Facultad
de
Ciencias

Dinámica caótica en redes neuronales aleatorias

Chaotic dynamics in random neural networks

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al

GRADO EN FÍSICA

Autor: Elena del Campo

Director: Diego Pazó

Junio 2023

A mi familia, a mis amigos y a Josu.
A todos aquellos que han estado ahí y
me han ayudado a convertirme en la
persona que soy ahora.

Resumen

La mayoría de los sistemas en la naturaleza presentan dinámica compleja. Nuestro cerebro es quizá uno de los más complejos. Entre las vías para mejorar nuestra comprensión del mismo está la dinámica no lineal. Se han desarrollado muchos modelos sobre la interacción de las neuronas desde el siglo XX. El modelo más clásico de una red de neuronas aleatoria y recurrente es el de Sompolinsky, Crisanti y Sommers. El trabajo se ha basado en la realización de simulaciones según el mismo con el objetivo de caracterizar el caos en baja y alta dimensión.

Para comenzar, se ha llevado a cabo una introducción a la teoría de dinámica no lineal necesaria para entender el resto del trabajo. En segundo lugar, se han introducido el modelo en el que se basan las simulaciones y los métodos computacionales a través de los que se han realizado las simulaciones. Para terminar, se han incluido los resultados y conclusiones.

Los resultados para un número pequeño de neuronas (baja dimensión) incluyen ejemplos detallados. Para un sistema de tres neuronas se han estudiado la rotura de simetría por bifurcación *pitchfork*, el nacimiento de un ciclo límite por bifurcación de Hopf supercrítica y un ejemplo de histéresis por bifurcación de Hopf subcrítica. Los dos primeros se corresponden con los ejemplos más comunes a baja dimensión. Para un sistema de cuatro neuronas se ha encontrado un ejemplo de caos por cascada de duplicación de periodo. Este se ha caracterizado en forma de diagrama de bifurcación y retratos de fase. Para un sistema de cinco neuronas se ha detallado el comportamiento de un atractor cuasiperiódico. Para analizarlo, se han obtenido las secciones de Poincaré del mismo para distintos valores del parámetro de control g.

Finalmente, se ha observado el comportamiento de la transición al caos para un número mayor de neuronas (alta dimensión). Se han estudiado sistemas de 10, 20, 40, 80 y 160 neuronas. En una primera instancia, se ha observado cualitativamente la dependencia de la probabilidad de mostrar caos frente a N. Posteriormente, también se ha estudiado la forma de las distribuciones del valor mínimo de g donde el sistema presenta caos (llamado g_{caos}) en función de N. Para $N = 160$ se ha podido observar un ejemplo de hipercaos, donde los dos primeros exponentes de Lyapunov se hacen positivos. Para terminar, se ha podido realizar un ajuste a una ley de potencias del promedio y la mediana de g_{caos} frente a N.

Palabras clave: dinámica no lineal, caos, red neuronal, exponente de Lyapunov, matriz aleatoria

Summary

Most systems in nature exhibit complex dynamics. Our brain is perhaps one of the most complex of all. Among the ways to improve our understanding of it is non-linear dynamics. Many models of the interaction of neurons have been developed since the 20th century. The most classic model of a random recurrent neural network is that by Sompolinsky, Crisanti and Sommers. This work has been based on simulations according to that model with the aim of characterising chaos in low and high dimensions.

To begin with, an introduction to the theory of nonlinear dynamics necessary to understand the rest of the work has been given. Secondly, the model on which the simulations are based and the computational methods used to carry out the simulations have been introduced. Lastly, the results and conclusions are included.

The results for a small number of neurons (low dimension) include detailed examples. For a three-neuron system, symmetry breaking via *pitchfork* bifurcation, the birth of a limit cycle via supercritical Hopf bifurcation and an example of hysteresis via subcritical Hopf bifurcation have been studied. The first two correspond to the most common low-dimensional examples. For a four-neuron system, an example of period-doubling cascade to chaos has been found. This has been characterised in the form of a bifurcation diagram and phase portraits. It has also been used as a crisis example. For a five-neuron system, the behaviour of a quasi-periodic attractor has been detailed. To analyse it, Poincaré sections have been obtained for different values of the control parameter g.

Finally, the behaviour of the transition to chaos for a larger number of neurons (high dimension) has been observed. Systems of 10, 20, 40, 40, 80 and 160 neurons have been studied. First, the dependence of the probability of exhibiting chaos on N has been qualitatively observed. Subsequently, we also studied the shape of the distributions of the minimum value of g where the system exhibits chaos (called g_{caos}) as a function of N. For $N = 160$ we have been able to observe an example of hyperchaos, where the first two Lyapunov exponents become positive. Finally, a power-law fit of the average and median of g_{caos} versus N has been performed.

Key words: nonlinear dynamics, chaos, neural network, Lyapunov exponent, random matrix

Índice general

1. Introducción a la dinámica no lineal

La dinámica de un sistema hace referencia a su evolución en el tiempo: si se detiene en el equilibrio, si se repite cíclicamente o si muestra comportamiento complejo como el caos.

La dinámica apareció a mediados del siglo XVII, cuando Newton inventó las ecuaciones diferenciales y descubrió las leyes del movimiento y la gravitación universal, con lo que resolvió el problema de dos cuerpos. Sin embargo, tras décadas de intentar resolver analíticamente el problema de los tres cuerpos, se llegó a la conclusión de que no era posible obtener soluciones explícitas.

La dinámica no lineal, que es aquella gobernada por ecuaciones no lineales, sufrió dos grandes avances que potenciaron su desarrollo. En el siglo XIX Poincaré introdujo una nueva perspectiva enfatizando el tratamiento cualitativo frente al cuantitativo. Esto permitía obtener información muy valiosa de los sistemas, como sus comportamientos asintóticos o estabilidad, sin necesidad de obtener la solución analítica. El segundo gran avance fue la invención de los ordenadores en los años 50, que permitían la simulación numérica del sistema de una forma imposible anteriormente.

Fue con estos avances que, en 1963, Lorenz encontró el caos en un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias. El caos se define como un comportamiento aperiódico que depende en gran medida de las condiciones iniciales. Posteriormente, Feigenbaum encontró una conexión entre el caos y las transiciones de fase, demostrando que existían ciertas rutas universales al caos por las que siempre pasaban los sistemas, por diferentes que fueran entre sí.

En esta primera parte se van a introducir conceptos importantes para la dinámica no lineal con los que vamos a tratar a lo largo del trabajo. Para ello, nos hemos basado en los libros de Strogatz [1], Schuster [2] y Ott [3].

1.1. Sistema dinámico

Un sistema dinámico es aquel cuyo estado evoluciona con el tiempo según una descripción matemática determinista. Se pueden clasificar en aquellos definidos por mapas iterados o por ecuaciones diferenciales. Se trabajará con estos últimos, concretamente con **ecuaciones diferenciales ordinarias** (EDOs) puesto que se usará solo una variable independiente, el tiempo.

Una manera general de escribir el sistema sería:

$$\begin{gathered}\dot{x}_1 = f_1(t, x_1, ..., x_N) \\ \vdots \\ \dot{x}_N = f_N(t, x_1, ..., x_N)\end{gathered} \tag{1.1}$$

Donde las variables $x_1, ..., x_N$ serán aquellas que representen el estado del sistema. El punto sobre ellas representa la derivada respecto al tiempo $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ y las funciones $f_1, ...f_N$ serán las que nos den la información sobre su comportamiento. También se puede expresar de manera simplificada como $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$. Un sistema autónomo será aquel que además cumpla $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$

Un sistema dinámico se dice que es lineal si la dependencia dada por las funciones $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ solo incluye variables a la primera potencia. Será no lineal en caso contrario. Por ejemplo, si aparecen términos como $\sin(x_i)$ o x_i^3.

Previamente hemos mencionado la importancia de las **condiciones iniciales** en casos como el caos. Dichas condiciones se corresponderían con el valor de las variables a tiempo cero: $\mathbf{x}(t = 0) = (x_1(t = 0) \ \ \ldots \ \ x_N(t = 0))^T$. Se conoce como **trayectoria** a la evolución de estas con el tiempo: $\mathbf{x}(t) = (x_1(t) \ \ \ldots \ \ x_N(t))^T$.

Espacio de fases

El **espacio de fases** será aquel conformado por las coordenadas $\mathbf{x}$. Cada punto podrá funcionar como una condición inicial y formar parte de una trayectoria. Un **estado** será aquel punto o conjunto de puntos de este espacio invariante frente al paso del tiempo.

Jacobiana y linealización del sistema

La matriz jacobiana $\mathcal{J}$ de un función $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ N-dimensional se define como:

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \ldots & \frac{\partial f_N}{\partial x_N}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

Es posible linealizar un sistema del tipo (1.1) con $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ no lineal para obtener la evolución de una perturbación infinitesimal $\delta\mathbf{x}$ de una trayectoria $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$ a través de la jacobiana:

$$\begin{pmatrix} \dot{\delta x_1} \\ \dot{\delta x_2} \\ \vdots \\ \dot{\delta x_N} \end{pmatrix} = \mathcal{J} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \vdots \\ \delta x_N \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

O, lo que es lo mismo $\delta\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{J}\delta\mathbf{x}$.

Sección de Poincaré

Los sistemas se pueden clasificar según su descripción matemática como definidos por mapas iterados o ecuaciones diferenciales. Los primeros presentan un comportamiento discreto frente al continuo del segundo. Es posible pasar de un sistema continuo a uno discreto a través de una sección de Poincaré.

Este tipo de herramienta es muy útil para acceder a información del sistema de forma cualitativa.

La sección de Poincaré es una superficie $N-1$ dimensional. Requiere que las trayectorias sean transversales y no paralelas a la misma. De esta manera, en vez de estudiar toda la trayectoria, se estudian los puntos de intersección con la superficie. Y, así, el sistema se convierte a discreto.

Esto permite realizar representaciones del comportamiento del sistema tan solo en esa superficie concreta, por lo que debe elegirse adecuadamente.

Las secciones de Poincaré se usan, entre otras cosas, para obtener diagramas de bifurcación. Más adelante se verán ejemplos de ellos como parte de la teoría y resultados.

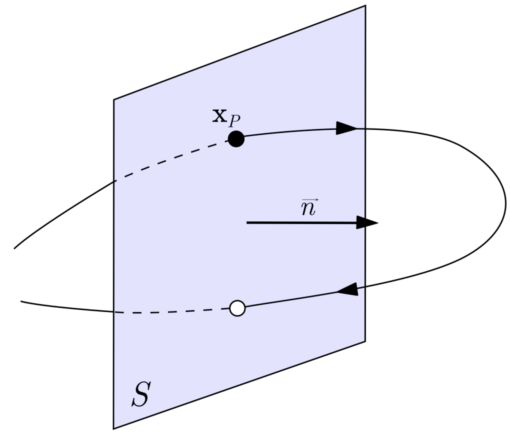

Figura 1.1: Esquema de ejemplo de una sección de Poincaré en 2 dimensiones.

En la Figura 1.1 se ha incluido un esquema de una sección de Poincaré S con una trayectoria en 3 dimensiones. El punto entrante $\mathbf{x}_P$ se ha representado en negro y el punto saliente en blanco. El vector $\vec{n}$ se corresponde con el vector dirección de la superficie.

1.2. Tipología de estados

A continuación se introducirán los estados que aparecen típicamente en sistemas de EDOs. Cuando estos estados atraen condiciones iniciales cercanas se llaman atractores.

Puntos fijos

Se define el punto fijo $\mathbf{x}^*$ como aquel donde se anulan las derivadas respecto al tiempo o, lo que es lo mismo, cumple $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = 0$. Es el caso más simple que puede ocurrir, el sistema está en un punto de equilibrio en el que se mantiene. En la Figura 1.2 se han dibujado algunos puntos fijos para el caso de 1 dimensión donde se representa la derivada respecto al tiempo $\dot{x}$ frente a la coordenada x. Por definición, cuando la derivada toma valores positivos ($f(x) > 0$) el sistema tiende a moverse hacia valores mayores de x y cuando los toma negativos ($f(x) < 0$) el sistema tiende a moverse hacia valores menores de x. Los distintos comportamientos de la función a ambos lados del punto fijo permiten clasificarlos según:

(a) Punto fijo estable: El sistema tiende a ir al punto desde ambas direcciones. Pequeñas perturbaciones o diferencias en las condiciones iniciales tienden a cero con el tiempo (no le sacan del equilibrio). Se corresponde con el ejemplo de la Figura 1.2.(a)

(b) Punto fijo inestable: Pequeñas perturbaciones o diferencias en las condiciones iniciales sí son capaces de sacar al sistema del equilibrio. Si el sistema empieza en ese mismo punto, permanece ahí. Sin embargo, si comienza cerca, se ve repelido por él. Se corresponde con el ejemplo de la Figura 1.2.(b)

(c) Punto fijo semi-estable: Depende de la dirección con la que se acerque al punto será repelido o atraído. Se corresponde con el ejemplo de la Figura 1.2.(c)

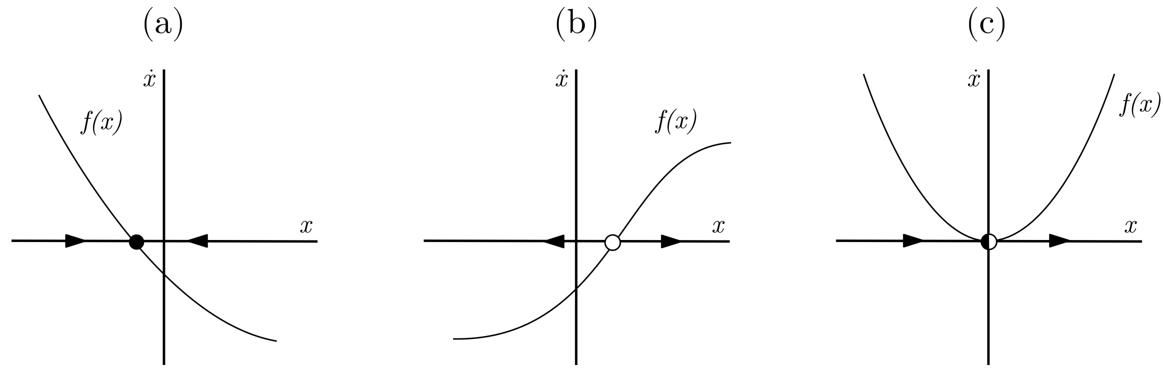

Figura 1.2: Representación gráfica de algunos ejemplos de puntos fijos según su estabilidad.

Ciclos límite

El sistema también puede converger en una trayectoria. Los ciclos límites son trayectorias cerradas que poseen un cierto periodo T tal que $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t+T)$.

En la Figura 1.3 se ha dibujado en un retrato de fase un ejemplo de ciclo límite estable en dos dimensiones.

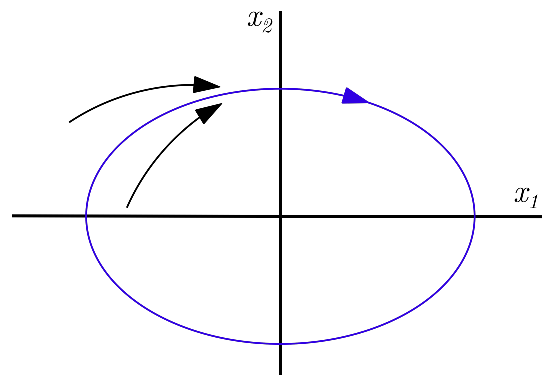

Figura 1.3: Representación gráfica de un ejemplo de ciclo límite estable.

Cabe destacar que también presentan distintas estabilidades. Es posible que el sistema se vea atraído o repelido. Esto será consistente con la naturaleza de los estados colindantes. Por mencionar algunos ejemplos, su comportamiento se puede ver afectado por la presencia de un punto fijo estable o inestable en su interior o un ciclo límite inestable que lo rodee, entre otros.

Cuasiperiodicidad

Se puede entender el estado de cuasiperiodicidad como una mezcla de estados periódicos con M frecuencias fundamentales Ω_i. Ninguna de ellas se puede escribir como combinación de las demás a través de números racionales, es decir, la ecuación

$$\sum_{i=1}^{M} m_i \Omega_i = 0 \tag{1.4}$$

con $m_i \in \mathbb{Z}$ solo se satisface para la solución trivial $m_1 = m_2 = ... = m_M = 0$.

El estado se presenta en forma de trayectoria confinada en la superficie de un toro N-dimensional. Para $M = 2$, si la ecuación (1.4) presenta una solución no trivial, entonces la trayectoria se cierra en un ciclo límite. Si, en cambio, no la presenta, la trayectoria cubre el toro completamente.

Caos

Como ya se ha adelantado, el caos es un estado con una dependencia sensible a las condiciones iniciales. Partiendo de dos condiciones iniciales $\mathbf{x}_0$ y $\mathbf{x}_0 + \xi(t)$, donde $\xi(t=0)$ es infinitesimalmente pequeño, que evolucionan en el tiempo según una ecuación como la (1.1). Se dice que el sistema presenta esa sensibilidad mencionada y es caótico si $\xi(t)$ crece exponencialmente con el tiempo:

$$\frac{||\xi(t)||}{||\xi(0)||} \sim \exp(\lambda t) \text{ con } \lambda > 0 \tag{1.5}$$

Es importante saber que por el teorema de Poincaré-Bendixon no es posible que aparezca caos en un sistema de menos de 3 dimensiones. El teorema dice que si una trayectoria cerrada se encuentra en una región delimitada sin puntos fijos en su interior, entonces la trayectoria debe converger a un ciclo límite tras un cierto tiempo. No es posible que llegue a algo tan complejo como el caos. Como este teorema no se aplica para una dimensión $N \geq 3$, no hay nada que impida el caos para esos sistemas.

Los atractores caóticos o extraños presentan una estructura fractal. Los fractales son figuras geométricas complejas con una estructura autosimilar a pequeñas escalas. Una de sus propiedades es que su dimensión es fraccionaria.

1.3. Exponentes de Lyapunov

Los exponentes de Lyapunov resultan una gran herramienta de identificación de los estados que muestra un sistema.

Recordando la idea introducida con el movimiento caótico, cuando dos puntos cercanos en condiciones iniciales se dejan evolucionar con el tiempo por una ecuación como la (1.1) N-dimensional es posible medir la separación de ambos puntos a través de los exponentes de Lyapunov $\lambda(\mathbf{x}_0)$.

Partiendo de las mismas condiciones $\mathbf{x}_0$ y $\mathbf{x}_0 + \xi(t)$, $\xi(t)$ obedecerá la ecuación (1.3). Retomando la ecuación (1.5) y tomando logaritmos, se tiene que los exponentes cumplen:

$$\lambda(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{||\xi(t)||}{||\xi(0)||} \tag{1.6}$$

Realmente existe un espectro de exponentes de Lyapunov $\{\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_N\}$. Para una perturbación arbitraria, la ecuación (1.6) nos da el mayor exponente de Lyapunov λ_1. El resultado es independiente de $\mathbf{x}_0$ con probabilidad 1.

En el caso de los puntos fijos, los exponentes de Lyapunov coinciden con la parte real de los autovalores de la matriz jacobiana (1.2). De esta manera, el primer exponente será la mayor de las partes reales de los autovalores de la jacobiana.

El espectro de exponentes de Lyapunov $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N)$ nos permitirá distinguir entre los atractores según sus valores. Los puntos fijos estables presentan todos los exponentes con valores negativos. Los ciclos límite estables tienen el primero nulo y el resto negativos. Los atractores cuasiperiódicos tiene tantos exponentes nulos como frecuencias fundamentales y luego el resto negativos. Y, el caos presenta un primer exponente positivo, alguno nulo y el resto negativos. Es importante entender que se ordenan de mayor a menor y que al menos uno debe ser menor que cero. Por ejemplo el caso

$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ y $\lambda_3 = 0$ para $N = 3$ no sería posible. En la Tabla 1.1 se ha recogido un resumen del comportamiento de los exponentes según los tipos de atractores.

Atractor	**Exponentes de Lyapunov**
Punto fijo	$\lambda_i < 0 \quad \forall i = 1, 2, ...N$
Ciclo límite	$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_i < 0 \quad \forall i = 2, 3, ...N$
Cuasiperiocidad de dos frecuencias	$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_i < 0 \quad \forall i = 3, 4, ...N$
Caos	$\lambda_1 > 0, \quad \lambda_i = 0$ con $i \neq 1, N, \quad \lambda_j \leq 0 \quad \forall j = i + 1, ...N$

Tabla 1.1: Tipos de atractores según los exponentes de Lyapunov.

Suma de los exponentes

La suma de todos los exponentes de Lyapunov de un sistema N-dimensional mide la contracción del volumen en el espacio de fases. Más adelante, será importante recordar que esta suma es equivalente a la traza de la matriz jacobiana del sistema (siempre que esta no dependa del tiempo) [4]:

$$\sum_{k=1}^{N} \lambda_k = \text{traza}(\mathcal{J}) \tag{1.7}$$

De esta forma, para sistemas disipativos, dado que traza$(\mathcal{J}) < 0$, la suma de los exponentes es negativa. Esto implica que el volumen alrededor de trayectorias genéricas disminuye exponencialmente a cero.

1.4. Bifurcaciones

Existen ciertos parámetros que con su cambio acarrean consecuencias en el estado cualitativo del sistema: cambios de estabilidad o destrucción y creación de atractores como los puntos fijos. Estas transformaciones cualitativas se llaman bifurcaciones.

Existen muchos tipos, locales y globales. Las bifurcaciones locales son aquellas que se pueden analizar a través de la estabilidad local de los estados implicados. En cambio, en las globales, se involucran grandes regiones del espacio de fase. Se introducirán tan solo las bifurcaciones locales fundamentales.

Bifurcación silla-nodo

Se corresponde con el método más sencillo de creación y destrucción de puntos fijos. Será un caso u otro en función del sentido en el que ocurra la bifurcación. El proceso consiste en el choque de dos puntos fijos que se destruyen mutuamente o en la creación de dos puntos gemelos con estabilidad opuesta. El ejemplo más común en una dimensión se corresponde con el sistema:

$$\dot{x} = x^2 + p \tag{1.8}$$

Donde p es el parámetro de control. Su signo nos da el punto del proceso en el que se encuentra. Si es negativo, tenemos los puntos estable e inestable. Cuando se anula, se tiene un punto semi-estable. Y, cuando se hace positivo, desaparecen los puntos fijos. Se ha incluido en la Figura 1.4 un esquema de lo descrito.

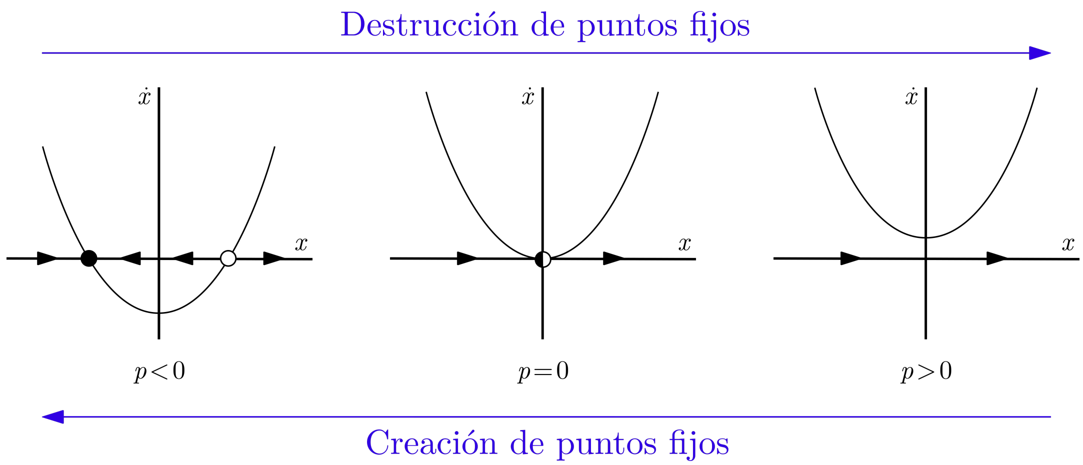

Figura 1.4: Representación gráfica de una bifurcación silla-nodo en una dimensión.

Bifurcaciones *pitchfork*

Ocurre en sistemas con simetría y provocan la creación y destrucción de pares simétricos de puntos fijos con la misma estabilidad. Se dividen en dos tipos, supercrítica y subcrítica.

Bifurcación *pitchfork* supercrítica

Un punto fijo estable se destruye y crea un par de puntos fijos estables rompiendo la simetría del sistema. El ejemplo más común de este caso en una dimensión se corresponde con:

$$\dot{x} = x(p - x^2) \tag{1.9}$$

Cuando el parámetro es menor que cero se tiene un único punto estable. Cuando se anula, el origen sigue siendo estable, pero más débil. Al hacerse positivo, el origen se hace inestable y aparecen dos puntos estables simétricos. Se ha incluido en la Figura 1.5 un esquema de lo descrito.

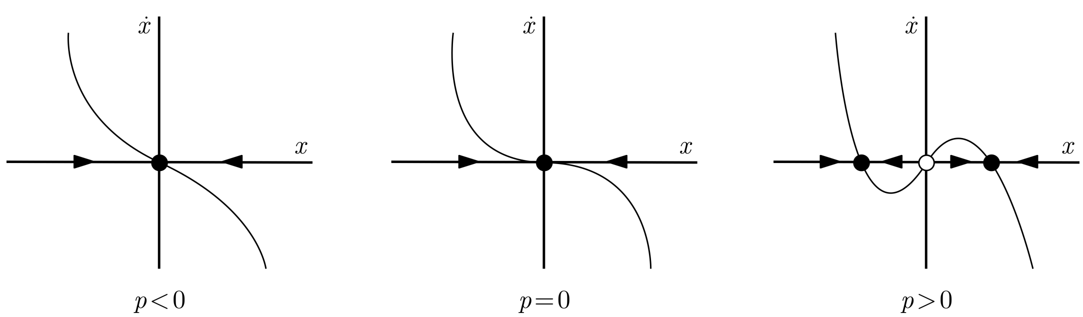

Figura 1.5: Representación gráfica una bifurcación *pitchfork* supercrítica en una dimensión.

Bifurcación *pitchfork* subcrítica

El par de puntos fijos creados son inestables. El ejemplo más común de este caso en una dimensión es muy similar al anterior, cambiando el signo del término x^3:

$$\dot{x} = x(p + x^2) \tag{1.10}$$

Cuando el parámetro es mayor o igual que cero se tiene un único punto inestable esta vez. Al hacerse negativo, el origen se hace estable y aparecen dos puntos inestables simétricos. Se ha incluido en la Figura 1.6 un esquema de lo descrito.

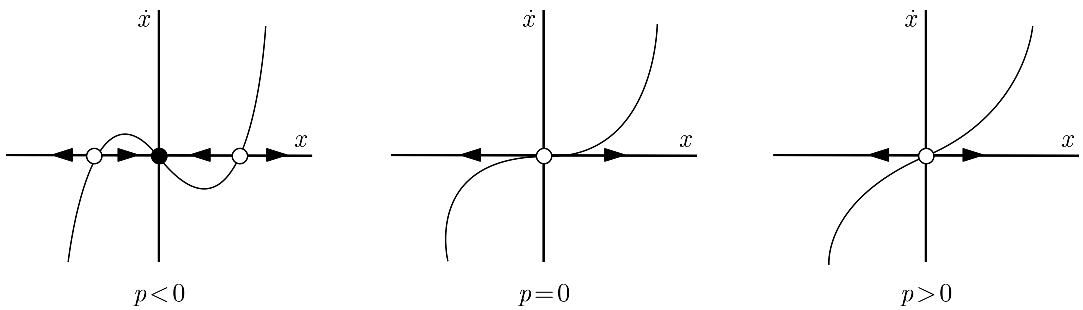

Figura 1.6: Representación gráfica una bifurcación *pitchfork* subcrítica en una dimensión.

Diagramas de bifurcación

Los diagramas de bifurcación son la manera más común de representar bifurcaciones. Son además un gran ejemplo de estudio a través de dinámica cualitativa. Consisten en la representación gráfica de una de las componentes $\mathbf{x}$ frente al parámetro de control p.

En el caso de los ejemplos (1.9) y (1.10) nos encontramos en una dimensión, por lo que la representación será x frente a p. En la Figura 1.7 se han incluido los diagramas de bifurcación de ambos ejemplos. Las líneas continuas negras implican puntos fijos estables y las líneas discontinuas negras puntos fijos inestables.

La Figura 1.7.(a) se corresponde con el caso supercrítico. Se ve que para $p < 0$ hay un único punto fijo estable y para $p > 0$ este se inestabiliza y aparecen un par de puntos fijos estables. La Figura 1.7.(b) se corresponde con la subcrítica. Se ve que para $p > 0$ hay un único punto fijo inestable y para $p < 0$ este se estabiliza y aparecen un par de puntos fijos inestables.

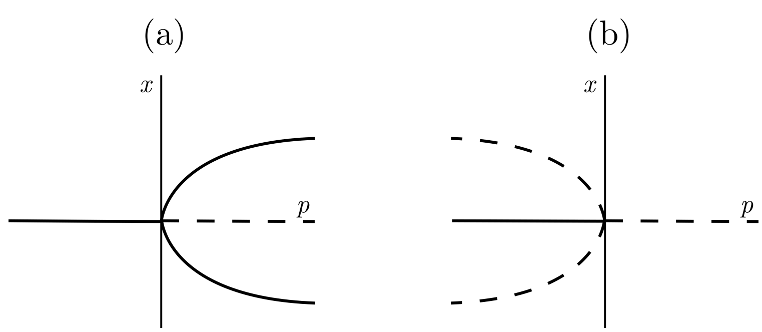

Figura 1.7: Representación gráfica de los diagramas de bifurcación para los casos de la *pitchfork* supercrítica (a) y subcrítica (b).

Bifurcaciones de Hopf

Se diferencian de las demás ya introducidas porque necesitan que haya dos o más dimensiones. Esto es así porque son capaces de crear ciclos límites cambiando la estabilidad de puntos fijos.

También se distinguen de las anteriores por el comportamiento de los autovalores de la jacobiana. En las bifurcaciones silla-nodo y *pitchfork* un autovalor se anula en $p = 0$. En las de Hopf, los autovalores se ordenan en forma de complejos conjugados donde la parte real (y no la imaginaria) se anula al mismo tiempo en el punto de bifurcación.

Como en el caso de la pitchfork, se dividen dos tipos: supercrítica y subcrítica.

Bifurcación de Hopf supercrítica

Un punto fijo estable actuando como un foco que atrae en forma de espiral cambia su estabilidad para crear un ciclo estable a su alrededor. Un ejemplo en dos dimensiones sería el sistema:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(p - r^2) \\ \dot{\theta} &= \omega + d\,r^2 \end{aligned} \tag{1.11}$$

Donde p continúa siendo el parámetro de control de la bifurcación, ω es la frecuencia asintótica de las oscilaciones y d marca la dependencia de la frecuencia con la amplitud.

En este ejemplo, los autovalores de la jacobiana evaluada en el origen se corresponden con $\lambda = p \pm i\omega$. De esta manera, la bifurcación ocurre al anularse el parámetro p.

Cuando el parámetro es menor que cero se tiene el foco estable. Al hacerse positivo, el punto se hace inestable y aparece el ciclo alrededor. Se ha incluido en la Figura 1.8 un esquema de lo descrito.

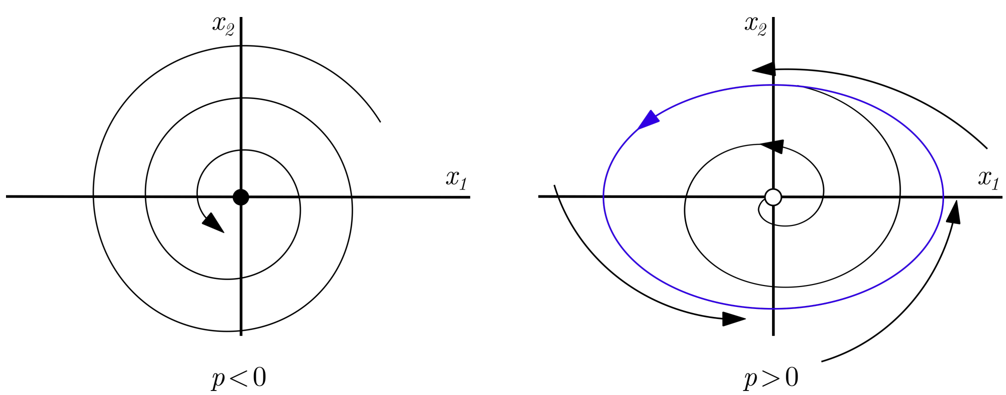

Figura 1.8: Representación gráfica una bifurcación de Hopf supercrítica en dos dimensiones.

Bifurcación de Hopf subcrítica

En este caso, también se parte de un punto fijo estable, pero esta vez está rodeado de un ciclo inestable. La bifurcación ocurre cuando el ciclo inestable se cierra sobre el punto, desapareciendo y cambiando la estabilidad del punto. Un ejemplo en dos dimensiones sería el sistema:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(p + r^2 - r^4) \\ \dot{\theta} &= \omega + d\,r^2 \end{aligned} \tag{1.12}$$

Cuando el parámetro es menor que cero se tienen el foco estable y dos ciclos, uno estable y otro inestable. Al hacerse positivo, el punto se hace inestable y desaparece el ciclo inestable alrededor de él. Se ha incluido en la Figura 1.9 un esquema de lo descrito.

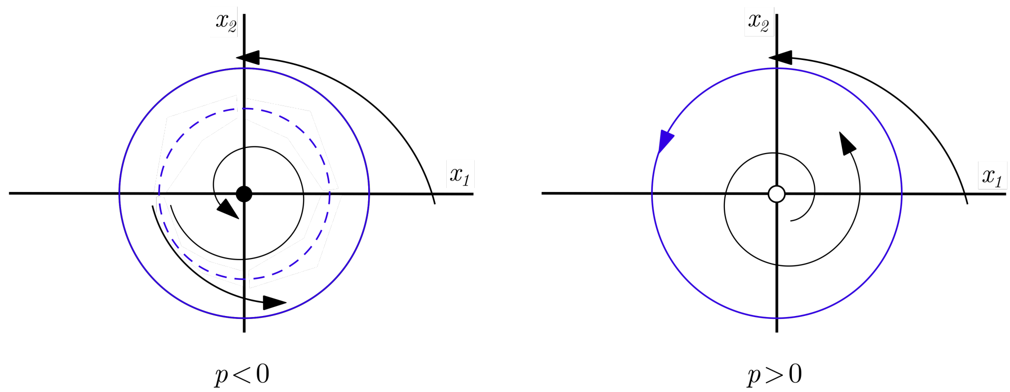

Figura 1.9: Representación gráfica una bifurcación de Hopf subcrítica en dos dimensiones.

Es importante saber que esta bifurcación posibilita la existencia de histéresis. Cuando p es mayor que cero, como solo queda el ciclo límite estable como atractor, comienzan oscilaciones de gran amplitud. Cuando han comenzado, no es suficiente con devolver p a cero para frenarlas. Se debe llegar hasta $p = -1/4$ para que los ciclos estable e inestable choquen y se aniquilen entre sí. La bifurcación en la que se destruyen las oscilaciones es de tipo silla-nodo de ciclos.

Diagramas de bifurcación

En el caso de los ejemplos (1.11) y (1.12) nos encontramos en dos dimensiones, por lo que la representación será de los valores extremos de x_1 frente a p. En la Figura 1.10 se han incluido los diagramas de bifurcación de ambos ejemplos. Las líneas continuas negras implican puntos fijos estables y las líneas discontinuas negras puntos fijos inestables. Sin embargo, las azules implican ciclos límite, estables en línea continua e inestables en discontinua.

La Figura 1.10.(a) se corresponde con la supercrítica. Se ve que para $p < 0$ hay un único punto fijo estable y para $p > 0$ este se inestabiliza y aparece un ciclo límite estable. La Figura 1.10.(b) se corresponde con la subcrítica. Se ve que para $p > 0$ hay un único punto fijo inestable y para $p < 0$ este se estabiliza y aparece un ciclo límite inestable.

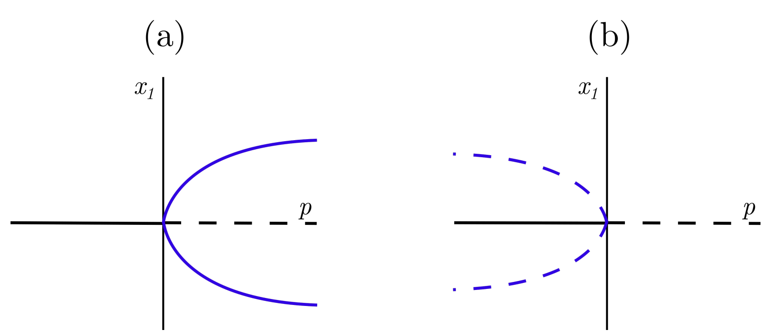

Figura 1.10: Representación gráfica de los diagramas de bifurcación para los casos de la Hopf supercrítica (a) y subcrítica (b).

Bifurcación silla-nodo de ciclos

Es el análogo de la silla-nodo de puntos fijos pero con ciclos límite. Consiste en la creación o aniquilación de dos ciclos límites. Un ejemplo en dos dimensiones sería el sistema (1.12) visto para la bifurcación de Hopf subcrítica.

Mientras que la bifurcación de Hopf subcrítica ocurre para $p = 0$, la silla-nodo de ciclos ocurre para un parámetro crítico $p_c = -1/4$. Cuando el parámetro p es menor que el crítico se tiene un punto fijo estable. En p_c, se forma un ciclo límite semi-estable. Para un parámetro entre 0 y p_c, se destruye el ciclo límite semi-estable y aparecen uno estable y otro inestable. Visto desde la perspectiva de la aniquilación, los ciclos colisionan y desaparecen al disminuir p hacia el parámetro crítico. El origen no participa en la bifurcación, se mantiene estable para todo p. En la Figura 1.11 se ha incluido una representación gráfica del proceso descrito.

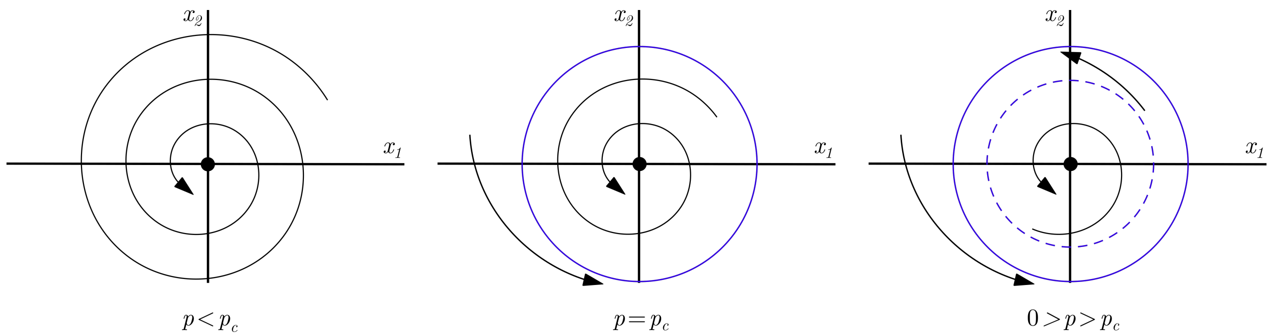

Figura 1.11: Representación gráfica una bifurcación silla-nodo de ciclos en dos dimensiones.

En la Figura 1.12 se ha incluido el diagrama de bifurcación del sistema (1.12). De nuevo, como nos encontramos en un caso en dos dimensiones, se ha representado x_1 frente a p.

Se ha usado los mismos colores, negro para puntos fijos y azul para ciclos límites, y tipos de línea, continua estable y discontinua inestable, para denotar el tipo de atractor y su estabilidad.

Para $p < p_c$ se puede ver como existe tan solo el punto fijo del origen. Para $p > p_c$ aparecen los dos ciclos límites, estable e inestable.

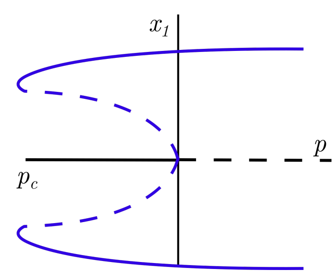

Figura 1.12: Representación gráfica del diagrama de bifurcación de una silla-nodo de ciclos y Hopf subcrítica según el sistema (1.12).

Bifurcaciones por duplicación de periodo

La última bifurcación que se verá juega un papel fundamental en una de las principales rutas al caos, la duplicación de periodo. Estas bifurcaciones consisten en la aniquilación o creación de ciclos límites donde uno de ellos tiene un periodo del doble que el otro.

Como en otros casos ya estudiados, se dividen en supercrítica y subcrítica.

Bifurcación por duplicación de periodo supercrítica

Un ciclo límite se inestabiliza y crea otro ciclo límite estable con un periodo del doble del ahora inestable. En la Figura 1.13 se ha incluido una representación gráfica de este proceso. Parece que el ciclo de periodo doble se corta consigo mismo pero es efecto de proyectar en dos dimensiones. No se cruzan realmente.

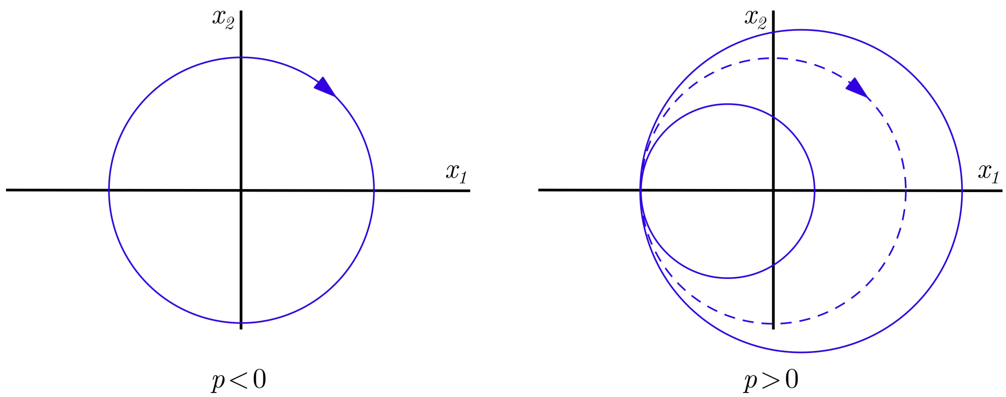

Figura 1.13: Representación gráfica una bifurcación de duplicación de periodo supercrítica.

Bifurcación por duplicación de periodo subcrítica

Un ciclo límite inestable de periodo doble colisiona con otro estable y lo inestabiliza. En la Figura 1.14 se ha incluido una representación gráfica de este proceso. Parece que el ciclo de periodo doble cruza consigo mismo por la proyección en dos dimensiones. Tampoco se cruzan en este caso.

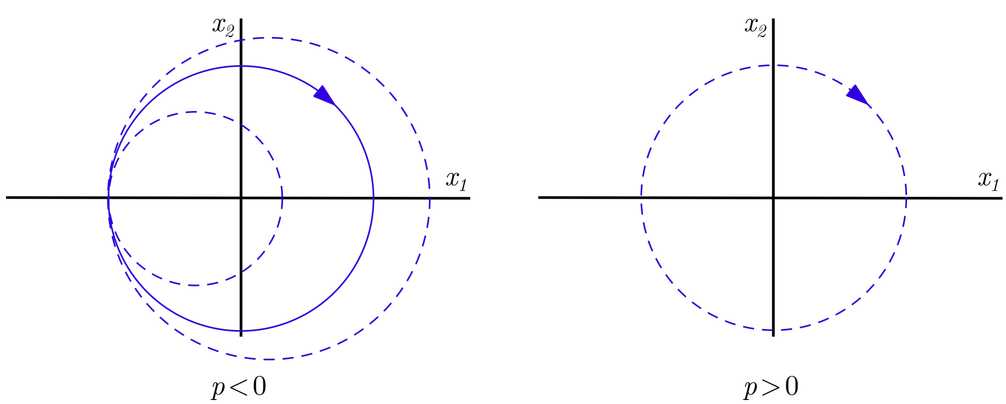

Figura 1.14: Representación gráfica una bifurcación de duplicación de periodo subcrítica.

1.5. Rutas al caos

Existen tres rutas para que en un sistema aparezca un atractor caótico: duplicación de periodo, intermitencia y cuasiperiodicidad.

Duplicación de periodo

La ruta por duplicación de periodo se basa en la sucesión de infinitas bifurcaciones de duplicación de periodo supercríticas hasta la llegada al caos. Una vez aparece, hay zonas sin caos llamadas ventanas. La más grande se corresponde con la de periodo tres. Esto se verá claramente en un diagrama de bifurcación. Una línea se irá duplicando hasta presentar caos, el cual tendrá ventanas claras.

En la Figura 1.15 se ha incluido el diagrama de bifurcación de uno de los ejemplos que se han estudiado en el trabajo. Para obtenerlo se ha usado una sección de Poincaré calculada a través de una interpolación entre los valores de $\mathbf{x}$ donde x_3 sufriese un cambio de signo y la derivada cumpliera $\dot{x}_3 > 0$. Más adelante se entrará en detalle en el sistema estudiado y el ejemplo escogido.

Se parte de dos condiciones iniciales diferentes (representadas en azul y negro), correspondientes a dos ciclos límites diferentes, en $g = 4,5$. Poco después de superar $g = 5$ es cuando ocurre la primera duplicación de periodo. En la rama más baja es incluso posible ver una segunda bifurcación de duplicación de periodo antes de la entrada al caos. Posteriormente, vuelven a aparecer ciclos límites con otra bifurcación. El sistema sale y entra en el caos hasta finalmente terminar en un único ciclo límite alrededor de $g = 6,5$. También es posible observar la ventana de periodo tres entre $g = 6$ y $g = 6,2$.

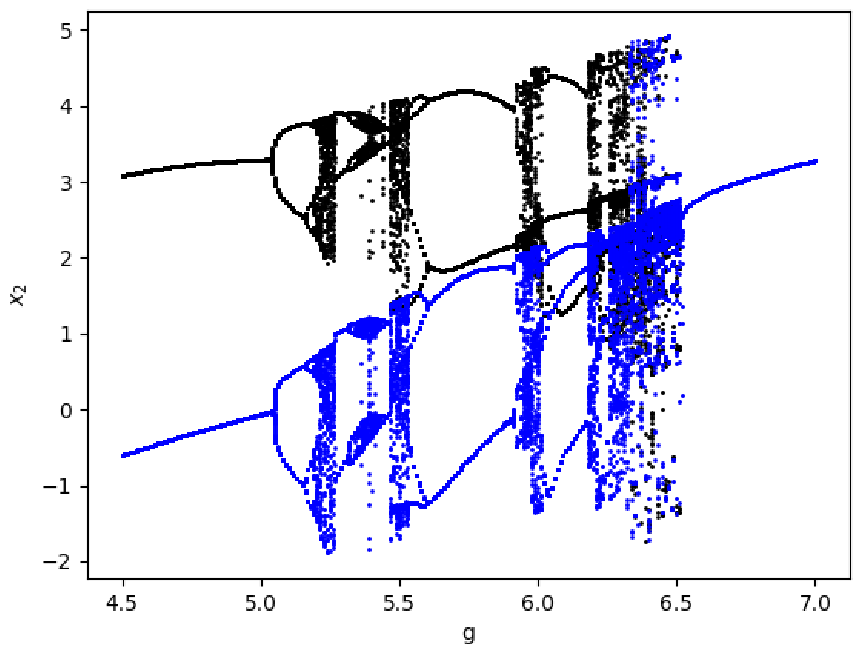

Figura 1.15: Diagrama de bifurcación del primer evento caótico encontrado en un sistema de cuatro neuronas.

Transición desde la cuasiperiodicidad

En 1944, Landau propuso que era posible llegar a un estado turbulento tras una infinita secuencia de bifurcaciones de Hopf generalizadas, donde cada una añade una frecuencia fundamental al sistema al crear un toro de una dimensión superior. Fue en 1978 cuando Ruelle, Takens y Newhouse concluyeron matemáticamente que sistemas con movimiento regular se vuelven inestables a mostrar caos al pasar por 3 bifurcaciones de Hopf generalizadas.

Esta manera de llegar al caos se conoce como escenario Ruelle-Takens. Partiendo de una órbita periódica, el sistema puede sufrir una bifurcación para crear una órbita cuasiperiódica de dos frecuencias y otra más para una de tres frecuencias. Posteriormente, se crea el atractor caótico.

Otro escenario posible es el descrito por el modelo de Curry y Yorke [5]. En esta ruta por cuasiperiodicidad el atractor caótico proviene de un régimen cuasiperódico de dos frecuencias, al contrario que en el de Ruelle-Takins que era de tres. La ruta no ocurre por destrucción del toroide sino por desestabilización.

Estos cambios se reflejan en los exponentes de Lyapunov $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, ...)$. Estos permitirán discernir entre escenarios. Como se mencionó en la Tabla 1.1, los ciclos límites presentan unos exponentes $(0, -, -, -, ...)$. Sin embargo, la cuasiperiodicidad a dos frecuencias anula el segundo exponente también $(0, 0, -, -, ...)$ y la de tres el tercero $(0, 0, 0, -, ...)$. Finalmente, el atractor caótico hace positivo el primer exponente de Lyapunov $(+, 0, -, -, ...)$.

Ruta de la intermitencia

Por debajo del parámetro crítico p_c el atractor es una órbita periódica. Cuando el parámetro de control p se hace un poco superior que p_c, la situación es similar a dicha órbita pero está interrumpido por ráfagas finitas e intermitentes de comportamientos aperiódicos y caóticos. Finalmente, se alcanza un atractor caótico.

En este caso el ciclo no es reemplazado por otro como en el caso de la duplicación de periodo, sino que es o destruido o convertido a inestable (puesto que en las ráfagas se va lejos del mismo). Esto puede ocurrir por una silla-nodo de ciclos, una Hopf subcrítica o una bifurcación de duplicación de periodo subcrítica. Estos tres casos se corresponden a los tipos I, II y III de transiciones por intermitencia.

2. Modelos de neuronas

Nuestra capacidad para respirar, sentir y recordar depende de nuestro sistema nervioso. Se trabaja mediante la conducción de impulsos eléctricos y químicos a través de neuronas y células gliales. Las neuronas son las que envían y reciben dichos impulsos y las gliales forman la estructura del cerebro como tal [6].

Las neuronas están formadas por un cuerpo celular que contiene su núcleo y del que salen las dendritas y el axón. El núcleo es el encargado de controlar a la célula, el axón envía los mensajes por sus terminales y las dendritas reciben la información. El proceso de comunicación ocurre a través de la sinapsis, que es el espacio entre el axón de una célula transmisora y las dendritas de una receptora. En la Figura 2.1 se ha recogido un dibujo de la neurona con las partes mencionadas.

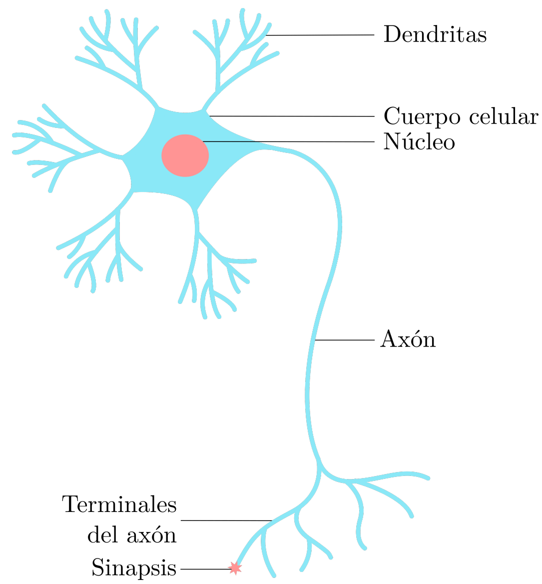

Figura 2.1: Dibujo esquemático de una neurona con sus partes.

A mediados del siglo XX se hizo claro que el procesamiento de la información en el cerebro implicaba una actividad de una gran parte de la población de neuronas y no era un proceso individual. Además, por la complejidad del sistema, se estableció la necesidad de simplificarlo y realizar aproximaciones estadísticas a un nivel que no se dejase de apreciar el funcionamiento del mismo [7].

Actualmente, los modelos teóricos de neuronas siguen a la orden del día. Es un tema cautivador para la comunidad científica, que sigue publicando artículos sobre cómo interaccionan las neuronas y cómo nos afecta esto a nuestra memoria [8].

2.1. Modelo de Wilson-Cowan

Uno de los modelos más importantes es el de Wilson y Cowan (1972), donde tratan con un sistema que estudia la actividad representando la proporción de población local de neuronas activas o enviando señales en el momento. Hoy en día, es más común que la variable de actividad sea algo físico, ya sea la tasa de disparo (*firing rate*) o un potencial electroquímico de un grupo de neuronas.

Las ecuaciones de la actividad en los artículos de Wilson-Cowan tienen la forma:

$$\tau \dot{a}_i = -a_i + (1 - r a_i) f_i \left(\sum_j w_{ij} a_j + I_i(t) \right) \tag{2.1}$$

Donde a_i es la actividad de la neurona i (o, más bien, de un grupo de neuronas o *rate neuron*), τ es una constante que denota el tiempo de decaimiento, r es el periodo refractario (tiempo antes de que la neurona pueda volver a excitarse), f_i es la función de activación o de transferencia, w_{ij} es la matriz de acoplo (cada elemento informa sobre como interactúan las neuronas i y j entre sí) y I_i es un input externo.

Es interesante recordar la forma de las ecuaciones de Wilson y Cowan dado que el modelo con el que se va a trabajar, Sompolinsky-Crisanti-Sommers (SCS), sigue una forma muy similar.

2.2. Modelo de Sompolinsky-Crisanti-Sommers

El modelo de SCS [9] consiste en un sistema de N neuronas donde cada una lleva asociado un campo local x, tal que se partirá de $\{x_i\}_{i=1,...,N}$, cuyo comportamiento viene determinado por una función no lineal $\phi(x_i(t))$. El análogo biológico de la variable x sería el potencial de membrana de las células nerviosas y la función no lineal estaría relacionada con la tasa de disparo (*firing rate*). La dinámica viene dada por el sistema de EDOs:

$$\dot{x}_i = -x_i + g \sum_{j=1}^{N} J_{ij} \phi(x_j) \tag{2.2}$$

Donde g es un parámetro constante real que mide la no linealidad de la respuesta neuronal y J es una matriz cuyos elementos J_{ij} se corresponden con la fuerza y el signo del acoplamiento entre las neuronas i y j. La función no lineal $\phi(x_i(t))$ se suele tomar como la tangente hiperbólica como función genérica impar.

Dada esta naturaleza impar de la función $\phi(x_i(t))$, la ecuación (2.2) se muestra invariante bajo la transformación $x_i \to -x_i$.

La matriz de acoplo J tiene ciertas características importantes a tener en cuenta:

- Se propone que sus elementos sigan una distribución gaussiana de media cero y varianza $\sigma^2 = 1/N$. La media cero permite que no haya preferencia entre una conexión excitatoria ($J_{ij} > 0$) o inhibitoria ($J_{ij} < 0$) entre las neuronas. La varianza toma ese valor para que se garantice una distribución normal en el límite termodinámico $N \to \infty$ de acuerdo con el teorema del límite central [10].

- Para nuestro interés la matriz J no debe ser simétrica o, lo que es lo mismo, $J_{ij} \neq J_{ji}$. Si lo fuera, el sistema (2.2) mostraría un comportamiento relajacional [11]:

$$\frac{dx_i}{dt} = -\frac{\partial E(x_1, ..., x_N)}{\partial x_i}$$

  Donde se evolucionaría a los mínimos locales de energía $E(x_1, ..., x_N)$ tras cierto tiempo. Implicando que los únicos atractores presentes serían puntos fijos. Aunque pudiera mostrar una estructura compleja de puntos estables e inestables, en este trabajo nos interesa ampliar también a otros fenómenos como ciclos límite o caos. Al igual que en el artículo original de (2.2), J_{ij} y J_{ji} son estadísticamente independientes.

- La diagonal principal de la matriz J es nula. Dado que las neuronas no pueden acoplarse consigo mismas, $J_{ii} = 0$. Esto resultará muy interesante para los exponentes de Lyapunov. Como ya hemos adelantado, la suma de todos ellos debe coincidir con la traza de la matriz jacobiana $\mathcal{J}$ de la EDO linealizada. Partiendo de la EDO del modelos SCS y de la definición del sistema linealizado a través de la jacobiana de la ecuación (1.3), se puede obtener el valor de la traza de la jacobiana.

  Como la diagonal principal de J es nula, la forma de la de $\mathcal{J}$ vendrá dada por la primera parte de la EDO, correspondiente al vector $\delta\mathbf{x}$ multiplicado por la menos identidad:

$$\begin{pmatrix} \delta\dot{x}_1 \\ \delta\dot{x}_2 \\ \cdots \\ \delta\dot{x}_N \end{pmatrix} = \mathcal{J} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \cdots \\ \delta x_N \end{pmatrix} = -\mathbb{1} \cdot \delta\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \cdot \delta\mathbf{x}$$

  Esto hará que para cualquier matriz J y para cualquier valor de N, la suma de los exponentes de Lyapunov cumpla $\sum_{k=1}^{N} \lambda_k = -N$.

Modelo SCS para el límite termodinámico

En el caso donde N es pequeña, el sistema puede pasar por todos los atractores y bifurcaciones que se han mencionado en la Introducción en función de la matriz de acoplo J. No obstante, para el límite $N \to \infty$ existe un comportamiento muy distinto.

Según el teorema del círculo, en el límite termodinámico, los autovalores de una matriz aleatoria (no simétrica) convergen a una densidad constante en el disco unidad del plano complejo [12]. Recordando la relación de la matriz de acoplo con la jacobiana en $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ($\phi'(0) = 1$), sabemos que $\mathcal{J} = -\mathbb{1} + gJ$, de forma que los autovalores de la jacobiana convergerán al disco de radio g con centro en -1. Se ha incluido un esquema de lo descrito para $g > 1$ en la Figura 2.2.

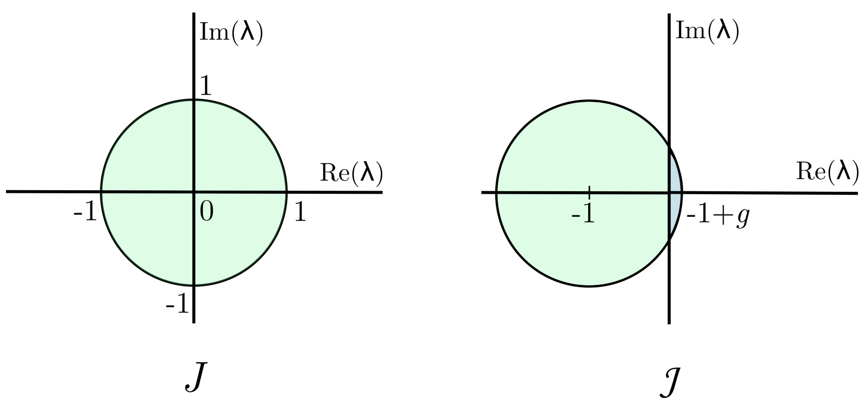

Figura 2.2: Esquema de la densidad de los autovalores de la matriz J y de la jacobiana $\mathcal{J}$ evaluada en $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ del modelo SCS.

Para el caso donde $g < 1$, todos los autovalores tendrán su parte real negativa, lo que implicará que el origen sea estable.

Sin embargo, si $g > 1$, habrá infinitos autovalores con parte real mayor que cero. Esto provocará que no se cumplan las condiciones necesarias para las bifurcaciones ya descritas. En esos casos, solo cruzan al semiplano derecho de $\mathbb{C}$ uno o dos de los autovalores, manteniéndose el resto alejados del eje imaginario.

El resultado de esto es que no hay ruta al caos estándar. Al contrario se observa una transición directa desde punto fijo a caos. Su comprensión es tema de estudio [13] [14].

3. Métodos

El trabajo se ha basado principalmente en la clasificación de los estados del sistema simulado mediante su espectro de exponentes de Lyapunov. Para ello se ha seguido la Tabla 1.1.

Para la realización de las simulaciones, se ha usado el lenguaje de programación de Python. Se ha montado una base del programa donde se creaba la EDO a resolver en un formato que incluyera las variables x_i de la ecuación (2.2) seguidas de las perturbaciones infinitesimales $\mathbf{v}_n$, que siguen la EDO:

$$\dot{v}_n^i = -v_n^i + g \sum_j J_{ij} \phi'(x_j) v_n^j \tag{3.1}$$

Donde v_n^i es la componente i de la perturbación infinitesimal n.

De esta forma, se ha trabajado con una lista del estilo $x_1, ..., x_N, v_1^1, ..., v_1^N, ..., v_m^1, ..., v_m^N$. Siendo N el número total de neuronas y m el número de perturbaciones infinitesimales calculadas (debe cumplirse $m \leq N$).

Para obtener un espectro de exponentes de Lyapunov frente al parámetro g (medidor de la no linealidad de la EDO) se ha comenzado por generar la matriz J y las condiciones iniciales de $\mathbf{x}$ y las perturbaciones $\mathbf{v}_n$. La matriz J encapsula toda la dinámica del sistema. Por esto, es necesaria la capacidad de recuperación de la misma cuando se recojan los datos de un gran número de simulaciones.

En general, se han trabajado con valores de g entre 0 y 20, con saltos de entre $0,1$ a $0,25$. Valores más grandes de g provocaban que se perdiese la condición de que la suma de los exponentes de Lyapunov fuese equivalente a $-N$. De esta manera, para cada valor de g, se ha resuelto la EDO integrando por Runge-Kutta de cuarto orden y aplicado el método de Bennetin y otros para obtener los exponentes de Lyapunov [15] [16].

En los cambios de g se han mantenido los últimos valores de las perturbaciones $\mathbf{v}_n$ y $\mathbf{x}$. Aunque a estos últimos se les ha añadido una pequeña cantidad, $0,001$, para sacarles del punto fijo del origen en el caso de que hubieran caído, evitando que se mantengan en el mismo. Esto permite que el sistema pueda acceder a dinámicas más complejas como atractores cuasiperiódicos o ciclos límites.

Seguidamente se discutirán los métodos de integración, generación de la matriz J y las condiciones iniciales aleatorias, obtención de los exponentes de Lyapunov por el método de Bennetin y clasificación de los sistemas según los valores de sus exponentes.

3.1. Runge-Kutta de orden 4

A la hora de integrar la ecuación diferencial ordinaria se ha optado por el método de Runge-Kutta de orden 4 [17], usualmente utilizado en problemas de valores iniciales del tipo:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t=0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \tag{3.2}$$

De manera que es posible obtener el valor de $\mathbf{x}(h)$, con h el paso de tiempo de integración mediante de 4 pasos:

$$\begin{gathered} \mathbf{k}_1 = h\mathbf{f}(t=0, \mathbf{x}=\mathbf{x}_0) \\ \mathbf{k}_2 = h\mathbf{f}(\tfrac{h}{2}, \mathbf{x}_0 + \tfrac{\mathbf{k}_1}{2}) \\ \mathbf{k}_3 = h\mathbf{f}(\tfrac{h}{2}, \mathbf{x}_0 + \tfrac{\mathbf{k}_2}{2}) \\ \mathbf{k}_4 = h\mathbf{f}(h, \mathbf{x}_0 + \mathbf{k}_3) \end{gathered} \tag{3.3}$$

$$\mathbf{x}(h) = \mathbf{x}_0 + \tfrac{1}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4)$$

Así, a partir de $\mathbf{x}_0$ es posible iterar hasta llegar a $\mathbf{x}(kh)$ con k un número entero.

En las simulaciones, se ha tenido en cuenta la necesidad de disminuir h, aumentando la precisión de los cálculos, para mayores g para mantener la estabilidad numérica. De esta forma, se ha tomado h como el mínimo entre $0,05$ y $0,2/g$, llegándose a $h = 0,01$ para $g = 20$.

3.2. Generación aleatoria de la matriz J y las condiciones iniciales

La librería de Python numpy, especializada en cálculo numérico y análisis de datos, tiene una serie de funciones para generar números aleatorios mediante las rutinas *numpy.random* [18].

Para generar las condiciones iniciales del estado del sistema y de las perturbaciones infinitesimales se ha usado la función *random_sample(size)*, que devuelve un array de floats aleatorios del tamaño indicado entre 0 y 1.

Para crear las matrices J se ha usado la función *normal(loc, scale, size)* que devuelve números aleatorios que siguen una distribución gaussiana de media *loc* y desviación típica *scale*. Como ya se ha comentado, se ha usado media 0 y desviación $1/\sqrt{N}$, siendo N el número de neuronas.

Cuando se realizaban simulaciones grandes, se ha seleccionado una semilla *seed* mediante la función *seed(seed)* para poder reproducir los casos más tarde si así se deseaba.

3.3. Cálculo de los exponentes de Lyapunov: método de Bennetin

En la ecuación (1.6) se definieron los exponentes de Lyapunov. No obstante, esta forma de obtenerlos no es para nada trivial. Para calcularlos se ha optado por aplicar el método de Bennetin.

La idea se basa en que la suma de los exponentes de Lyapunov mide la contracción del volumen del sistema N-dimensional en el espacio de fases. Sabiendo además que el volumen de un paralelepípedo con n dimensiones ($n \leq N$) aumenta o disminuye exponencialmente según la relación:

$$V_n(t) \simeq V_n(0) \prod_{j=1}^{n} \mathrm{e}^{\lambda_j t} \tag{3.4}$$

De esta forma, la suma total de exponentes de Lyapunov equivaldrá a:

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{V_n(t)}{V_n(0)} \tag{3.5}$$

Siendo $V_n(0)$ el volumen inicial del paralelepípedo.

Para aplicar el método de Bennetin, se han partido de unas perturbaciones infinitesimales aleatorias (aunque ortogonales entre sí) $\mathbf{v}_i$ con $i = 1, 2, ..., n$. Siendo n el número de exponentes a calcular. Posteriormente, se ha dejado actuar a la EDO (3.1) durante un tiempo de transición. Para evitar overflows por crecer exponencialmente, se llevarán a cabo ortonormalizaciones de los vectores cada cierto tiempo τ. Cada vez que se ortonormaliza se obtiene a su vez un valor de los exponentes.

Esto se ha realizado un número significativo de veces para obtener n_λ "exponentes de Lyapunov de tiempo finito", de manera que se ha realizado un promedio de todos ellos para obtener el resultado final:

$$\lambda_i = \frac{1}{n_\lambda} \sum_{j=1}^{n_\lambda} \lambda_{i(j)} \tag{3.6}$$

En nuestro caso, se ha trabajado con un tiempo de transición de 40 unidades de tiempo, un tiempo entre ortonormalizaciones τ de 4 unidades de tiempo y un número de exponentes de Lyapunov de tiempo finito $n_\lambda = 40$ para hacer su media.

Se ha incluido la función usada en el apartado de Código del trabajo. Esta viene incluida en una clase con los atributos N (número de neuronas) y *nly* (número de exponentes de Lyapunov a calcular), entre otros.

El procedimiento de cálculo de los exponentes de Lyapunov es diferente para el primero que para el resto.

Primer exponente de Lyapunov

Una vez pasado el tiempo de transición, las perturbaciones han evolucionado $\mathbf{v'}_i$. A partir de ellas es posible obtener el primer exponente de Lyapunov tomando logaritmos:

$$\lambda_{1(j)} = \frac{1}{\tau} \ln ||\mathbf{v'}_{1(j)}|| \tag{3.7}$$

Donde $||\mathbf{v'}_{1(j)}||$ es la norma del vector $\mathbf{v'}_1$, primera de las perturbaciones una vez ha pasado j veces el tiempo de transición τ. Una vez obtenido el exponente, se normaliza el vector a la unidad $\mathbf{v''}_{1(j)} = \mathbf{v'}_{1(j)}/||\mathbf{v'}_{1(j)}||$.

Así, $\mathbf{v''}_{1(j)}$ funcionará como $\mathbf{v}_{1(j+1)}$ en el próximo cálculo del exponente de tiempo finito.

Resto de exponentes de Lyapunov

Para obtener el resto de exponentes, se ha usado la misma ecuación paso previo por una ortogonalización con respecto a los vectores ya obtenidos:

$$\mathbf{v}^{\perp}{}_{n} = \mathbf{v}'_{n} - (\mathbf{v}'_{n} \cdot \mathbf{v}'_{n-1})\mathbf{v}'_{n-1} - ... - (\mathbf{v}'_{n} \cdot \mathbf{v}''_{1})\mathbf{v}''_{1} \tag{3.8}$$

De forma que, para $n \neq 1$, $\lambda_{n(j)} = \frac{1}{\tau} \ln ||\mathbf{v}^{\perp}{}_{n(j)}||$. Finalmente, se ha normalizado $\mathbf{v}^{\perp}{}_{n(j)}$ a norma unidad $\mathbf{v}''_{n(j)} = \mathbf{v}_{n(j+1)} = \mathbf{v}^{\perp}{}_{n(j)}/||\mathbf{v}^{\perp}{}_{n(j)}||$ antes de obtener el siguiente exponente de Lyapunov $\lambda_{n(j+1)}$ (de nuevo para evitar overflows por el crecimiento exponencial).

En la Figura 3.1 se ha incluido una representación de lo descrito para un caso en dos dimensiones.

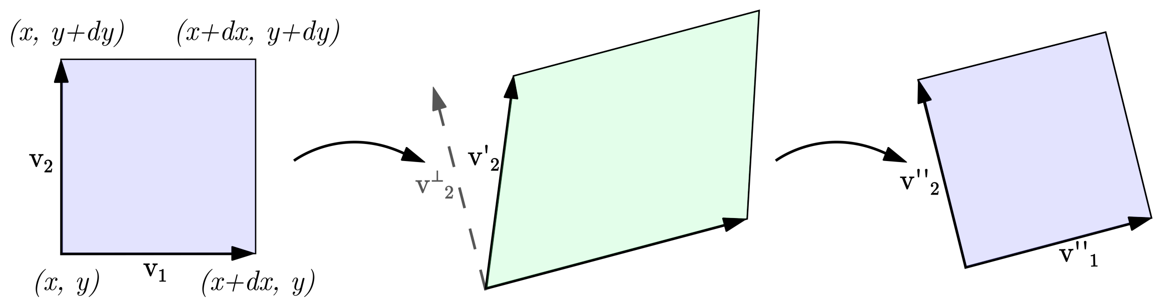

Figura 3.1: Representación gráfica del funcionamiento del método de Bennetin en dos dimensiones para calcular los exponentes de Lyapunov.

3.4. Clasificación de eventos en las simulaciones

Siguiendo la Tabla 1.1 y considerando que el cero de los exponentes de Lyapunov de las simulaciones llevaba un error de aproximadamente 0,05, se han clasificado los eventos de la siguiente manera:

- **Punto fijo:** Primer exponente de Lyapunov menor que cero. Considerando la precisión, menor que $-0{,}05$.
- **Ciclo límite:** Primer exponente de Lyapunov igual a cero. Para evitar errores, se ha traducido esto a que el primer exponente λ_1 se encontrasen en el intervalo cerrado $[-0{,}05, 0{,}05]$ para dos g seguidas.
- **Caos:** Primer exponente de Lyapunov positivo y segundo igual a cero. De la misma manera que las anteriores veces, que el primero fuera superior a 0,05 y el segundo dentro del intervalo cerrado $[-0{,}05, 0{,}05]$.

Aunque existen más sucesos que los descritos, estos se corresponden a la mayoría de los casos. Cabe decir que uno no es excluyente del otro. En un mismo sistema se puede dar que haya un ciclo límite en una g y en una diferente se vaya a un punto fijo.

También se han distinguido entre puntos fijos en el origen y fuera del mismo. Para ello se ha tenido en cuenta que el punto fijo en el origen tiene las coordenadas en el intervalo cerrado $[-0{,}005, 0{,}005]$.

4. Resultados

En esta parte del trabajo se detallarán algunos de los casos obtenidos resultado de las simulaciones realizadas del modelo en la ecuación (2.2). Se introducirán en orden ascendente de número de neuronas comenzando por el mínimo que puede presentar caos, tres. Se incluirá en cada sección las estadísticas finales de número de ciclos límite, puntos fijos distintos de cero, caos y demás atractores.

4.1. Tamaño $N = 3$

A continuación se verán tres ejemplos de comportamientos que se pueden dar en un sistema de tres neuronas. Finalmente, se darán estadísticas completas para una simulación de 1000 realizaciones.

Ejemplo de punto fijo y bifurcación ***pitchfork***

El ejemplo propuesto se corresponde con la siguiente matriz J:

$$J \approx \begin{pmatrix} 0 & 0{,}3082 & -0{,}3323 \\ 0{,}6939 & 0 & 0{,}5071 \\ 0{,}3815 & -0{,}0637 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

En las Figuras 4.1 y 4.2 se han incluido retratos de fase del sistema para $g = 0$ y $g = 10$, respectivamente. Partiendo de una condición inicial aleatoria, en ambos casos, el sistema evoluciona hasta un punto fijo, representado por un punto negro, y se mantiene ahí.

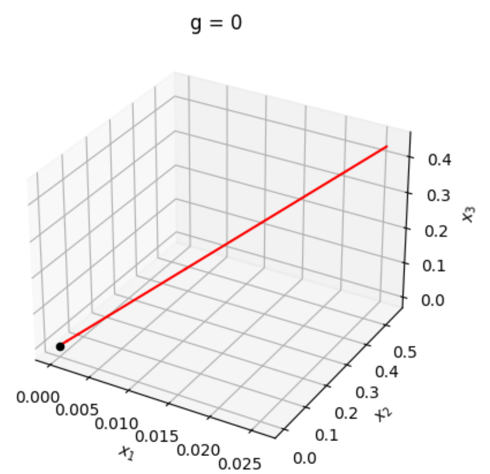

Figura 4.1: Retrato de fase del ejemplo de punto fijo para $g = 0$.

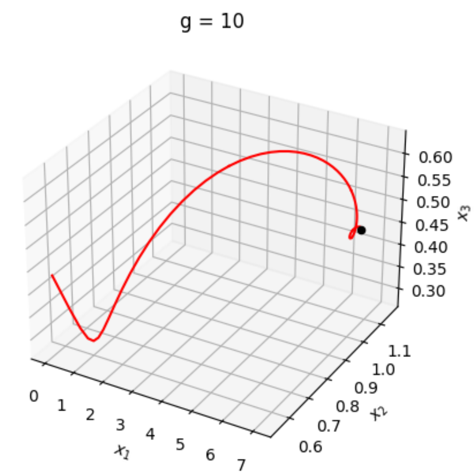

Figura 4.2: Retrato de fase del ejemplo de punto fijo para $g = 10$.

Ambas representaciones se corresponden con 80 unidades de tiempo, las 40 primeras (lo que llamaríamos tiempo de transición) pintadas de rojo. En el caso de $g = 0$, el sistema se mueve inmediatamente al origen nada más comenzar la simulación y se mantiene ahí. Para $g = 10$ hay un movimiento previo a la llegada al punto fijo, al que llega tras 20 unidades de tiempo.

Estos retratos no solo nos permiten observar el comportamiento de un punto fijo descrito en la Introducción. También es posible comprender algunas decisiones tomadas en los Métodos. Al comenzar con $g = 0$, se ha comprobado como el sistema cae rápidamente al origen por ser un punto fijo estable, por lo que se añade esa pequeña cantidad al cambiar de g, para evitar que se mantenga ahí si el origen se vuelve inestable. También se justifica, al menos en este caso, la elección del tiempo de transición antes de obtener valores de los exponentes de Lyapunov, mucho mayor que el necesario en esta ocasión para caer al atractor.

Igualmente, en la Figura 4.3 se ha representado la suma de las variables del campo x frente a g. Se puede ver en la imagen como la suma sigue una línea y no una nube de puntos, mostrando como cambia al aumentar la g. Cuando la suma de las variables x se comienza a alejar del cero, ocurre una bifurcación tipo *pitchfork*. Se crean dos puntos fijos simétricos y el sistema se mueve a uno de ellos. En el diagrama se ha omitido el punto fijo con signo opuesto.

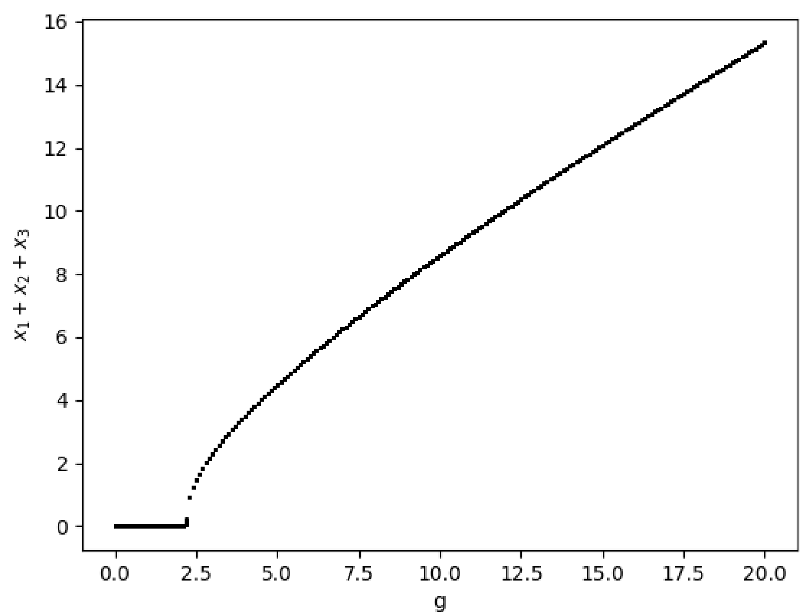

Figura 4.3: Representación gráfica de la suma de las variables x_i frente al parámetro g para el caso de un punto fijo en un sistema de tres neuronas con la matriz de acoplo (4.1).

Por último, se ha incluido en la Figura 4.4 la dependencia de los exponentes de Lyapunov frente a g. Se puede ver como comienzan todos en -1 y el primero se separa al aumentar g acercándose al cero. En el punto donde se anula ocurre la bifurcación tipo *pitchfork*. Al seguir aumentando g el sistema se mantiene en un punto fijo (aunque cambian sus coordenadas con cada g) y los exponentes se mantienen todos en -1. Esto concuerda con lo observado en las Figuras 4.1 y 4.2. También se puede ver el punto donde ocurre la bifurcación *pitchfork*, aproximadamente $g = 2$, lo que coincide con lo visto en la Figura 4.3. Destaca que la suma de los tres se conserva en -3, como se había predicho en la ecuación (1.7) al introducir el modelo SCS.

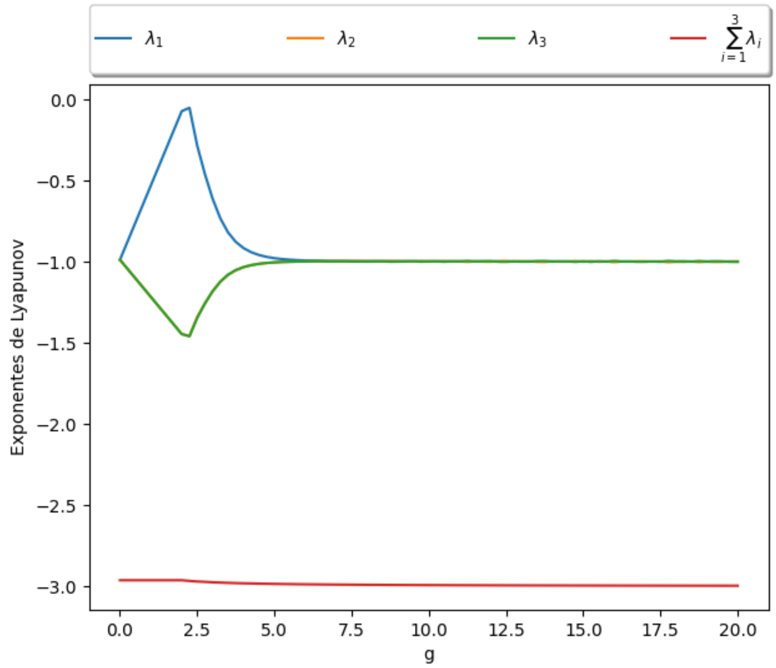

Figura 4.4: Exponentes de Lyapunov (y su suma) frente a g en un sistema de tres neuronas con matriz de acoplo (4.1).

Ejemplo de ciclo límite y bifurcación de Hopf supercrítica

El ejemplo propuesto se corresponde con la siguiente matriz J:

$$J \approx \begin{pmatrix} 0 & -0{,}1101 & -0{,}1738 \\ -0{,}0465 & 0 & 0{,}6381 \\ 0{,}4562 & 0{,}2180 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

En la Figura 4.5 se ha representado el retrato de fase del ciclo límite de ejemplo con una condición inicial aleatoria y $g = 10$. De nuevo, en rojo se encuentra la evolución del sistema en transición y en negro el atractor al que llega. Se puede observar la semejanza con el esquema de la Figura 1.3 de la Introducción.

En la Figura 4.6 se ha recogido un barrido de la suma de las variables x_1, x_2 y x_3. En ella se puede ver como, en $g = 6$, el sistema pasa por una bifurcación de Hopf supercrítica y se generan un ciclo límite. De esta manera, la suma oscila entre un máximo y un mínimo para cada g. Es posible observar también como va aumentando el tamaño del ciclo al aumentar g.

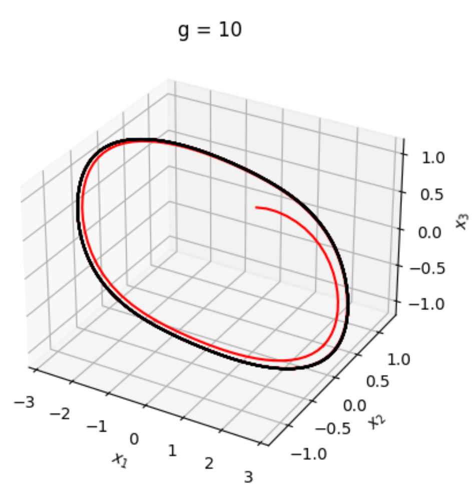

Figura 4.5: Retrato de fase del ejemplo de ciclo límite para $g = 10$.

El comportamiento de los exponentes de Lyapunov en función de g se puede ver en la Figura 4.7. Como se adelantó en la Tabla 1.1, el primer exponente de Lyapunov en el caso de un ciclo límite se anula y el resto son negativos. Partiendo de g pequeño, lo que se ve en la representación es que dos exponentes (correspondientes a los autovalores $\lambda = p \pm i\omega$ de la matriz jacobiana evaluada en cero) aumentan hasta anularse alrededor de $g = 6$, quedándose uno de ellos en el cero (con oscilaciones pequeñas debido a la precisión de las simulaciones). Así pues, existe total concordancia entre las Figuras 4.6 y 4.7.

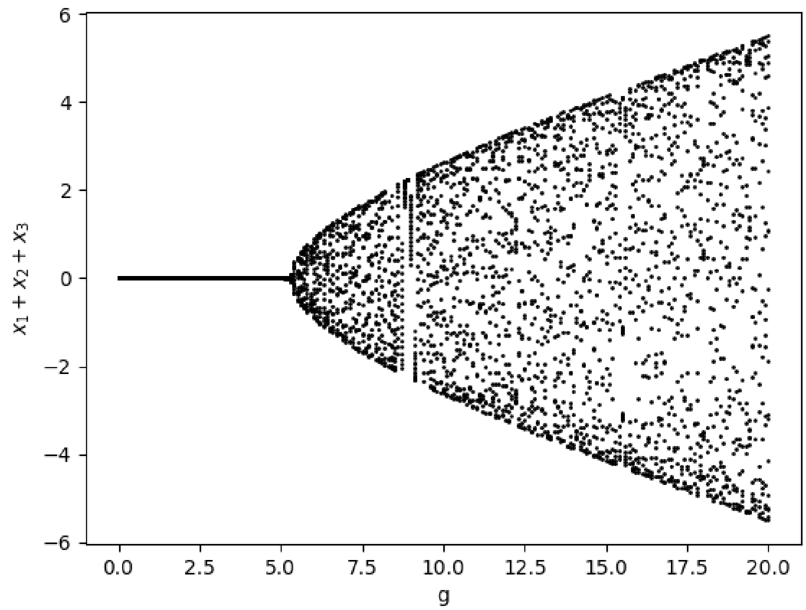

Figura 4.6: Representación gráfica de la suma de las variables x_i frente al parámetro g para el caso de un ciclo límite en un sistema de tres neuronas con la matriz de acoplo (4.2).

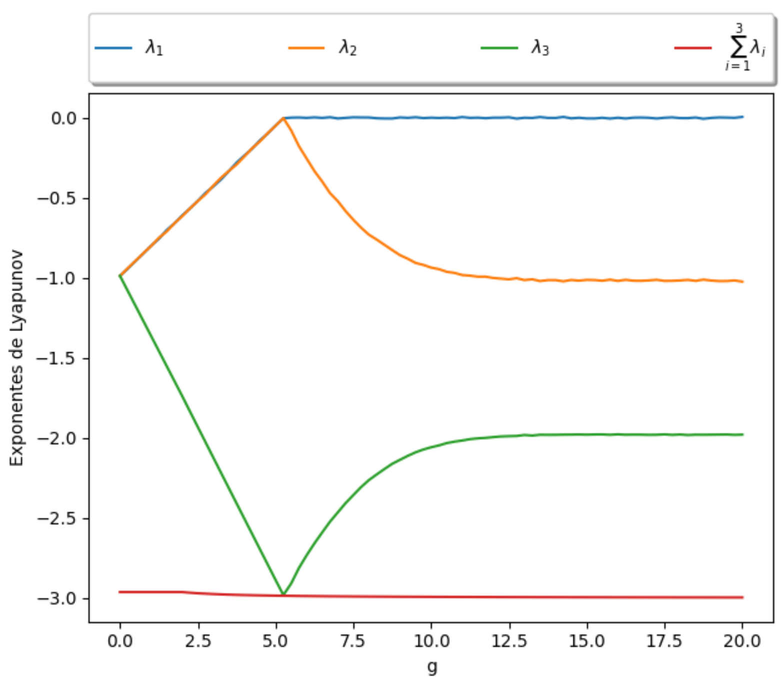

Figura 4.7: Exponentes de Lyapunov (y su suma) frente a g en un sistema de tres neuronas con matriz de acoplo (4.2).

Ejemplo de bifurcación de Hopf subcrítica

En el caso de 3 neuronas también pueden darse situaciones mucho más complejas que las descritas. El ejemplo propuesto para estudiar se corresponde con la siguiente matriz J:

$$J \approx \begin{pmatrix} 0 & -0{,}9923 & -1{,}0845 \\ -0{,}0900 & 0 & 0{,}0151 \\ 0{,}7358 & 0{,}8856 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

Se ha incluido en la Figura 4.4 la dependencia de los exponentes de Lyapunov frente a g. El sistema muestra una bifurcación *pitchfork* en $g = 2$ y una Hopf cerca de $g = 7{,}5$.

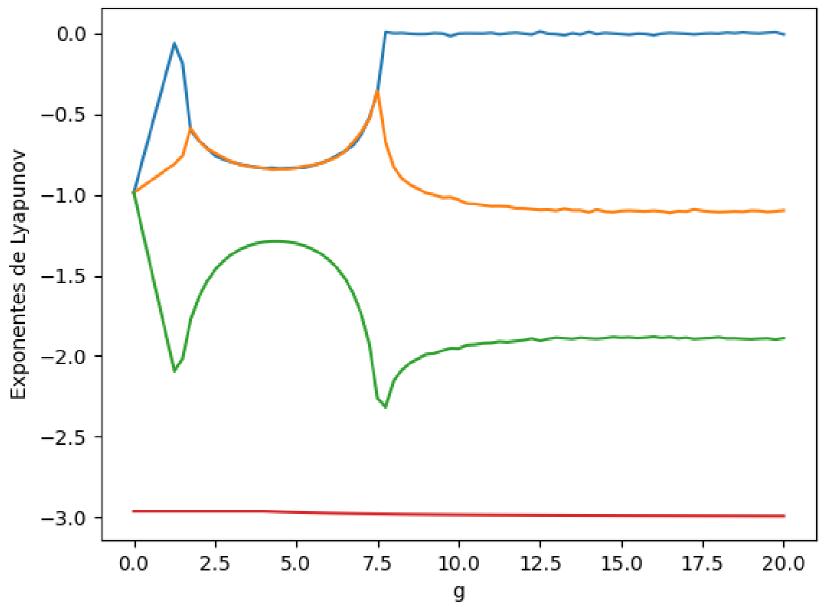

Figura 4.8: Exponentes de Lyapunov (y su suma) frente a g en un sistema de tres neuronas con matriz de acoplo (4.3).

En la Figura 4.9 se ha incluido un barrido de la suma de las variables x_i frente a g. En la misma se puede ver la transformación del punto fijo a ciclo estable. Existe una discontinuidad en la misma. El tamaño del ciclo no coincide con lo visto en el ejemplo del ciclo límite por bifurcación de Hopf supercrítica en la Figura 4.6.

Los exponentes de Lyapunov en este caso muestran un comportamiento distinto al calcularlos aumentando o disminuyendo g. En la Figura 4.8 se ha recogido el caso donde se va aumentando g. Como la diferencia no es apreciable a la escala de g con la que se ha trabajado, se han recogido también en las Figuras 4.11 y 4.10 los casos disminuyendo y aumentando g, respectivamente, en escala aumentada.

No se han incluido leyendas en estas representaciones por simplicidad, coinciden con las ya recogidas en las Figuras 4.4 y 4.7.

En la Figura 4.11 el primer exponente se anula un poco antes que en la Figura 4.10. De esta manera, es posible ver que la transición de mayores a menores g ocurre más tarde que en el sentido contrario. Esto es signo de que la bifurcación de Hopf que se muestra es subcrítica puesto que muestra histéresis.

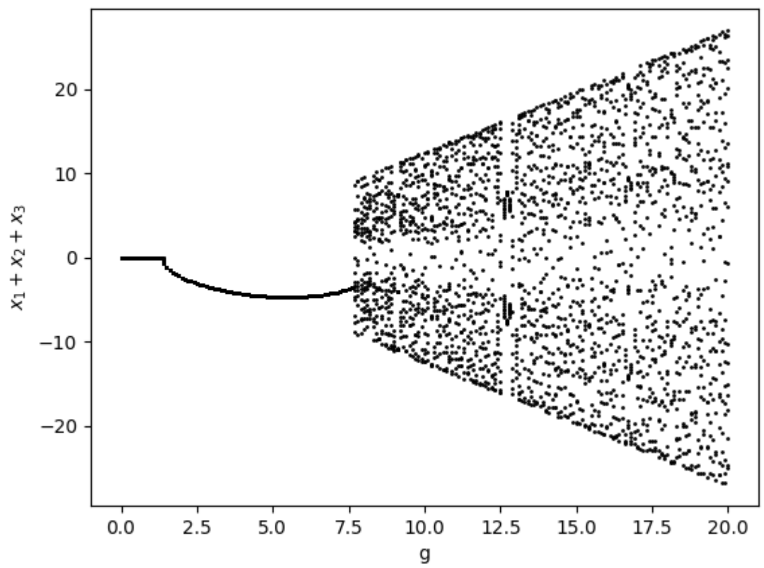

Figura 4.9: Representación gráfica de la suma de las variables x_i frente al parámetro g para el caso de una bifurcación de Hopf subcrítica en un sistema de tres neuronas con la matriz de acoplo 4.3.

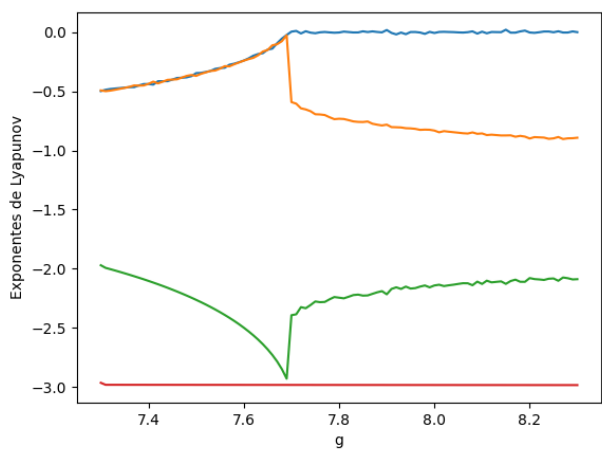

Figura 4.10: Exponentes de Lyapunov (y su suma) frente a g (aumentando) para el caso de una bifurcación de Hopf en un sistema de tres neuronas. Escala aumentada.

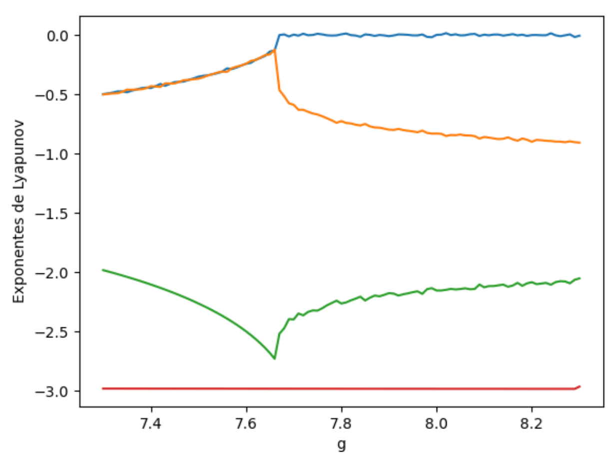

Figura 4.11: Exponentes de Lyapunov (y su suma) frente a g (disminuyendo) para el caso de una bifurcación de Hopf en un sistema de tres neuronas. Escala aumentada.

También destaca en la Figura 4.9 que el ciclo final es simétrico respecto al cero. La simetría en el ciclo es posible explicarla mediante la presencia de una biestabilidad. Es decir, que exista un valor de g donde convivan los puntos fijos simétricos con un ciclo límite estable. Para discernirlo, es necesario observar la forma de las trayectorias para distintos valores de g.

En la Figura 4.12 se ha incluido un retrato de fase del ciclo límite y los puntos fijos para $g = 7,665$. Se han encontrado para distintas condiciones iniciales en un mismo valor de g. Destaca en la figura la simetría de los puntos y del propio ciclo límite respecto al origen. Asimismo, en la Figura 4.13 se ha dibujado el mismo retrato de fase pero a escala aumentada mostrando que los puntos no se superponen a la trayectoria del ciclo.

Cualitativamente, los puntos fijos se alejan del origen conforme aumenta g hacia el propio ciclo límite. Cuando se aumente g un poco más, los puntos se inestabilizarán, dejando al ciclo límite solo.

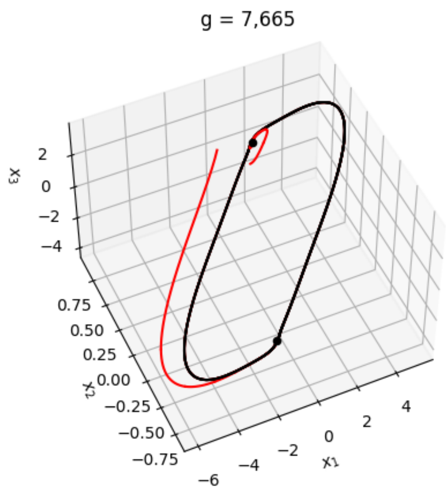

Figura 4.12: Retrato de fase de la triestabilidad del ciclo límite y los dos puntos fijos para $g = 7,665$.

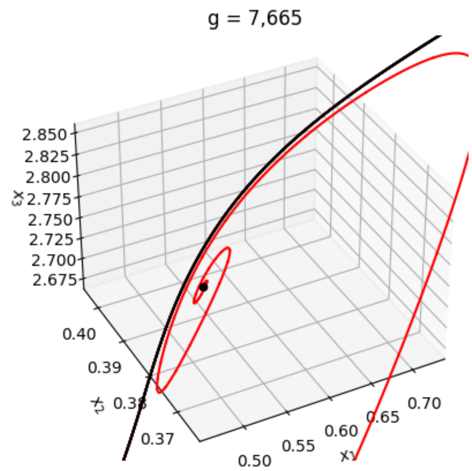

Figura 4.13: Retrato de fase de la triestabilidad del ciclo límite y los dos puntos fijos para $g = 7,665$ en escala aumentada.

Estadística total

Se han simulado 1000 casos. Se han recogido en la Tabla 4.1 el número de eventos de cada suceso: puntos fijos (distintos o igual al origen), ciclos límites y caos.

Es importante destacar que no se encontró ningún evento que mostrase caos. Ni en los 1000 eventos que se han considerado en la estadística final, ni en todas las pruebas previas mientras se desarrollaba el código, que se hicieron en un sistema de 3 neuronas por ser el menos complejo con el que se ha trabajado.

Atractor	**Número de “eventos”**
Solamente punto fijo $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$	92
Punto fijo distinto del origen	667
Ciclo límite	379
Caos	0

Tabla 4.1: Número de eventos de cada atractor en un sistema de 3 neuronas para un total de 1000 realizaciones.

El número de eventos de puntos fijos, ciclos límite y caos por separado no suma un total de 1000. Esto se debe a que un mismo sistema puede mostrar más de un tipo de atractor para distintos valores de g. Un ejemplo de ello es la bifurcación de Hopf del ejemplo 4.3. El sistema muestra dos puntos fijos y, a partir de cierto valor de g, un ciclo límite.

En el caso del sistema (2.2) no es posible encontrar cuasiperiodidad para $N = 3$. Esto se debe al signo de la traza de la jacobiana [1]. El volumen del sistema disminuye exponencialmente respecto al tiempo si la traza es negativa de la forma $V = V(0)\mathrm{e}^{\mathrm{traza}(\mathcal{J})t}$. Recordando la ecuación (1.7), la traza en nuestro sistema siempre es negativa. De esta manera, si se parte del toro en tres dimensiones como volumen inicial, no es posible que disminuya al ser cerrado. En el caso de más dimensiones, el toro no encierra un volumen N-dimensional ($N > 3$) por lo que podrña existir cuasiperiodicidad.

4.2. Tamaño $N = 4$

A diferencia de los sistemas de tres neuronas, con $N = 4$ se observaron realizaciones con caos en las simulaciones. Los dos obtenidos se correspondían con una ruta al caos por duplicación de periodo.

Caos por duplicación de periodo

El ejemplo propuesto para estudiar a continuación se corresponde con la siguiente matriz J:

$$J \approx \begin{pmatrix} 0 & -0{,}0583 & 0{,}0247 & 0{,}3245 \\ -0{,}3089 & 0 & -0{,}4295 & -0{,}3745 \\ -1{,}2508 & -0{,}5712 & 0 & 0{,}2010 \\ 0{,}4251 & 0{,}2888 & 0{,}5302 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

Se han recogido en la Figura 4.14 la dependencia de los exponentes de Lyapunov en función del parámetro g para este caso. Tras una rotura de simetría por bifurcación *pitchfork* en $g = 2$ y una bifurcación de Hopf supercrítica en $g = 4$, el primer exponente se hace positivo hasta en dos ocasiones.

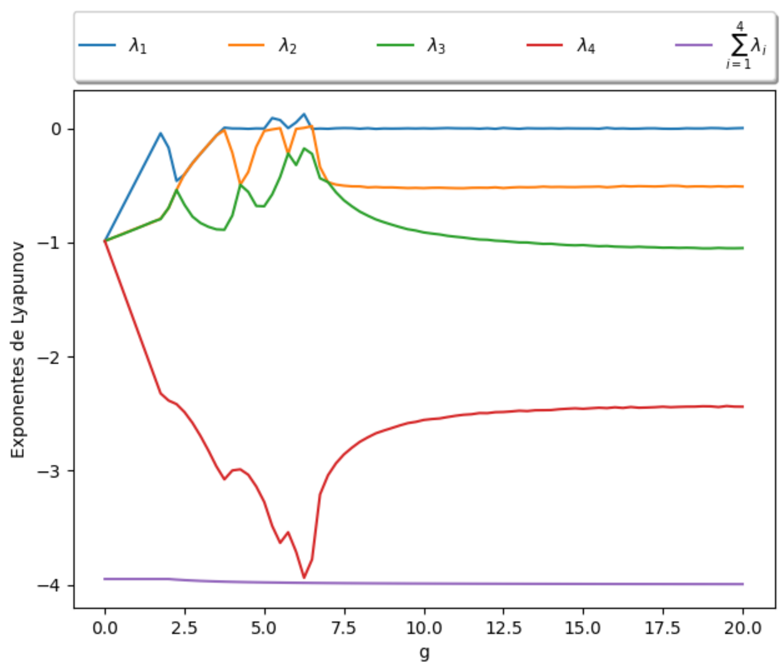

Figura 4.14: Exponentes de Lyapunov (y su suma) frente a g en un sistema de cuatro neuronas con matriz de acoplo (4.4).

[1] De una forma similar a las ecuaciones de Lorenz [19].

Los diagramas de bifurcación son una gran herramienta para diferenciar las ruta al caos. A este ejemplo corresponde el incluido en la Figura 1.15 de la descripción de la ruta al caos por duplicación de periodo de la Introducción. Se han recogido algunos de los retratos de fase comentados en ella en la Figura 4.15. En $g = 4{,}5$ se tiene un ciclo límite que duplica su periodo para $g = 5{,}05$. El sistema muestra caos para $g = 5{,}5$. Pero, en $g = 5,7$ vuelve a ser un ciclo límite. También se ha incluido la ventana de periodo tres en $g = 6,1$ y el ciclo límite final en $g = 7$.

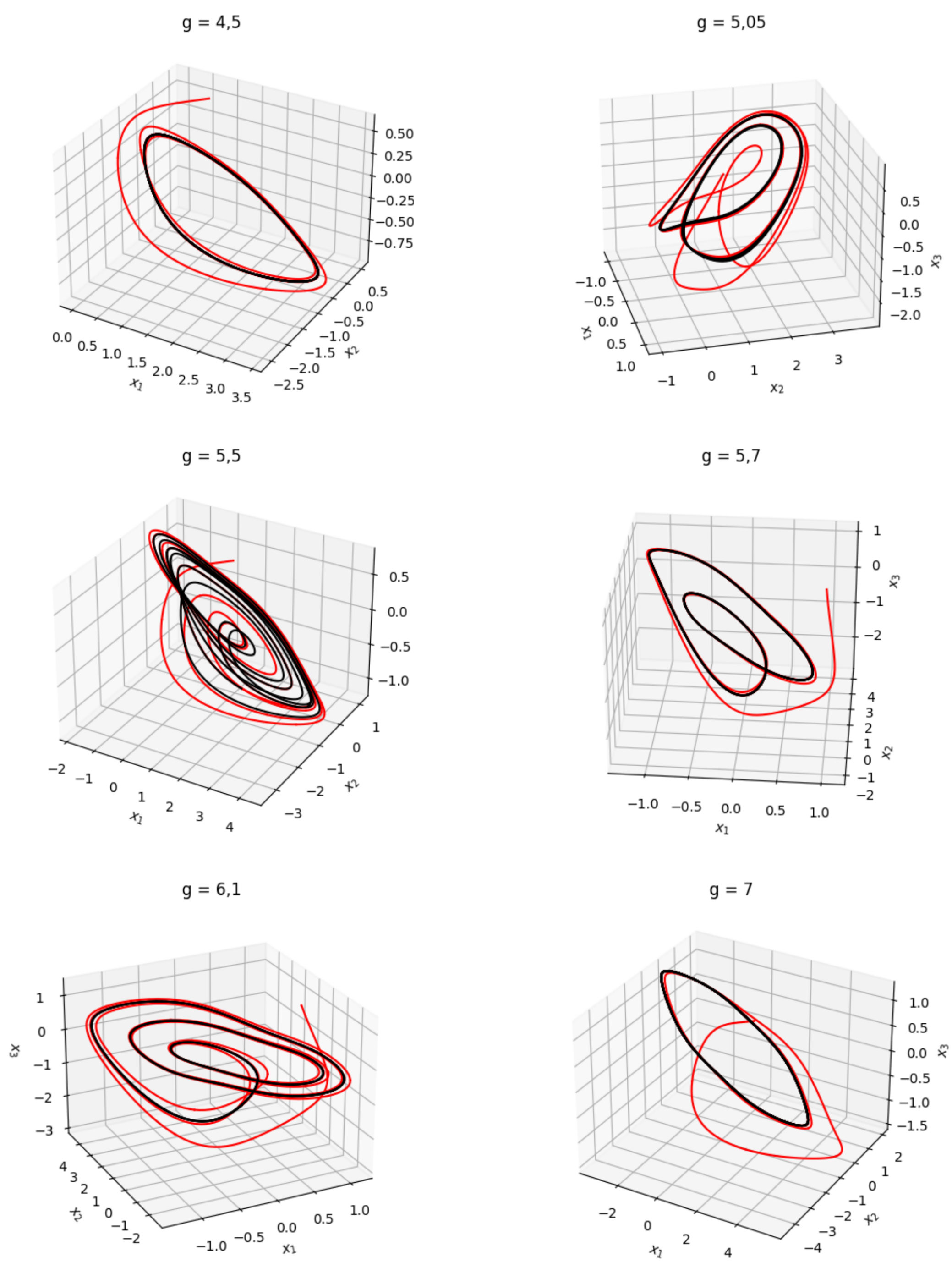

Figura 4.15: Retratos de fase del sistema de cuatro neuronas con matriz de acoplo (4.4).

Se denomina crisis cuando ocurren cambios significativos en un atractor extraño al variar un parámetro por encima de su valor crítico [20]. Existen dos tipos, interior y exterior. En la crisis exterior el atractor se destruye llegando a una zona de caos transitorio previa a la caída a otro atractor (punto fijo, ciclo límite, otro atractor extraño, etc.). En la crisis interior el tamaño del atractor cambia de forma discontinua.

En el diagrama de bifurcación de la Figura 1.15 se muestran dos atractores diferentes para distintas condiciones iniciales. Sin embargo, para $g > 6{,}2$ colisionan y se vuelven un único atractor de mayor tamaño. Este caso se puede identificar con una crisis interior puesto que no existe un estado transitorio.

En las Figuras 4.16 y 4.17 se han dibujado los atractores antes de fusionarse en $g = 5,49$ y después en $g = 6,4$. Se ha mantenido el color azul para la condición inicial dibujada en azul en el diagrama de bifurcación de la Figura 1.15 y viceversa.

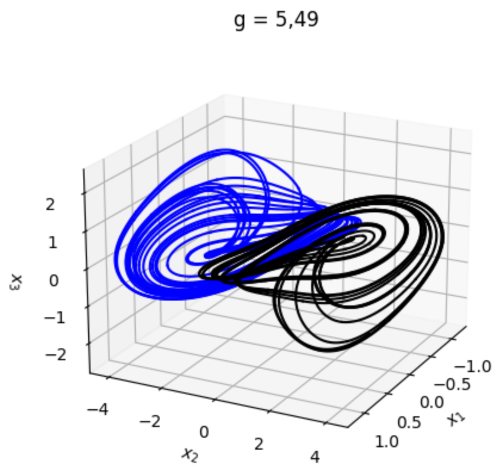

Figura 4.16: Retrato de fase de los dos atractores extraños del sistema con matriz de acoplo (4.4) antes de la fusión.

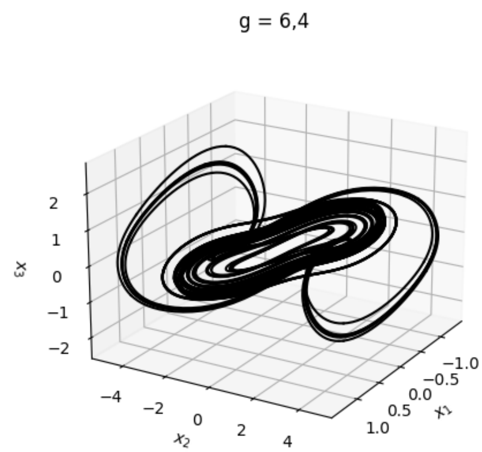

Figura 4.17: Retrato de fase de los dos atractores extraños del sistema con matriz de acoplo (4.4) después de la fusión.

Estadística total

Se han simulado 2000 casos. Se han recogido en la Tabla 4.2 el número de eventos de cada suceso: puntos fijos (distintos o igual al origen), ciclos límites y caos.

Atractor	**Número de "eventos"**
Punto fijo distinto del origen	1425
Ciclo límite	922
Caos	2

Tabla 4.2: Número de eventos de cada atractor en un sistema de 4 neuronas para un total de 2000 realizaciones.

Se han mostrado algunos casos de caos aunque de manera extremadamente infrecuente. Por esto, se han simulado más casos que para $N = 3$ para obtener una estadística algo significativa.

Los dos sistemas con caos encontrados seguían una ruta por duplicación de periodo. No obstante, es posible que existieran más casos para g mayores. Se ha optado por estudiar solo hasta $g = 20$ por razones de computación. Para g mayores, aparte de tardar cada vez más en simular, el sistema está demasiado forzado y puede dejar de cumplirse numéricamente la condición de la traza (1.7).

En la tabla no se han incluido los sistemas que permanecen en el punto fijo del origen. Para $N = 3$ se obtuvieron considerando los sistemas donde no ocurrieran el resto de atractores de la Tabla 4.1. Pero, para $N = 4$ los atractores posibles aumentan, pudiendo presentar también cuasiperiodicidad. Sin embargo, no se ha encontrado un ejemplo que describir para $N = 4$.

4.3. Tamaño $N = 5$

A continuación se estudiará un ejemplo de atractor cuasiperiódico.

Atractor cuasiperiódico

El ejemplo propuesto para estudiar a continuación se corresponde con la siguiente matriz J:

$$J \approx \begin{pmatrix} 0 & -0{,}2122 & 0{,}1526 & 0{,}6214 & 0{,}5285 \\ -0{,}5258 & 0 & 0{,}5691 & -0{,}2846 & -0{,}3177 \\ -0{,}0472 & -0{,}6720 & 0 & -1{,}1106 & 0{,}5004 \\ -0{,}4086 & 0{,}0141 & 0{,}3051 & 0 & -0{,}5560 \\ 0{,}4545 & -0{,}1835 & 0{,}3994 & 1{,}0721 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

Se han recogido en la Figura 4.18 la dependencia de los exponentes de Lyapunov en función del parámetro g para este caso.

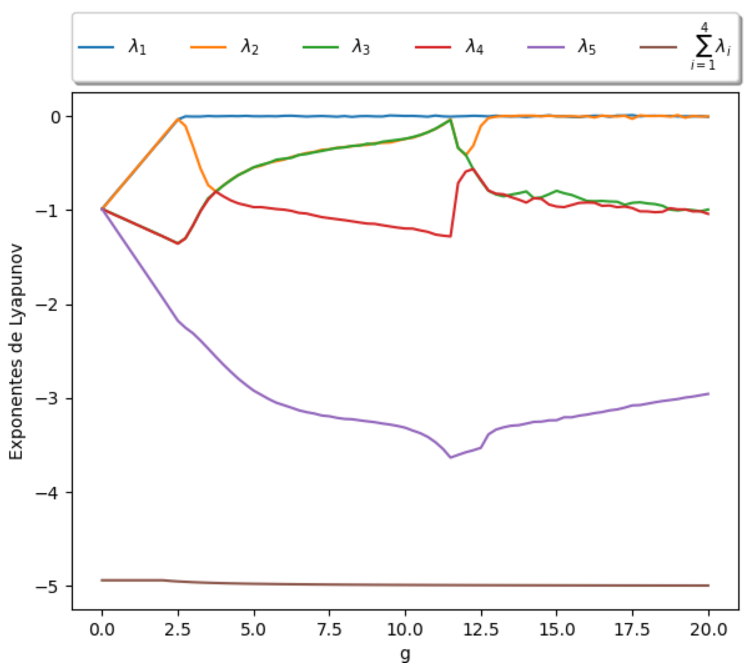

Figura 4.18: Exponentes de Lyapunov (y su suma) frente a g en un sistema de cinco neuronas con matriz de acoplo (4.5).

El sistema sufre una bifurcación de Hopf en $g = 2{,}5$ cuando se anula el primer exponente de Lyapunov y presenta un ciclo límite. En $g = 12$ parece que el segundo y tercer exponente se acercan al cero pero no llegan a anularse. Y, en $g = 13$, se anula el segundo exponente de Lyapunov, apareciendo un atractor cuasiperiódico de dos frecuencias como se había visto en la Tabla 1.1.

En la Figura 4.19 se han recogido retratos de fase desde distintas perspectivas del atractor cuasiperiódico formado para $g = 13$. Se debe tener en cuenta que el sistema es de $N = 5$ y se está representando en 3 dimensiones. Por tanto, las intersecciones son debidas al efecto de proyectar en 3 dimensiones.

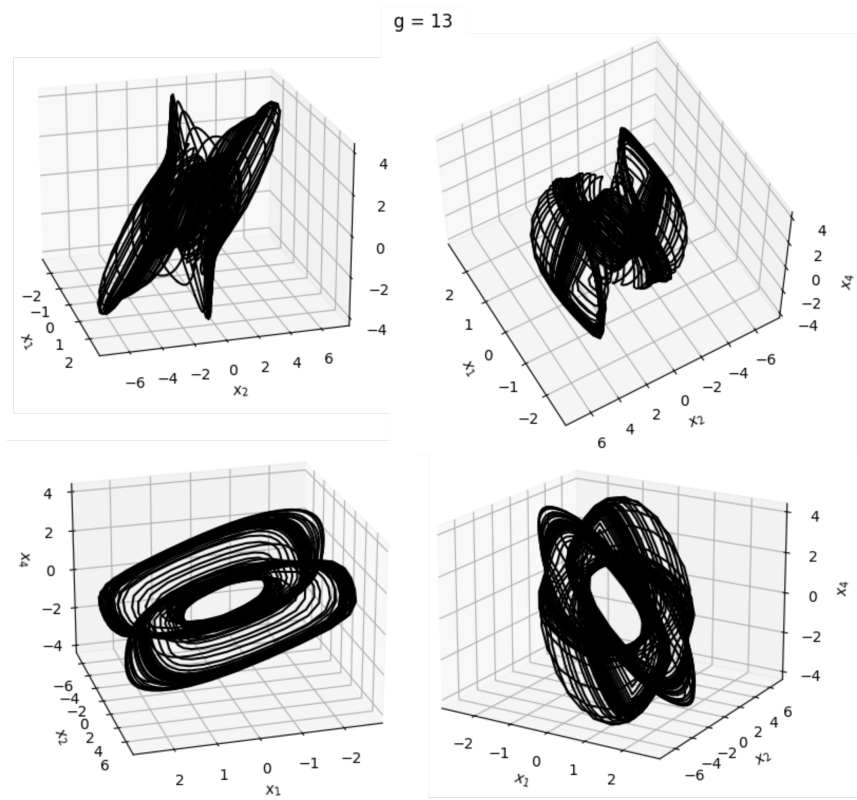

Figura 4.19: Retratos de fase del sistema de cinco neuronas con matriz de acoplo (4.5) para $g = 13$.

Finalmente, se ha obtenido la sección de Poincaré del atractor en el plano $x_2 = 0$. Se ha incluido en la Figura 4.20. Como se puede apreciar, aunque los retratos de fase pueden parecer caóticos, la sección sigue una forma regular. Si el atractor fuera caótico, los puntos difuminarían los bordes de la trayectoria.

Como la cuasiperiodicidad continúa más allá de $g = 20$, se simularon los exponentes para valores de g mayores para comprobar que no ocurría la ruta al caos por cuasiperiodicidad. No hubo muestra de caos.

Lo que se observó es que el sistema salía de la cuasiperiodicidad alrededor de $g = 27$ y volvía a entrar poco después. Estas ventanas se observaron un par de veces más para $g = 30$ y $g = 36$. En las Figuras 4.21 y 4.22 se han incluido las secciones de Poincaré en el mismo plano $x_2 = 0$ para $g = 25$ y $g = 27{,}5$, respectivamente. En la Figura 4.22 se ve como la trayectoria pierde la cuasiperiodicidad.

Corta el plano en algunos puntos concretos y no forma una estructura toroidal.

Es necesario recordar que la forma de la sección es muy distinta de la Figura 4.20 por la diferencia en los valores de g.

Las tres secciones de Poincaré se han obtenido a través de una interpolación lineal entre los valores de $\mathbf{x}$ donde x_2 sufriese un cambio de signo. No se ha añadido la condición a la derivada como en el diagrama de bifurcación de la Figura 1.15.

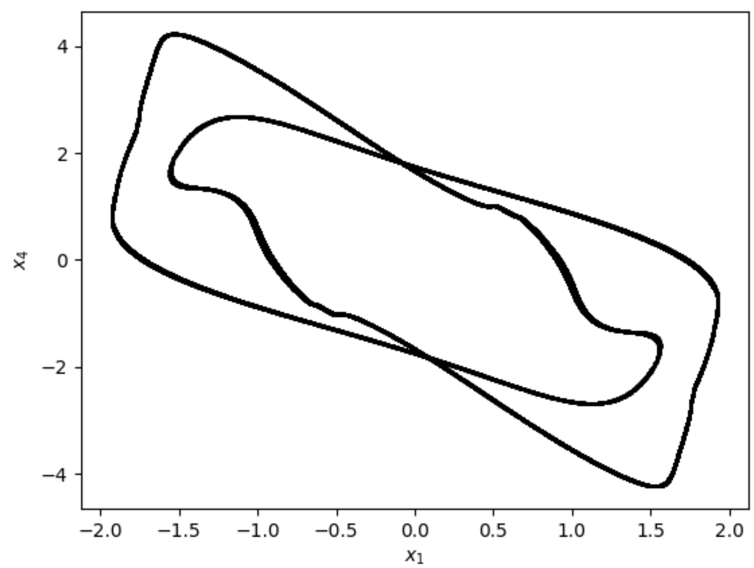

Figura 4.20: Representación de la sección de Poincaré en el plano $x_2 = 0$ obtenida para el sistema con matriz de acoplo (4.5) para $g = 13$.

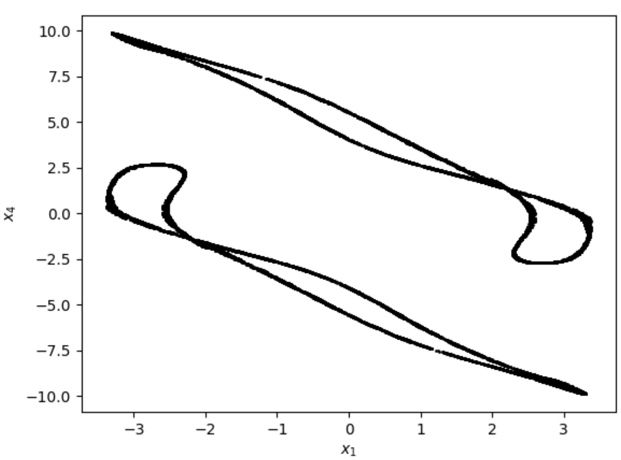

Figura 4.21: Representación de la sección de Poincaré en el plano $x_2 = 0$ obtenida para el sistema con matriz de acoplo (4.5) para $g = 25$.

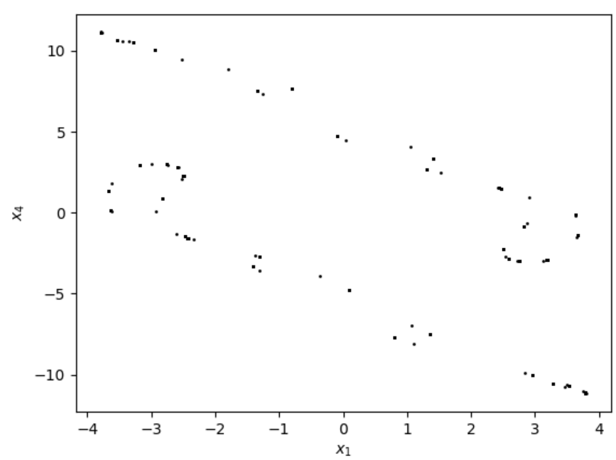

Figura 4.22: Representación de la sección de Poincaré en el plano $x_2 = 0$ obtenida para el sistema con matriz de acoplo (4.5) para $g = 27{,}5$.

En las Figuras 4.23 y 4.24 se han incluido los retratos de fase para ambos casos, $g = 25$ y $g = 27{,}5$. Se puede ver que el primero trata de llenar la superficie mientras el segundo forma un ciclo cerrado sin recorrer toda la superficie. Esto es lo que provoca que la sección de Poincaré sean puntos y no una curva cerrada.

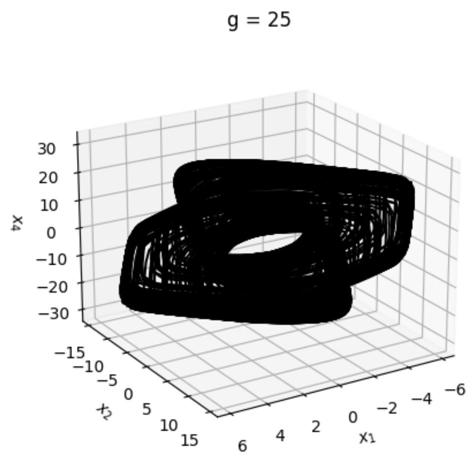

Figura 4.23: Retrato de fase de los dos atractores extraños del sistema con matriz de acoplo (4.5) con $g = 25$.

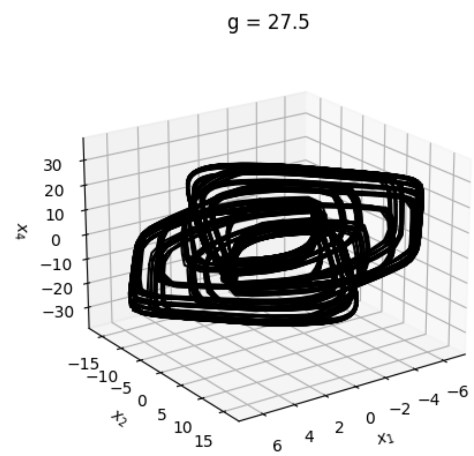

Figura 4.24: Retrato de fase de los dos atractores extraños del sistema con matriz de acoplo (4.5) con $g = 27{,}5$.

Estadística total

Se han simulado 500 casos. Se han recogido en la Tabla 4.3 el número de eventos de cada suceso: puntos fijos distintos al origen, ciclos límites y caos.

Suceso	**Número de eventos**
Punto fijo distinto del origen	348
Ciclo límite	273
Caos	6

Tabla 4.3: Número de eventos de cada atractor en un sistema de 5 neuronas para un total de 500 realizaciones.

El número de realizaciones con caos aumenta en proporción más de 10 veces respecto al caso de $N = 4$. Sin embargo, los ejemplos observados muestran de nuevo la ruta al caos por duplicación de periodo. Es posible que las transiciones por cuasiperiodicidad ocurran a g más altas que las trabajadas. Sin embargo, el caso más prometedor de los estudiados se corresponde con el ejemplo descrito y no parecía que lo mostrase para g más altas.

Aparte, el aumento del número de neuronas ha facilitado encontrar una mayor variedad de dinámicas como el atractor cuasiperiódico descrito.

4.4. Tamaño $N \geq 10$

Como ya se ha adelantado en la explicación del modelo SCS de Modelos de neuronas, el comportamiento del sistema de neuronas es muy diferente en el límite termodinámico. En el mismo, la transición al caos es abrupta desde un punto fijo. En esta parte del trabajo se ha estudiado esta transición al caos en función del tamaño de la red. Para ello se hará un análisis cualitativo de los resultados del número de caos encontrado frente a N y de las distribuciones estadísticas del valor mínimo de g donde presentan caos (g_{caos}) en función de N en forma de histogramas. También se verá un ejemplo de hipercaos y se hará un análisis cuantitativo de los valores del g_{caos} promedio y su mediana mediante una ley de potencias.

Por razones computacionales, no es posible llegar a valores de N suficientemente grandes como para imitar el límite termodinámico o acercarnos a ello. Por falta de tiempo, se ha recurrido a obtener el número de caos y el valor de g en el que lo muestran para 100 realizaciones de poblaciones de neuronas con $N = 10, 20, 40, 80$ y 160. Con los datos de g_{caos} se ha podido obtener el promedio con su error y la mediana de la distribución. Se han recogido los datos en la Tabla 4.4.

N	**Número de caos**	$< g_{caos} >$	g_{caos}^{med}
10	15	$7{,}7 \pm 1{,}1$	–
20	31	$7{,}3 \pm 0{,}7$	–
40	83	$5{,}42 \pm 0{,}25$	5,3
80	97	$3{,}20 \pm 0{,}11$	3,0
160	100	$2{,}35 \pm 0{,}04$	2,24

Tabla 4.4: Tabla de datos de las simulaciones de 100 realizaciones con el número de neuronas, número de realizaciones con caos, g promedio en el que lo han mostrado con su error ($< g_{caos} >$) y mediana de g (g_{caos}^{med}).

Se pueden comprobar cualitativamente los comportamientos esperados. Al aumentar el número de neuronas, el número de casos con caos aumenta significativamente. De la misma manera disminuye el $< g_{caos} >$ necesario para que llegue al caos. Los resultados obtenidos para $N = 10$ son los únicos que tienen un $< g_{caos} >$ más bajo de lo esperado. Esto está causado por el número tan bajo de caos mostrado en las 100 realizaciones. Para poder obtener una estadística significativa se necesitarían más casos. Por esto, no se va a considerar en un análisis cuantitativo posterior. La mediana se ha calculado considerando también las realizaciones sin caos. De esta manera, se han omitido los valores de la mediana para $N = 10$ y $N = 20$ por el número tan bajo de realizaciones con caos.

La forma de las distribuciones de g_{caos} dan también mucha información sobre el comportamiento de la transición. En las Figuras 4.25, 4.26 y 4.27 se han incluido los histogramas del número de realizaciones frente al g_{caos} para $N = 40$, $N = 80$ y $N = 160$, respectivamente. Se han usado los mismos límites de escala para g_{caos} para facilitar la comparación.

Las tres distribuciones presentan un pico claro con un g_{caos} con muchas realizaciones. Al aumentar la N, el pico se va desplazando a valores más pequeños g_{caos}. También se puede ver que aumentan las realizaciones de dicho pico, haciendo la distribución cada vez más estrecha.

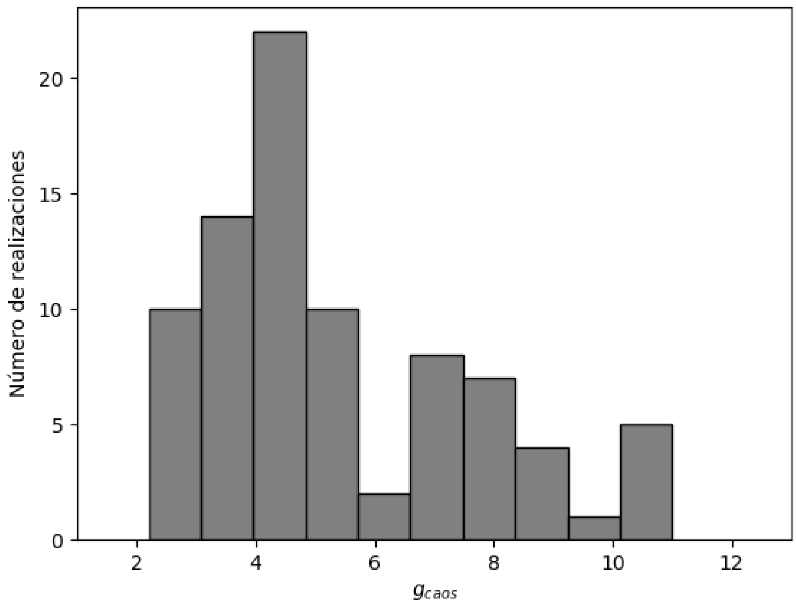

Figura 4.25: Histograma del número de realizaciones frente al g_{caos} que muestran para un total de 100 realizaciones con $N = 40$.

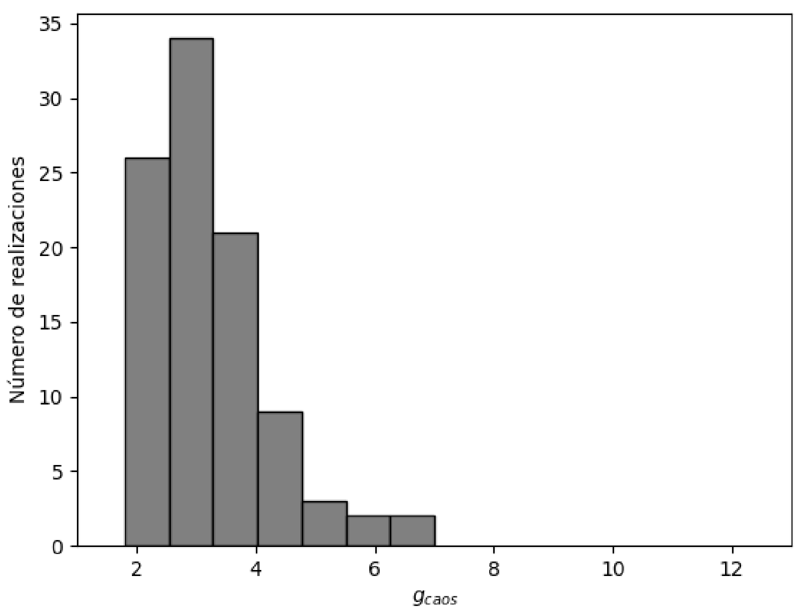

Figura 4.26: Histograma del número de realizaciones frente al g_{caos} que muestran para un total de 100 realizaciones con $N = 80$.

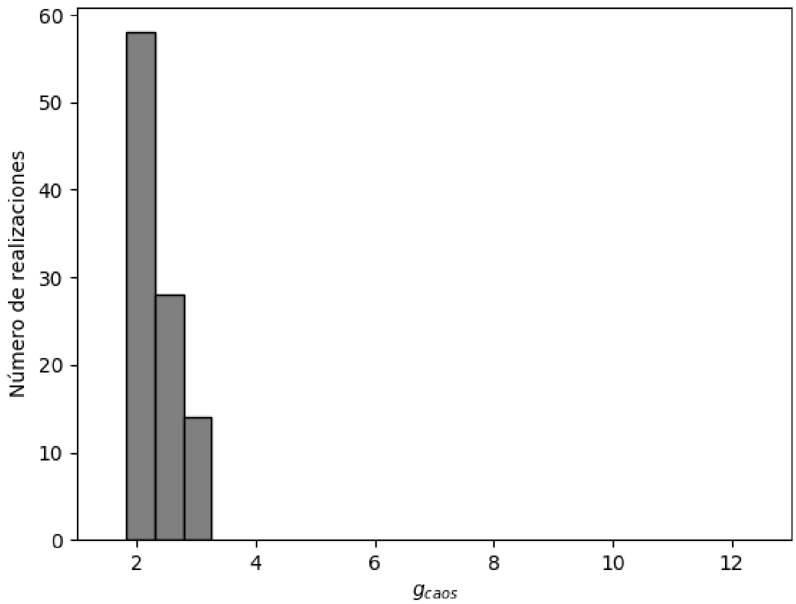

Figura 4.27: Histograma del número de realizaciones frente al g_{caos} que muestran para un total de 100 realizaciones con $N = 160$.

Cabe destacar que todas las realizaciones para $N = 160$ muestran caos. Al menos 15 de ellas también muestran lo que se conoce como hipercaos. Para facilitar la clasificación del caos en baja dimensión se ha incluido la condición de que sea nulo el segundo exponente de Lyapunov. Sin embargo, para alta dimensión, puede haber más de un exponente de Lyapunov positivo, lo que se conoce como hipercaos.

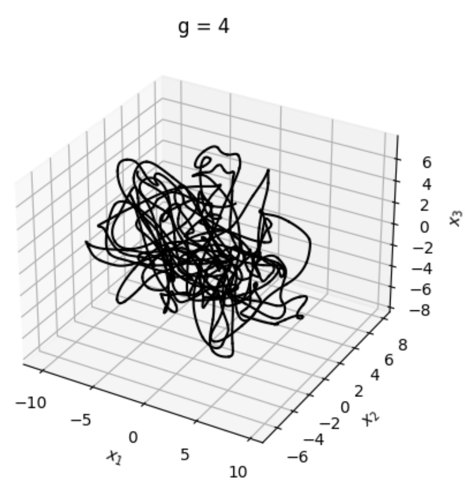

Figura 4.28: Retrato de fase del atractor extraño del sistema con hipercaos con $N = 160$ y $g = 4$.

En la Figura 4.28 se ha incluido un retrato de fase de uno de los ejemplos observados de hipercaos para $N = 160$ y $g = 4$. No se ha incluido la matriz de acoplo J correspondiente al ser una matriz 160×160. Como en casos anteriores, se debe tener en cuenta que el sistema se corresponde con $N = 160$ y se está representando en 3 dimensiones.

Se han recogido en la Figura 4.29 la dependencia de los cuatro primeros exponentes de Lyapunov en función del parámetro g para este caso.

Se puede ver como los exponentes parten todos de -1 y se acercan al cero casi a la vez. Cuando el primero se anula se comienzan a separar y se van haciendo mayores que cero en orden.

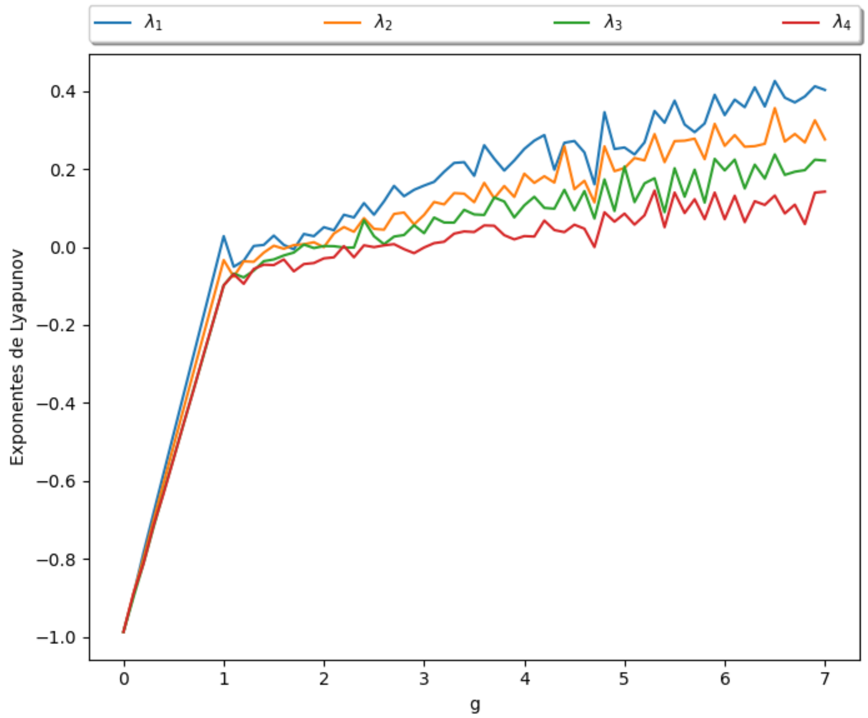

Figura 4.29: Exponentes de Lyapunov (y su suma) frente a g en un sistema de 160 neuronas que muestra hipercaos.

La dependencia del promedio y la mediana de g_{caos} frente al número de neuronas se puede ajustar a una ley de potencias de la forma:

$$g_{caos} = 1 + \frac{k}{N^{\gamma}} \tag{4.6}$$

Para comprobarlo, se hará un ajuste lineal tomando logaritmos de la forma $\log(g_{caos} - 1) = \log k - \gamma \log N$.

En la Figura 4.30 se ha incluido la representación del ajuste por mínimos cuadrados para g_{caos} promedio. Se han obtenido unos valores de $\gamma = (-0{,}80 \pm 0{,}04)$ y $\log k = (1{,}89 \pm 0{,}07)$. Los errores de los puntos se han obtenido por propagación a partir del error estándar de la media. El valor del coeficiente de correlación es de $R = 0{,}99501$, prácticamente la unidad.

En la Figura 4.31 se ha incluido la representación del ajuste por mínimos cuadrados para g_{caos} mediana. Se han obtenido unos valores de $\gamma = (-0{,}90 \pm 0{,}12)$ y $\log k = (2{,}05 \pm 0{,}23)$. El valor del coeficiente de correlación es de $R = 0{,}99133$, de nuevo muy cercano a la unidad. No se han considerado los resultados para $N = 20$ por el número tan bajo de realizaciones con caos.

El interés del estudio de la mediana reside en que esta se ha obtenido teniendo en cuenta también los casos donde no se ha encontrado caos, tratándoles como si lo encontrasen en el infinito. Esto nos permite obtener un valor que tenga en cuenta las 100 realizaciones.

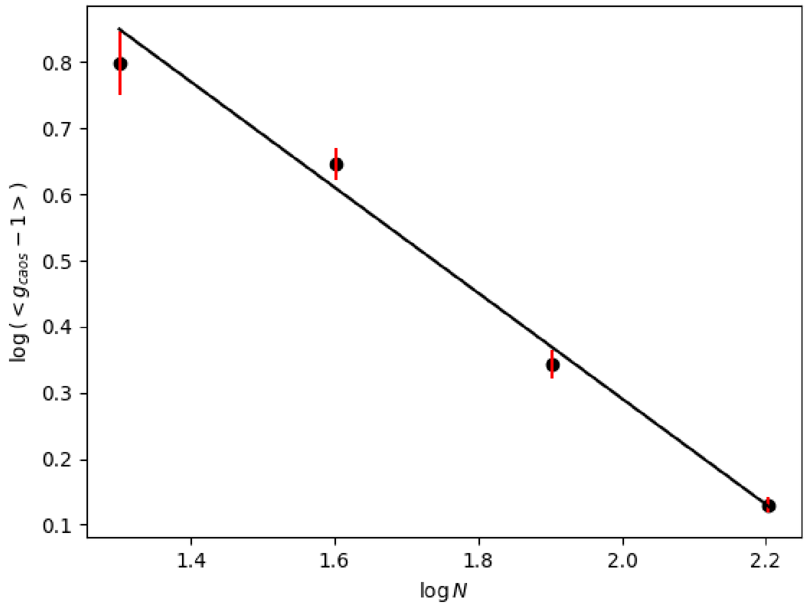

Figura 4.30: Representación gráfica de la dependencia del logaritmo de $< g_{caos} > -1$ frente al logaritmo del número de neuronas N. El ajuste a la recta se corresponde con $\log{(< g_{caos} > -1)} = (-0{,}80 \pm 0{,}04) \cdot \log{(N)} + (1{,}89 \pm 0{,}07)$ con un coeficiente de correlación $R = 0{,}99501$.

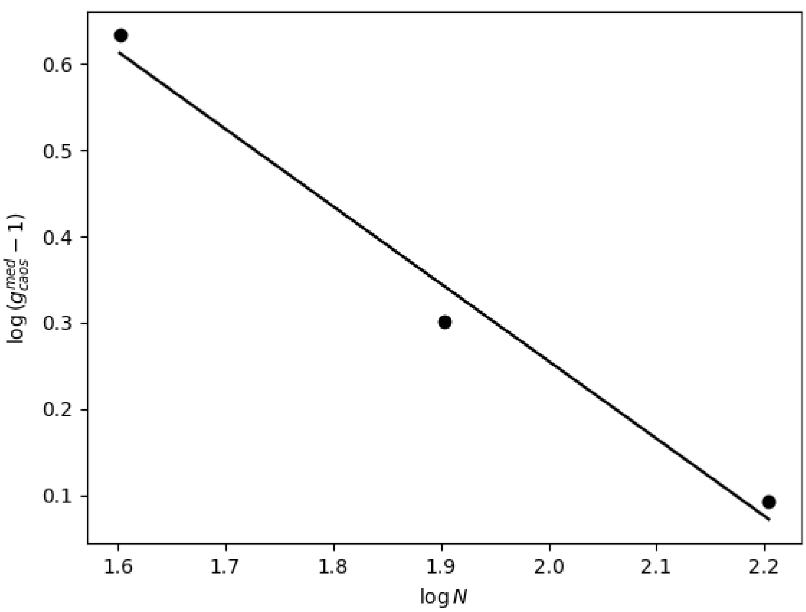

Figura 4.31: Representación gráfica de la dependencia del logaritmo de $g_{caos}^{med} - 1$ frente al logaritmo del número de neuronas N. El ajuste a la recta se corresponde con $\log{(g_{caos}^{med} - 1)} = (-0{,}90 \pm 0{,}12) \cdot \log{(N)} + (2{,}05 \pm 0{,}23)$ con un coeficiente de correlación $R = 0{,}99133$.

5. Conclusiones

Las simulaciones realizadas a lo largo del trabajo según el modelo de Sompolinsky-Crisanti-Sommers han permitido observar muchos de los casos más clásicos de atractores y bifurcaciones de la dinámica no lineal en baja dimensión, así como obtener información sobre la transición al caos en función del tamaño del sistema.

Para baja dimensión se ha comenzado introduciendo los atractores más comunes junto con las bifurcaciones que suelen sufrir para llegar a los mismos. Se ha introducido así para $N = 3$ un punto fijo por bifurcación *pitchfork* y un ciclo límite por bifurcación de Hopf supercrítica. También se ha incluido un ejemplo menos común, una bifurcación de Hopf subcrítica, cuyo interés reside en su diferente comportamiento aumentando o disminuyendo g. Como se comentó en la Introducción, presenta histéresis. Cuando el parámetro de control supera el punto de la bifurcación, como solo queda el ciclo límite estable como atractor, comienzan oscilaciones de gran amplitud. Cuando han comenzado, no es suficiente con volver hacia atrás al mismo punto para frenarlas. Se debe disminuir el parámetro de control g por debajo del punto de bifurcación. Como en el ejemplo de la Introducción, la bifurcación en la que se destruyen las oscilaciones es de tipo silla-nodo de ciclos.

Aumentando N, también se han podido observar un atractor caótico y un atractor cuasiperiódico. Ambos se han descrito justo para una dimensión más de la que es posible su existencia, pero por diferentes razones. En el caso del atractor caótico, se ha encontrado un caso para $N = 4$, aunque teóricamente es posible a partir de $N = 3$. Esto puede deberse a dos razones: la probabilidad de caos es tan baja que es casi imposible encontrar un ejemplo o que es directamente imposible. Esto último no está demostrado. En el caso del atractor cuasiperiódico, se ha encontrado un caso para $N = 5$, aunque teóricamente es posible a partir de $N = 4$. Seguramente se deba únicamente a la casualidad y sí exista un caso de cuasiperiodicidad para $N = 4$. Sin embargo, el código fue evolucionando con la dimensión y no se guardaron imágenes de los exponentes calculados para la clasificación hasta $N = 5$. Esto facilitó enormemente encontrar un caso de cuasiperiodicidad.

En las estadísticas totales de las Tablas 4.1, 4.2 y 4.3 es posible ver que el sistema evoluciona a un punto fijo distinto del origen en aproximadamente un 70 % de las ocasiones y a un ciclo límite entre un 40 % y 50 % de las veces (aumentando la probabilidad con la dimensión). En algunas ocasiones se presentaban bifurcaciones de *pitchfork* y de Hopf supercríticas en valores bajos de g antes de mostrar caos u otro tipo de bifurcaciones para valores más altos de g.

Para terminar las conclusiones para baja dimensión es necesario comentar las rutas al caos observadas. En los ejemplos estudiados la principal ruta al caos era la de duplicación de periodo. Aunque solo se ha detallado el ejemplo con matriz de acoplo (4.4), el resto de caos recogidos en las estadísticas totales de las Tablas 4.2 y 4.3 eran también por duplicación de periodo.

No ha sido posible encontrar un ejemplo de ruta por cuasiperiodicidad. Posiblemente ocurrían para un g mayor del estudiado para algunos de los casos de atractores cuasiperiódicos, pero, al menos para el ejemplo de la matriz de acoplo (4.5) no a un g alcanzable numéricamente.

Sin embargo, la ruta por intermitencia sí se ha observado. Este tipo de ruta al caos es diferente de las otras dos. El sistema no sufre ciertas bifurcaciones específicas en un orden determinado hasta el caos. El ejemplo descrito para duplicación de periodo de hecho muestra también la ruta por intermitencia en las ventanas del diagrama de bifurcación de la Figura 1.15 al disminuir g. Seguramente se trate de la ruta tipo I, silla-nodo de ciclos, pero sería necesario un análisis más exhaustivo para comprobarlo.

Cuando se ha aumentado la dimensión, se han estudiado el número de realizaciones (de un total de 100) que presentan caos y el valor mínimo de g en el que lo hacen (g_{caos}) para poblaciones de neuronas con $N = 10, 20, 40, 80$ y 160. Se han recogido los datos en la Tabla 4.4. Dado que el tiempo de simulación aumenta drásticamente con N, no ha sido posible recoger más datos. En la tabla se ha visto cualitativamente como aumenta la probabilidad de mostrar caos con N. Adicionalmente, en los histogramas de las Figuras 4.25, 4.26 y 4.27 se ha observado como la distribución de g_{caos} se estrecha y se desplaza hacia valores más bajos. Esto significa que el sistema cae más rápido al caos y en un valor de g_{caos} más definido. En el límite termodinámico ($N \to \infty$), g_{caos} tiende a la unidad.

Adicionalmente, se ha podido observar un ejemplo de lo que se conoce como hipercaos. En la Figura 4.29 se ha recogido la dependencia de los cuatro primeros exponentes de Lyapunov frente al parámetro de control g. En ella se puede ver como se van haciendo positivos en orden al aumentar g.

Finalmente, se han ajustado los promedios y medianas de g_{caos} de acuerdo a una ley de potencias que describa la transición al caos en función del tamaño de la red N. El ajuste obtenido en ambas presenta un coeficiente de correlación muy cercano a la unidad. Los valores obtenidos del exponente γ se solapan, con una discrepancia del 12,5 %. Sin embargo, para obtener una ley más precisa sería necesario simular hasta N más grandes y con un número mayor de realizaciones.

Bibliografía

[1] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos.* Perseus Books, 1994.

[2] H. G. Schuster, *Deterministic chaos: an introduction.* VCH, 1995.

[3] E. Ott, *Chaos in dynamical systems.* Cambridge University Press, 1993.

[4] A. Pivovsky and A. Politi, *Lyapunov Exponents: A Tool to Explore Complex Dynamics.* Cambridge University Press, 2016.

[5] P. Bergé, Y. Pomeau, and C. Vidal, *L'ordre dans le chaos. Vers une approche déterministe de la turbulence.* Hermann, 1984.

[6] "NIH: National institute of neurological disorders and strokes." `https://www.ninds.nih.gov/health-information/public-education/brain-basics/brain-basics-life-and-death-neuron`. Acceso: Junio de 2023.

[7] C. C. Chow and Y. Karimipanah, "Before and beyond the Wilson-Cowan equations," *Journal of Neurophysiology*, vol. 123, no. 5, 2020.

[8] P. Ball, "Memories become chaotic before they are forgotten," *Physics*, vol. 16, no. 14, 2023.

[9] H. Sompolinsky, A. Crisanti, and H. J. Sommers, "Chaos in random neural networks," *Physical Review Letters*, vol. 61, no. 3, 1988.

[10] D. C. Montgomery and G. C. Runger, *Estadística aplicada y probabilidad para ingenieros.* Wiley, 6 ed., 2014.

[11] H. Sompolinsky and A. Crisanti, "Path integral approach to random neural networks," *Physical Review E*, vol. 98, no. 6, 2018.

[12] A. Crisanti, G. Paladin, and A. Vulpiani, *Products of Random Matrices in Statistical Physics.* Springer-Verlag, 1993.

[13] G. Wainrib and J. Touboul, "Topological and dynamical complexity of random neural networks," *Physical Review Letters*, vol. 110, no. 11, 2013.

[14] J. Stubenrauch, C. Keup, A. C. Kurth, M. Helias, and A. van Meegen, "Phase space analysis of chaotic neural networks," 2022.

[15] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, and J. A. Vastano, "Determining Lyapunov exponents from a time series," *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 16, no. 3, 1985.

[16] I. León Merino, *Phase reductions beyond the Kuramoto model: derivation, analysis and simulation.* PhD thesis, Universidad de Cantabria, 2022.

[17] A. Flein and A. Godunov, *Introductory computational physics*. Cambridge University Press, 2006.

[18] "Numpy: random sampling." `https://numpy.org/doc/stable/reference/random/index.html`. Acceso: Junio de 2023.

[19] C. Sparrow, *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors*. Springer-Verlag, 1982.

[20] K. T. Alligood, T. D. Sauer, and J. A. Yorke, *CHAOS An introduction to dynamical systems*. Springer-Verlag, 3 ed., 2000.

Código

```
def renorm_ly(self, lista_xv, Tly):
    """
    Recibe una lista de elementos del campo local x y de vectores de Lyapunov v en
    forma de lista_xv y el tiempo entre ortonormalizaciones Tly. Ortonormaliza los
    vectores v por el método de Gram-Schmidt y guarda las normas para obtener los
    exponentes de Lyapunov por el método de Bennetin.

    Args:
    lista_xv: Lista de elementos x y de vectores v (x1, x2, ..., xN, v11, v12, ...,
    v1N, vnly1, vnly2, ..., vnlyN).
    Tly: Tiempo entre ortonormalizaciones.
    Returns:
    lista_xv: Lista de los mismos elementos x y de vectores v ortorenormalizados.
    ly: Lista de vectores de Lyapunov (1, ..., n)
    """

    # Se crea una lista vacía para los exponentes de Lyapunov
    ly = []

    # Sumatorio en el número de exponentes (y vectores) a calcular
    for i in range(self.nly):
        # Se generan los índices de la lista_xv del vector i
        a = self.N + self.N * i
        b = self.N + self.N * (i + 1)

        # Se ortogonaliza a los vectores anteriores (el primero no entra en el bucle)
        for j in range(i):
            # Se generan los índices de la lista_xv del vector j
            c = self.N + self.N * j
            d = self.N + self.N * (j + 1)
            # Se resta al vector i el j por el producto escalar de los vectores i, j
            vector = lista_xv[a:b]
            RESTAvectorGSI = np.multiply(lista_xv[c:d], np.dot(lista_xv[c:d],
            lista_xv[a:b]))
            lista_xv[a:b] = [e1 - e2 for e1, e2 in zip(vector, RESTAvectorGSI)]

        # Se recoge su norma para obtener el exponente de Lyapunov i
        ly.append(1/Tly * np.log(np.linalg.norm(lista_xv[a:b])))
        # Se renormaliza el vector i a la unidad
        lista_xv[a:b] = lista_xv[a:b] / np.linalg.norm(lista_xv[a:b])

    return lista_xv, ly
```

Listing 5.1: Código de la función de ortonormalización de los vectores de Lyapunov para obtener los exponentes λ_i.

Índice de figuras

Índice de tablas