



*Facultad
de
Ciencias*

Introducción a la teoría del control

Introduction to control theory

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autor: Guillermo Santamaría Fernández

Director: Rafael Granero Belinchón

Julio - 2023

Resumen

Dado un sistema físico y su estado inicial, se quiere saber si podemos “controlarlo” de manera que el estado final del sistema sea el deseado. Como ejemplo, pensar en cuando montamos en bicicleta y nos movemos para no caer. En esta situación, vamos adaptando nuestra posición y nuestros movimientos para “controlar” la bicicleta y no acabar en el suelo.

Matemáticamente, el problema anterior es, dada una ecuación diferencial ordinaria (o un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias), conseguir cambiar los parámetros del sistema para que el estado final sea el deseado. Este tipo de preguntas son las que trata de responder la teoría de control.

En este trabajo se realiza una introducción a la teoría de control, tratando el caso de sistemas lineales y demostrando que en el caso lineal siempre existe un control bang-bang admisible para las condiciones iniciales. Además, se examina como caso concreto el oscilador armónico.

Palabras clave: Teoría de control, EDO, control bang-bang, oscilador armónico.

Abstract

Given a physical system and its initial state, we want to know if we can “control” it so that the final state of the system is the desired one. As an example, we can think of when we ride a bicycle, and we move to avoid falling. In this situation, we adapt our position and our movements to “control” the bicycle and not end up on the ground.

Mathematically, the previous problem is, given an ordinary differential equation (or a system of ordinary differential equations), to change the parameters of the system so that the final state is the desired one. This type of question is what control theory tries to answer.

In this work an introduction to control theory is made, treating the case of linear systems and demonstrating that in the linear case there is always an admissible bang-bang control for the initial conditions. In addition, the harmonic oscillator is examined as a concrete case.

Key words: Control theory, ODE, bang-bang control, harmonic oscillator.

Índice general

1. Introducción	7
1.1. ¿Qué es la teoría del control?	7
1.2. Control y optimización	8
1.3. Objetivos y organización del trabajo	9
2. Teoría de control en sistemas lineales	11
2.1. Introducción	11
2.2. Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales	11
2.3. Control en sistemas lineales	12
2.4. Controles bang-bang	22
2.5. Controles no restringidos	25
2.6. Observabilidad	28
3. Oscilador armónico	31
3.1. Introducción	31
3.2. Determinación del conjunto de puntos alcanzables	32
3.3. Determinación de los controles	32
Referencias	35

Capítulo 1

Introducción

1.1. ¿Qué es la teoría del control?

La teoría del control es el área de las matemáticas aplicadas y de la ingeniería que trata el diseño y el control de diferentes sistemas. En este contexto, controlar un sistema significa influenciarlo cambiando una variable, que denominaremos control, para que el sistema llegue al estado deseado [7].

La explicación dada en el párrafo anterior es muy general, lo que permite que la teoría del control sea aplicable en multitud de áreas. Así, la teoría del control tiene aplicaciones en la ingeniería de sistemas, la robótica o la economía. En cada una de estas áreas es necesario definir tanto el “sistema” que se quiere controlar tanto la variable o control que cambia. Para ilustrar estas ideas, consideremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.1 (Economía nacional). *Considérese un país gobernado por un sistema capitalista. En este caso, el sistema esta formado por toda la población, las empresas, las fabricas de producción, el dinero disponible para cada persona, etc. El estado inicial del sistema puede considerarse como una gran colección de datos: sueldos, ganancias, pérdidas, ventas de bienes y servicios, inversión, desempleo, costos de bienestar, tasa de inflación, etc. El gobierno puede influir en el estado de este sistema utilizando varios controles, especialmente la tasa de interés principal, la política tributaria y la persuasión en relación con los acuerdos salariales y de precios [6].*

El ejemplo anterior puede parecer algo lejano a un problema matemático, pero ilustra lo que pretende la teoría del control: dado un sistema dinámico, que cambia con el tiempo, se quiere modificar para obtener un estado concreto. En el ejemplo anterior se quiere alterar, cambiando la legislación, la situación económica de toda la población. En el caso de la economía es prácticamente imposible dar ecuaciones que describan completamente como afectarán los cambios en la legislación a la población, por lo que se trata de un ejemplo que, aunque ilustra correctamente las ideas, no tiene mayor interés como problema matemático.

La generalidad con la que se describe el problema de la teoría del control permite que sea aplicable a una gran variedad de campos diferentes. Problemas en el campo de la química,

la biología o distintas áreas de la ingeniería tienen solución dentro de la teoría del control. Considérese el siguiente ejemplo del campo de la bioquímica:

Ejemplo 1.2 (Sistema químico). Sean s_1 y s_2 dos especies moleculares que se forman con tasas de producción k_1 y k_2 , tasas de degradación k_{-1} y k_{-2} y tasas de interconversión (que la especie s_1 se convierta en la especie s_2 y viceversa) k_3 y k_{-3} . Además, la presencia de la molécula s_1 dificulta la formación de la molécula s_2 . Existen dos catalizadores distintos, c_1 y c_2 , cuya presencia en mayor o menor medida aumenta la tasa de producción de cada una de las dos especies moleculares. En este caso, el sistema está formado por las dos especies moleculares y sus dinámicas están correctamente descritas por las leyes químicas y sus correspondientes tasas de producción y degradación. Variando la cantidad de catalizador presente (el control), se trata de conseguir una cierta cantidad de cada una de las dos especies en un determinado tiempo [4].

Al contrario que en el caso de la economía, el ejemplo anterior es sencillo de transformar en un problema matemático. Dadas las tasas de producción, degradación e interconversión, la variación en la concentración de ambas sustancias vendrá dada por ecuación diferencial ordinaria, donde las condiciones iniciales serán la concentración inicial de cada una de las especies. Esto permite que, utilizando la teoría de control y los resultados que veremos más adelante, sea posible conocer si es posible obtener las concentraciones deseadas de cada una de las especies moleculares, variando la cantidad de catalizadores presentes en cada momento. Por último, se presenta un ejemplo sencillo del campo de la ingeniería aeroespacial.

Ejemplo 1.3 (Cohete espacial). Se quiere disparar un cohete desde la Tierra a Marte por propulsión. Para ello, se dispone de una cantidad de combustible que se quema a una velocidad $u(t)$, que será el control. El sistema está formado únicamente por la posición del cohete, mientras que la variación en su posición vendrá dada por la segunda ley de Newton. En este caso, se quiere saber si es posible llegar a Marte con la cantidad de combustible dada variando la velocidad a la que se quema dicho combustible [2].

En resumen, estos ejemplos muestran como la teoría de control se puede aplicar en diferentes campos (economía, química o ingeniería), lo que hace interesante su estudio.

1.2. Control y optimización

En la sección anterior se ha descrito cómo la teoría de control se ocupa de si es posible llevar un sistema a un estado determinado. Sin embargo, una vez que se conoce la existencia de un control que lleva tu sistema al estado deseado, es interesante saber cuál es el control “óptimo” para modificar el sistema. Para ello, es necesario definir previamente según que criterio se considera un control como “óptimo”.

Para esclarecer esta idea, volvamos al ejemplo 1.3 (cohete espacial). En este ejemplo se pueden establecer diferentes criterios para considerar el control como “óptimo”, pero el más sencillo y lógico es considerar como mejor control a aquel que gasta menos combustible. De esta forma, el control óptimo es aquel que minimiza el gasto de combustible del cohete.

El ejemplo anterior ilustra el procedimiento a seguir para identificar cuál es el mejor control. Se define un funcional P , denominado funcional de beneficio, que depende del control, y el control óptimo es aquel que minimiza o maximiza el funcional. En el ejemplo 1.3, el funcional es el gasto total del combustible, y el control óptimo aquel que minimiza el gasto. Esta es una parte importante de la aplicación de la teoría de control, ya que en un caso real no solamente nos interesa saber si algo es posible, sino que se quiere saber la forma de hacerlo que implica el menor gasto de dinero o recursos. Sin embargo, dada la naturaleza introductoria de este trabajo, no se tratará la teoría del control óptimo, que implica resolver un problema de optimización, además del propio de la teoría de control.

1.3. Objetivos y organización del trabajo

El objetivo de este trabajo es hacer una introducción a la teoría de control, revisando el caso más sencillo en el cual se trata con ecuaciones diferenciales ordinarias lineales. Como se ha explicado anteriormente, este trabajo no trata la teoría de control óptimo, sino que únicamente nos centraremos en dar condiciones suficientes para la existencia de los controles.

Este trabajo consta de tres capítulos, siendo esta introducción donde se explica qué es la teoría del control el primero de ellos. El segundo capítulo explica la teoría de control en el caso de sistemas lineales, comenzando definiendo los conceptos más importantes de la teoría de control y dando resultados sobre la existencia de controles. Por último, en el tercer capítulo se estudia el oscilador armónico como aplicación sencilla de los resultados obtenidos en el capítulo 2.

Capítulo 2

Teoría de control en sistemas lineales

2.1. Introducción

Consideramos el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x(t), \alpha(t)) \\ x(0) = x^0 \end{cases} \quad (2.1)$$

donde $x : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es la función incógnita, $x^0 \in \mathbb{R}$ es la condición inicial, $\alpha : [0, \infty) \rightarrow A$ es el control y $f : \mathbb{R} \times A \rightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación. El problema de la teoría de control consiste en, dada la ecuación diferencial ordinaria (2.1), el punto inicial x^0 y un conjunto objetivo $S \subset \mathbb{R}^n$, averiguar si existe un control α que lleve x al conjunto S en un tiempo finito, es decir, que exista t_0 de forma que $x(t_0) \in S$.

Empezamos el estudio de la teoría de control por el caso más sencillo en el que la EDO es lineal respecto de x y α es decir, que es de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Mx(t) + N\alpha(t) \quad t \geq 0 \\ x(0) = x^0 \end{cases} \quad (2.2)$$

donde $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$, $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $N \in \mathbb{R}^{n \times m}$ son matrices reales y consideramos, por simplicidad, que la imagen del control α es $[-1, 1]^m$ y A el conjunto de controles α . Consideraremos también que $S = \{0\}$ es decir, queremos llevar el sistema al origen. En lo que sigue, se ha seguido el curso de Evans *An Introduction to Mathematical Optimal Control Theory* [3].

2.2. Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales

Comenzamos describiendo la expresión explícita de la solución de un sistema de EDO lineal, que serán necesarias para discutir el problema de control.

Sea $X(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}^{n \times n}$ la solución del siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = MX(t) \quad t \in \mathbb{R} \\ X(0) = I \end{cases}$$

donde $M \in \mathbb{M}^{n \times n}$ y I es la matriz identidad de dimensión n . X es la solución fundamental de la ecuación anterior y tiene como expresión explícita:

$$X(t) = e^{tM} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k M^k}{k!} \quad (2.3)$$

Teorema 2.1 (Solución de sistemas de ecuaciones lineales). *Sea $M \in \mathbb{M}^{n \times n}$ una matriz y $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación.*

(i) *La solución del sistema lineal homogéneo de EDO*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Mx(t) \\ x(0) = x^0 \end{cases}$$

es

$$x(t) = X(t)x^0 = e^{tM}x^0$$

(ii) *La solución del sistema lineal no homogéneo de EDO*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Mx(t) + f(t) \\ x(0) = x^0 \end{cases}$$

es

$$x(t) = X(t)x^0 + X(t) \int_0^t X^{-1}(s)f(s)ds \quad (2.4)$$

La última expresión es la formula de variación de parámetros.

Podemos aplicar la formula de variación de parámetros directamente al problema de control lineal teniendo en cuenta que en este caso se tiene que $f(t) = N\alpha(t)$, obteniendo la solución explícita de la EDO:

$$x(t) = X(t)x^0 + X(t) \int_0^t X^{-1}(s)N\alpha(s)ds \quad (2.5)$$

2.3. Control en sistemas lineales

Definición 2.2. *Se define el conjunto de puntos controlables en un tiempo t al conjunto $\mathcal{C}(t)$ formado por los puntos iniciales x^0 para los que existe un control α de forma que $x(t) = 0$.*

A partir de la definición y de la formula de variación de parámetros se puede deducir una formula para los puntos que forman el conjunto $\mathcal{C}(t)$:

Lema 2.3. *Sea $x^0 \in \mathbb{R}^n$ y $\mathcal{C}(t)$ el conjunto de puntos controlables del problema de control lineal para algún $t \geq 0$. Entonces, $x^0 \in \mathcal{C}(t)$ si y solo si existe un control α tal que*

$$x^0 = - \int_0^t X^{-1}(s)N\alpha(s)ds \quad (2.6)$$

Demostración. Por la definición de $\mathcal{C}(t)$, $x^0 \in \mathcal{C}(t)$ si y solo si existe un control α tal que $x(t) = 0$. Por la formula de variación de parámetros (2.5), $x^0 \in \mathcal{C}(t)$ si y solo si:

$$0 = X(t)x^0 + X(t) \int_0^t X^{-1}(s)N\alpha(s)ds$$

y como $X(t) = e^{tM}$, podemos multiplicar por $X^{-1}(t) = e^{-tM}$ obteniendo:

$$x^0 = - \int_0^t X^{-1}(s)N\alpha(s)ds$$

como se quería demostrar. \square

Nótese que es posible que existan varios controles α diferentes que cumplan la ecuación (2.6). Por ello, introducimos la siguiente definición:

Definición 2.4. Se dice que $\alpha \in A$ es un control admisible para $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si cumple la ecuación (2.6).

Definición 2.5. Se define el conjunto de puntos controlables \mathcal{C} como el conjunto de puntos iniciales x^0 para los que existe un control α y un tiempo t_0 de forma que $x(t_0) = 0$.

De las dos definiciones anteriores es trivial deducir la siguiente relación:

$$\mathcal{C} = \bigcup_{t \geq 0} \mathcal{C}(t)$$

Proposición 2.6 (*Propiedades del conjunto de puntos controlables*). Sea \mathcal{C} el conjunto de puntos controlables de un problema de control lineal. Entonces:

1. Si $x^0 \in \mathcal{C}(t_0)$, entonces $x^0 \in \mathcal{C}(t) \forall t \geq t_0$.
2. El conjunto \mathcal{C} es simétrico y convexo.

Demostración. Comencemos probando la primera afirmación. Sea $x_1 \in \mathcal{C}(t_0)$ y veamos que $x_1 \in \mathcal{C}(t) \forall t \geq t_0$. Como $x_1 \in \mathcal{C}(t_0)$, por el lema 2.3, existe un control α_1 tal que:

$$x_1 = - \int_0^{t_1} X^{-1}(s)N\alpha_1(s)ds$$

Partiendo del control α_1 podemos definir el siguiente control:

$$\tilde{\alpha}(s) = \begin{cases} \alpha_1 & \text{si } 0 \leq s \leq t_1 \\ 0 & \text{si } s \geq t_1 \end{cases}$$

y entonces se puede extender la integral anterior para cualquier $t \geq 0$:

$$x_1 = - \int_0^t X^{-1}(s)N\tilde{\alpha}(s)ds$$

y por el lema 2.3 se tiene que $x_1 \in \mathcal{C}(t) \forall t \geq t_0$, como se quería probar.

Pasemos a probar la segunda afirmación y veamos que \mathcal{C} es simétrico. Como \mathcal{C} es la unión de todos los $\mathcal{C}(t)$, basta ver que cada uno de los conjuntos $\mathcal{C}(t)$ es simétrico, y entonces \mathcal{C} será simétrico por ser unión de conjuntos simétricos. Sea $t \geq 0$ y $x^0 \in \mathcal{C}(t)$, por el lema 2.3, tenemos que $x^0 = -\int_0^t X^{-1}(s)N\alpha(s)ds$ para algún control $\alpha \in A$. Entonces, $-x^0 = -\int_0^t X^{-1}(s)N(-\alpha)(s)ds$, luego basta ver que $-\alpha \in A$ para que $-x^0 \in \mathcal{C}(t)$, que es cierto ya que el conjunto A es simétrico. Por tanto, $\mathcal{C}(t)$ es simétrico y \mathcal{C} también.

Veamos ahora que \mathcal{C} es convexo. Sean $x_1, x_2 \in \mathcal{C}$, entonces existen $t_1, t_2 \geq 0$ tal que $x_1 \in \mathcal{C}(t_1)$ y $x_2 \in \mathcal{C}(t_2)$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $t_1 \leq t_2$. Aplicando el primer apartado de esta proposición, como $x_1 \in \mathcal{C}(t_1)$ y $t_1 \leq t_2$, se tiene que $x_1 \in \mathcal{C}(t_2)$, y por el lema 2.3 se tiene que existen dos controles α_1 y α_2 tal que:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\int_0^{t_2} X^{-1}(s)N\alpha_1(s)ds \\ x_2 &= -\int_0^{t_2} X^{-1}(s)N\alpha_2(s)ds \end{aligned}$$

Entonces, se tiene:

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 = -\int_0^{t_2} X^{-1}(s)N(\lambda\alpha_1(s) + (1 - \lambda)\alpha_2(s))ds$$

y como A es convexo, $\lambda\alpha_1(s) + (1 - \lambda)\alpha_2(s) \in A$ y $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in \mathcal{C}(t_2)$ y \mathcal{C} es convexo. Además, $0 \in \mathcal{C}(t)$ siempre, tomando $\alpha \equiv 0$. \square

Es de interés buscar condiciones para que el conjunto de puntos controlables contenga un entorno del origen (es lógico, pues queremos saber que tipo de EDOs es posible “controlar” para que vaya hacia el origen cuando el punto inicial x^0 no esta muy alejado del origen). Introducimos por ello la definición de matriz de control.

Definición 2.7. Sean M y N las matrices del problema de control lineal (2.2). Se define la matriz de control $G(M, N)$ (de dimensión $n \times (mn)$) como:

$$G = G(M, N) := [N, MN, M^2N, \dots, M^{n-1}N]$$

Esta definición queda justificada por el siguiente teorema:

Teorema 2.8. El rango de la matriz de control G es n si y solo si el conjunto de puntos controlables contiene un entorno del origen.

Antes de demostrar este teorema, enunciamos dos lemas sobre la geometría de conjuntos convexos que serán necesarios en la demostración.

Lema 2.9. [1, pág. 50-51] Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo no vacío, y sea $x_0 \in C$ un punto en la frontera de C . Entonces, existe $b \in \mathbb{R}^n, b \neq 0$ tal que $\forall x \in C$ se tiene que $b^T x \leq b^T x_0$.

Geoméricamente, en el caso de que el conjunto \mathcal{C} sea suave, este lema significa que existe un plano tangente (si el conjunto no es suave no está definido este plano) en x_0 al conjunto

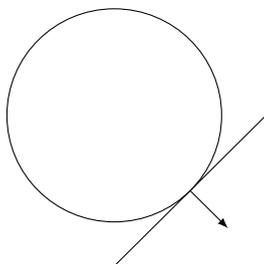


Figura 2.1: Interpretación geométrica del lema 2.9 en dos dimensiones, existe una recta tangente al conjunto (un círculo) que deja todo el conjunto a “un lado” del plano y un vector normal a dicho plano.

C que deja todo a un lado del plano todo el conjunto C , y el vector b es el vector normal a dicho plano (ver figura 2.1). Para demostrar este lema es necesario utilizar el siguiente resultado:

Lema 2.10. [1, pág. 46-49] Sean $C, D \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos convexos, disjuntos y no vacíos. Entonces, existen $a \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ y $b \in \mathbb{R}$ tal que $a^T x \leq b \forall x \in C$ y $a^T x \geq b \forall x \in D$.

Demostración. Supongamos primero que C, D son cerrados y uno de ellos es acotado (por ejemplo, C). Entonces, C es compacto, por ser un subconjunto de \mathbb{R}^n cerrado y acotado. Vamos a probar que existe $c \in C$ y $d \in D$ tal que la distancia entre los conjuntos C y D es la distancia entre c y d . Consideramos el conjunto:

$$S(t) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{dist}(x, C) \leq t\}$$

donde $\text{dist}(x, C)$ es la distancia usual entre x y C . Sea t_0 suficientemente grande tal que $S(t_0) \cap D \neq \emptyset$. Entonces, es claro que la distancia entre C y D es igual a la distancia entre C y $D \cap S(t_0)$, pero $D \cap S(t_0)$ es cerrado (por ser intersección de cerrados) y acotado (ya que $S(t_0)$ es acotado), por lo que es compacto.

Sean c_n y d_n sucesiones acotadas en C y $D \cap S(t_0)$ respectivamente tal que:

$$\text{dist}(C, D) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(c_n, d_n)$$

Como C es compacto, existe una subsucesión convergente c_{n_k} con límite $c \in C$ tal que:

$$\text{dist}(C, D) = \lim_{k \rightarrow \infty} \text{dist}(c_{n_k}, d_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \text{dist}(c, d_{n_k})$$

y razonando de la misma forma, existe una subsucesión de d_{n_k} convergente a $d \in D$ tal que:

$$\text{dist}(C, D) = \lim_{j \rightarrow \infty} \text{dist}(c, d_{n_j}) = \text{dist}(c, d)$$

luego existen c, d de forma que $\text{dist}(C, D) = \text{dist}(c, d) = \|c - d\|$. Definimos:

$$a = d - c$$

$$b = \frac{\|d\|^2 - \|c\|^2}{2}$$

y definimos la función:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto a^T x - b = (d - c)^T x - \frac{\|d\|^2 - \|c\|^2}{2} = (d - c)^T \left(x - \frac{1}{2}(d + c)\right) \end{aligned}$$

y hay que ver que $f(x) \leq 0 \forall x \in C$ y que $f(x) \geq 0 \forall x \in D$. Supongamos que existe $u \in D$ tal que $f(u) < 0$. Entonces, se tiene:

$$f(u) = (d - c)^T \left(u - \frac{1}{2}(d + c)\right) = (d - c)^T \left(u - d + \frac{1}{2}(d - c)\right) = (d - c)^T (u - d) + \frac{1}{2} \|d - c\|^2 < 0$$

Como $\|d - c\|^2 > 0$, tiene que ser que $(d - c)^T (u - d) < 0$. Consideramos la función $g(t) = \|d - c + t(u - d)\|^2$. Derivando y evaluando en el 0 queda:

$$\left. \frac{d}{dt} g(t) \right|_{t=0} = 2(d - c)^T (u - d) < 0$$

por lo que g es decreciente en el 0 y existe $0 < t_0 \leq 1$ tal que:

$$\|d + t_0(u - d) - c\| > \|d - c\|$$

Pero $d + t_0(u - d) = t_0 u + (1 - t_0)d \in D$ ya que D es convexo por hipótesis. Luego $\text{dist}(c, t_0 u + (1 - t_0)d) < \text{dist}(c, d)$, que no puede ser ya que d es el punto de D que alcanza la mínima distancia. Luego no puede existir $u \in D$ tal que $f(u) < 0$. Para ver que $f(x) \leq 0 \forall x \in C$ basta considerar $h(x) = -f(x)$ y razonar de la misma forma que en el caso anterior.

Se prueba ahora el caso general. Consideramos el siguiente conjunto:

$$S = \{x - y | x \in C, y \in D\}$$

que es convexo (por ser suma de dos conjuntos convexos) y no vacío. Como C y D son disjuntos, se tiene que $0 \notin S$. Consideramos ahora la clausura de S , \bar{S} y distinguimos dos casos:

1. Si $0 \notin \bar{S}$, entonces $\{0\}$ es un conjunto cerrado y acotado, \bar{S} es un conjunto cerrado y son disjuntos, luego estamos en el caso anterior y existen $a \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ y $b \in \mathbb{R}$ tal que $a^T(c - d) \geq b \forall c \in C, d \in D$, y $a^T 0 \leq b \implies b \geq 0$. Por tanto:

$$a^T c \geq a^T d \forall c \in C, d \in D$$

que es equivalente a lo que se quería probar, ya que si existen dos puntos c_0 y d_0 tal que $a^T c_0 = a^T d_0$ basta tomar $b = a^T c_0$ y se tiene el resultado, mientras que si se tiene la desigualdad estricta, basta con tomar b como el ínfimo del conjunto $\{a^T c | c \in C\}$, que existe por ser un conjunto de números reales acotado inferiormente.

2. Si $0 \in \bar{S}$, entonces 0 está en la frontera de S . Si el interior de S es vacío, entonces S no puede contener ninguna bola abierta centrada en algún punto de S , por lo que debe estar contenido en un hiperplano $\{a^T x = b\}$. Pero este hiperplano debe

contener al origen ya que está en la frontera de S , por lo que $b = 0$, y se tiene que $a^T c = a^T d \forall c \in C, d \in D$.

Si el interior de S no es vacío, entonces consideramos el conjunto

$$S(\varepsilon) = \{x | B(x; \varepsilon) \subset S\}$$

donde $\varepsilon > 0$ es un número real positivo y $B(x; \varepsilon)$ es la bola abierta centrada en x de radio ε . Veamos que $S(\varepsilon)$ es un conjunto convexo. Sean $x_1, x_2 \in S(\varepsilon)$, $0 \leq \lambda \leq 1$ hay que ver que $x_0 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ está en $S(\varepsilon)$, esto es, que $B(x_0; \varepsilon) \subset S$. Sea $x_\varepsilon \in \mathbb{R}^n$ con $\|x_\varepsilon\| < \varepsilon$, basta ver que $x_0 + x_\varepsilon \in S$:

$$x_0 + x_\varepsilon = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 + x_\varepsilon + \lambda x_\varepsilon - \lambda x_\varepsilon = \lambda(x_1 + x_\varepsilon) + (1 - \lambda)(x_2 + x_\varepsilon) \in S$$

ya que $x_1 + x_\varepsilon, x_2 + x_\varepsilon \in S$ y S es un conjunto convexo. Por tanto, $B(x_0; \varepsilon) \subset S$ y $S(\varepsilon)$ es convexo. Como $S(\varepsilon)$ es convexo, su clausura es un conjunto convexo que, además, es cerrado y no contiene al 0. Por tanto, podemos aplicar el teorema a los conjuntos $\{0\}$ y $\overline{S(\varepsilon)}$ y existe $a(\varepsilon) \in \mathbb{R}^n$ tal que:

$$a(\varepsilon)x \geq 0$$

Se puede suponer que $\|a(\varepsilon)\| = 1$, y consideramos una sucesión de valores ε_k que tienda a 0. Entonces, se tiene una sucesión de $a(\varepsilon_k)$ asociados, y que debe tener una subsucesión convergente (ya que es una sucesión de elementos de \mathbb{R}^n contenida en la esfera S^{n-1} , que es compacta). Sea a el límite de dicha subsucesión. Entonces, se tiene que $a^T x \geq 0 \forall x \in \overline{S}$, en particular, para todo $x \in S$. Por tanto:

$$a^T c \geq a^T d \forall c \in C, d \in D$$

que es equivalente al enunciado que se quería probar. □

A partir de este resultado podemos probar el lema 2.9.

Demostración del lema 2.9. Se distinguen dos casos:

1. Si el interior de C no es vacío, entonces el resultado se tiene directamente aplicando el lema 2.10 a los conjuntos $\{x_0\}$ y al interior de C ya que entonces existen $a \in \mathbb{R}^n$ y $b \in \mathbb{R}$ tal que:

$$a^T x \leq b \forall x \in \text{Int}(C) \text{ y } a^T x_0 \geq b \implies a^T x \leq a^T x_0$$

2. Si el interior de C es vacío, entonces no puede contener ninguna bola abierta centrada en un punto de C , lo que significa que C debe estar contenido en un hiperplano de la forma $\{a^T x = b\}$ y entonces trivialmente $a^T x = a^T x_0 \forall x \in C$. □

Con este resultado pasamos a demostrar el teorema 2.8.

Demostración del teorema 2.8. Vamos a probar la afirmación equivalente de que la matriz de control no tiene rango n si y solo si \mathcal{C} no contiene un entorno del origen. Nótese que si el rango de G no es n , entonces necesariamente es más pequeño que n .

\Rightarrow) Supongamos que $\text{rango}(G) < n$. Entonces, existe un vector $b \in \mathbb{R}^n$ distinto de 0 que es ortogonal a todas las columnas de G , es decir, que cumple que:

$$b^T M^k N = 0 \text{ para } k = 0, \dots, n-1 \quad (2.7)$$

Veamos ahora que esta igualdad es cierta para todo $k \in \mathbb{N}$. Para ello, utilizamos el polinomio característico de M :

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - M)$$

que se anula en M . Podemos escribir el polinomio $p(\lambda)$ en función de unos coeficientes reales β_i desconocidos:

$$p(\lambda) = \lambda^n + \beta_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \beta_1\lambda + \beta_0 \implies p(M) = M^n + \beta_{n-1}M^{n-1} + \dots + \beta_1M + \beta_0I = 0$$

y por tanto escribir M^n como combinación lineal de las potencias anteriores de M . Por tanto:

$$b^T M^n N = b^T (-\beta_{n-1}M^{n-1} - \dots - \beta_1M - \beta_0I)N = 0$$

donde la última igualdad se tiene por la ecuación 2.7. Por inducción, suponemos que $b^T M^k N = 0$ y veamos que $b^T M^{k+1} N = 0$. Se tiene que:

$$p(M)M^{k+1-n} = M^{k+1} + \beta_{n-1}M^k + \dots + \beta_1M^{k+2-n} + \beta_0M^{k+1-n} = 0$$

y por tanto:

$$b^T M^{k+1} N = -b^T (\beta_{n-1}M^k + \dots + \beta_1M^{k+2-n} + \beta_0M^{k+1-n})N = 0$$

donde la última igualdad se tiene por la hipótesis de inducción. Por tanto, $b^T M^k N = 0 \forall k \in \mathbb{N}$.

Sea x^0 un punto de \mathcal{C} . Por el lema 2.3, se tiene que existe un control α tal que

$$x^0 = - \int_0^t X^{-1}(s)N\alpha(s)ds$$

Multiplicando por b^T y teniendo en cuenta que $X^{-1}(s) = e^{-sM}$:

$$b^T \cdot x^0 = -b^T \cdot \int_0^t e^{-sM} N\alpha(s)ds = - \int_0^t b^T \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-s)^k M^k}{k!} N\alpha(s)ds = - \int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-s)^k b^T M^k N}{k!} \alpha(s)ds = 0$$

donde la última igualdad esta garantizada ya que todos los términos de la suma se anulan. Por lo tanto, $b^T \cdot x^0 = 0 \forall x^0 \in \mathcal{C}$, luego \mathcal{C} esta contenido en el hiperplano de dimensión $n-1$ ortogonal a b . Por tanto, no puede contener ninguna bola centrada en el origen y \mathcal{C} no contiene ningún entorno del origen.

\Leftarrow) Supongamos ahora que \mathcal{C} no contiene un entorno del origen. Por la definición de \mathcal{C} , es obvio que $0 \in \mathcal{C}(0)$ y por la proposición 2.6 se tiene que $0 \in \mathcal{C}(t) \forall t \geq 0$. Como \mathcal{C} no contiene ningún entorno del origen, tampoco lo contienen $\mathcal{C}(t) \forall t > 0$, por lo que el origen es un punto de la frontera de $\mathcal{C}(t) \forall t > 0$. Como $\mathcal{C}(t)$ son conjuntos convexos, aplicando el lema 2.9 existe $b \in \mathbb{R}^n, b \neq 0$ tal que $b \cdot x^0 \leq 0 \forall x^0 \in \mathcal{C}(t)$.

Sea $x^0 \in \mathcal{C}(t)$ cualquiera. Entonces, existe un control α asociado tal que:

$$b^T \cdot 0 = 0 \geq b \cdot x^0 = - \int_0^t b^T X^{-1}(s) N \alpha(s) ds \implies \int_0^t b^T X^{-1}(s) N \alpha(s) ds \geq 0$$

donde la última desigualdad es válida para todos los controles admisibles α . En particular, es válida para $-\alpha$ ya que A es simétrico. Entonces:

$$\int_0^t b^T X^{-1}(s) N (-\alpha(s)) ds \geq 0 \implies \int_0^t b^T X^{-1}(s) N \alpha(s) ds \leq 0$$

que junto a la desigualdad anterior implica

$$\int_0^t b^T X^{-1}(s) N \alpha(s) ds = 0$$

donde la desigualdad anterior es cierta para cualquier control $\alpha \in A$ ya que el desarrollo es válido para cualquier $x^0 \in \mathcal{C}(t)$. Veamos que esto implica que $v(s) = b^T X^{-1}(s) N \equiv 0$. Supongamos que existe s_0 tal que $v(s_0) \neq 0$. Como $v(s)$ es continua, entonces existe un intervalo I tal que $v(s) \neq 0$ para todo $s \in I$. Definimos el control $\tilde{\alpha} \in A$ de la siguiente forma:

$$\tilde{\alpha}(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s \notin I \\ \frac{v(s)}{\|v(s)\|} \frac{1}{\sqrt{n}} & \text{si } s \in I \end{cases}$$

que está bien definido ($\tilde{\alpha}(s) \in A \forall s$) y donde se ha tomado la norma $\|v(s)\| := (\sum_{i=1}^n v_i^2)^{1/2}$. Entonces, se tiene:

$$0 = \int_0^t v(s) \tilde{\alpha}(s) ds = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_I \frac{v(s) \cdot v(s)}{\|v(s)\|} ds = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_I \frac{\|v(s)\|^2}{\|v(s)\|} ds = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_I \|v(s)\| ds$$

Que no puede ser porque $v(s) \neq 0$ en I , por lo que debe ser $v(s) \equiv 0$. Utilizando la ecuación 2.3 podemos escribir $v(s)$ de la siguiente forma:

$$v(s) = b^T e^{-sM} N \equiv 0$$

Derivando k veces respecto de s tenemos:

$$b^T (-1)^k M^k e^{-sM} N \equiv 0$$

Evaluando en $s = 0$:

$$b^T M^k N = 0 \forall k = 0, 1, \dots$$

Y por lo tanto $b^T G = 0$, por lo que el rango de G debe de ser menor que n , ya que $b \neq 0$. \square

Queda así justificada la definición de matriz de control: mirando el rango de la matriz de control es posible saber si el conjunto de puntos controlables contiene un entorno del origen. Este teorema proporciona así un primer método para saber si existen algunos puntos más allá del origen que sean controlables. Es de interés conocer que condiciones debe cumplir una EDO para garantizar que todos los puntos son controlables.

Definición 2.11. *Se dice que una EDO es controlable si $\mathcal{C} = \mathbb{R}^n$.*

Teorema 2.12 (Criterio para la controlabilidad.). *Sea una EDO lineal de la forma de la ecuación (2.2). Supongamos que el rango de la matriz de control G es n y que los valores propios λ_i de la matriz M cumplen que $\text{Re } \lambda_i \leq 0$. Entonces, la EDO es controlable.*

Demostración. Hay que probar que $\mathcal{C} = \mathbb{R}^n$. Procedamos por reducción al absurdo y supongamos que $\mathcal{C} \neq \mathbb{R}^n$. Por el lema 2.9, como \mathcal{C} es convexo, existe un número real μ y un vector $b \in \mathbb{R}^n$ con $b \neq 0$ tal que $\forall x^0 \in \mathcal{C}$ se tiene que:

$$b \cdot x^0 \leq \mu \quad (2.8)$$

Veamos que existe un $x^0 \in \mathcal{C}$ que no cumple esta relación. Por el lema 2.3, $x^0 \in \mathcal{C}$ si y solo si existe un $t > 0$ y un control α tal que:

$$x^0 = - \int_0^t X^{-1}(s)N\alpha(s)ds \implies b \cdot x^0 = - \int_0^t b^T X^{-1}(s)N\alpha(s)ds$$

Procediendo de forma similar a la demostración del teorema 2.8, definimos $v(s) = b^T X^{-1}(s)N$. Necesariamente, $v \not\equiv 0$ ya que si $v \equiv 0$, podemos derivar respecto de s k veces (de igual forma que en la demostración anterior) y evaluar en $s = 0$ para obtener:

$$b^T M^k N = 0 \quad \forall k = 0, 1, \dots$$

por lo que G debería tener rango menor que n , que no es posible por hipótesis. Definimos el siguiente control:

$$\alpha(s) = \begin{cases} -\frac{v(s)}{\|v(s)\|} & \text{si } v(s) \neq 0 \\ 0 & \text{si } v(s) = 0 \end{cases}$$

Por el lema 2.3, calculando la integral (2.6) se obtiene un punto $x^0 \in \mathcal{C}(t)$ que se corresponde con el control α anterior. Además, cumple que

$$b \cdot x^0 = - \int_0^t v(s)\alpha(s)ds = - \int_0^t -v(s)\frac{v(s)}{\|v(s)\|}ds = \int_0^t \|v(s)\| ds$$

Si encontramos un tiempo t_0 que cumpla que $\int_0^{t_0} \|v(s)\| ds > \mu$ tendremos una contradicción, ya que la desigualdad tampoco podría cumplirse para ningún $t > t_0$ (el valor de la integral no puede decrecer al aumentar t ya que $\|v(s)\| \geq 0$) y tampoco para ningún $t < t_0$, ya que en ese caso se tendría que $x^0 \in \mathcal{C}(t)$ y $x^0 \notin \mathcal{C}(t_0)$ que no es posible por la proposición 2.6. Vamos a probar que:

$$\int_0^\infty \|v(s)\| ds = \infty \quad (2.9)$$

por lo que existirá un t_0 que contradiga la desigualdad 2.8, por lo que habremos terminado la demostración. Definimos la función:

$$\phi(t) = \int_t^\infty v(s)ds$$

y vamos a buscar una EDO de la cual ϕ sea solución. Sea $p = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$ el polinomio característico de M , se tiene:

$$p\left(-\frac{d}{dt}\right)v(t) = \frac{d^n}{dt^n}v(t) + \alpha_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}v(t) + \dots + \alpha_1\frac{d}{dt}v(t) + \alpha_0v(t)$$

Teniendo en cuenta que $v(s) = b^T X^{-1}(s)N = b^T e^{-tM}N$ y sacando factor común:

$$p\left(-\frac{d}{dt}\right)v(t) = p\left(-\frac{d}{dt}\right)b^T e^{-tM}N = b^T(p(M)e^{-tM})N = 0$$

ya que $p(M) = 0$ por ser p el polinomio característico de M . Entonces, se tiene que ϕ es solución de la EDO:

$$\frac{d}{dt}p\left(-\frac{d}{dt}\right)\phi(t) = 0 \quad (2.10)$$

ya que:

$$-\frac{d}{dt}p\left(-\frac{d}{dt}\right)\phi(t) = p\left(-\frac{d}{dt}\right)\left(-\frac{d}{dt}\right)\phi(t) = p\left(-\frac{d}{dt}\right)\frac{d}{dt}\int_\infty^t v(s)ds = p\left(-\frac{d}{dt}\right)v(t) = 0$$

Las soluciones de la EDO (2.10) son combinaciones de términos de exponenciales de los valores propios del polinomio $xp(-x)$. Sean μ_1, \dots, μ_{n+1} los valores propios de $xp(-x)$, es claro que $\mu_{n+1} = 0$ y que los n primeros valores propios son las soluciones de $p(-x) = 0$, por lo que $\mu_i = -\lambda_i$ (donde los λ_i son los valores propios de M , ya que p es el polinomio característico de M). Por hipótesis, $\text{Re } \lambda_i \leq 0$, luego $\text{Re } \mu_i \geq 0$ para $i = 1, \dots, n$. Como ϕ es solución de la EDO (2.10), existen $p_1(t), \dots, p_{n+1}(t)$ polinomios tal que:

$$\phi(t) = \sum_{i=1}^{n+1} p_i(t)e^{\mu_i t} \quad (2.11)$$

Supongamos ahora que $\int_0^\infty v(s)ds < \infty$. Entonces:

$$|\phi(t)| = \left| \int_t^\infty v(s)ds \right| \leq \int_t^\infty |v(s)|ds$$

que tiende a 0 cuando t tiende a infinito (ya que $\int_0^\infty v(s)ds < \infty$). Pero esto contradice la expresión de ϕ en 2.11, ya que $\text{Re } \mu_i \geq 0$, por lo que la expresión 2.9 queda probada, lo que termina la demostración. \square

2.4. Controles bang-bang

En esta sección vamos a definir lo que son los controles bang-bang y a demostrar un teorema que garantiza la existencia de este tipo de controles.

Definición 2.13. Sea $\alpha(t) = (\alpha^1(t), \alpha^2(t), \dots, \alpha^m(t))^T : [0, \infty) \rightarrow A$ un control. Se dice que α es bang-bang si el valor absoluto de las componentes de α es 1 para todo $t \geq 0$, esto es, $|\alpha^i(t)| = 1 \forall i = 1, \dots, m \forall t \geq 0$.

El siguiente teorema garantiza que siempre que x_0 es controlable, existe un control α que es bang-bang y que es admisible para x_0 , es decir, todos los puntos que son controlables, son controlables con controles bang-bang.

Teorema 2.14. Sea $t_0 > 0$ y $x^0 \in \mathcal{C}(t_0)$ para el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Mx(t) + N\alpha(t) & t \geq 0 \\ x(0) = x^0 \end{cases}$$

Entonces, existe un control α admisible para x_0 y que es bang-bang.

Para probar este teorema vamos a probar que el conjunto \mathbb{K} de controles admisibles para x_0 es un conjunto convexo y que tiene al menos un extremo, y que ese punto extremo es un control bang-bang.

Definición 2.15. Sea \mathbb{K} un conjunto convexo, se dice que z es un extremo de \mathbb{K} si no existen $x_1, x_2 \in \mathbb{K}$ y $\lambda \in (0, 1)$ tal que $z = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$.

Incluimos sin demostración los siguientes resultados de análisis necesarios para demostrar el teorema 2.14.

Definición 2.16. Sea $L^\infty = \{\alpha(s) : (0, t) \rightarrow \mathbb{R}^m \mid \sup_{0 \leq s \leq t} |\alpha(s)| < \infty\}$ y sea $\alpha_n \in L^\infty$ una sucesión de elementos de L^∞ . Sea $\alpha \in L^\infty$, se dice que α_n converge a α en el sentido débil* si para toda función $v(s) : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}^m$ que cumple que $\int_0^t |v(s)| ds < \infty$ se tiene que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \alpha_n(s)v(s) ds = \int_0^t \alpha(s)v(s) ds$$

Cuando α_n converge a α en el sentido débil escribimos $\alpha_n \xrightarrow{*} \alpha$.

Teorema 2.17 (Alaoglu's). Sea $\alpha_n \in L^\infty$ una sucesión acotada. Entonces existe una subsucesión α_{n_k} y $\alpha \in L^\infty$ tal que $\alpha_{n_k} \xrightarrow{*} \alpha$.

Teorema 2.18 (Krein-Milman). Sea \mathbb{K} un subconjunto convexo no vacío de L^∞ que es compacto en la topología inducida por la convergencia débil* (esto es, que toda sucesión contenida en \mathbb{K} tiene una subsucesión convergente en el sentido débil a un punto de \mathbb{K}). Entonces \mathbb{K} tiene al menos un punto extremo.

Vamos a utilizar los dos teoremas anteriores para probar el teorema 2.14. Consideramos el problema de control lineal

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Mx(t) + N\alpha(t) \\ x(0) = x^0 \end{cases}$$

Se tiene que $x^0 \in \mathcal{C}(t)$ (ya que $x^0 \in \mathcal{C}(t_0)$) y denotamos por \mathbb{K} el conjunto de controles α admisibles para x^0 , esto es:

$$\mathbb{K}_{x^0} = \{\alpha : [0, \infty) \longrightarrow [-1, 1]^m \mid \alpha \text{ es admisible para } x^0\} \subset A$$

Veamos que \mathbb{K}_{x^0} cumple las hipótesis del teorema de Krein-Milman.

Proposición 2.19. *El conjunto \mathbb{K}_{x^0} es convexo, no vacío y compacto en el sentido débil*.*

Demostración. Como $x^0 \in \mathcal{C}(t)$, debe existir un control α admisible para x^0 , por lo que \mathbb{K}_{x^0} es no vacío. Veamos ahora que es convexo. Por el lema 2.3, se tiene que $\alpha \in \mathbb{K}_{x^0}$ si y solo si

$$x^0 = - \int_0^t X^{-1}(s)N\alpha(s)ds$$

Sea $\tilde{\alpha} \in \mathbb{K}_{x^0}$ y $\lambda \in [0, 1]$. Entonces:

$$x^0 = - \int_0^t X^{-1}(s)N\tilde{\alpha}(s)ds$$

por lo que

$$\begin{aligned} x^0 &= \lambda x^0 + (1 - \lambda)x^0 = - \int_0^t X^{-1}(s)N\lambda\alpha(s)ds - \int_0^t X^{-1}(s)N(1 - \lambda)\tilde{\alpha}(s)ds = \\ &= - \int_0^t X^{-1}(s)N(\lambda\alpha(s) + (1 - \lambda)\tilde{\alpha}(s))ds \end{aligned}$$

de donde se deduce que $\lambda\alpha(s) + (1 - \lambda)\tilde{\alpha} \in \mathbb{K}_{x^0}$ por lo que \mathbb{K}_{x^0} es convexo. Sea α_n una sucesión de elementos de \mathbb{K}_{x^0} . Como $\mathbb{K}_{x^0} \subset A$, por el teorema 2.17 se tiene que existe una subsucesión α_{n_k} convergente débil-* a algún $\alpha \in A$. Si vemos que $\alpha \in \mathbb{K}_{x^0}$, habremos probado que toda sucesión de elementos de \mathbb{K}_{x^0} tiene una subsucesión convergente a un elemento de \mathbb{K}_{x^0} , por lo que \mathbb{K}_{x^0} será compacto. Como $\alpha_{n_k} \in \mathbb{K}_{x^0}$, por el lema 2.3 existe un x^0 tal que:

$$x^0 = - \int_0^t X^{-1}(s)N\alpha_{n_k}(s)ds \xrightarrow{*} - \int_0^t X^{-1}(s)N\alpha(s)ds$$

ya que $\int_0^t |X^{-1}(s)N|ds = \int_0^t |e^{-sM}(s)N|ds < \infty$ ya que el integrando es acotado y el intervalo de integración es finito. Por lo tanto:

$$x^0 = - \int_0^t X^{-1}(s)N\alpha(s)ds$$

y $\alpha \in \mathbb{K}_{x^0}$, por lo que \mathbb{K}_{x^0} es compacto. □

Por último, podemos aplicar el teorema de Krein-Milman para demostrar la existencia de un control bang-bang y demostrar el teorema 2.14.

Demostración del teorema 2.14. Sea α^* el control que es extremo del conjunto \mathbb{K}_{x^0} (que existe por el teorema de Krein-Milman). Supongamos que α^* no es bang-bang, esto es, existe un índice $i \in \{1, \dots, m\}$ y un subconjunto $E \subset [0, t]$ tal que

$$|\alpha^{i*}(s)| < 1 \quad \forall s \in E$$

Supongamos que la medida del conjunto E es 0, esto es, $|E| = 0$. Entonces, se puede definir

$$\tilde{\alpha}^i(s) = \begin{cases} \alpha^{i*}(s) & \text{si } s \notin E \\ 1 & \text{si } s \in E \end{cases}$$

y considerar el control $\tilde{\alpha} = (\alpha_1^*, \dots, \tilde{\alpha}^i, \dots, \alpha_m^*)$, que es igual a α^* en todas las componentes menos la componente i -ésima. Entonces, $\tilde{\alpha}$ es bang-bang, y es admisible para x^0 , ya que

$$\int_0^t X^{-1}(s)N\alpha^*(s)ds = \int_0^t X^{-1}(s)N\tilde{\alpha}(s)ds$$

ya que el integrando es igual excepto en un conjunto de medida 0, que no afecta al valor de la integral. Supongamos ahora que la medida de E es mayor que 0. Entonces, existe un $\varepsilon > 0$ y un subconjunto $F \subset E$ con medida positiva y tal que

$$|\alpha^{i*}(s)| \leq 1 - \varepsilon \quad \forall s \in F$$

Definimos el funcional:

$$\begin{aligned} I_F: L^2(F) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \beta(s) &\longmapsto \int_F X^{-1}(s)N\tilde{\beta}(s)ds \end{aligned}$$

donde $\tilde{\beta}(s) = (0, \dots, \overbrace{\beta(s)}^i, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^m$. Si existe una función β tal que $I_F(\beta) = 0$ entonces, es posible utilizar la función $\tilde{\beta}$ para definir dos controles α_1 y α_2 diferentes de forma que se pueda escribir α^* como combinación lineal de α_1 y α_2 , llegando a contradicción con que α^* es extremo de \mathbb{K}_{x^0} .

Vamos a probar que existe una función $\beta \neq 0$ tal que $I_F(\beta) = 0$. Denotamos $Y(s) = X^{-1}(s)N = e^{-sM}N$, que es una matriz de dimensiones $n \times m$ con componentes $Y_{j,i}(s)$. Multiplicando Y por $\tilde{\beta}$:

$$Y(s)\tilde{\beta}(s) = \begin{pmatrix} Y_{1,1}(s) & \dots & Y_{1,m}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{n,1}(s) & \dots & Y_{n,m}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \beta(s) \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{1,i}(s)\beta(s) \\ \vdots \\ Y_{j,i}(s)\beta(s) \\ \vdots \\ Y_{n,i}(s)\beta(s) \end{pmatrix}$$

luego el integrando de $I_F(\beta)$ es la columna i -ésima de $Y(s)$ multiplicada por β .

Como $X^{-1}(s)$ es una exponencial negativa, y M, N son constantes, $Y(s)$ es de cuadrado integrable en F , es decir, $Y(s) \in L^2(F)$, y la aplicación I_F es el producto escalar de la

i -ésima columna de $Y(s)$ con β . Denotamos por $Y_{j,i}(s)$ a las componentes de la i -ésima columna de $Y(s)$, y lo queremos es encontrar una función $\beta(s)$ que sea ortogonal a $Y_{j,i}$ $j = 1, \dots, n$. Podemos escribir:

$$L^2(F) = \langle Y_{1,i}(s), Y_{2,i}(s), \dots, Y_{n,i}(s) \rangle \oplus \langle Y_{1,i}(s), Y_{2,i}(s), \dots, Y_{n,i}(s) \rangle^\perp$$

donde $\langle Y_{j,i}(s) \rangle$ es el subespacio generado por $Y_{j,i}(s)$ y $\langle Y_{j,i}(s) \rangle^\perp$ su ortogonal. Como $\langle Y_{1,i}(s), Y_{2,i}(s), \dots, Y_{n,i}(s) \rangle$ está generado por n funciones, tiene dimensión finita. Pero como $L^2(F)$ tiene dimensión infinita, el complemento ortogonal $\langle Y_{j,i}(s) \rangle^\perp$ debe tener también dimensión infinita, por lo que basta tomar cualquier $\beta \neq 0 \in \langle Y_{j,i}(s) \rangle^\perp$.

Sea $\beta \neq 0$ una función cualquiera tal que $I_F(\beta) = 0$. Podemos suponer que $\|\beta\| \leq 1$ (si no lo fuera, bastaría dividir por el máximo de los valores de β en F , y seguiría cumpliendo que $I_F(\beta) = 0$). Definimos los siguientes controles:

$$\alpha_1(s) = \alpha^*(s) + \varepsilon \tilde{\beta}(s)$$

$$\alpha_2(s) = \alpha^*(s) - \varepsilon \tilde{\beta}(s)$$

donde consideramos $\tilde{\beta}(s) = 0$ si $s \notin F$. Veamos ahora que ambos controles están en \mathbb{K}_{x^0} . Para ello basta probar que

$$x^0 = - \int_0^t X^{-1}(s) N \alpha_i(s) ds \text{ si } i = 1, 2$$

Calculando la integral:

$$- \int_0^t X^{-1}(s) N \alpha_1(s) ds = - \int_0^t X^{-1}(s) N \alpha^*(s) ds - \varepsilon \int_F X^{-1}(s) N \tilde{\beta}(s) ds = x^0 - \varepsilon I_F(\beta) = x^0$$

Además, $\|\alpha_1(s)\| \leq 1$. Si $s \notin F$, entonces $\alpha_1 = \alpha^*$ y $\|\alpha_1(s)\| \leq 1$. Si $s \in F$, se tiene:

$$\|\alpha_1(s)\| \leq \|\alpha^*(s)\| + \varepsilon \|\tilde{\beta}(s)\| \leq 1 - \varepsilon + \varepsilon \leq 1$$

Por lo que $\alpha_1 \in \mathbb{K}_{x^0}$. De forma similar, $\alpha_2 \in \mathbb{K}_{x^0}$. Además, α_1 y α_2 son distintos que α^* y cumplen

$$\frac{1}{2} \alpha_1 + \frac{1}{2} \alpha_2 = \alpha^*$$

pero por hipótesis, α^* era extremo de \mathbb{K}_{x^0} , lo que es una contradicción. Por tanto, α^* es bang-bang, como se quería demostrar. \square

2.5. Controles no restringidos

Consideramos ahora el problema de control lineal, pero cambiando el espacio donde toman valores los controles. Hasta ahora, habíamos considerado controles con imagen contenida en el interior de un cubo de lado dos, y hemos probado que siempre existen controles bang-bang admisibles. Sin embargo, es interesante considerar si la condición dada en el teorema 2.12 puede ser más débil si los controles pueden tomar valores en un espacio mayor.

Consideramos entonces el mismo problema lineal, pero ahora los controles son funciones $\alpha : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$ que toman valores en \mathbb{R}^m . En esta sección seguimos el libro *Topics in Mathematical System Theory* de R. E. Kalman [5].

Es importante destacar que el lema 2.3 sigue siendo cierto, con la misma demostración. A partir de este lema, podemos demostrar el siguiente resultado

Lema 2.20. Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ y $a \in \mathbb{R}$. Si x_1, x_2 son controlables, entonces ax_1 y $x_1 + x_2$ son también controlables.

Demostración. Por el lema 2.3, si x_1 y x_2 son controlables, entonces existen α_1 y α_2 tal que:

$$\begin{aligned} x_1 &= - \int_0^{t_2} X^{-1}(s)N\alpha_1(s)ds \\ x_2 &= - \int_0^{t_2} X^{-1}(s)N\alpha_2(s)ds \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} ax_1 &= - \int_0^{t_2} X^{-1}(s)N(a\alpha_1)(s)ds \\ x_1 + x_2 &= - \int_0^{t_2} X^{-1}(s)N(\alpha_1(s) + \alpha_2(s))ds \end{aligned}$$

y como $a\alpha_1$ y $\alpha_1 + \alpha_2$ son funciones que toman valores en \mathbb{R}^m , por el lema 2.3 se tiene que ax_1 y $x_1 + x_2$ son controlables. \square

Observación 2.21. El lema anterior no es cierto si α toma valores en A , ya que al multiplicar por una constante o sumarle otra función, puede que la nueva función no tome valores en A .

Se va a demostrar el siguiente teorema, análogo al teorema 2.12, pero con condiciones más débiles.

Teorema 2.22 (Criterio para la controlabilidad.). *Sea una EDO lineal de la forma de la ecuación (2.2). El rango de la matriz de control G es n si y solo si la EDO es controlable (esto es, $\mathcal{C} = \mathbb{R}^n$).*

Para poder demostrar este teorema es necesario dar primero una condición que permita conocer si un punto x_0 es controlable, comprobando si está en la imagen de una aplicación lineal.

Proposición 2.23. Sea $t \geq 0$, definimos la siguiente matriz de dimensiones $n \times n$:

$$W(t) = \int_0^t X^{-1}(s)NN^T X^{-1T}(s)ds$$

que es simétrica y consideramos la aplicación lineal:

$$\begin{aligned} T_t: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ v &\longmapsto W(t)v \end{aligned}$$

entonces, x_0 es controlable si y sólo si existe t_0 tal que x_0 está en la imagen de la aplicación T_{t_0} .

Demostración. \Leftarrow) Supongamos que $x^0 \in \text{Im}(W(t_0))$, es decir, existe $z_x \in \mathbb{R}^n$ tal que $x = W(t_0)z_x$. Definimos el control:

$$\alpha(s) = -N^T X^{-1T}(s)z_x \quad s \in [0, t_0]$$

(nótese que este control no tiene porque tener su imagen contenida en el cubo $[-1, 1]^m$, por lo que es necesario que los controles no estén restringidos). Entonces:

$$\int_0^t X^{-1}(s)N\alpha(s)ds = - \int_0^t X^{-1}(s)NN^T X^{-1T}(s)ds z_x = -W(t_0)z_x = -x^0$$

y por el lema 2.3 x es controlable.

\Rightarrow) Como $W(t_0)$ es simétrico, se tiene que:

$$\mathbb{R}^n = \text{Im}(W(t_0)) \oplus \text{Ker}(W(t_0))$$

ya $\dim(\text{Im}(W(t_0))) + \dim(\text{Ker}(W(t_0))) = \dim(\mathbb{R}^n)$ y, si $x \in \text{Im}(W(t_0)) \cap \text{Ker}(W(t_0))$, entonces existe $y \in \mathbb{R}^n$ tal que $W(t_0)y = x$ (por estar en la imagen) y $W(t_0)x = 0$ (por estar en el núcleo). Entonces, como $W(t_0)^T = W(t_0)$, se tiene que $W(t_0)W(t_0)^T y = 0 \Rightarrow y^T W(t_0)W(t_0)^T y = \|W(t_0)y\|^2 = 0 \Rightarrow W(t_0)y = 0 \Rightarrow x = 0$, por lo que la intersección es el origen.

Sea ahora $x \in \mathbb{R}^n$, entonces podemos escribir $x = x_1 + x_2$ con $x_1 \in \text{Im}(W(t_0))$ y $x_2 \in \text{Ker}(W(t_0))$. Por la implicación anterior, x_1 es controlable. Por linealidad, para que x sea controlable, debe serlo x_2 , ya que si x es controlable, entonces $x - x_1 = x_2$ también lo es. Se va a probar que un vector $x_2 \in \text{Ker}(W(t_0))$ que es controlable debe de ser el vector nulo, por lo que si x es controlable, debe ser $x_2 = 0$ y $x = x_1 \in \text{Im}(W(t_0))$.

Sea entonces $x_2 \neq 0$ y $x_2 \in \text{Ker}(W(t_0))$ y que x_2 es controlable. Entonces:

$$x_2^T W(t_0)x_2 = \int_0^{t_0} x_2^T X^{-1}(s)NN^T X^{-1T}(s)x_2 ds = \int_0^{t_0} \|N^T X^{-1T}(s)x_2\|^2 ds = 0$$

donde la última igualdad se tiene ya que $W(t_0)x_2 = 0$. Como el integrando es mayor o igual que 0, se tiene:

$$N^T X^{-1T}(s)x_2 = 0 \quad \forall s \in [0, t_0] \implies x_2^T X^{-1}(s)N = 0 \quad \forall s \in [0, t_0] \quad (2.12)$$

Como x_2 es controlable, por el lema 2.3 se tiene que

$$- \int_0^t X^{-1}(s)N\alpha(s)ds = x_2$$

Multiplicando por x_2^T :

$$-x_2^T \int_0^t X^{-1}(s)N\alpha(s)ds = x_2^T x_2 = \|x_2\|^2$$

pero por (2.12) la integral de la izquierda es cero, por lo que $\|x_2\| = 0$ y $x_2 = 0$. Por tanto, $x_2 = 0$ y $x = x_1 \in \text{Im}(W(t_0))$ como se quería demostrar. \square

Utilizando este resultado es posible demostrar el teorema 2.22.

Demostración del teorema 2.22. \Rightarrow) Supongamos que $\mathcal{C} \neq \mathbb{R}^n$. Entonces, existe un punto $x \in \mathbb{R}^n$ distinto de 0 que no es controlable, por lo que $x \in \text{Ker}(W(t))$. Por la demostración de la proposición 2.23 (ver ecuación (2.12)), x cumple:

$$x^T X^{-1}(s)N = x^T e^{-sM}N = x^T \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k s^k M^k}{k!} N = 0$$

Derivando k veces respecto de s y evaluando en 0 se obtiene:

$$x^T M^k N = 0$$

Por tanto:

$$x^T G = x^T [N, MN, M^2N, \dots, M^{n-1}N] = 0$$

por lo que x es distinto de 0 y ortogonal a todas las columnas de G , que no puede ser ya que el rango de G es n .

\Leftarrow) (Valido también en el caso de controles restringidos). Si el rango de G es menor que n , entonces hay un vector q ortogonal a todas las columnas de G que cumple:

$$q^T M^k N = 0 \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

De la misma forma que en la demostración del teorema 2.8 se demuestra que la igualdad anterior es válida para cualquier natural k y, por tanto, se tiene que:

$$q^T X^{-1}(t)N = q^T e^{-tM}N = 0$$

Sea $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $q^T x \neq 0$. Como $\mathcal{C} = \mathbb{R}^n$, x es controlable y por el lema 2.3 se tiene que

$$x = - \int_0^t X^{-1}(s)N\alpha(s)ds$$

Multiplicando por q^T :

$$q^T x = - \int_0^t q^T X^{-1}(s)N\alpha(s)ds = 0$$

que no puede ser ya que habíamos escogido x tal que $q^T x \neq 0$. Por tanto, no existe q ortogonal a todas las columnas de G y el rango de G es n . \square

2.6. Observabilidad

Introducimos en esta sección el problema de observabilidad, que se puede considerar como “dual” del problema de control. Consideramos la EDO:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Mx(t) \\ x(0) = x^0 \end{cases}$$

donde $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Supongamos que existe un vector $y(t) \in \mathbb{R}^m$ y una matriz $N \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que:

$$y(t) = Nx(t)$$

El problema de observabilidad es el siguiente: ¿Es posible reconstruir $x(t)$ a partir de algunos valores de $y(t)$? Formalmente:

Definición 2.24. *Un par EDO-observable se dice que es observable cuando dadas dos soluciones $x_1(t), x_2(t)$ de la EDO que cumplen que $Nx_1(t) = Nx_2(t)$ en un intervalo $[0, t]$ se tiene que $x_1(0) = x_2(0)$.*

La definición anterior significa que un sistema es observable por $y(t)$ cuando es posible distinguir el punto inicial a partir de un conjunto de valores de $y(t)$. Esto quiere decir que cuando un sistema no es observable existen soluciones diferentes $x_1(t), x_2(t)$, con puntos iniciales diferentes $x_1(0)$ y $x_2(0)$ pero de forma que $Nx_1(t) = Nx_2(t)$, haciendo imposible la distinción entre las soluciones a partir del observable. Podemos considerar los dos casos extremos para ilustrar el concepto:

Ejemplo 2.25. (i) Si $N = 0$, entonces el sistema no es observable.

(ii) Si $N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz invertible, entonces el sistema es observable.

El siguiente teorema justifica que la observabilidad sea el “dual” del control:

Teorema 2.26. *El sistema:*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Mx(t) \\ y(t) = Nx(t) \end{cases} \quad (2.13)$$

es observable si y solo si el sistema:

$$\dot{z}(t) = M^T z(t) + N^T \alpha(t) \quad (2.14)$$

es controlable (esto es, $\mathcal{C} = \mathbb{R}^n$), considerando controles α sin restringir.

Demostración. \uparrow) Vamos a probar el contrarrecíproco. Supongamos que 2.13 no es observable. Entonces, existen dos puntos $x^1, x^2 \in \mathbb{R}^n$, $x^1 \neq x^2$ y dos aplicaciones $x_1, x_2 : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = Mx_1(t) \\ x_1(0) = x^1 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_2(t) = Mx_2(t) \\ x_2(0) = x^2 \end{cases}$$

pero $y(t) = Nx_1(t) = Nx_2(t)$ para cualquier $t \geq 0$. Consideramos ahora $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$ que cumple que $\dot{x}(t) = Mx(t)$ y $x(0) = x^1 - x^2 = x^0 \neq 0$ y que $Nx(t) = 0 \forall t \geq 0$.

Como $x(t)$ es solución de $\dot{x}(t) = Mx(t)$, se tiene que $x(t) = e^{tM}x^0$. Se tiene entonces que $Ne^{tM}x^0 = 0 \forall t \geq 0$. Podemos derivar esta expresión k veces y evaluar en $t = 0$ y se tiene que

$$NM^k x^0 = 0 \dots \Rightarrow (NM^k x^0)^T = (x^0)^T (M^k)^T N^T = 0 \Rightarrow (x^0)^T (M^T)^k N^T = 0$$

para $k = 0, 1, 2, \dots$. Por tanto:

$$(x^0)^T [N^T, M^T N^T, \dots, (M^T)^{n-1} N^T] = 0$$

y como $x^0 \neq 0$, el rango de $[N^T, M^T N^T, \dots, (M^T)^{n-1} N^T]$ es menor que n y el sistema no es controlable.

⇓) Probamos el contrarrecíproco. Supongamos que 2.14 no es controlable. Entonces, por el teorema 2.22, se tiene que el rango de $G = [N, MN, M^2 N, \dots, M^{n-1} N]$ es menor que n , por lo que existe un vector $x^0 \neq 0$ ortogonal a todas las columnas de G , esto es, que cumple:

$$[N, MN, M^2 N, \dots, M^{n-1} N] x^0 = 0 \implies NM^k x^0 = 0 \text{ para } k = 0, 1, \dots, n-1$$

Razonando igual que en la demostración del teorema 2.8, se tiene que $NM^k x^0 = 0 \forall k \in \mathbb{N}$. Por tanto:

$$Nx(t) = Ne^{Mt} x^0 = N \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k M^k}{k!} x^0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k NM^k x^0}{k!} = 0$$

Por lo que $y(t) = Nx(t) = 0$, por lo que 2.13 no es observable (no se puede distinguir la solución $x(t)$ de la solución trivial constante 0). \square

Para demostrar el teorema anterior la única condición que se ha empleado es el teorema 2.22 para controles sin restringir. Por tanto, considerando controles restringidos, el mismo resultado es válido si el teorema 2.12 es cierto. Es decir, si los valores propios de la matriz M tienen parte real negativa o nula, el teorema 2.26 es cierto (con la misma demostración) para controles restringidos.

Capítulo 3

Oscilador armónico

3.1. Introducción

En este capítulo se estudia el caso concreto del oscilador armónico. Considérese el problema de Cauchy asociado al oscilador armónico:

$$\begin{cases} x''(t) = -x(t) + \alpha(t) \\ x(0) = u_0 \\ x'(0) = u_1 \end{cases}$$

donde $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$. El oscilador armónico se trata de una EDO de segundo orden, por lo que para aplicar los resultados del capítulo anterior es necesario transformarlo en un sistema de ecuaciones de primer orden:

$$\begin{cases} x_1(t) = x(t) \\ x_2(t) = x'(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = -x_1(t) + \alpha(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \alpha(t)$$

y las condiciones iniciales se han convertido en $x_1(0) = u_0$ y $x_2(0) = u_1$. Siguiendo la misma notación que en el capítulo anterior, las matrices M y N son las siguientes

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nótese que es suficiente con estudiar el oscilador armónico unidimensional, ya que al añadir dimensiones (una segunda coordenada y que oscila según el oscilador armónico) las ecuaciones están desacopladas, por lo que no se añade ninguna dificultad y los resultados se extienden directamente.

3.2. Determinación del conjunto de puntos alcanzables

En primer lugar, se estudia si el oscilador armónico es controlable, aplicando el teorema 2.12. Para ello, se construye la matriz de control G

$$G = [N, MN] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

que se comprueba directamente que tiene rango máximo. Los valores propios de la matriz M son:

$$\det(M - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \implies \lambda = \pm i$$

luego $\operatorname{Re} \lambda_i \leq 0$ para todos los valores propios de M , por lo que aplicando el teorema 2.12 el oscilador armónico es controlable, es decir, $\mathcal{C} = \mathbb{R}$.

3.3. Determinación de los controles

Una vez sabemos que el oscilador armónico es controlable es interesante determinar el control $\alpha(s)$ asociado a cada par de datos iniciales u_0, u_1 y a cada tiempo T en el que el oscilador armónico llega al origen (esto es, $x(T) = 0$). Para ello, volvemos a trabajar con la EDO de segundo orden y calculamos su solución explícita en función de α, u_0 y u_1 . La solución de la EDO homogénea es:

$$x_H(t) = u_0 \cos(t) + u_1 \sin(t)$$

Para determinar una solución particular, utilizamos el método de variación de parámetros y buscamos una solución particular x_p de la forma:

$$x_p(t) = c_0(t) \cos(t) + c_1(t) \sin(t)$$

donde $c_0(t), c_1(t)$ son funciones por determinar. Derivando:

$$x_p'(t) = c_0'(t) \cos(t) - c_0(t) \sin(t) + c_1'(t) \sin(t) + c_1(t) \cos(t)$$

Por simplicidad, escogemos $c_0(t)$ y $c_1(t)$ de forma que cumplan la siguiente condición

$$c_0'(t) \cos(t) + c_1'(t) \sin(t) = 0 \tag{3.1}$$

y, entonces, la primera derivada de la solución particular queda

$$x_p'(t) = -c_0(t) \sin(t) + c_1(t) \cos(t)$$

Calculando la segunda derivada:

$$x_p''(t) = -c_0'(t) \sin(t) - c_0(t) \cos(t) + c_1'(t) \cos(t) - c_1(t) \sin(t)$$

Introduciendo todo en la EDO del oscilador armónico y simplificando, se obtiene la siguiente ecuación:

$$-c'_0(t) \sin(t) + c'_1(t) \cos(t) = \alpha(t) \quad (3.2)$$

que, junto a la ecuación (3.1) forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (las derivadas de $c_0(t)$ y $c_1(t)$). La solución del sistema es:

$$c'_0(t) = -\frac{\sin(t)\alpha(t)}{W(\cos(t), \sin(t))} \quad c'_1(t) = \frac{\cos(t)\alpha(t)}{W(\cos(t), \sin(t))}$$

donde $W(\cos(t), \sin(t))$ es el Wronskiano del coseno y el seno, que se comprueba trivialmente que cumple $W(\cos(t), \sin(t)) = 1$. Integrando las ecuaciones anteriores para $c'_0(t)$ y $c'_1(t)$ e introduciéndolas en la formula de x_p obtenemos la formula para una solución particular del oscilador armónico:

$$x_p(t) = -\cos(t) \int_0^t \sin(s)\alpha(s)ds + \sin(t) \int_0^t \cos(s)\alpha(s)ds$$

y, sumando la solución de la ecuación homogénea, obtenemos la solución general para la EDO del oscilador armónico

$$x(t) = u_0 \cos(t) + u_1 \sin(t) - \cos(t) \int_0^t \sin(s)\alpha(s)ds + \sin(t) \int_0^t \cos(s)\alpha(s)ds$$

En tiempo $t = T$ el oscilador armónico se ha controlado, por lo que el oscilador armónico se encuentra en el origen y cumple que $x(T) = 0$:

$$0 = u_0 \cos(T) + u_1 \sin(T) - \cos(T) \int_0^T \sin(s)\alpha(s)ds + \sin(T) \int_0^T \cos(s)\alpha(s)ds \quad (3.3)$$

Para encontrar el control $\alpha(s)$ asociado a u_0, u_1 y T es necesario resolver la ecuación (3.3). Sin embargo, resolver dicha ecuación es muy complicado y queda fuera del alcance de este trabajo, en el que nos limitaremos a estudiar algunos casos particulares donde la ecuación se simplifique.

Comencemos por estudiar el caso en el que $T = \pi$, ya que simplificará tanto las integrales como los senos y cosenos. Sustituyendo en la ecuación (3.3) se obtiene:

$$0 = -u_0 + 0 + \int_0^\pi \sin(s)\alpha(s)ds + 0 \implies \int_0^\pi \sin(s)\alpha(s)ds = u_0$$

En este caso es fácil comprobar que $\alpha(s) = \frac{2}{\pi} \sin(s)u_0$ cumple la ecuación anterior (basta con utilizar que $\int_0^\pi \sin^2(s) = \pi/2$). Utilizando este resultado, es fácil ver que el caso en el que $T = n\pi$ con $n \in \mathbb{N}$ es similar. Sustituyendo $T = n\pi$ en la ecuación (3.3) se obtiene:

$$0 = (-1)^n u_0 + 0 + \int_0^{n\pi} \sin(s)\alpha(s)ds + 0 \implies \int_0^\pi \sin(s)\alpha(s)ds + \int_\pi^{n\pi} \sin(s)\alpha(s)ds = (-1)^{n+1} u_0$$

Si se escoge $\alpha(s)$ de forma que el producto $\sin(s)\alpha(s)$ sea una función periódica con periodo π entonces la segunda integral se simplifica de la siguiente forma:

$$\int_\pi^{n\pi} \sin(s)\alpha(s)ds = (n-1) \int_0^\pi \sin(s)\alpha(s)ds$$

Entonces, es fácil ver que el control $\alpha(s) = (-1)^{n+1} \sin(s) u_0 \frac{2}{n\pi}$ es válido para el caso $T = n\pi$. Nótese como para $n = 1$ recuperamos el primer resultado obtenido.

De forma similar, estudiamos el caso en el que $T = \pi/2$. Sustituyendo en la ecuación (3.3) se tiene:

$$0 = 0 + u_1 - 0 + \int_0^{\pi/2} \cos(s)\alpha(s)ds \implies \int_0^{\pi/2} \cos(s)\alpha(s)ds = -u_1$$

Tomando $\alpha(s) = -\frac{4}{\pi} u_1 \cos(s)$ se tiene el resultado (basta utilizar que $\int_0^{\pi/2} \cos^2(s)ds = \frac{\pi}{4}$). Igual que en el caso anterior, podemos generalizarlo al caso $T = (2n-1)\pi/2$. Sustituyendo en la ecuación (3.3) se tiene:

$$0 = 0 + (-1)^{n+1} u_1 - 0 + \int_0^{(2n-1)\pi/2} \cos(s)\alpha(s)ds \implies \int_0^{(2n-1)\pi/2} \cos(s)\alpha(s)ds = (-1)^n u_1$$

Nuevamente, si escogemos $\alpha(s)$ de forma que el producto $\sin(s)\alpha(s)$ sea una función periódica con periodo π entonces la integral se simplifica:

$$\int_0^{\pi/2} \cos(s)\alpha(s)ds + (n-1) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(s)\alpha(s)ds = (-1)^n u_1$$

Entonces, basta tomar $\alpha(s) = (-1)^n \frac{1}{\pi/4+(n-1)\pi/2} \cos(s)u_1$ para que se cumpla la ecuación. Nuevamente, si sustituimos $n = 1$ recuperamos el resultado anterior.

Observación 3.1. *Se ha mostrado que, partiendo de cualquier punto inicial, el oscilador armónico se puede controlar a 0 en tiempo $T = \pi$. Esto implica que, partiendo de cualquier punto u_0 es posible controlar el oscilador armónico a cualquier punto w_0 en tiempo $T = 2\pi$. Intuitivamente, dado que se puede llegar a 0 en tiempo $T = \pi$ desde cualquier punto, se puede ir a 0 empezando en cualquier punto (en tiempo $T = \pi$) y luego seguir el “camino” inverso desde 0 a w_0 (en tiempo $T = \pi$ de nuevo), con un tiempo total de $T = 2\pi$. Formalmente, se puede repetir el desarrollo anterior, pero sustituyendo $T = 2\pi$ y $x(T) = w_0$. Se comprueba trivialmente que el control $\alpha(s) = \sin(s)(u_0 - w_0)/\pi$ lleva el oscilador armónico desde u_0 hasta w_0 .*

Resumiendo, se ha determinado que el oscilador armónico es controlable para todos los puntos iniciales y se han encontrado controles admisibles para tiempos $T = n\pi/2, n \in \mathbb{N}$. Estudiando las soluciones de la ecuación (3.3) sería posible encontrar un control $\alpha(s)$ general para cualquier tiempo T , aunque debido a la complejidad de la ecuación no se ha estudiado en este trabajo.

Referencias

- (1) Boyd, S. y Vandenberghe, L., *Convex optimization*; Cambridge University Press: 2004.
- (2) Craven, B. D., *Control and optimization*; Chapman & Hall London ; Melbourne: 1995.
- (3) Evans, L. C. An introduction to mathematical optimal control theory, Disponible en <https://math.berkeley.edu/~evans/control.course.pdf>.
- (4) Iglesias, P. A. e Ingalls, B. P., *Control Theory and Systems Biology*; The MIT Press: 2009.
- (5) Kalman, R.; Arbib, M. y Falb, P., *Topics in Mathematical System Theory [by] R.E. Kalman, P.L. Falb [and] M.A. Arbib*; International series in pure and applied mathematics; McGraw-Hill: 1969.
- (6) Macki, J. y Strauss, A., *Introduction to Optimal Control Theory*, 1995.
- (7) Sontag, E., *Mathematical Control Theory: Deterministic Finite-Dimensional Systems*, 1998.