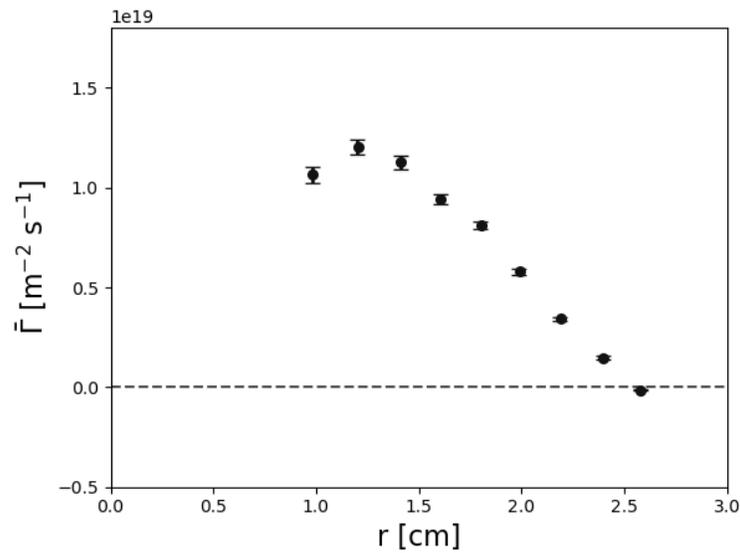


Figura 3.1: Distribución de la media del flujo Γ frente a la posición radial r de la sonda de Langmuir. Las barras de error corresponden a la desviación estándar de la media.

El primer paso en el análisis de las series temporales ha consistido en calcular la media del flujo de la señal temporal Γ para cada radio $r = [1.0 - 2.8]$ cm. De esta manera, se logra obtener una imagen del patrón de comportamiento global del transporte a diferentes distancias. Dicha media se ha calculado a través de una integración temporal en pasos, equivalente en el caso discreto a un sumatorio, sobre todo el rango de tiempo observado $T = 0.2 \mu\text{s}$ y normalizando precisamente a este T .

$$\bar{\Gamma} = \frac{1}{T} \sum_0^T \Gamma(r, t) dt \quad (3.1)$$

Se representa en la fig. 3.1 la media del flujo de partículas Γ frente al radio de medición de cada descarga r .

El comportamiento de la media de los flujos con el radio en la fig. 3.1 se ajusta al perfil esperado. El valor positivo de los puntos indica una tendencia general de transporte de partículas al exterior del aparato asociada a difusión. El interior del plasma contiene una mayor densidad de partículas [13] y una mayor temperatura debido a la geometría cilíndrica del dispositivo, la aparición de gradientes es contrarrestada por el sistema a través del transporte de los portadores a zonas de menor densidad.

En lo que respecta a la tendencia hacia radios interiores, esta es coherente con las predicciones teóricas y se puede explicar a través de un argumento geométrico. En un cilindro, el centro se define como el punto equidistante de todos los puntos en la superficie circular del cilindro. Desde una perspectiva geométrica, cualquier movimiento de plasma hacia este punto central desde cualquier dirección en la superficie del cilindro se compensaría exactamente con el movimiento de plasma desde la dirección opuesta.

De hecho, desde una perspectiva física, la conservación del momento implica que cualquier movimiento de plasma hacia el centro desde una dirección se contrarresta con un movimiento igual y opuesto desde la otra dirección. En esencia, cualquier flujo neto de plasma hacia o desde el centro del cilindro se equilibra, lo que resulta en un flujo de plasma neto nulo en el centro del dispositivo.

Se observa un gradual decaimiento de la magnitud $\bar{\Gamma}$ con el radio r . El último radio parece encontrarse en un balance similar al esperado en el centro geométrico del dispositivo. Esto puede deberse al decaimiento de la densidad del plasma al avanzar radialmente. El resultado sugiere que el sistema se encuentra en un estado de equilibrio entre transporte hacia el exterior e interior comparable al esperado en el centro geométrico del dispositivo.

Cabe resaltar que no se han realizado mediciones para posiciones radiales más internas. Esta decisión se debe a que, en tales casos, la propia sonda, junto con su soporte, perturba gravemente el sistema. Tal perturbación puede afectar de manera significativa el comportamiento del plasma, lo que hace que las mediciones sean poco fiables. En situaciones donde la interacción con la sonda y el soporte es sustancial, se puede esperar que los valores medidos reflejen más las características y efectos de estas perturbaciones que las condiciones reales del plasma. En consecuencia, para evitar tales complicaciones y asegurar la fiabilidad de las mediciones, se ha optado por limitar las mediciones a radios donde la interacción con la sonda y el soporte es mínima.

3.2. Analisis de la distribución de los tiempos de espera

Se ha aplicado el criterio de umbral expuesto en la sec. 2.1 a las series temporales del flujo Γ obtenidas de la SLPM. La fig. 3.2 muestra dos de estas series en una ventana temporal típica para el radio r más interno y externo.

Se ha observado una marcada discrepancia en la rugosidad de la señal entre los dos casos. La rugosidad de una señal se refiere, en términos generales, a la variabilidad o fluctuación en su comporta-

miento a lo largo del tiempo. Es una característica importante que puede afectar a la interpretación y el procesamiento de la señal. En este caso, la señal asociada a un radio de $r = 2.8$ cm presenta una rugosidad significativamente mayor en comparación con la otra.

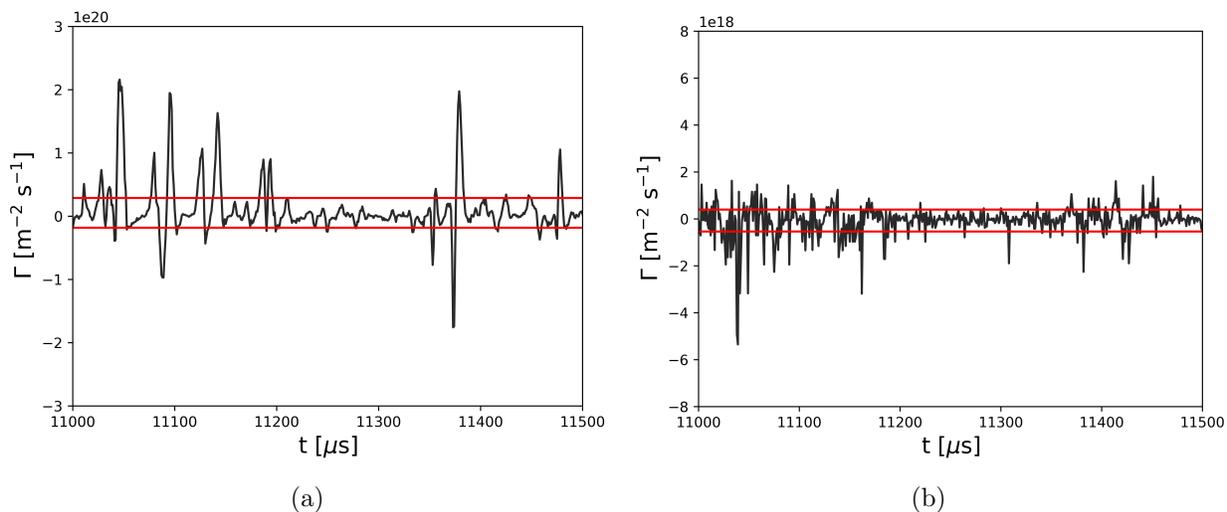


Figura 3.2: Muestra de la serie temporal del flujo de partículas Γ para (a) $r = 1.0$ cm y (b) $r = 2.8$ cm. Se aplica la técnica de umbralización y separación de flujos descrita en la sec. 2.1.

La hipótesis planteada para explicar esta observación es que dicha rugosidad podría ser el resultado del ruido de fondo. En este caso, se postula que la rugosidad es acentuada de manera relativa debido a la reducción en la intensidad de la señal $r = 2.8$ cm en dos órdenes de magnitud. Como resultado, el ruido se habría convertido en una proporción más grande de la señal total, aumentando así su rugosidad.

Teniendo en cuenta todas las señales, se ha realizado un cálculo detallado de los tiempos de espera, denotados como Q (sec. 2.1). Estos representan segmentos temporales dentro de cada una de las señales en las que se observa una actividad por debajo del umbral establecido. La identificación de estos períodos puede arrojar luz sobre la dinámica intrínseca de las señales y proporcionar información sobre el tipo de transporte subyacente.

Para cada una de las señales estudiadas, se ha obtenido una lista completa de estos tiempos de espera. La lista resultante no sólo brinda una cuantificación de la cantidad de tiempo que el sistema se encuentra fuera de periodos de avalancha, sino que también permite un análisis más profundo de la distribución temporal que se encuentra detrás.

Una técnica útil para visualizar y analizar esta información es la representación en forma de histograma. En este caso, se ha optado por un histograma de tipo lineal, que divide el rango total de Q en intervalos o *bins* de igual tamaño (sec. 2.2). La altura de cada barra en el histograma representa la frecuencia de aparición de ese rango de magnitud de Q concreto.

Este método de representación ofrece una forma gráfica de comprender las distribuciones de probabilidad que rigen eventos estadísticos persistentes en el tiempo.

Para llevar a cabo un análisis estadístico completo, se requiere de normalizar los histogramas. Esto convierte el histograma en una función de densidad de probabilidad, $P(Q)$. La densidad de

probabilidad $P(Q)$ describe cómo se distribuyen probabilísticamente los *quiet times* Q para una determinada señal. Cada valor de Q tiene una probabilidad asociada que puede ser calculada a partir de la densidad de probabilidad.

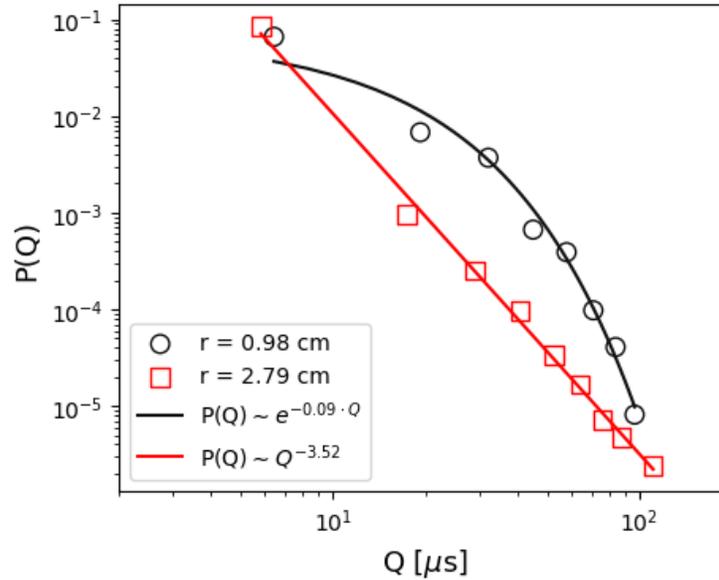


Figura 3.3: Función de densidad de probabilidad $P(Q)$ de los quiet times Q para el radio r más interno y externo del plasma en escala doble logarítmica. Las líneas continuas son ajustes a los datos.

La fig. 3.3 muestra la *pdf* $P(Q)$ de los *quiet times* Q para las señales correspondientes a los radios más interno ($r = 1.0$ cm) y más externo ($r = 2.8$ cm). La densidad de probabilidad $P(Q)$ asociada al radio más interno ($r = 1.0$ cm), fig. 3.3, no es compatible con una regresión lineal en escala log-log. De hecho, presenta una curvatura característica compatible con una función de tipo exponencial decreciente, ver fig. 2.4. Cuando la densidad de probabilidad $P(Q)$ decrece de manera exponencial, se infiere que los tiempos de espera Q , se encuentran influenciados por las interacciones a corto alcance del plasma (sec. 1.5 y 2.3). Estas interacciones de corto alcance se encuentran estrechamente vinculadas a los fenómenos clásicos de transporte y difusión.

Sin embargo, al analizar la de densidad de probabilidad $P(Q)$ surgida de los datos de medición en $r = 2.8$ cm se observa un comportamiento compatible con una regresión lineal en escala log-log. Esto implica que los *quiet times* en este radio tienen comportamiento tipo *power law* (sec. 2.3).

El comportamiento de tipo ley de potencias se encuentra estrechamente relacionado con el transporte anómalo o turbulento en los sistemas complejos. El sistema a este radio concreto ($r = 2.8$ cm) y en un intervalo de una década exhibe un comportamiento compatible con que los tiempos de espera Q se corresponden con una dinámica anómala del transporte.

Además de ello, se ha evaluado la eficacia del nuevo método expuesto en la sec. 2.1. El método de *thresholding* y cálculo de tiempos de espera utilizado arroja un comportamiento de tipo ley de potencias para la señal de $r = 2.8$ cm. Con el fin de evaluar cómo se compara esta técnica con el análisis usual se han representado las *pdf* obtenidas utilizando ambos métodos en la fig. 3.4.

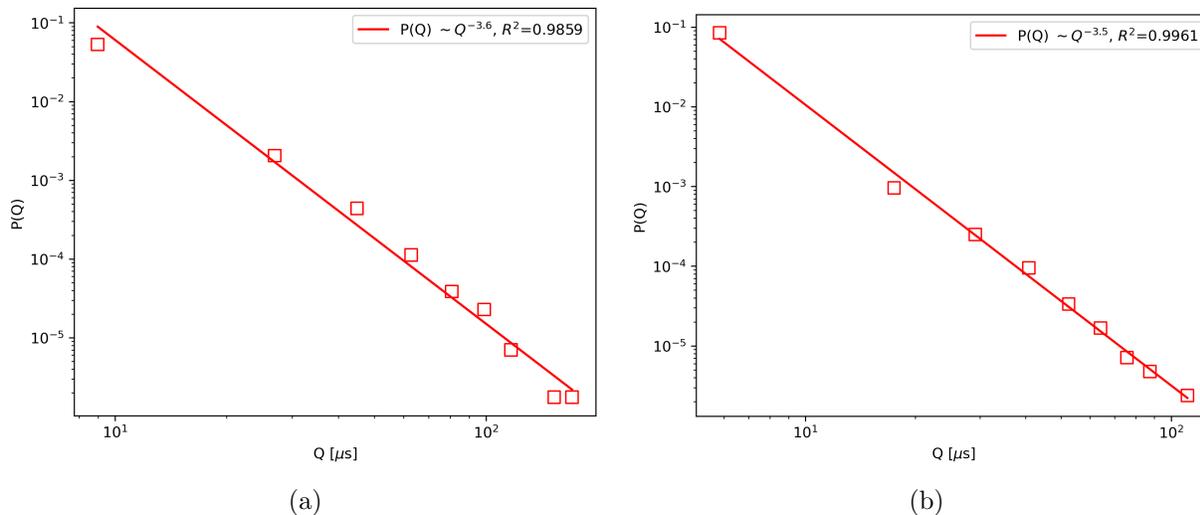


Figura 3.4: Función de densidad de probabilidad $P(Q)$ de los quiet times Q para el radio r más externo del plasma en escala doble logarítmica para (a) el método del valor absoluto del flujo y (b) el método de separación de flujo (sec. 2.1). Las líneas continuas son ajustes a los datos. Se computa el coeficiente de calidad del ajuste R^2 .

De este modo, se concluye que incluso en los datos más simétricos posibles, como es el caso del radio más externo, la separación de avalanchas *in* y *out* aporta mayor precisión. Este efecto se encuentra acentuado en los radios más internos, pues la asimetría crece y el efecto de eclipsamiento es mayor. Este eclipsamiento reduce la estadística y no permite realizar un análisis completo de los tiempos de espera entre avalanchas.

No se ha observado una diferencia notable entre los comportamientos de las avalanchas hacia el exterior e interior. Asimismo, el método utilizado aumenta la estadística disponible y no oculta las posibles dinámicas diferenciadas entre el transporte hacia el interior y el exterior, que parecen ser iguales.

3.3. Análisis de los tiempos de excursión

Acorde a lo expuesto en la sec. 2.1, se han calculado sistemáticamente los tiempos de excursión, denotados como t_{in} y t_{out} , para el conjunto completo de las señales temporales estudiadas.

Para facilitar su análisis, se han organizado estos tiempos de excursión en duplas ordenadas (t_{in}, t_{out}) . Cabe destacar que se ha seguido un orden específico para la disposición de estos pares: el tiempo de excursión hacia el lado negativo, t_{in} , se sitúa en primer lugar, seguido de inmediato por el tiempo de excursión hacia el lado positivo, t_{out} .

Estas parejas ordenadas de tiempos de excursión, (t_{in}, t_{out}) , pueden conceptualizarse como puntos en un espacio bidimensional, formando así una representación gráfica. La fig. 3.5 muestra una comparación de las representaciones gráficas de las duplas obtenidas en la señal real $r = 2.8$ cm y una aleatoriamente generada¹.

¹La señal aleatoria se ha creado utilizando un paso de tiempo $dt = 1\mu s$ y asociando un valor aleatorio $\in [1, -1]$, generado a través de una distribución uniforme, a cada tiempo t .

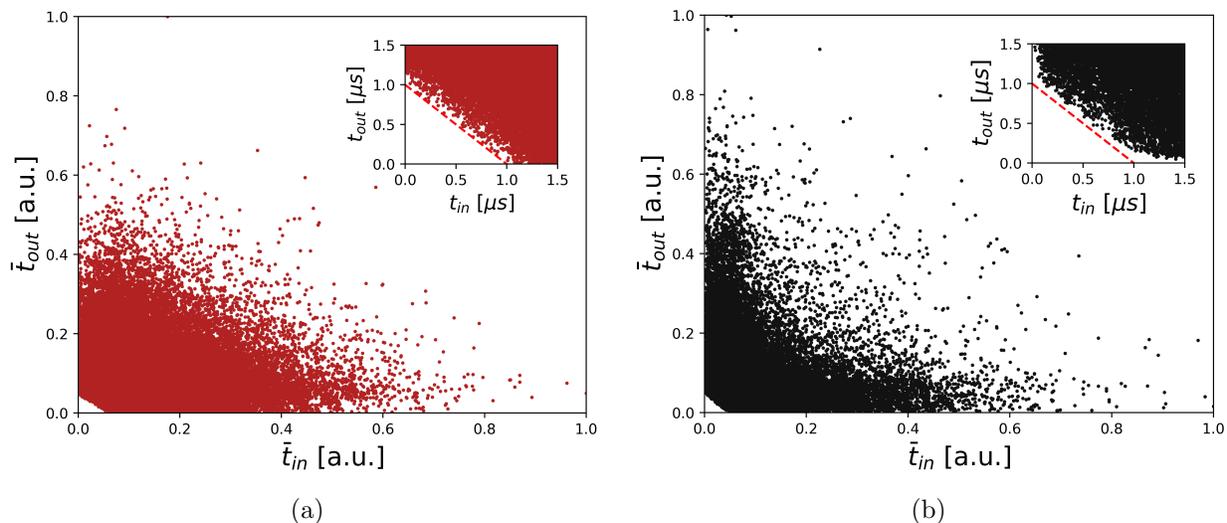


Figura 3.5: Comparación de los tiempos de excursión (t_{in}, t_{out}) , normalizados a 1, para (a) una señal aleatoria y (b) los datos correspondientes a $r = 2.8$ cm. Además, se añade en cada figura una muestra no normalizada en un rango cercano al origen. Existe una zona prohibida limitada por la recta $t_{out} = -t_{in} + 1 \mu s$.

La representación gráfica de la señal aleatoria muestra una divergencia considerable respecto a la de $r = 2.8$ cm. En el espacio bidimensional, la señal aleatoria se distribuye en un patrón que ocupa de manera casi uniforme la figura de un triángulo, indicativo de total ausencia de correlación entre las excursiones hacia el interior o exterior. Además, existe un continuo de puntos por debajo del borde que subraya aún más la ausencia de correlación. Por ejemplo, obviando la zona prohibida que será explicada a continuación, si tomamos el rango \bar{t}_{in} y $\bar{t}_{out} \in [0, 0.2]$ el sistema rellena ergódicamente todo el espacio, siendo posibles todos los tiempos *out* independientemente del tiempo anterior *in* y viceversa.

La forma triangular se explica a través de principios probabilísticos. Para un punto específico, existe una probabilidad idéntica de $1/2$ de que el punto se sitúe en el lado positivo o negativo. Esto implica que, para cada incremento en el tiempo, la señal irá disminuyendo su probabilidad de persistir en el mismo lado, lo que resulta en una disminución uniforme de la densidad de puntos en el gráfico. Este fenómeno es simétrico, manifestándose de igual manera en ambos lados, positivo y negativo, generando la forma triangular.

Por el contrario, analizando la figura 3.5 (b), que corresponde al flujo observado en el radio más externo del dispositivo, se identifica una estructura semejante a un *boomerang*. Para poder profundizar en la interpretación de esta forma, si se selecciona a modo de ejemplo un valor de $\bar{t}_{in} = 0.2$ como punto de referencia, se observa una columna relativamente uniforme de valores hasta $\bar{t}_{out} = 0.1$. Más allá de este punto en el eje y, se observa cierta disminución progresiva de la densidad de puntos. Este efecto se intensifica a medida que los valores de \bar{t}_{in} y \bar{t}_{out} incrementan. En base a este comportamiento, se concluye que existe correlación entre el tiempo que el sistema permanece en el lado negativo (transportando material hacia el interior) y el tiempo que el sistema se encuentra en el lado positivo (transportando material hacia el exterior). Dicho de otro modo, se presenta una interdependencia entre las excursiones *in* y *out* del sistema.

La interpretación física de este comportamiento radica en que una pequeña excursión hacia el interior del sistema (indicada por \bar{t}_{in}), predice una mayor probabilidad de una gran excursión hacia el exterior (representada por \bar{t}_{out}). Esto es reflejado en la figura precisamente en esta forma de *boomerang*, donde la columna de puntos por encima de $\bar{t}_{in} = 0.1$ es mayor que en $\bar{t}_{in} = 0.5$ y de manera idéntica en \bar{t}_{out} .

Esta dinámica se puede interpretar como un *preshock*, donde el sistema anticipa una respuesta antes de que ocurra una perturbación significativa. Se interpreta como un comportamiento preventivo del sistema, donde una pequeña perturbación inicial hacia el interior prepara al sistema para una excursión mayor hacia el exterior. Esta anticipación es común en sistemas con comportamiento SOC, como es el caso de los terremotos [18], donde una serie de pequeños temblores preceden al terremoto principal. Estos resultados de nuevo sugieren la existencia de correlaciones no triviales en la señal de flujo.

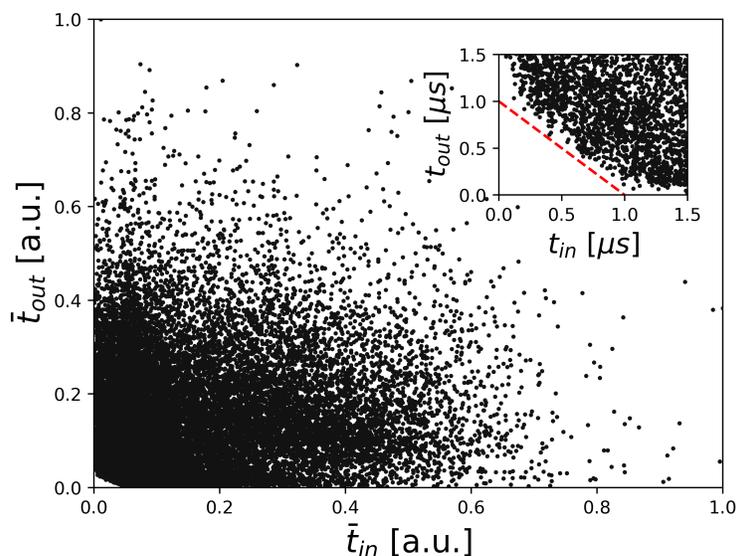


Figura 3.6: Representación de las duplas (t_{in}, t_{out}) normalizadas a 1, para los datos correspondientes a $r = 2.2$ cm. Se observan ambos comportamientos, encontrándose el tipo *boomerang* prácticamente opacado por el aleatorio.

Al realizar el análisis de tiempos de excursión en radios interiores, se tiene que el sistema pierde gradualmente este comportamiento de correlación hasta ser opacado completamente por la señal aleatoria (fig. 3.5 (b)). La fig. 3.6 muestra la representación de tiempos de excursión (t_{in}, t_{out}) para el radio $r = 2.2$ cm, donde observamos un patrón más parecido al proceso aleatorio de (t_{in}, t_{out}) de la fig. 3.5 (a).

La aparición de la zona prohibida visible en las fig. 3.5 y fig. 3.6 se debe a un argumento puramente geométrico. Es posible comprender la aparición de esta región imaginando 4 puntos de flujo Γ cambiantes en signo de manera alternada, e.g. $[1, -1, 1, -1]$, separados temporalmente por el paso de tiempo dt correspondiente. Al calcular los tiempos de excursión hacia el exterior e interior y minimizando la suma de dichos tiempos $t_{sum} = t_{out} + t_{in}$ se obtiene que el límite inferior de la suma es precisamente el paso de tiempo, en este caso $dt = 1 \mu s$. De esta manera, la recta que delimita la zona prohibida no es más que el mínimo valor posible de la suma de los tiempos

de excursión debida a la naturaleza geométrica triangular de la señal en el mencionado caso extremo.

Es posible realizar un análisis similar calculando la integral del flujo en el intervalo temporal t_{in} o t_{out} de las excursiones por encima o debajo de $\Gamma = 0$. Dado que la señal es discreta, esta integral resulta ser un sumatorio que arroja como resultado la cantidad denominada como fluencia ϕ .

$$\phi = \sum_{s_{exc}} |\Gamma| \quad (3.2)$$

donde s_{exc} representa el número de pasos de tiempo de duración de la excursión a sumar.

Así, se representan en la fig. 3.7 los pares de fluencia (ϕ_{in}, ϕ_{out}) para una señal aleatoria y la señal correspondiente a $r = 2.8$ cm.

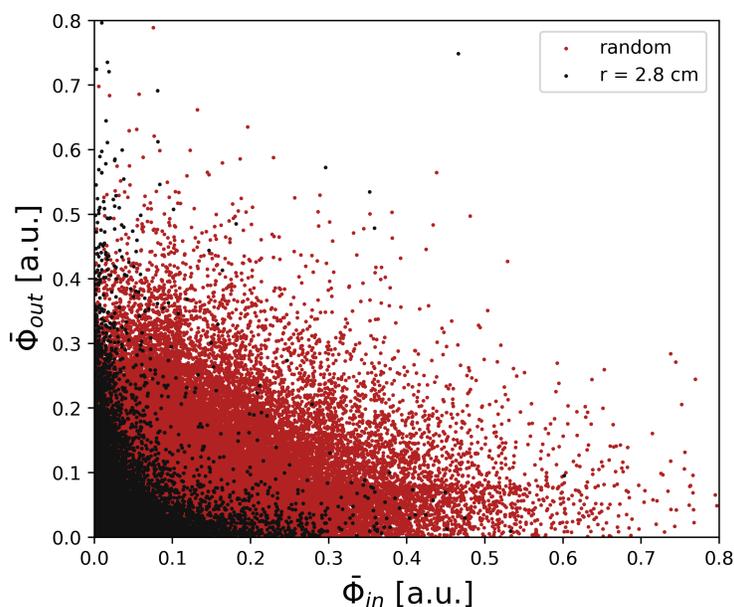


Figura 3.7: Comparación de la fluencia ϕ in vs. out, normalizada a 1, para una señal aleatoria y los datos correspondientes a $r = 2.8$ cm.

En este caso, se observa la desaparición de la zona prohibida. Esto se atribuye al hecho de que la suma es funcionalmente dependiente de la intensidad del flujo Γ . La dependencia con la intensidad del flujo significa que el análisis no se encuentra restringido por la limitación convencional asociada con el intervalo de tiempo discreto, en este caso 1 microsegundo ($1\mu s$). Si consideramos dos puntos que se encuentren extremadamente cerca del cero incluso cambiantes en signo, a pesar de ello, el área resultante de la suma de los mismos será muy pequeña debido a su poca magnitud. Por lo tanto, en lugar de tener un conjunto discreto de valores de área posibles determinados por el paso de tiempo, tenemos un continuo virtual de valores de área posibles dados por el amplio abanico de intensidades posibles. Esta es una consecuencia directa de la dependencia de la fluencia con la intensidad del flujo.

En cualquier caso, en la fig. 3.7 se observan patrones análogos a los de la fig. 3.5 tanto en la señal aleatoria como en la experimental. En el caso de la señal aleatoria, se observa de nuevo la señal en forma de triángulo ya descrita. No se observa ningún tipo de dirección privilegiada en el gráfico. No sería posible predecir de manera probabilística el comportamiento del flujo hacia el exterior

basándonos en la información de la previa actividad hacia el interior.

Sin embargo, la señal experimental, de nuevo para el radio más externo, muestra una forma de *boomerang* aún más acentuada. Se observa que el sistema tiende a preceder leves excursiones antes de efectuar una gran excursión hacia el lado contrario de manera prácticamente simétrica. No obstante, el gráfico no es del todo simétrico, parece ser que el tamaño (tanto temporal como de intensidad) de las avalanchas hacia el exterior es ligeramente mayor. Este hecho debería ser contrarrestado por el número de avalanchas hacia el interior, puesto que el valor medio de la señal es prácticamente cero para este radio (fig. 3.3). Efectivamente, esto es lo que ocurre. Se ha computado el número de avalanchas hacia el interior $n_{in} = 10185$ y hacia el exterior $n_{out} = 8614$. Se ve que el número de avalanchas hacia el interior es superior, compatible con la hipótesis expuesta. Es decir, existe una mayor cantidad de avalanchas hacia el interior pero siendo estas inferiores en intensidad, ocurriendo lo contrario hacia el exterior, dando en total un flujo neto nulo.

3.4. Análisis del espectro de potencia

Se ha calculado el espectro de potencia de las señales temporales de flujo para todos los radios disponibles utilizando el método de Bartlett expuesto en la sec. 2.3. La fig. 3.8 muestra una representación conjunta de todos los espectros obtenidos a diferentes radios con el parámetro de tamaño de bloque $T = 1024 \mu s$ fijo.

Los espectros muestran varias características interesantes. Para los radios internos, se observa en todos ellos una forma de tipo Lorentziana como la expuesta en la sec. 2.3, esta forma se encuentra asociada a las interacciones a corto alcance, coulombianas y al transporte clásico difusivo.

La región de alta frecuencia es relativamente ruidosa y muestra un pico concreto que aparece a todos radios. Comparando las frecuencias a las que aparecen estos picos espectrales con las frecuencias características ciclotrón de diferentes iones, se ha determinado que este pico es compatible con la frecuencia del He^+ 1.10. En cuanto al par de picos que aparecen a radios más externos en la región de alta frecuencia, se desconoce su origen.

$$\omega_{c,He+} = \frac{e \cdot 0.12T}{2 \cdot m_p + 2 \cdot m_n} \approx 2.8 \cdot 10^6 \text{ rad s}^{-1} \quad (3.3)$$

Por otro lado, es notoria la presencia de dos máximos de intensidad, que se vuelven más definidos en proporción al incremento del radio, observados en la región que se encuentra en torno a $2 \cdot 10^5 \text{ rad s}^{-1}$. Estos picos son consistentes con la frecuencia esperada de la deriva $\vec{E} \times \vec{B}$ media, cuya velocidad se encuentra definida por la ec. (1.12). Los valores típicos del campo eléctrico se encuentran en torno a $400 - 500 \text{ V m}^{-1}$ [14, 22], siendo aproximadamente uniformes en el intervalo radial estudiado. Además, teniendo en cuenta que la intensidad del campo magnético es constante $B = 0.12 \text{ T}$, se obtienen frecuencias de deriva en el rango $1.3 - 3.8 \cdot 10^5 \text{ rad s}^{-1}$. El pico observado, denotado como ω^* , se localiza dentro de dicho intervalo. Esta frecuencia angular específica se encuentra inherentemente vinculada a la frecuencia característica del movimiento rotacional del plasma en el dispositivo, relacionada con la deriva del campo eléctrico. A su vez, se observa que la posición de los máximos se desplaza de manera conjunta a lo largo del espectro de potencias en relación al radio.

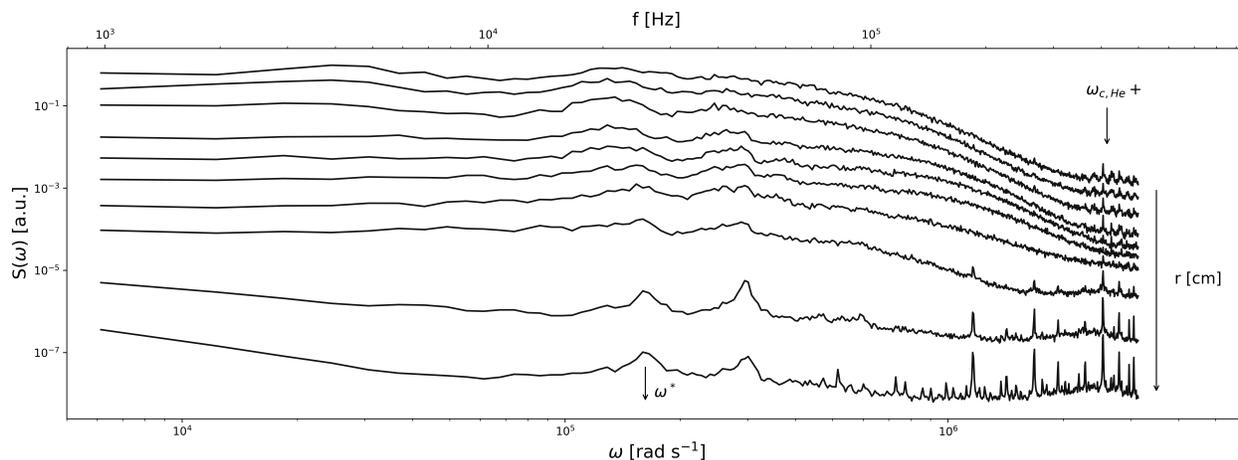


Figura 3.8: Espectro de potencias de la serie temporal del flujo a diferentes radios de la máquina para una ventana temporal fija $T = 1024 \mu s$.

Con el fin de comprobar esta hipótesis, se ha representado gráficamente en la fig. 3.9 la frecuencia angular ω del máximo de estos picos con relación al radio r de medición. Atendiendo a la fig. 3.9, se observa una tendencia lineal entre la frecuencia angular ω^* y el radio r . Además, se observa una relación entre las frecuencias de los picos de 2 a 1, concluyendo así que el segundo pico es un armónico del primero. Los armónicos son fenómenos comunes en los sistemas oscilatorios y son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental, que en este caso es la frecuencia del primer pico.

El hecho de que la frecuencia del pico ω^* varíe en función del radio no es un resultado con una interpretación trivial. Según lo que uno podría esperar, la frecuencia angular ω^* , debería mantenerse constante a medida que cambia el radio r . Este comportamiento se alinea con lo que esperaríamos de un objeto cilíndrico en rotación. En otras palabras, independientemente del radio de rotación, todas las partes del objeto rotarían al mismo ritmo.

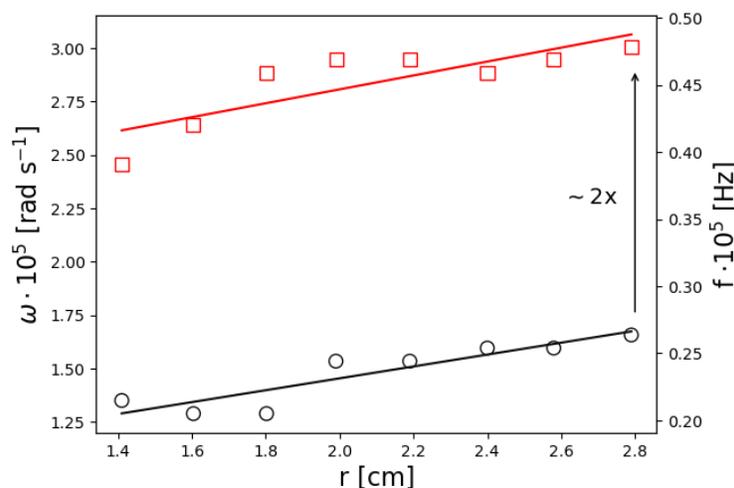


Figura 3.9: Frecuencia angular ω^* asociada a los picos del espectro de potencias fig. 3.8 frente al radio r . Se observa tendencia creciente de la frecuencia angular ω^* con el radio r . La relación de frecuencias 2 a 1 indica que el pico de mayor frecuencia corresponde a un armónico del primero.

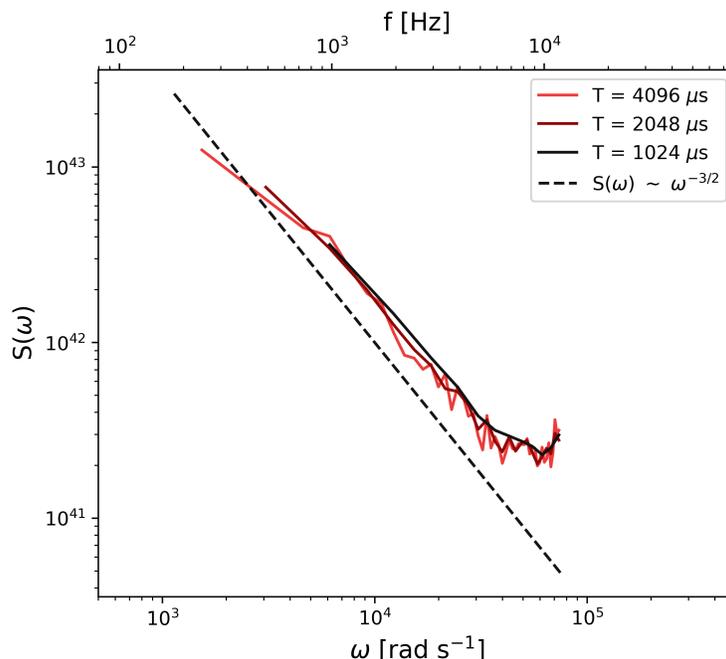


Figura 3.10: Muestra de baja frecuencia ω del espectro de potencias correspondiente a $r = 2.79$ cm para diferentes ventanas temporales T . Se observa una correlación correspondiente a ley de potencias de tipo $\omega^{-3/2}$ en dicho rango.

Sin embargo, en la fig. 3.9, se constata que ω^* efectivamente varía con el radio, denotado como r . Este comportamiento puede describirse como un fenómeno de cizalla, o *shear* en inglés. Lo que hace que el fenómeno sea aún menos trivial es que este efecto de cizalla no parece ser causado por factores típicos como la viscosidad o la fricción.

En este caso, se observa un aumento en la frecuencia en relación al radio. Este resultado es contraintuitivo a priori pues en un sistema físico ideal sin pérdidas, se espera que el momento angular $L = I \cdot \omega$ sea conservado. Por lo tanto, si la frecuencia angular ω aumenta, el momento de inercia I debe disminuir proporcionalmente al radio. Si consideramos el plasma como un cilindro en rotación, aproximando su momento de inercia como $I \propto R^2$, llegamos a una contradicción.

No obstante, es fundamental destacar que el plasma, en su esencia, es un estado de la materia particularmente distinto, que puede caracterizarse como un fluido cargado. Asumir homogeneidad en la densidad es fundamentalmente erróneo y simplista. Además, la dinámica se encuentra regida por las leyes fundamentales del electromagnetismo y de Navier-Stokes, sec. 1.3. Además, es importante notar que el plasma es un sistema complejo y no lineal que presenta efectos de transporte anómalos, sec. 1.5. En este sentido, surgen inestabilidades en el plasma. Estas inestabilidades son perturbaciones que crecen con el tiempo, y pueden manifestarse como oscilaciones o turbulencias. En el plasma, la turbulencia puede conducir a un transporte anómalo de partículas, energía y momento, mucho mayor de lo que se esperaría en un sistema clásico. Estos fenómenos pueden, a través de un fenómeno físico no conocido, alterar la frecuencia de rotación del plasma.

Finalmente, en el análisis a las frecuencias menores (o tiempos más largos) se observa que en el radio que ha sido sujeto de mayor análisis, $r = 2.8$ cm, existe un comportamiento cualitativamente

distinto en relación al espectro de potencias $S(\omega)$. Mientras que el resto de radios forman un *plateau* en frecuencias angulares menores a 10^5 rad s⁻¹, como corresponde a una correlación exponencial, los radios $r = 2.6$ cm y $r = 2.8$ cm, por el contrario, exhiben una notable correlación en forma de ley de potencias, distintiva de correlación larga y fenómenos de transporte anómalo.

La fig. 3.10 muestra un recorte del rango de frecuencias de interés para el radio más externo. Además, se computa el espectro de potencias para distintas longitudes de bloque T . El incremento de la longitud T añade un punto al espectro en el rango de frecuencias bajas, pudiendo visualizar correlaciones a tiempos más largos. Es decir, se añade de manera efectiva una décima parte de década al duplicar T . Esta figura demuestra que las correlaciones persisten a escalas temporales mayores.

Se observa una clara correlación lineal en escala log-log del espectro de potencias que se expande a lo largo de dos décadas. Esta correlación es compatible con una ley de potencias $S(\omega) \sim \omega^{-3/2}$.

Como se ha mencionado, el análisis espectral de potencias se encuentra íntimamente relacionado con la función de correlación temporal. De este modo, la observación de una relación tipo ley de potencias en el espectro $S(\omega)$ implica que la función de correlación temporal es también del mismo tipo. De este modo, se concluye que existen en el sistema correlaciones temporales de largo alcance.

No ha sido posible ampliar más el análisis de correlaciones temporales debido a las limitaciones de los datos disponibles. El número de puntos de datos en la señal, $2 \cdot 10^5$, no proporciona la estadística suficiente para extraer conclusiones a menores ω . En cualquier caso, este fenómeno es un claro síntoma de que el plasma a grandes radios contiene fenómenos de transporte anómalo, durante prácticamente dos décadas y ocurre en frecuencias varios órdenes de magnitud menores que las frecuencias propias de las interacciones microscópicas del plasma (alguna de las cuales ya se ha discutido en la fig. 3.8).

4

Conclusiones

Este trabajo ha centrado su investigación en el estudio de la dinámica y el comportamiento del flujo de partículas de la Máquina de Plasma Lineal de Santander. El análisis se ha enfocado en comprender mejor la dependencia radial de los patrones de transporte existentes en sus plasmas.

Se ha estudiado la distribución de la media del flujo frente al radio. Se ha observado que el comportamiento de dicha media de los flujos con el radio se ajustaba al perfil esperado, con un claro transporte de partículas hacia el exterior del dispositivo. Este resultado es coherente con las predicciones teóricas y se comprende bien en términos geométricos y físicos para todos los radios.

Sin embargo, es destacable el caso del flujo correspondiente al radio más externo, siendo este cero. Este resultado parece inferir que existe un balance entre el transporte hacia el interior y el exterior del dispositivo para dicha posición radial. El balance de flujo es una de las propiedades diferenciales que hace que el comportamiento del sistema sea cualitativamente diferente en esta región concreta del plasma generado.

Se ha desarrollado una nueva técnica de umbrales consistente en la separación de la señal temporal de flujo en las dos posibles direcciones de transporte, *in* y *out*. A partir de esta separación, se obtienen dos umbrales calculados con el mismo criterio, el 6 % de la media de los 10 máximos de la señal. De este modo, se consigue tener en cuenta una visión más completa de la física de la señal y sus eventos.

De manera complementaria, se han calculado detalladamente los denominados tiempos de espera, proporcionando una visión más profunda de la dinámica intrínseca del sistema gracias al método desarrollado. Se teorizan dos tiempos de espera distintos de acuerdo a si la señal cambia de signo o no. Así, se tienen en cuenta las avalanchas en ambos sentidos y la asimetría intrínseca de la señal que utilizando la metodología basada en umbrales previa eclipsaba las avalanchas hacia el interior del dispositivo, o equivalentemente, flujos negativos por debajo del umbral.

Se ha observado que la función densidad de probabilidad de los tiempos de espera varía en la zona más externa del dispositivo con respecto al resto de posiciones radiales. En particular, para el radio más interno, se observa un decaimiento exponencial, sugiriendo la influencia de las interacciones a

corto alcance del plasma. Por otro lado, en el radio más externo, la *pdf* sigue una ley de potencias, indicando una influencia global del estado del plasma. Este hallazgo pone de manifiesto el comportamiento complejo y anómalo del transporte en el plasma de la SLPM.

Se ha realizado una comparativa entre el método de separación de flujos y el previamente utilizado. Los resultados arrojados son muy positivos, obteniéndose un mayor coeficiente R^2 en el nuevo método. Además, la ley de potencias es más clara para el método diseñado en este trabajo.

Además, el método de separación de flujos es más fuerte en radios internos pues la asimetría de la señal es mayor. En el radio más externo la señal es relativamente simétrica. Sin embargo, por una parte se aprecia cómo el número de avalanchas es mayor hacia el interior, y por otra los eventos hacia el exterior son en promedio más intensos. Por tanto, este nuevo método resulta útil y eficiente incluso en la condición más desfavorable.

Analizando los resultados, se concluye que con señales temporales más largas (por ejemplo, de 10^6 puntos en vez de 2×10^5 con la misma resolución), la estadística de los resultados hubiera mejorado, especialmente a tiempos más largos. Cabe destacar que la ley de potencias obtenida solamente recorre una década, en el ámbito de la física estadística este rango es relativamente corto y se requeriría un mayor intervalo temporal (más de una década) para determinar de forma concluyente que los tiempos de espera tienen comportamiento *power law*.

El análisis de los tiempos de excursión también es una técnica nueva en el contexto de física de plasmas. Los resultados de este análisis indican que el sistema funciona con un fenómeno denominado como *preshock*, similar a los terremotos. Se ha medido el tiempo que el sistema pasa transportando materia hacia el interior o el exterior y se han graficado las duplas (t_{in}, t_{out}) en un espacio bidimensional. El resultado arroja un comportamiento en forma de *boomerang*, donde una excursión pequeña hacia el interior desencadena con mayor probabilidad una gran avalancha hacia el exterior, para radios exteriores, mientras el patrón es indistinguible de uno aleatorio para los radios internos.

Este comportamiento arroja conclusiones que pueden ser muy útiles para el estudio de los plasmas, pues es posible de manera probabilística determinar si el plasma va a sufrir una avalancha a partir de una condición previa. Obviamente, la escala de tiempo es determinante pero en cualquier caso, la distribución se aleja notablemente de la aleatoriedad.

Lo mismo sucede con el tamaño de estas excursiones, donde el fenómeno de *preshock* es aún más notable. Es en este análisis de la fluencia ϕ , integral del flujo en un intervalo de tiempo, donde se ha observado que incluso la señal de flujo neto 0 es asimétrica. Parece haber una tendencia general en todo el plasma a expulsar con mayor violencia el material hacia el exterior. Aún así, siendo el neto del transporte 0 no existe transporte real hacia el exterior en el radio más externo.

El análisis de los espectros de potencia muestra, para todas las posibles posiciones radiales de la sonda de Langmuir, diversos picos situados a frecuencias dispares. Uno de ellos se encuentra en la zona de alta frecuencia y ha sido asociado a la frecuencia ciclotrón del He^+ que compone el plasma. El pico es muy intenso y aparece a todos radios exactamente en la misma frecuencia.

Además de ello, se observan dos picos que sufren desplazamiento y atenuación a medida que se sondan diferentes posiciones radiales. Se han asociado estos picos a la frecuencia asociada a la rotación de la columna de plasma. Al representar gráficamente la frecuencia angular ω del máximo

frente al radio r se ha podido realizar un ajuste lineal. Este ajuste indica un incremento progresivo de la velocidad angular de rotación con el radio, descartándose efectos de viscosidad o fricción. Más aún, el segundo pico es un armónico del primero lo que favorece la hipótesis de que se deben a un fenómeno global.

Atendiendo a la cola, correspondiente a bajas frecuencias o largos tiempos, se observa una correlación de tipo ley de potencias de los dos espectros para posiciones radiales más externas. Parece ser una transición, puesto que la pendiente del penúltimo radio es menor en la posición radial más externa analizada. La correlación es compatible con una recta (en escala log-log) $S(\omega) \sim \omega^{-3/2}$. Esto implica que la función de correlación temporal también responde a un comportamiento de tipo ley de potencias.

El plasma generado en la SLPM manifiesta comportamientos compatibles con transporte anómalo en el radio $r = 2.8$ cm. Durante todo el trabajo, este radio ha arrojado resultados cualitativa y cuantitativamente distintos al resto de posiciones en el plasma. Los análisis realizados a este radio indican fenómenos de transporte anómalo y correlaciones de larga distancia en el sistema, que van más allá del movimiento browniano clásico.

Como proyecto a futuro, sería conveniente analizar un mayor número de descargas de plasma. De este modo, sería posible realizar una comparativa entre los resultados obtenidos y ver si existe un patrón de comportamiento en el flujo a ese radio concreto. Resulta también especialmente interesante el estudio del fenómeno de cizalla observado, puesto que podría constituir un mecanismo a través del cual el sistema establece correlaciones de larga distancia temporal.

El análisis de las funciones densidad de probabilidad se encuentra limitado en gran medida por el número de puntos medidos en la descarga, es decir, el tiempo de medición real de 0.2 s. Sería conveniente aumentar al máximo posible este tiempo de medición, dado que la estadística del análisis depende enteramente de ello. Un aumento a 0.4 s aumentaría la estadística en un factor 2, por ejemplo.

Finalmente, podría resultar interesante realizar comparaciones con modelos de simulación adecuados a la SLPM. De este modo, sería posible comparar con lo esperado en la teoría, lo observado en las mediciones experimentales y realizar conclusiones más precisas.

Referencias

- [1] Elmer E. Lewis. *Fundamentals of Nuclear Reactor Physics*. Elsevier, Chicago, IL, USA, 2008.
- [2] Robert J. Goldston & Paul H. Rutherford. *Introduction to Plasma Physics*. IOP Publishing, Princeton, NJ, USA, 1995.
- [3] J. Lawson. Some criteria for a power producing thermonuclear reactor. *Proceedings of the Physical Society*, Vol 70, Sec. B, 1957.
- [4] Francis F. Chen. *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion*. Springer, Los Angeles, CA, USA, 2015.
- [5] R. Brown. A brief account of microscopical observations made in the months of june, july and august, 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies. *Phil. Mag.*, 4, 161-173, 1828.
- [6] Albert Einstein. *Investigations on the Theory of the Brownian Movement*. Dover Publications, USA, 1956.
- [7] A. Fick. Ueber diffusion. *Annalen der physik*, 170, 1855.
- [8] A. J. Wootton et al. Fluctuations and anomalous transport in tokamaks. *Physics of Fluids B: Plasma Physics*, Volume 2, Issue 12, 1990.
- [9] Eric Priest & Terry Forbes. *Magnetic reconnection, MHD theory and applications*. Cambridge University Press, University of St. Andrews, UK & University of New Hampshire, USA, 2000.
- [10] Valery Nakariakov. *Magnetohydrodynamics*. University of Warwick, Warwick, UK, 2018.
- [11] L. Spitzer et al. The electrical conductivity of an ionized gas. *Physical Review Letters*, Volume 80, Number 2, 1950.
- [12] Jeffrey Freidberg. *Plasma Physics and Fusion Energy*. Cambridge University Press, Massachusetts Institute of Technology, MA, USA, 2007.

-
- [13] Omar Castellanos. *Estudio de la turbulencia en un plasma linealmente magnetizado*. UC, Santander, España, 2007.
- [14] Miguel Ángel Hoyo. *Topología de campo magnético y flujos radiales de partículas en la máquina lineal de plasma de Santander*. UC, Santander, España, 2021.
- [15] J. Sethna et al. Crackling noise. *Nature*, 410, 242–250, 2001.
- [16] O. Perkovic et al. Avalanches, barkhausen noise, and plain old criticality. *Physical Review Letters*, Vol. 74, Iss. 24, 1995.
- [17] P. Houle et al. Acoustic emission from crumpling paper. *Physical Review Letters*, Vol. 54, Iss. 1, 1996.
- [18] A. Corral. Long-term clustering, scaling, and universality in the temporal occurrence of earthquakes. *Physical Review Letters*, Vol. 92, Iss. 10, 2004.
- [19] G. Boffetta. Power laws in solar flares: Self-organized criticality or turbulence? *Physical Review Letters*, Vol. 83, Iss. 22, 1999.
- [20] Henrik J. Jensen. *Self-Organized Criticality: Emergent Complex Behavior in Physical and Biological Systems*. Cambridge University Press, Imperial College, London, UK, 1998.
- [21] B. A. Carreras et al. Long-range time correlations in plasma edge turbulence. *Physical Review Letters*, Vol. 80, Iss. 20, 1998.
- [22] O. Castellanos et al. Parallel flows and turbulence in a linear plasma machine. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 47, 2067–2074, 2005.
- [23] C. Coulomb. Second mémoire sur l’électricité et le magnetisme. *Histoire de l’Académie Royale des Sciences*, 1785.
- [24] Simon Ramo & John R. Winnery & Theodore Van Duzer. *Fields and Waves in Communication Electronics*. John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, USA, 1994.
- [25] Dave Burke. A diagram depicting the poloidal and toroidal directions. Wikimedia Commons, CC BY 2.5, September 2006.
- [26] Open Stax College Physics. Tokamak schematic. Wikimedia Commons, CC, November 2019.
- [27] A. Schwabedissen et al. Langmuir probe measurements in an inductively coupled plasma source. *Physical Review E*, Vol. 5, Iss. 3, 1996.
- [28] J. Hopwood et al. Langmuir probe measurements of a radio frequency induction plasma. *Journal of Vacuum Science and Technology*, A 11, 152-156, 1993.
- [29] O. Castellanos et al. Intermittency, avalanche statistics, and long-term correlations in a turbulent plasma. *Journal of Statistical Mechanics*, P04022, 2013.
- [30] Raul Sanchez & David Newman. *A Primer on Complex Systems*. Springer, Madrid, España, 2018.
- [31] Alan V. Oppenheim & Ronald W. Schaffer. *Discrete-Time Signal Processing*. Pearson, Massachusetts Institute of Technology, MA, USA, 2014.

- [32] J. Cooley & J. Tukey. An algorithm for the machine calculation of complex fourier series. *Mathematical Computing*, 19, 297-301, 1965.
- [33] M. S. Bartlett. Smoothing periodograms from time-series with continuous spectra. *Nature*, 161, 686–687, 1948.